Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 554, 2026 г.

В. А. Щастный

О МАКСИМАЛЬНЫХ КОММУТАТИВНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ ИНДЕКСА $n-2$ В АЛГЕБРЕ МАТРИЦ ПОРЯДКА n НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ

§1. Введение

Пусть $M_n(\mathbb{F})$ – алгебра матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$. Максимальные по включению коммутативные нильпотентные подалгебры в $M_n(\mathbb{C})$ для различных индексов нильпотентности описаны в классической монографии [3]. В работах [1, 2] исследовались подалгебры индекса $n-1$ при различных ограничениях на основное поле. В работе [5] для подалгебр этого индекса изучено множество $I(S)$ нулевых позиций первой наддиагонали в строго верхнетреугольном представлении алгебры. При $n \geqslant 5$ и $|I(S)| = 1$ доказано, что такая подалгебра содержит элемент индекса нильпотентности $n-1$, без ограничений на характеристику и мощность поля. Это позволило описать соответствующие максимальные подалгебры с точностью до сопряжённости.

Настоящая работа посвящена максимальным по включению коммутативным нильпотентным подалгебрам индекса $n-2$ в $M_n(\mathbb{F})$ над произвольным полем $\mathbb{F}$. Над полем комплексных чисел они классифицированы в [3, глава 3, §2, теорема 2]. При $n \geqslant 6$ имеется 14 классов сопряжённости, а при $n = 5 - 10$ классов. Задаче вычисления длины этих подалгебр посвящена работа [4].

Работа организована следующим образом. В §2 вводятся необходимые обозначения и показано, что для подалгебр индекса $n-2$ множество $I(S)$ непусто и состоит либо из одного блока последовательных индексов длины не более 4, либо из двух таких блоков длины не более 2 каждый.

Основная часть работы (§3) посвящена случаю $I(S) = \{i\}$. В теореме 1 доказано, что при $n \geqslant 7$ и $3 \leqslant i \leqslant n-3$ такая максимальная подалгебра S содержит матрицу A с жордановыми клетками порядков

Ключевые слова: алгебра строго верхнетреугольных матриц, коммутативная нильпотентная матричная подалгебра, индекс нильпотентности, максимальная подалгебра, жорданова форма.

$n-2$ и 2 и имеет размерность $n-1$. В жордановом базисе матрицы A подалгебра S обладает базисом $A, A^2, \ldots, A^{n-3}, Y, Z$ с таблицей умножения (32), зависящей от трёх параметров $\alpha, \kappa, \delta \in \mathbb{F}$. Ограничения на характеристику и мощность поля не требуются.

Для сравнения напомним, что размерность произвольной коммутативной нильпотентной подалгебры в $M_n(\mathbb{F})$ не превосходит $\lfloor n^2/4 \rfloor$. Эта оценка восходит к теореме Шура [8], распространённой на произвольное поле в [7] (см. также [6]).

Выделение одноточечного случая обусловлено методом доказательства. Одноточечность множества $I(S)$ позволяет привести первую наддиагональ матриц из S к нормальному виду, в котором она постоянна по обе стороны от нулевой позиции (лемма 2). После этого в S удаётся построить матрицу ранга $n-2$ с ненулевой $(n-3)$-ей степенью (предложение 2). Переход к жорданову базису такой матрицы даёт явную таблицу умножения. При $|I(S)| \geqslant 2$ первая наддиагональ распадается на три или более ненулевых участка. Функционалы на этих участках, вообще говоря, независимы, и описанный приём на них не переносится. Поэтому указанные конфигурации требуют иной техники. По той же причине отдельного рассмотрения требуют краевые значения $i = 2$ и $i = n-2$. За рамками настоящей работы остаются изучение абстрактных алгебр с таблицей умножения (32) с точностью до изоморфизма и вытекающее отсюда описание подалгебр S с точностью до сопряжённости.

§2. Общие структурные свойства коммутативных алгебр индекса $n-2$

Через $N_n(\mathbb{F})$ обозначим подалгебру строго верхнетреугольных матриц в $M_n(\mathbb{F})$. Все матрицы из $N_n(\mathbb{F})$ нильпотентны, поэтому используется также термин «нильтреугольные матрицы». Через E обозначим единичную матрицу порядка n, через E_k – единичную матрицу порядка k, через $E_{i,j}$ – матричную единицу с 1 на позиции (i,j), а через $\langle S \rangle_{\mathbb{F}}$ – линейную оболочку подмножества S линейного пространства над полем $\mathbb{F}$.

Определение 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – конечномерная ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{F}$.* Индексом нильпотентности алгебры $\mathcal{A}$ *называется наименьшее натуральное число k, такое что $\mathcal{A}^k = \{0\}$. Если такое k существует, алгебра называется* нильпотентной индекса k. *Аналогично определяется индекс нильпотентности нильпотентного элемента.*

Для подалгебр $S_1, S_2 \subseteq M_n(\mathbb{F})$ запись $S_1 \sim S_2$ означает, что они сопряжены в $M_n(\mathbb{F})$, то есть $S_2 = TS_1T^{-1}$ для некоторой матрицы $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Запись $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$ означает изоморфизм алгебр над $\mathbb{F}$. Под максимальностью коммутативной нильпотентной подалгебры всюду понимается максимальность по включению среди всех коммутативных нильпотентных подалгебр $M_n(\mathbb{F})$.

Всякая нильпотентная подалгебра $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ над произвольным полем сопряжением переводится в строго верхнетреугольную подалгебру (см., например, [3, глава 2, теорема 6]), причём максимальность и индекс нильпотентности при этом сохраняются. Поэтому при изучении классов сопряжённости достаточно рассматривать подалгебры $S \subseteq N_n(\mathbb{F})$, что и будет предполагаться далее.

Обозначение 1. Для $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ через f_j обозначим линейный функционал на $N_n(\mathbb{F})$, сопоставляющий матрице её элемент на j-ой позиции первой наддиагонали:

$$f_j(X) = x_{j,j+1}, \qquad X = (x_{p,q}) \in N_n(\mathbb{F}).$$

Для подалгебры $S \subseteq N_n(\mathbb{F})$ ограничение f_j на S будем обозначать той же буквой.

Обозначение 2. Для подалгебры $S \subseteq N_n(\mathbb{F})$ определим

$$I(S) = \{j \in \{1, \ldots, n-1\} \mid \forall X \in S \;\; f_j(X) = 0\}.$$

Таким образом, $I(S)$ состоит в точности из тех номеров позиций первой наддиагонали, которые равны нулю у каждого элемента подалгебры S. Если $j \notin I(S)$, то существует хотя бы одна матрица $X \in S$ такая, что $x_{j,j+1} \neq 0$.

Замечание. Множество $I(S)$ определяется выбранным строго верхнетреугольным представлением и, в общем случае, не является инвариантом класса сопряжённости в $M_n(\mathbb{F})$.

Определение 2. Блоком *множества* $I(S)$ *будем называть максимальное по включению подмножество вида*

$$\{i, i+1, \ldots, i+s-1\} \subseteq I(S).$$

Для дальнейших вычислений будем использовать следующую покоординатную формулу произведения матриц, которая использовалась

в [1]. Для любых $X_1, \dots, X_r \in N_n(\mathbb{F})$ и $1 \leqslant p < q \leqslant n$ имеем

$$(X_1 \cdots X_r)_{p,q} = \sum_{p=m_0<m_1<\cdots<m_r=q} \prod_{l=1}^{r} (X_l)_{m_{l-1},m_l}. \tag{1}$$

Слагаемые этой суммы отвечают цепочкам

$$M = \{m_0 < m_1 < \cdots < m_r\} \subseteq \{p, \dots, q\},$$

содержащим p и q, и сумма пуста при $q - p < r$. При $r = n - 2$ формула (1) для позиций $(1, n-1)$, $(2, n)$ и $(1, n)$ совпадает с утверждением [1, предложения 3.3]. Если $s, s+1 \in M$ для некоторого $s \in I(S)$, то слагаемое, отвечающее цепочке M, равно нулю при любых $X_1, \dots, X_r \in S$.

Далее установим взаимосвязь структуры множества $I(S)$ и индекса нильпотентности алгебры S.

Лемма 1. *Пусть $S \subseteq N_n(\mathbb{F})$ – произвольная подалгебра (не обязательно коммутативная или максимальная).*

(1) *Если $I(S)$ содержит k попарно несоседних индексов, то есть индексов, никакие два из которых не отличаются на 1, то $S^{n-k} = \{0\}$.*
(2) *Если $S^r = \{0\}$, то каждый отрезок $\{p, p+1, \dots, p+r-1\} \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ пересекается с $I(S)$.*

Доказательство. 1. Пусть $s_1, \dots, s_k \in I(S)$ попарно несоседние и

$$X_1, \dots, X_{n-k} \in S.$$

Слагаемое в (1) для произведения $r = n - k$ матриц задаётся цепочкой M из $n-k+1$ элемента, поэтому её дополнение в $\{1, \dots, n\}$ состоит из $k-1$ элемента. Пары $\{s_1, s_1+1\}, \dots, \{s_k, s_k+1\}$ попарно не пересекаются, поэтому хотя бы одна из них целиком содержится в M. Тогда s_t и s_t+1 являются соседними членами цепочки, и слагаемое содержит нулевой множитель $(X_l)_{s_t,s_t+1}$. Следовательно, $X_1 \cdots X_{n-k} = 0$.

2. Предположим, что отрезок $\{p, \dots, p+r-1\}$ не пересекается с $I(S)$. Тогда для каждого j из этого отрезка найдётся матрица $A_j \in S$ такая, что $f_j(A_j) \neq 0$. На позиции $(p, p+r)$ произведения $A_p A_{p+1} \cdots A_{p+r-1}$ формула (1) содержит единственное слагаемое, отвечающее цепочке $p < p+1 < \cdots < p+r$, поэтому

$$(A_p \cdots A_{p+r-1})_{p,p+r} = \prod_{j=p}^{p+r-1} f_j(A_j) \neq 0,$$

что противоречит равенству $S^r = \{0\}$. □

Из первого пункта леммы 1 следует, что индекс нильпотентности подалгебры $S \subseteq N_n(\mathbb{F})$ не превосходит $n-k$, где k – наибольшее число попарно несоседних индексов в $I(S)$. При $k=2$ получаем утверждение [5, предложение 2] о структуре $I(S)$ для подалгебр индекса $n-1$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi : M_n(\mathbb{F}) \longrightarrow M_n(\mathbb{F}), \qquad \varphi(A) = JA^TJ, \qquad J = \sum_{r=1}^{n} E_{r,n+1-r}.$$

Непосредственно проверяется (см. [5, предложение 1]), что $\varphi(AB) = \varphi(B)\varphi(A)$, $\varphi^2 = \mathrm{id}$ и $\varphi(N_n(\mathbb{F})) = N_n(\mathbb{F})$. Отображение φ действует как отражение относительно побочной диагонали: $\varphi(X)_{p,q} = x_{n+1-q,n+1-p}$, поэтому $f_{n-j}(\varphi(X)) = f_j(X)$ для $X \in N_n(\mathbb{F})$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Следовательно,

$$I(\varphi(S)) = \{n-j \mid j \in I(S)\}. \tag{2}$$

Если подалгебра S коммутативна, то ограничение φ на S является изоморфизмом алгебр $S \simeq \varphi(S)$, причём φ сохраняет максимальность и индекс нильпотентности. Таким образом, конфигурации $I(S)$, симметричные относительно отражения $j \mapsto n-j$, достаточно рассматривать только один раз.

Следующее предложение даёт первое ограничение на структуру $I(S)$ для алгебр индекса нильпотентности $n-2$.

Предложение 1. *Пусть $S \subseteq N_n(\mathbb{F})$ – нильпотентная подалгебра индекса нильпотентности $n-2$, $n \geqslant 5$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *множество $I(S)$ пересекается с каждым из двух отрезков $\{1,\dots,n-2\}$ и $\{2,\dots,n-1\}$, в частности, $I(S) \neq \varnothing$;*
(2) *множество $I(S)$ не содержит трёх попарно несоседних индексов*;
(3) *множество $I(S)$ состоит либо из одного блока длины не более 4, либо из двух блоков, каждый из которых имеет длину не более 2.*

Доказательство. 1. Так как $S^{n-2} = \{0\}$, утверждение следует из второго пункта леммы 1 при $r = n-2$.

2. Допустим, что $I(S)$ содержит три попарно несоседних индекса. Тогда из первого пункта леммы 1 при $k=3$ получаем $S^{n-3} = \{0\}$, что противоречит тому, что индекс нильпотентности S равен $n-2$.

3. По доказанному, $I(S)$ является непустым подмножеством линейно упорядоченного множества $\{1,\dots,n-1\}$, не содержащим трёх попарно несоседних индексов. Остаётся описать такие подмножества. Разобьём $I(S)$ на блоки. Если блок один, то его длина не превосходит 4, поскольку в блоке длины не менее 5 содержатся три попарно несоседних индекса вида $i, i+2, i+4$. Если блоков два, каждый из них имеет длину не более 2. Действительно, при наличии блока длины не менее 3 два его крайних индекса вместе с любым индексом второго блока дают три попарно несоседних индекса. Наконец, трёх или более блоков быть не может, поскольку выбор по одному индексу из трёх различных блоков также даёт три попарно несоседних индекса. □

Таким образом, с точностью до отражения $j \mapsto n-j$, которое реализуется антиавтоморфизмом φ в силу (2), множество $I(S)$ состоит либо из одного блока длины 1, 2, 3 или 4, либо из двух блоков с длинами $(1,1)$, $(1,2)$ или $(2,2)$. В настоящей работе разобрана первая из этих конфигураций, то есть одноточечное множество $I(S)$.

Далее всюду будем рассматривать S как максимальную коммутативную нильпотентную подалгебру индекса нильпотентности $n-2$, лежащую в $N_n(\mathbb{F})$.

§3. Одноточечное множество $I(S)$

В этом параграфе рассматривается случай, когда $I(S) = \{i\}$ для некоторого $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Для упрощения обозначений положим $u = f_1$, $v = f_{n-1}$, то есть $u(X) = x_{1,2}$, $v(X) = x_{n-1,n}$ для матрицы $X = (x_{r,s}) \in S$.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $n \geqslant 6$, а $S \subseteq N_n(\mathbb{F})$ – коммутативная нильпотентная подалгебра индекса нильпотентности $n-2$ такая, что $I(S) = \{i\}$. Тогда $2 \leqslant i \leqslant n-2$, а функционалы в каждом из двух семейств $f_1,\dots,f_{i-1}$ и $f_{i+1},\dots,f_{n-1}$ ненулевые и попарно пропорциональны. Более того, существуют диагональная матрица $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ и число $\rho \in \mathbb{F}$ такие, что для $G_\rho = E + \rho E_{i,i+1}$, $T = G_\rho D$ и $\widetilde{S} = TST^{-1}$ первая наддиагональ каждой матрицы $\widetilde{X} = (\widetilde{x}_{r,s}) \in \widetilde{S}$ постоянна по обе стороны от нулевой позиции, то есть*

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}_{j,j+1} = u(\widetilde{X}), \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1, \\ &\widetilde{x}_{i,i+1} = 0, \\ &\widetilde{x}_{j,j+1} = v(\widetilde{X}), \quad i+1 \leqslant j \leqslant n-1, \end{aligned} \tag{3}$$

причём линейные функционалы $u, v : \widetilde{S} \to \mathbb{F}$ *ненулевые. Кроме того,*

$$\widetilde{x}_{i-1,i+1} = \widetilde{x}_{i,i+2} = 0, \quad \textit{для всех} \ \ \widetilde{X} \in \widetilde{S}. \tag{4}$$

Доказательство. По первому утверждению предложения 1, множество $I(S) = \{i\}$ пересекается с отрезками $\{1, \dots, n-2\}$ и $\{2, \dots, n-1\}$. Следовательно, $2 \leqslant i \leqslant n-2$.

По определению множества $I(S)$, имеем $f_i = 0$, а $f_j \neq 0$ при $j \neq i$. Из равенства $(XY - YX)_{j,j+2} = 0$ следует, что

$$f_j(X)f_{j+1}(Y) - f_j(Y)f_{j+1}(X) = 0, \quad X, Y \in S, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-2.$$

Поэтому функционалы $f_1, \dots, f_{i-1}$ попарно пропорциональны, и то же верно для $f_{i+1}, \dots, f_{n-1}$. Следовательно, существуют числа $\lambda_j \in \mathbb{F}^*$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, и $\mu_j \in \mathbb{F}^*$, $i+1 \leqslant j \leqslant n-1$, такие что $f_j = \lambda_j u$ при $1 \leqslant j \leqslant i-1$ и $f_j = \mu_j v$ при $i+1 \leqslant j \leqslant n-1$, причём $\lambda_1 = \mu_{n-1} = 1$.

Положим $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, где $d_1 = 1$, $d_{j+1} = d_j\lambda_j$ при $1 \leqslant j \leqslant i-1$, и, независимо от этих равенств, $d_{i+1} = 1$, $d_{j+1} = d_j\mu_j$ при $i+1 \leqslant j \leqslant n-1$. Ясно, что все d_j ненулевые. Так как $(DXD^{-1})_{j,j+1} = d_j d_{j+1}^{-1} x_{j,j+1}$, элемент матрицы DXD^{-1} на позиции $(j, j+1)$ равен $\lambda_j^{-1} f_j(X) = u(X)$ при $j \leqslant i-1$ и $\mu_j^{-1} f_j(X) = v(X)$ при $j \geqslant i+1$. Поэтому для $S_1 = DSD^{-1}$ первая наддиагональ имеет вид (3). Далее заменим S на S_1 и сохраним прежние обозначения S, u, v.

Положим $g_1(X) = x_{i-1,i+1}$, $g_2(X) = x_{i,i+2}$. Пусть $X_1, \dots, X_{n-2} \in S$. Так как $S^{n-2} = \{0\}$, то $(X_1 \cdots X_{n-2})_{1,n} = 0$. В формуле (1) для этого элемента (см. также [1, предложение 3.3]) каждое слагаемое отвечает пропуску ровно одного промежуточного индекса, и ненулевой вклад могут дать только два слагаемых. При пропуске любого индекса, отличного от i и $i+1$, слагаемое содержит множитель из позиции $(i, i+1)$. Одно из оставшихся слагаемых соответствует пропуску индекса i, а второе – пропуску индекса $i+1$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\prod_{k=1}^{i-2} u(X_k)\right) g_1(X_{i-1}) \left(\prod_{k=i}^{n-2} v(X_k)\right) \\ &+ \left(\prod_{k=1}^{i-1} u(X_k)\right) g_2(X_i) \left(\prod_{k=i+1}^{n-2} v(X_k)\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где пустое произведение полагается равным 1.

Выберем $U_0, V_0 \in S$ так, что $u(U_0) \neq 0$, $v(V_0) \neq 0$, и положим $X_1 = \cdots = X_{i-2} = U_0$, $X_{i-1} = X$, $X_i = Y$, $X_{i+1} = \cdots = X_{n-2} = V_0$, где

$X, Y \in S$ произвольны (при пустом диапазоне соответствующие равенства отсутствуют). После сокращения ненулевых множителей в (5) получаем

$$g_1(X)v(Y) + u(X)g_2(Y) = 0, \quad X, Y \in S. \tag{6}$$

Выбрав $Y_0 \in S$ с $v(Y_0) \neq 0$, из (6) получаем $g_1 = \rho u$ для некоторого $\rho \in \mathbb{F}$. После подстановки этого равенства в (6) и выбора $X_0 \in S$ с $u(X_0) \neq 0$ имеем $g_2 = -\rho v$.

Положим $G_\rho = E + \rho E_{i,i+1}$. Тогда $G_\rho^{-1} = E - \rho E_{i,i+1}$. Для $\widetilde{X} = G_\rho X G_\rho^{-1}$ первая наддиагональ совпадает с первой наддиагональю X, а $\widetilde{x}_{i-1,i+1} = x_{i-1,i+1} - \rho x_{i-1,i} = 0$ и $\widetilde{x}_{i,i+2} = x_{i,i+2} + \rho x_{i+1,i+2} = 0$. Следовательно, подалгебра $\widetilde{S} = G_\rho S G_\rho^{-1}$ удовлетворяет условию (4) и сохраняет нормировку первой наддиагонали (3). С учётом первого диагонального сопряжения исходная подалгебра переводится в $\widetilde{S}$ матрицей $T = G_\rho D$. □

В дальнейшем, применяя сопряжение, явно построенное в лемме 2, будем сохранять обозначение S для полученной подалгебры и считать, что выполнены условия (3) и (4).

Определение 3. *Пусть $S \subseteq N_n(\mathbb{F})$ – коммутативная нильпотентная подалгебра индекса нильпотентности $n-2$ с $I(S) = \{i\}$. Будем говорить, что S имеет* зависимый тип, *если функционалы f_{i-1} и f_{i+1} линейно зависимы на S, и* независимый тип *в противном случае.*

По лемме 2, функционал f_{i-1} пропорционален $u = f_1$, а f_{i+1} пропорционален $v = f_{n-1}$. Поэтому S имеет зависимый тип тогда и только тогда, когда функционалы u и v линейно зависимы. Сопряжение из леммы 2 умножает функционалы первой наддиагонали на ненулевые скаляры и потому не меняет тип. Из равенства $f_{n-j}(\varphi(X)) = f_j(X)$ следует, что $\varphi(S)$ имеет тот же тип, что и S. При этом функционалы u и v меняются ролями.

3.1. Общий внутренний случай при $n \geqslant 7$. Ниже будем предполагать, что $n \geqslant 7$. По лемме 2, имеем $2 \leqslant i \leqslant n-2$. Далее ограничимся случаем $3 \leqslant i \leqslant n-3$, так что по обе стороны от нулевой позиции расположены не менее двух ненулевых элементов первой наддиагонали. Краевые значения $i = 2$ и $i = n-2$ требуют отдельного рассмотрения и в настоящей работе не затрагиваются. Основной результат этого пункта состоит в том, что S содержит матрицу, жорданова форма которой состоит из двух клеток порядков $n-2$ и 2 (следствие 1). Для $X \in S$

введём линейные функционалы, задающие элементы третьей наддиагонали вблизи нулевой позиции:

$$\chi_1(X) = x_{i-2,i+1}, \quad \chi_2(X) = x_{i-1,i+2}, \quad \chi_3(X) = x_{i,i+3}. \tag{7}$$

Лемма 3. *При* $3 \leqslant i \leqslant n-3$ *имеем*

$$S^{n-3} = \langle E_{1,n} \rangle_{\mathbb{F}}. \tag{8}$$

Кроме того, для любых $X, Y \in S$ *выполнены равенства*

$$u(X)\chi_2(Y) + \chi_1(X)v(Y) - u(Y)\chi_2(X) - \chi_1(Y)v(X) = 0, \tag{9}$$

$$u(X)\chi_3(Y) + \chi_2(X)v(Y) - u(Y)\chi_3(X) - \chi_2(Y)v(X) = 0. \tag{10}$$

Если $X_1, \ldots, X_{n-3} \in S$, *то*

$$\begin{aligned}(X_1 \cdots X_{n-3})_{1,n} = &\left(\prod_{k=1}^{i-3} u(X_k)\right) \chi_1(X_{i-2}) \left(\prod_{k=i-1}^{n-3} v(X_k)\right) \\ &+ \left(\prod_{k=1}^{i-2} u(X_k)\right) \chi_2(X_{i-1}) \left(\prod_{k=i}^{n-3} v(X_k)\right) \\ &+ \left(\prod_{k=1}^{i-1} u(X_k)\right) \chi_3(X_i) \left(\prod_{k=i+1}^{n-3} v(X_k)\right),\end{aligned} \tag{11}$$

где пустое произведение полагается равным 1.

Доказательство. Произведение $n-3$ строго верхнетреугольных матриц может иметь ненулевые элементы только на позициях (p, q) с $q - p \geqslant n-3$, т.е. на позициях $(1, n-2)$, $(2, n-1)$, $(3, n)$, $(1, n-1)$, $(2, n)$, $(1, n)$. По формуле (1), на первых трёх позициях единственное слагаемое содержит множитель из позиции $(i, i+1)$ и потому равно нулю.

Для позиций $(1, n-1)$ и $(2, n)$ в каждом слагаемом пропускается ровно один промежуточный индекс. Если пропущен индекс, отличный от i и $i+1$, остаётся множитель из позиции $(i, i+1)$. При пропуске i возникает множитель из позиции $(i-1, i+1)$, а при пропуске $i+1$ – множитель из позиции $(i, i+2)$. Все три возможности дают нуль в силу (3) и (4). Следовательно, все перечисленные позиции, кроме $(1, n)$, нулевые. Так как S имеет индекс нильпотентности $n-2$, то $S^{n-3} \neq \{0\}$, и получаем (8).

Рассмотрим теперь позицию $(1,n)$. В каждом слагаемом пропускаются ровно два промежуточных индекса. По тем же причинам ненулевой вклад возможен только при пропусках $\{i{-}1,i\}$, $\{i,i{+}1\}$, $\{i{+}1,i{+}2\}$. В этих случаях соответственно возникают функционалы χ_1, χ_2, χ_3 из (7). Это и даёт формулу (11).

Наконец, из равенства $(XY-YX)_{i-2,i+2}=0$ с учётом (4) получаем равенство (9), а из равенства $(XY-YX)_{i-1,i+3}=0$ следует (10). $\square$

Предложение 2. *Пусть $n\geqslant 7$ и $3\leqslant i\leqslant n-3$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если S имеет независимый тип, то необходимо $i=3$ или $i=n-3$. При $4\leqslant i\leqslant n-4$ независимый тип невозможен. При этом существуют коэффициенты $\lambda,\mu,\nu,\eta\in\mathbb{F}$ такие, что*

$$\chi_1=-\mu u+\nu v,\quad \chi_2=\lambda u+\mu v,\quad \chi_3=\eta u-\lambda v. \tag{12}$$

При $i=3$ имеем $\eta=0$, $\nu\neq 0$, а при $i=n-3$ имеем $\nu=0$, $\eta\neq 0$ и, соответственно,

$$(X_1\cdots X_{n-3})_{1,n}=\nu\prod_{k=1}^{n-3}v(X_k)\ \text{ или }\ (X_1\cdots X_{n-3})_{1,n}=\eta\prod_{k=1}^{n-3}u(X_k). \tag{13}$$

(2) *Если S имеет зависимый тип, то после сопряжения диагональной матрицей*

$$D_\gamma=\operatorname{diag}\bigl(\underbrace{1,\dots,1}_{i+1},\gamma,\gamma^2,\dots,\gamma^{n-i-1}\bigr), \tag{14}$$

где $v=\gamma u$, можно считать что $u=v=t$ для некоторого ненулевого функционала $t:S\to\mathbb{F}$. Тогда существуют коэффициенты $\lambda,\mu,\varkappa\in\mathbb{F}$ такие, что

$$\chi_1=(\varkappa-\lambda)t,\qquad \chi_2=\varkappa t,\qquad \chi_3=(\varkappa+\mu)t, \tag{15}$$

и для $\theta=3\varkappa+\mu-\lambda$ имеем $\theta\neq 0$ и

$$(X_1\cdots X_{n-3})_{1,n}=\theta\prod_{k=1}^{n-3}t(X_k). \tag{16}$$

(3) *В S существует такая матрица A, что*

$$A^{n-3}\neq 0,\qquad \operatorname{rank}A=n-2. \tag{17}$$

Доказательство. 1. Пусть S имеет независимый тип, то есть функционалы u, v линейно независимы. Если $Z \in \ker u \cap \ker v$, то из (9) следует $\chi_1(Z) = \chi_2(Z) = 0$, а затем из (10) получаем $\chi_3(Z) = 0$. Следовательно, $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \langle u, v\rangle_{\mathbb{F}}$. Пусть $\chi_2 = \lambda u + \mu v$. Подстановка в равенства (9)–(10) даёт равенства (12) для некоторых $\nu, \eta \in \mathbb{F}$. После подстановки (12) в (11) слагаемые с коэффициентами λ и μ сокращаются, и остаётся

$$\begin{aligned}(X_1 \cdots X_{n-3})_{1,n} = \nu &\left(\prod_{k=1}^{i-3} u(X_k)\right)\left(\prod_{k=i-2}^{n-3} v(X_k)\right) \\ &+ \eta\left(\prod_{k=1}^{i} u(X_k)\right)\left(\prod_{k=i+1}^{n-3} v(X_k)\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Выберем $U_0, V_0 \in S$ так, что $u(U_0) = 1$, $v(U_0) = 0$, $u(V_0) = 0$, $v(V_0) = 1$. Если $i > 3$, подставим в (18) $i - 3$ экземпляра U_0 на первые места и остальные аргументы возьмём равными V_0. Получаем значение ν. После перестановки одного из U_0 с одним из V_0 оба слагаемых становятся нулевыми. Так как произведение в коммутативной алгебре симметрично по аргументам, имеем $\nu = 0$ при $i > 3$.

Аналогично, подставляя сначала i экземпляров U_0 на первые места и полагая остальные аргументы равными V_0, а затем переставляя один экземпляр U_0 с одним экземпляром V_0, получаем $\eta = 0$ при $i < n - 3$.

Допустим, что $4 \leqslant i \leqslant n-4$. Тогда $\nu = \eta = 0$, и из (18) и (8) следует равенство $S^{n-3} = \{0\}$, что невозможно. Поэтому $i = 3$ или $i = n - 3$. При $i = 3$ имеем $\eta = 0$, поскольку $3 < n - 3$, и так как $S^{n-3} \neq \{0\}$, то $\nu \neq 0$, откуда получается первая формула в (13). Случай $i = n - 3$ аналогичен и даёт вторую формулу.

2. Пусть теперь S имеет зависимый тип, то есть функционалы u, v линейно зависимы. Так как оба функционала ненулевые, то $v = \gamma u$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{F}^*$. Сопряжение матрицей D_γ из (14) сохраняет равенства (4) и заменяет функционалы первой наддиагонали на один функционал t. Далее сохраним обозначение S и будем считать, что $u = v = t$. Из (9) и (10) следует, что существуют $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ такие, что $\chi_2 - \chi_1 = \lambda t$, $\chi_3 - \chi_2 = \mu t$. Подстановка равенств $\chi_1 = \chi_2 - \lambda t$, $\chi_3 = \chi_2 + \mu t$ в (11) даёт

$$(X_1 \cdots X_{n-3})_{1,n} = \sum_{r \in \{i-2,i-1,i\}} \chi_2(X_r) \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n-3 \\ k \neq r}} t(X_k) + (\mu - \lambda) \prod_{k=1}^{n-3} t(X_k). \quad (19)$$

Покажем, что $\chi_2 \in \langle t \rangle_{\mathbb{F}}$. Предположим противное. Тогда существуют $Z, X_0 \in S$ такие, что $t(Z) = 0$, $\chi_2(Z) \neq 0$, $t(X_0) = 1$. Поскольку $n - 3 \geqslant 4$, существует индекс $j_0 \in \{1, \ldots, n-3\} \setminus \{i-2, i-1, i\}$. Подставив в (19) матрицу Z на одну из позиций $i-2, i-1, i$, а X_0 – на все остальные позиции, получаем ненулевое значение $\chi_2(Z)$. Если же поставить ту же Z на позицию j_0, а остальные аргументы оставить равными X_0, значение станет нулевым. Это противоречит симметричности произведения. Следовательно, $\chi_2 = \varkappa t$ для некоторого $\varkappa \in \mathbb{F}$, и мы получаем (15). Тогда (19) принимает вид (16), где $\theta = 3\varkappa + \mu - \lambda$. Из $S^{n-3} \neq \{0\}$ и (8) следует, что $\theta \neq 0$.

3. В случае зависимого типа выберем $A \in S$ с $t(A) \neq 0$. Тогда из (16) получаем $A^{n-3} \neq 0$. В случае независимого типа выберем $A \in S$ так, чтобы $u(A) \neq 0$, $v(A) \neq 0$. Такой элемент существует, поскольку векторное пространство над любым полем не является объединением двух собственных подпространств $\ker u$ и $\ker v$. Формулы (13) снова дают $A^{n-3} \neq 0$.

Во всех случаях, первая наддиагональ A имеет ненулевые элементы на всех позициях, кроме $(i, i+1)$. Подматрица, образованная строками $\{1, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}$ и столбцами $\{2, \ldots, n\} \setminus \{i+1\}$, является верхнетреугольной и имеет ненулевую диагональ. Поэтому $\operatorname{rank} A \geqslant n-2$. Поскольку $A^{n-2} = 0$, нильпотентная матрица A не может иметь ранг $n-1$. Следовательно, $\operatorname{rank} A = n-2$. □

Следствие 1. *Пусть $n \geqslant 7$ и $3 \leqslant i \leqslant n-3$. Тогда в S существует матрица A, жорданова форма которой состоит из двух клеток размеров $n-2$ и 2. В частности, если $m = n-2$ и $J_r = \sum_{j=1}^{r-1} E_{j,j+1}$, то существует матрица $T_A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ такая, что*

$$T_A A T_A^{-1} = J_m \oplus J_2. \quad (20)$$

Доказательство. Для матрицы A из предложения 2 имеем $A^{n-3} \neq 0$, $A^{n-2} = 0$ и $\operatorname{rank} A = n-2$. Жорданова форма нильпотентной матрицы существует над произвольным полем, наибольшая клетка A имеет порядок $n-2$, а число клеток равно $\dim_{\mathbb{F}} \ker A = 2$. Матрицу T_A в (20) выбираем как матрицу перехода к жорданову базису матрицы A. □

3.2. Переход к жорданову базису при $n \geqslant 7$. Через $S_0 \subseteq N_n(\mathbb{F})$ обозначим исходное максимальное коммутативное нильпотентное представление с $I(S_0) = \{i\}$, где $3 \leqslant i \leqslant n-3$, удовлетворяющее нормировке (3)–(4). Пусть $m = n-2$, а $A_0 \in S_0$ – матрица, выбранная в предложении 2 и удовлетворяющая (17). По следствию 1, выберем $T_A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ и положим $S_A = T_A S_0 T_A^{-1}$, $A = T_A A_0 T_A^{-1} = P \oplus Q$, где $P = J_m$, $Q = J_2$. Подалгебра S_A остаётся максимальной коммутативной нильпотентной подалгеброй того же индекса, но условия на $I(S_0)$, нормировка наддиагоналей и функционалы u, v, χ_j относятся только к S_0, а вводимые ниже блочные функционалы – к S_A. Для прямоугольных матриц через $E_{p,q}^{(r,s)}$ будем обозначать $r \times s$ матрицу с единственной единицей на позиции (p,q). Положим

$$\begin{aligned} B_0 &= E_{1,1}^{(m,2)} + E_{2,2}^{(m,2)}, & B_1 &= E_{1,2}^{(m,2)}, \\ C_0 &= E_{1,m-1}^{(2,m)} + E_{2,m}^{(2,m)}, & C_1 &= E_{1,m}^{(2,m)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Введём также матрицы порядка n, записанные в блочном виде с диагональными блоками размеров m и 2:

$$\begin{gathered} H = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \\ \widetilde{B}_s = \begin{pmatrix} 0 & B_s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{C}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_s & 0 \end{pmatrix}, \qquad s \in \{0,1\}. \end{gathered} \tag{22}$$

В частности, $A = H + K$ и $A^r = H^r$ при $r \geqslant 2$.

Лемма 4. *Каждая матрица $X \in S_A$ единственным образом представляется в виде*

$$\begin{aligned} X = \sum_{r=1}^{m-1} a_r(X) H^r + d(X) K + b(X) \widetilde{B}_0 + b_1(X) \widetilde{B}_1 \\ + c(X) \widetilde{C}_0 + c_1(X) \widetilde{C}_1, \end{aligned} \tag{23}$$

где $a_1, \ldots, a_{m-1}, b, b_1, c, c_1, d : S_A \to \mathbb{F}$ – некоторые линейные функционалы. Если $p = a_1 - d$, то коммутативность S_A эквивалентна

следующим равенствам для любых $X, Y \in S_A$*:*

$$p(X)b(Y) - p(Y)b(X) = 0, \tag{24}$$
$$p(X)c(Y) - p(Y)c(X) = 0, \tag{25}$$
$$b(X)c(Y) - b(Y)c(X) = 0, \tag{26}$$
$$b(X)c_1(Y) + b_1(X)c(Y) - b(Y)c_1(X) - b_1(Y)c(X) = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Каждая матрица $X \in S_A$ коммутирует с матрицей $A = P \oplus Q$. Запишем X в блочном виде с блоками $X_{p,q}$, где размеры диагональных блоков равны m и 2. Из равенства $AX = XA$ получаем $PX_{1,1} = X_{1,1}P$, $PX_{1,2} = X_{1,2}Q$, $QX_{2,1} = X_{2,1}P$, $QX_{2,2} = X_{2,2}Q$. Поэтому $X_{1,1} = a_0E_m + \sum_{r=1}^{m-1} a_rP^r$, $X_{2,2} = d_0E_2 + dQ$, а пространства решений двух уравнений для внедиагональных блоков имеют соответственно базисы B_0, B_1 и C_0, C_1 из (21), то есть $X_{1,2} = bB_0 + b_1B_1$, $X_{2,1} = cC_0 + c_1C_1$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – стандартный базис $\mathbb{F}^n$. Подпространство $\ker A = \langle e_1, e_{m+1}\rangle_{\mathbb{F}}$ инвариантно относительно X. Так как первые столбцы матриц C_0, C_1 и B_1 нулевые, а первый столбец матрицы B_0 имеет единственный ненулевой элемент в первой строке, получаем $Xe_1 = a_0e_1$, $Xe_{m+1} = be_1 + d_0e_{m+1}$. Следовательно, a_0 и d_0 являются собственными значениями нильпотентной матрицы X, откуда $a_0 = d_0 = 0$. Это устанавливает разложение (23) и его единственность.

Рассмотрим подробнее условие $XY = YX$. Из определений непосредственно следуют равенства

$$\begin{gathered} PB_0 = B_0Q = B_1, \quad PB_1 = B_1Q = 0, \\ QC_0 = C_0P = C_1, \quad QC_1 = C_1P = 0, \\ B_0C_0 = P^{m-2}, \quad B_0C_1 = B_1C_0 = P^{m-1}, \quad B_1C_1 = 0, \\ C_rB_s = 0, \qquad r, s \in \{0, 1\}. \end{gathered} \tag{28}$$

Верхний правый блок коммутатора $XY - YX$ равен нулю тогда и только тогда, когда выполнено (24). Нижний левый блок даёт (25). Коэффициенты при P^{m-2} и P^{m-1} в верхнем левом блоке дают соответственно (26) и (27). Нижний правый блок обращается в нуль автоматически в силу последних равенств в (28). □

Разберём теперь два случая, возникающих из условий коммутативности (24)–(27).

Лемма 5. *Пусть $n \geqslant 7$, $3 \leqslant i \leqslant n-3$, а $S_0 \subseteq N_n(\mathbb{F})$ – максимальная коммутативная нильпотентная подалгебра индекса $n-2$ с $I(S_0) = \{i\}$, удовлетворяющая* (3)–(4). *Выберем матрицу $A_0 \in S_0$ по предложению* 2 *и положим $S_A = T_A S_0 T_A^{-1}$, где $T_A A_0 T_A^{-1} = J_m \oplus J_2$, $m = n-2$. Тогда функционалы $b, c : S_A \to \mathbb{F}$, определённые в* (23), *не обращаются одновременно в нуль на всей подалгебре S_A.*

Доказательство. Предположим противное. Из (23) следует, что $S_A \subseteq \mathcal{M}_0 = \langle H, H^2, \ldots, H^{m-1}, K, \widetilde{B}_1, \widetilde{C}_1 \rangle_{\mathbb{F}}$. Равенства (28) показывают, что попарные произведения $K, \widetilde{B}_1, \widetilde{C}_1$ обращаются в нуль, $K, \widetilde{B}_1, \widetilde{C}_1$ имеют нулевые квадраты и аннулируют H с обеих сторон. Следовательно, $\mathcal{M}_0$ – коммутативная нильпотентная подалгебра $M_n(\mathbb{F})$, и, по максимальности, $S_A = \mathcal{M}_0$.

Вернёмся к исходному нильтреугольному представлению и положим $\widehat{H} = T_A^{-1} H T_A$, $\widehat{R} = T_A^{-1} \langle K, \widetilde{B}_1, \widetilde{C}_1 \rangle_{\mathbb{F}} T_A$. Тогда $\widehat{H}\widehat{R} = \widehat{R}\widehat{H} = \{0\}$, $\widehat{R}^2 = \{0\}$, а для исходной нильтреугольной подалгебры получаем $S_0 = \langle \widehat{H}, \widehat{H}^2, \ldots, \widehat{H}^{m-1} \rangle_{\mathbb{F}} + \widehat{R}$. Кроме того, $\operatorname{rank} \widehat{H} = m-1 = n-3$ и $\widehat{H}^{n-3} \neq 0$.

Получим противоречие, используя описание произведений длины $n-3$ из предложения 2. Предположим сначала, что функционалы u, v линейно зависимы. Как и в предложении 2, одновременно сопрягая S_0, $\widehat{H}$ и $\widehat{R}$ диагональной матрицей из (14), можно считать, что $u = v = t$. Из (8), (16) и $\widehat{H}^{n-3} \neq 0$ следует, что $t(\widehat{H}) \neq 0$. Поэтому на первой наддиагонали $\widehat{H}$ все позиции, кроме позиции с индексом i, являются ненулевыми. Соответствующая подматрица порядка $n-2$ имеет ненулевую диагональ, так что $\operatorname{rank} \widehat{H} \geqslant n-2$, что противоречит условию $\operatorname{rank} \widehat{H} = n-3$.

Пусть теперь u, v линейно независимы. По предложению 2, возможны только случаи $i = 3$ и $i = n-3$. Пусть сперва $i = 3$. Из первой формулы в (13) и $\widehat{H}^{n-3} \neq 0$ получаем $v(\widehat{H}) \neq 0$. Если также $u(\widehat{H}) \neq 0$, то на первой наддиагонали матрицы $\widehat{H}$ есть $n-2$ ненулевых элемента, и рассмотренная выше подматрица даёт $\operatorname{rank} \widehat{H} \geqslant n-2$. Полученное противоречие показывает, что $u(\widehat{H}) = 0$. Функционал u обращается в нуль на всех степенях $\widehat{H}, \widehat{H}^2, \ldots$. При этом u не является тождественно нулевым на S_0, поэтому существует матрица $Z \in \widehat{R}$ такая, что $u(Z) \neq 0$. Но $\widehat{R}^2 = \{0\}$, тогда как из нормировки первой наддиагонали при $i = 3$ имеем $(Z^2)_{1,3} = z_{1,2} z_{2,3} = u(Z)^2 \neq 0$, противоречие. Случай

$i = n-3$ рассматривается симметрично с заменой u на v и позиции $(1,3)$ на $(n-2,n)$. $\square$

Предложение 3. *В обозначениях и условиях леммы* 5 *положим* $A = T_A A_0 T_A^{-1} = J_m \oplus J_2$. *Тогда существуют матрицы* $Y, Z \in S_A$ *и элементы* $\alpha, \kappa, \delta \in \mathbb{F}$ *такие, что* $S_A = \langle A, A^2, \dots, A^{m-1}, Y, Z\rangle_{\mathbb{F}}$ *и* $Z = AY$, *причём указанные матрицы образуют базис* S_A *и имеют место равенства*

$$\begin{gathered} A^m = 0, \quad A^2 Y = 0, \quad AZ = 0, \\ Y^2 = \alpha A^{m-2} + \kappa A^{m-1} + \delta Z, \\ YZ = \alpha A^{m-1}, \quad Z^2 = 0. \end{gathered} \tag{29}$$

В частности, $\dim_{\mathbb{F}} S_0 = \dim_{\mathbb{F}} S_A = n-1$. *Для исходного представления матрицы* $A_0, A_0^2, \dots, A_0^{m-1}, Y_0, Z_0$, *где*

$$Y_0 = T_A^{-1} Y T_A, \quad Z_0 = T_A^{-1} Z T_A,$$

также образуют базис S_0 *и удовлетворяют тем же соотношениям.*

Доказательство. По лемме 5, функционалы b и c не обращаются одновременно в нуль. Из (24)–(26) следует, что функционалы p, b, c попарно пропорциональны. Поэтому существуют ненулевой линейный функционал $\omega : S_A \to \mathbb{F}$ и элементы $\rho, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$, $(\beta, \gamma) \neq (0,0)$, такие что $p = \rho\omega$, $b = \beta\omega$, $c = \gamma\omega$. Подставляя эти равенства в (27), получаем $\omega(X)\big(\beta c_1(Y) - \gamma b_1(Y)\big) = \omega(Y)\big(\beta c_1(X) - \gamma b_1(X)\big)$, откуда следует, что существует $\sigma \in \mathbb{F}$ такое, что $\beta c_1 - \gamma b_1 = \sigma\omega$.

Выберем $Y \in S_A$ так, что $\omega(Y) = 1$. Покажем, что

$$S_A = \langle A, A^2, \dots, A^{m-1}, Y, AY\rangle_{\mathbb{F}}. \tag{30}$$

Заметим сначала, что из (23), (28) и равенств $A = H + K$, $A^r = H^r$ при $r \geqslant 2$ для любого $X \in S_A$ следует равенство

$$AX = \sum_{r=1}^{m-2} a_r(X) A^{r+1} + b(X)\widetilde{B}_1 + c(X)\widetilde{C}_1. \tag{31}$$

В частности, $AY = \sum_{r=1}^{m-2} a_r(Y) A^{r+1} + \beta\widetilde{B}_1 + \gamma\widetilde{C}_1$.

Пусть $W \in \ker\omega$. Тогда $p(W) = b(W) = c(W) = 0$. Поскольку $p = a_1 - d$, то из (23) получаем

$$W - d(W)A - \sum_{r=2}^{m-1} a_r(W) A^r = b_1(W)\widetilde{B}_1 + c_1(W)\widetilde{C}_1.$$

Из $\omega(W) = 0$ имеем $\beta c_1(W) - \gamma b_1(W) = 0$. Так как $(\beta, \gamma) \neq (0,0)$, существует $\lambda \in \mathbb{F}$ такое, что $b_1(W) = \lambda\beta$, $c_1(W) = \lambda\gamma$. Следовательно, матрица $W - \lambda AY$ является линейной комбинацией степеней A. Тем самым $\ker\omega \subseteq \langle A, A^2, \ldots, A^{m-1}, AY\rangle_{\mathbb{F}}$, а равенство (30) следует из $\omega(Y) = 1$.

Заметим, что $\omega(A^r) = 0$ при всех $r \geqslant 1$. Действительно, $b(A^r) = c(A^r) = 0$, а $(\beta, \gamma) \neq (0,0)$. Теперь заменим Y на $Y - \sum_{r=1}^{m-3} a_r(Y)A^r$. Эта замена выполняется внутри S_A, не меняет равенства $\omega(Y) = 1$ и коэффициентов $b(Y) = \beta$, $c(Y) = \gamma$, а после неё $a_r(Y) = 0$ при $r \leqslant m-3$. Сохраним за новым элементом обозначение Y и положим $Z = AY$. Из (31) получаем

$$Z = a_{m-2}(Y)A^{m-1} + \beta\widetilde{B}_1 + \gamma\widetilde{C}_1, \qquad A^2Y = AZ = 0.$$

Равенство (30) принимает вид $S_A = \langle A, A^2, \ldots, A^{m-1}, Y, Z\rangle_{\mathbb{F}}$. Матрицы $A, A^2, \ldots, A^{m-1}$ линейно независимы, поскольку $A^{m-1} \neq 0$, $A^m = 0$. Элемент Y не принадлежит их линейной оболочке, так как $\omega(Y) = 1$, тогда как $\omega(A^r) = 0$.

Допустим, что Z принадлежит линейной оболочке m матриц A, A^2, …, A^{m-1}, Y, и приведём это утверждение к противоречию. Коэффициент при Y в таком разложении обязательно равен нулю. Действительно, в разложении (23) матрицы Y коэффициенты при $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{C}_0$ равны β, γ и не обращаются в нуль одновременно, тогда как у Z и у степеней A эти коэффициенты нулевые. В этом случае матрица Z выражается в виде линейной комбинации степеней матрицы A, что невозможно, поскольку у Z коэффициенты при $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{C}_1$ равны β, γ. Полученное противоречие показывает, что указанные элементы образуют базис алгебры S_A.

После указанной замены диагональный блок порядка m матрицы Y имеет вид $a_{m-2}(Y)P^{m-2} + a_{m-1}(Y)P^{m-1}$. Непосредственное умножение с использованием (28) показывает, что

$$Y^2 = \beta\gamma A^{m-2} + \kappa A^{m-1} + d(Y)Z$$

для некоторого $\kappa \in \mathbb{F}$. Положим $\alpha = \beta\gamma$, $\delta = d(Y)$. Тогда получаем второе равенство в (29). Поскольку $Z = AY$ и $A^2Y = 0$, то $AZ = 0$. Кроме того, используя коммутативность, получаем, что $YZ = AY^2 = \alpha A^{m-1}$, а $Z^2 = A^2Y^2 = 0$. Все равенства (29) доказаны. Наконец, $\dim_{\mathbb{F}} S_A = (m-1)+2 = m+1 = n-1$. Утверждение для S_0 получается обратным сопряжением матрицей T_A^{-1}. □

§4. Основной результат

Соберём полученные результаты в одно утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле,* $n \geqslant 7$, $m = n-2$, *а* $S \subseteq N_n(\mathbb{F})$ *– максимальная коммутативная нильпотентная подалгебра индекса нильпотентности* $n-2$ *с* $I(S) = \{i\}$, *где* $3 \leqslant i \leqslant n-3$. *Тогда* $\dim_{\mathbb{F}} S = n-1$ *и существуют матрица* $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, *матрицы* $A, Y, Z \in S' = TST^{-1}$ *и элементы* $\alpha, \kappa, \delta \in \mathbb{F}$ *такие, что* $A = J_m \oplus J_2$, *матрицы* $A, A^2, \ldots, A^{m-1}, Y, Z$ *образуют базис* S' *и выполнены соотношения*

$$\begin{gathered} A^m = 0, \qquad A^2Y = 0, \qquad AZ = 0, \qquad Z = AY, \\ Y^2 = \alpha A^{m-2} + \kappa A^{m-1} + \delta Z, \qquad YZ = \alpha A^{m-1}, \qquad Z^2 = 0. \end{gathered} \tag{32}$$

В частности, S *изоморфна коммутативной алгебре с базисом* x, x^2, $\ldots$, x^{m-1}, y, z, *где* $z = xy$, *и умножением, задаваемым равенствами* (32) *при замене* A, Y, Z *на* x, y, z.

Доказательство. По лемме 2, существует матрица $T_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ такая, что подалгебра $T_1ST_1^{-1}$ удовлетворяет условиям (3) и (4), причём $I(T_1ST_1^{-1}) = \{i\}$. По предложению 2 и следствию 1, в этой подалгебре есть матрица A_0, для которой $T_AA_0T_A^{-1} = J_m \oplus J_2$ при подходящей $T_A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Положим $T = T_AT_1$ и $A = T_AA_0T_A^{-1}$. По предложению 3, подалгебра $S' = TST^{-1}$ имеет размерность $n-1$ и базис $A, A^2, \ldots, A^{m-1}, Y, Z$ с соотношениями (29), которые вместе с условием $Z = AY$ совпадают с (32).

Последнее утверждение следует из того, что соотношения (32) полностью определяют умножение базисных элементов, так как остальные произведения вычисляются по ассоциативности и коммутативности. □

Параметры α, κ, δ определяются подалгеброй S, вообще говоря, неоднозначно, и вопрос об изоморфизме алгебр с таблицей умножения (32) при различных значениях параметров требует отдельного рассмотрения.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю О. В. Марковой за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Список литературы

1. О. В. Маркова, *Коммутативные нильпотентные подалгебры индекса нильпотентности $n-1$ в алгебре матриц порядка n.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 219–242.
2. И. А. Павлов, *О коммутативных нильпотентных алгебрах матриц.* — Докл. Акад. наук БССР **11**, No. 10 (1967), 870–872.
3. Д. А. Супруненко, Р. И. Тышкевич, *Перестановочные матрицы.* 2-е изд., М., УРСС, 2003.
4. М. А. Хрыстик, *Длина коммутативных нильпотентных матричных алгебр с большим индексом нильпотентности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **542** (2025), 172–189.
5. В. А. Щастный, *Максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры индекса $n-1$ в алгебре матриц порядка n над произвольным полем.* — Вестн. Моск. ун-та, Серия 1. Математика. Механика (в печати).
6. W. H. Gustafson, *On maximal commutative algebras of linear transformations.* — J. Algebra **42** (1976), 557–563.
7. N. Jacobson, *Schur's theorems on commutative matrices.* — Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 431–436.
8. I. Schur, *Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen.* — J. Reine Angew. Math. **130** (1905), 66–76.

Shchastnyi V. A. Maximal commutative nilpotent subalgebras of nilpotency index $n-2$ in the algebra of matrices of order n over an arbitrary field.

Maximal commutative nilpotent subalgebras of nilpotency index $n-2$ in the matrix algebra $M_n(\mathbb{F})$ over an arbitrary field $\mathbb{F}$ are studied. It is proved that the set $I(S)$ of positions of the first superdiagonal that vanish identically on a strictly upper triangular representation S of such a subalgebra is nonempty and consists of one block of length at most 4 or of two blocks of length at most 2. In the case where $I(S) = \{i\}$, $3 \leqslant i \leqslant n-3$, with $n \geqslant 7$, it is proved that S contains an element whose Jordan form consists of two blocks of orders $n-2$ and 2. It follows that S has dimension $n-1$ and, in a Jordan basis of this element A, has a basis $A, A^2, \ldots, A^{n-3}, Y, Z$, whose multiplication table is provided and depends on three parameters from the field $\mathbb{F}$.

Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Москва 119991, Россия
E-mail: shchastnyiva@my.msu.ru

Поступило 23 октября 2026 г.