Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 554, 2026 г.

А. М. Максаев, В. В. Промыслов, П. С. Тишутин

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ МАТРИЦЫ С n ИЛИ $n-1$ РАЗЛИЧНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

§1. Введение и основные результаты

Теория отображений, сохраняющих различные множества, свойства и инварианты матриц, имеет долгую историю. Она восходит к работе Фробениуса [7] 1897 года (русский перевод [2]), в которой описаны биективные линейные отображения, сохраняющие определитель комплексных матриц. Еще один классический результат – теорема Маркуса и Мойлса [9, теорема 3]: линейные отображения пространства $M_n(\mathbb{C})$, сохраняющие собственные значения всех матриц с учетом кратности, имеют вид $X \mapsto PXP^{-1}$ или $X \mapsto PX^TP^{-1}$, где матрица P невырождена, а X^T – транспонированная к X матрица. С тех пор теория была существенно развита, см., например, обзоры [11, 8] и цитированную там литературу. В настоящей работе рассматриваются линейные отображения, сохраняющие множества матриц с заданным числом различных собственных значений. Говоря, что отображение T *сохраняет* множество $\mathcal{S}$, мы имеем в виду, что $T(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$.

Всюду в тексте $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле, $p = \operatorname{char}\mathbb{K} \geqslant 0$ и $n \geqslant 2$. Мультипликативная группа этого поля (т.е. множество всех ненулевых элементов $\mathbb{K}$) обозначается через $\mathbb{K}^*$. Через $M_n(\mathbb{K})$ обозначается пространство $n \times n$ матриц над $\mathbb{K}$, через $GL_n(\mathbb{K})$ – подмножество невырожденных матриц, через E – единичная матрица, через E_{ij} – матричные единицы, а через $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : \operatorname{tr} X = 0\}$ – подпространство матриц со следом 0. Диагональная матрица с элементами $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ на диагонали обозначается через $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Собственные значения матрицы $X \in M_n(\mathbb{K})$ с учетом (алгебраической) кратности обозначаются $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Для $k = 1, \ldots, n$ через $\mathcal{E}_k$

Ключевые слова: сохранение множества матриц при действии линейного отображения, простой спектр, кратные собственные значения, дискриминант характеристического многочлена.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (HSE-BR-2025-84).

обозначается множество матриц из $M_n(\mathbb{K})$, имеющих ровно k различных собственных значений. Матрицы из $\mathcal{E}_n$ называются *матрицами с простым спектром*, а матрицы из $\mathcal{E}_{n-1}$ – матрицами, у которых совпадают ровно два собственных значения. Всюду в тексте $f \circ g$ обозначает композицию отображений: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Через S_n обозначается группа перестановок степени n.

Рассматриваемые множества матриц удобно описывать с помощью многочленов от элементов матрицы. Через $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_N]$ обозначается кольцо многочленов от N переменных над $\mathbb{K}$. Для идеала

$$I \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_N]$$

через $V(I) = \{x \in \mathbb{K}^N : f(x) = 0 \text{ для всех } f \in I\}$ обозначается множество его нулей. Для многочлена g положим

$$V(g) = V\big((g)\big) = \{x \in \mathbb{K}^N : g(x) = 0\},$$

здесь (g) – главный идеал, порожденный g. Элементы матрицы $X \in M_n(\mathbb{K})$ обозначаются через x_{ij}. Отождествляя $M_n(\mathbb{K})$ с $\mathbb{K}^{n^2}$, мы рассматриваем многочлены от элементов матрицы как многочлены от $N = n^2$ переменных. Для такого многочлена G имеем $V(G) = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : G(X) = 0\}$. Симметрический многочлен с целыми коэффициентами от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ выражается многочленом с целыми коэффициентами через коэффициенты характеристического многочлена $\det(tE - X)$ и потому является многочленом от элементов матрицы X. Если исходный многочлен однороден степени m, то и этот многочлен от элементов X однороден степени m. В частности, многочленами от элементов X являются *дискриминант* D характеристического многочлена матрицы X и многочлен R:

$$D(X) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2, \qquad R(X) = \prod_{i<j} (\lambda_i + \lambda_j).$$

Это однородные многочлены степеней $n(n-1)$ и $\frac{n(n-1)}{2}$ соответственно, и $\mathcal{E}_n = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : D(X) \neq 0\}$. При $p = 2$ имеем $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_i + \lambda_j$, поэтому $D = R^2$ и $V(R) = V(D)$. Из определения напрямую следует, что

$$D(X) = D(PXP^{-1}) = D(X^T) = D(X + \mu E), \quad D(aX) = a^{n(n-1)} D(X). \quad (1)$$

Сопряжение, транспонирование, умножение на ненулевой скаляр и прибавление скалярной матрицы не меняют числа различных собственных значений. Комбинируя эти преобразования, приходим к следующему классу отображений.

Определение 1.1. *Отображение* $T\colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ *называется* стандартным, *если оно имеет один из видов*

$$T(X) = aPXP^{-1} + L(X)E \quad (\textit{для всех } X \in M_n(\mathbb{K}))$$
$$\textit{или} \tag{2}$$
$$T(X) = aPX^TP^{-1} + L(X)E \quad (\textit{для всех } X \in M_n(\mathbb{K})),$$

где $a \in \mathbb{K}^*$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$, *а* $L\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ – *произвольный линейный функционал.*

Нам понадобятся некоторые свойства стандартных отображений. Часть из них по существу следует из результатов Уотерхауса о радикале функции [13, предложения 5–7 и п. 3.3] (радикал дискриминанта вычислен также в [14, § 9]). Однако они нужны нам, в частности, и в случае $(n, p) = (2, 2)$, поэтому для полноты изложения мы приводим доказательство.

Лемма 1.2. *Пусть* T – *стандартное отображение вида* (2).

(a) *Если* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – *собственные значения матрицы* X *с учетом кратности, то собственные значения матрицы* $T(X)$ *с учетом кратности равны* $a\lambda_1 + L(X), \dots, a\lambda_n + L(X)$. *В частности,*

$$T(\mathcal{E}_k) \subseteq \mathcal{E}_k$$

при всех $k = 1, \dots, n$.

(b) $T(E) = (a + L(E))E$, *и* T *биективно тогда и только тогда, когда* $L(E) \neq -a$, *т.е.* $T(E) \neq 0$. *Если же* $L(E) = -a$, *то* $\ker T = \mathbb{K}E$ *и* $E \notin \operatorname{Im} T$.

(c) *Если* T *биективно, то* T^{-1} *также стандартно и* $T(\mathcal{E}_k) = \mathcal{E}_k$ *при всех* k. *Если* T *вырождено, то* $T(\mathcal{E}_n) \neq \mathcal{E}_n$.

Доказательство. Рассмотрим первый вид – для второго рассуждения аналогичны, поскольку у матриц X и X^T одни и те же собственные значения.

(a) Матрица $T(X) = P\big(aX + L(X)E\big)P^{-1}$ подобна матрице $aX + L(X)E$, а $\det\big(tE - aX - L(X)E\big) = \prod_{i=1}^{n}\big(t - a\lambda_i - L(X)\big)$. Отображение $\lambda \mapsto a\lambda + L(X)$ поля $\mathbb{K}$ биективно, поэтому число различных собственных значений сохраняется.

(b) Равенство $T(E) = (a + L(E))E$ очевидно. Если $T(X) = 0$, то $aPXP^{-1} = -L(X)E$, откуда $X = \mu E$ для некоторого $\mu \in \mathbb{K}$ и $0 = T(X) = \mu(a + L(E))E$. Поэтому $\ker T = 0$ при $L(E) \neq -a$ и $\ker T = \mathbb{K}E$ при $L(E) = -a$. Пусть $L(E) = -a$ и $T(Y) = E$ для некоторого Y. Тогда $aPYP^{-1} = (1 - L(Y))E$, т.е. $Y = \mu E$ для некоторого $\mu \in \mathbb{K}$. Отсюда $E = T(Y) = \mu\, T(E) = 0$, что является противоречием.

(c) Пусть T биективно, т. е. $a + L(E) \neq 0$. Если $Y = T(X)$, то $X = a^{-1}P^{-1}YP - a^{-1}L(X)E$. Применяя к этому равенству функционал L, находим $L(X) = L(P^{-1}YP)/(a + L(E))$. Значит, $T^{-1}(Y) = a^{-1}P^{-1}YP + L'(Y)E$, где $L'(Y) = -L(P^{-1}YP)/\big(a(a + L(E))\big)$, т.е. T^{-1} стандартно. По пункту (a), $T^{-1}(\mathcal{E}_k) \subseteq \mathcal{E}_k$, т.е. $\mathcal{E}_k \subseteq T(\mathcal{E}_k)$, и потому $T(\mathcal{E}_k) = \mathcal{E}_k$.

Пусть T вырождено. Тогда $\operatorname{Im} T \neq M_n(\mathbb{K})$, и найдется ненулевой линейный функционал $\ell(X)$, обращающийся в нуль на $\operatorname{Im} T$. Предположим, что $T(\mathcal{E}_n) = \mathcal{E}_n$. Тогда ℓ обращается в нуль на $\mathcal{E}_n$. С другой стороны, $\mathcal{E}_n = \{X : D(X) \neq 0\}$, т.е. D обращается в нуль вне $\mathcal{E}_n$. Значит, произведение ℓD, которое является многочленом от элементов матрицы, обращается в нуль во всех точках $M_n(\mathbb{K})$. Поле $\mathbb{K}$ бесконечно, а над бесконечным полем многочлен, обращающийся в нуль во всех точках, нулевой. Поэтому $\ell D = 0$. Однако $\ell \neq 0$ и $D \neq 0$ (например, D не обращается в нуль на диагональной матрице с попарно различными диагональными элементами), а кольцо многочленов не имеет делителей нуля. Следовательно, $\ell D \neq 0$, противоречие. Итак, $T(\mathcal{E}_n) \neq \mathcal{E}_n$. □

Приведем примеры вырожденных стандартных отображений.

Пример 1.3. Отображения $X \mapsto X - x_{11}E$ (над полем любой характеристики) и $X \mapsto X - \frac{\operatorname{tr} X}{n}E$ (при $p \nmid n$) стандартны и вырождены: для них $L(E) = -a$, и потому $\ker T = \mathbb{K}E$ по лемме 1.2(b). Оба сохраняют $\mathcal{E}_n$, но неверно, что $T(\mathcal{E}_n) = \mathcal{E}_n$ (лемма 1.2(a),(c)).

Естественно задать вопрос, исчерпываются ли стандартными отображениями все линейные отображения, сохраняющие $\mathcal{E}_n$. Для обратимых отображений над полем характеристики 0 ответ известен и положителен. Он был получен Платоновым и Джоковичем методами теории алгебраических групп.

Теорема 1.4 ([12]). *Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики 0 и $T\colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ – обратимое линейное отображение, переводящее множество $\mathcal{E}_n$ в себя. Тогда T стандартно.*

Другое доказательство этого результата (сначала над $\mathbb{C}$, затем переносом на поля характеристики 0) дали Гутерман, Ли и Шемрл [8, следствие 3.4(b)]. Подчеркнем, что обратимость отображения предполагается в обоих результатах.

Для нас будет важна близкая задача – описание линейных отображений, сохраняющих дискриминант, т.е. удовлетворяющих условию $D(T(X)) = D(X)$ для всех $X \in M_n(\mathbb{K})$. Первый результат здесь получил Пирс [10]. В отличие от определителя, дискриминант не меняется при прибавлении к матрице скалярной матрицы (см. (1)). Поэтому, как отметил Пирс, наряду с отображениями $X \mapsto PXP^{-1}$ и $X \mapsto PX^TP^{-1}$, дискриминант также сохраняют и отображения вида $X \mapsto X + L(X)E$, где L – линейный функционал. Основная теорема работы [10] утверждает, что при $n \geqslant 6$ над произвольным бесконечным полем всякое линейное отображение, сохраняющее дискриминант, имеет вид (2) с $a^n = 1$. Случаи $n = 3, 4, 5$ Пирс оставил без доказательства [10, замечание 2]. В обзоре [11, гл. 4] он привел этот результат для $n > 5$ (теорема 4.1.11) и высказал предположение, что при $n = 2$ он неверен.

Работу Пирса детально проанализировал Юрков [3]. Он показал, что формулировка основной теоремы [10] неточна: условие $a^n = 1$ следует заменить условием $a^{n(n-1)} = 1$. Действительно, при $a^{n(n-1)} = 1$ отображение $X \mapsto aX$ сохраняет дискриминант в силу (1), хотя равенство $a^n = 1$ может не выполняться. Он также указал на ряд мест в доказательстве Пирса, требующих уточнения или исправления [3, приложение A]. Описание отображений, сохраняющих дискриминант, Юрков получил при всех $n \geqslant 2$ над бесконечными полями, характеристика которых не делит n. В частности, при $n = 2$ ответ имеет тот же вид, что и при больших n, что опровергает упомянутое предположение Пирса. Затем при $n \geqslant 3$ Юрков распространил это описание на поля произвольной характеристики, содержащие более $n(n-1)$ элементов [14]. Приведем эти результаты в нужном нам случае алгебраически замкнутого поля.

Теорема 1.5 ([3, теоремы 1.9 и 3.6]). *Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит n. Линейное отображение $T\colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ удовлетворяет условию $D(T(X)) = D(X)$ для всех $X \in M_n(\mathbb{K})$ тогда и только тогда, когда T имеет вид (2) с $a^{n(n-1)} = 1$.*

Теорема 1.6 ([14, теорема 1.2]). *Пусть $n \geqslant 3$, а $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики. Линейное отображение $T\colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ удовлетворяет условию $D(T(X)) = D(X)$ для всех $X \in M_n(\mathbb{K})$ тогда и только тогда, когда T имеет вид (2) с $a^{n(n-1)} = 1$.*

В [3] и [14] эти утверждения доказаны для более широких классов полей. При этом ни одно из них не предполагает обратимости T, поэтому их можно применять и к вырожденным отображениям.

В настоящей работе гипотеза обратимости в теореме 1.4 снимается: описываются *все* линейные отображения T с условием $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$ над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики, кроме единственного исключения $(n, p) = (2, 2)$ (в этом случае отображение, сохраняющее $\mathcal{E}_n$, может не быть стандартным, см. пример 1.7). Это содержательное усиление: вырожденные отображения, сохраняющие $\mathcal{E}_n$, существуют (пример 1.3). Кроме того, при $n \geqslant 3$ и $(n, p) \notin \{(3, 3), (4, 2)\}$ описываются линейные отображения, сохраняющие множество $\mathcal{E}_{n-1}$: это также в точности стандартные отображения.

Теорема A. *Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики $p \geqslant 0$ и $(n, p) \neq (2, 2)$. Линейное отображение $T\colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ удовлетворяет условию $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$ тогда и только тогда, когда T стандартно. При этом*

$$T(\mathcal{E}_n) = \mathcal{E}_n \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ биективно} \quad \Longleftrightarrow \quad T(E) \neq 0.$$

Теорема B. *Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики $p \geqslant 0$, $n \geqslant 3$ и $(n, p) \notin \{(3, 3), (4, 2)\}$. Линейное отображение $T\colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ удовлетворяет условию $T(\mathcal{E}_{n-1}) \subseteq \mathcal{E}_{n-1}$ тогда и только тогда, когда T стандартно. При этом*

$$T(\mathcal{E}_{n-1}) = \mathcal{E}_{n-1} \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ биективно} \quad \Longleftrightarrow \quad T(E) \neq 0.$$

Из теорем A, B и леммы 1.2(a) следует, что всякое линейное отображение, удовлетворяющее условию одной из этих теорем, переводит в себя каждое из множеств $\mathcal{E}_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Покажем, что ограничения в теоремах A и B существенны. В примерах 1.8 и 1.9 используется одно и то же наблюдение: если $\mathcal{E}_{n-1} \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \varnothing$, то у любой матрицы из $\mathcal{E}_{n-1}$ ненулевой след, и отображение $X \mapsto \operatorname{tr}(X)\, C$ с $C \in \mathcal{E}_{n-1}$ сохраняет $\mathcal{E}_{n-1}$.

Пример 1.7. Пусть $(n,p)=(2,2)$. Тогда $\mathcal{E}_2=\{X:\operatorname{tr}X\neq 0\}$. Отображение $T(X)=X+x_{11}E_{12}$ биективно, и оно вместе с обратным отображением $X\mapsto X-x_{11}E_{12}$ сохраняет след. Поэтому $T(\mathcal{E}_2)=\mathcal{E}_2$. Однако T не является стандартным: $T(E)=E+E_{12}$ нескалярна, тогда как у стандартного отображения $T(E)=(a+L(E))E$. Все линейные отображения, сохраняющие $\mathcal{E}_2$ при $(n,p)=(2,2)$, описаны в замечании 2.5.

Пример 1.8. Пусть $(n,p)=(3,3)$. Тогда $\mathcal{E}_2\cap\mathfrak{sl}_3(\mathbb{K})=\varnothing$: если $\operatorname{tr}X=0$ и $\lambda_1=\lambda_2=x$, то $\lambda_3=-2x=x$, т.е. собственное значение имеет кратность три. Поэтому для любой $C\in\mathcal{E}_2$ отображение $T(X)=\operatorname{tr}(X)\,C$ сохраняет $\mathcal{E}_2$. Размерность $\operatorname{Im}T$ равна 1, поэтому T не является стандартным, так как у стандартного отображения $\ker T$ одномерно или нульмерно (лемма 1.2(b)).

Пример 1.9. Пусть $(n,p)=(4,2)$. Тогда $\mathcal{E}_3\cap\mathfrak{sl}_4(\mathbb{K})=\varnothing$: если $\operatorname{tr}X=0$ и $\lambda_1=\lambda_2=x$, то $\lambda_3+\lambda_4=0$, т.е. $\lambda_3=\lambda_4$. Поэтому для любой $C\in\mathcal{E}_3$ (например, $C=\operatorname{diag}(0,0,1,a)$, $a\notin\{0,1\}$) отображение $T(X)=\operatorname{tr}(X)\,C$ сохраняет $\mathcal{E}_3$ и, по аналогии с предыдущим примером, не является стандартным.

Пример 1.10. Условие $n\geqslant 3$ в теореме B существенно: при $n=2$ для поля любой характеристики есть примеры нестандартных отображений, сохраняющих $\mathcal{E}_{n-1}$. Действительно, при $n=2$ имеем $\mathcal{E}_{n-1}=\mathcal{E}_1$, а отображения

$$T_1(X)=\operatorname{tr}(X)\,E,\qquad T_2(X)=x_{11}E_{12}$$

переводят все пространство $M_2(\mathbb{K})$ в $\mathcal{E}_1$, поскольку скалярные и нильпотентные матрицы имеют ровно одно собственное значение. При этом $\ker T_1=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ и $\ker T_2=\{X:x_{11}=0\}$ трехмерны, тогда как ядро стандартного отображения не более чем одномерно по лемме 1.2(b). Значит, T_1 и T_2 не являются стандартными. При $p=2$ имеется и биективный нестандартный пример: здесь $\mathcal{E}_1=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ и отображение $T(X)=X+x_{11}E_{12}$ сохраняет след, а значит, сохраняет $\mathcal{E}_1$. Но оно не является стандартным, так как $T(E)=E+E_{12}$ нескалярна.

Отметим, что при этом для $p\neq 2$ биективных нестандартных отображений, переводящих $\mathcal{E}_1$ в $\mathcal{E}_1$, нет (см. замечание 3.12 в конце §3).

Пример 1.11. Алгебраическая замкнутость поля в теореме A также существенна. Пусть $n=2$, а $\mathcal{E}_2=\{X\in M_2(\mathbb{R}):D(X)\neq 0\}$. Отображение

$$T(X)=(x_{11}-x_{22})E_{11}+x_{12}(E_{12}+E_{21})$$

сохраняет $\mathcal{E}_2$: многочлен $D(T(X)) = (x_{11} - x_{22})^2 + 4x_{12}^2$ обращается в нуль лишь при $x_{11} = x_{22}$, $x_{12} = 0$, а тогда и $D(X) = (x_{11} - x_{22})^2 + 4x_{12}x_{21} = 0$. При этом $\ker T = \{X : x_{11} = x_{22},\ x_{12} = 0\}$ двумерно, тогда как у стандартного отображения $\ker T \subseteq \mathbb{R}E$ (доказательство леммы 1.2(b) работает над любым полем). Значит, T не является стандартным.

Таким образом, над алгебраически замкнутым полем для множества $\mathcal{E}_n$ описание получено при всех n и p (при $(n, p) = (2, 2)$ оно дано в замечании 2.5), а все ограничения на n и p в теореме B существенны.

Статья построена следующим образом. В §2 доказывается теорема A. Условие $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$ переводится в полиномиальное тождество $D \circ T = cD$ (лемма 2.4), после чего применяются теорема 1.5 (при $p \nmid n$) и теорема 1.6 (при $p \mid n$). Ключевую роль здесь играет неприводимость многочлена D при $p \neq 2$ и многочлена R при $p = 2$ (предложение 2.3). В §3 доказывается теорема B.

§2. Доказательство теоремы A

Нам понадобится теорема Гильберта о нулях, для которой существенна алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{K}$ (ср. пример 1.11). Приведем ее без доказательства, см., например, [4, 1]. Всюду далее в тексте мы считаем $\mathbb{K}$ алгебраически замкнутым полем характеристики $p \geqslant 0$.

Теорема 2.1 (Гильберта о нулях)**.** *Пусть I – это идеал кольца $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_N]$, а многочлен $h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_N]$ обращается в нуль на $V(I)$. Тогда $h^m \in I$ для некоторого $m \geqslant 1$.*

Следствие 2.2. *Пусть $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_N]$ и h обращается в нуль на $V(g)$. Тогда каждый неприводимый делитель g делит h. В частности, если g неприводим, то $g \mid h$.*

Доказательство. Применяя теорему 2.1 к идеалу (g), заключаем, что $h^m \in (g)$, т.е. $g \mid h^m$ для некоторого $m \geqslant 1$. Неприводимый делитель f многочлена g делит h^m, поэтому $f \mid h$. □

Предложение 2.3. (a) *При $p \neq 2$ многочлен D неприводим.*
(b) *При $p = 2$ многочлен R неприводим.*

Доказательство. Обозначим через F многочлен D при $p \neq 2$ и многочлен R при $p = 2$. Наша цель – доказать, что F неприводим. Положим $\alpha = 2$ при $p \neq 2$ и $\alpha = 1$ при $p = 2$, а для $d = (d_1, \ldots, d_n)$ положим

$\Delta(d) = \prod_{i<j}(d_i - d_j)$. Многочлен F однороден степени $\alpha \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, он не меняется при сопряжениях (как и всякий многочлен от коэффициентов характеристического многочлена), и $F\big(\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)\big) = \Delta(d)^\alpha$ (при $p = 2$ здесь используется равенство $d_i + d_j = d_i - d_j$).

Пусть $U = (u_{ij})$ – матрица из n^2 независимых переменных и пусть $d_1, \ldots, d_n$ – дополнительные n переменных. Все рассуждения ниже проводятся в кольце многочленов от этих n^2+n переменных. Положим

$$\Phi(U, d) = U \operatorname{diag}(d) \operatorname{adj}(U),$$

где $\operatorname{adj}(U)$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений к U. Элементы матрицы $\Phi(U, d)$ – многочлены, однородные степени n по переменным u_{ij} и степени 1 по переменным d_k. Нам понадобятся два тождества:

$$F\big(\Phi(U, d)\big) = \det(U)^{\alpha \cdot \frac{n(n-1)}{2}} \Delta(d)^\alpha, \tag{3}$$

$$\Phi(UP_\sigma, d) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \Phi(U, d^\sigma) \qquad (\sigma \in S_n). \tag{4}$$

Здесь $P_\sigma = \sum_{i=1}^n E_{\sigma(i),i}$ – матрица-перестановка и

$$d^\sigma = (d_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, d_{\sigma^{-1}(n)}),$$

так что $P_\sigma \operatorname{diag}(d) P_\sigma^{-1} = \operatorname{diag}(d^\sigma)$. Если $\det U \neq 0$, то $\Phi(U, d) = \det(U) \cdot U \operatorname{diag}(d) U^{-1}$, и при таких значениях переменных равенство (3) выполнено в силу однородности F и его инвариантности относительно сопряжений. Значит, разность левой и правой частей (3), умноженная на $\det U$, обращается в нуль при всех значениях переменных, т.е. является нулевым многочленом (так как поле $\mathbb{K}$ бесконечно). Так как $\det U$ – ненулевой многочлен и кольцо многочленов не имеет делителей нуля, тождество (3) доказано. Тождество (4) следует из равенств $\operatorname{adj}(UP_\sigma) = \operatorname{adj}(P_\sigma) \operatorname{adj}(U)$ и $\operatorname{adj}(P_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, P_\sigma^{-1}$.

Пусть $F = gh$, где g и h – многочлены от элементов матрицы. Поскольку F однороден, многочлены g и h также однородны. Пусть $r = \deg g$. Положим $G = g \circ \Phi$ и $H = h \circ \Phi$.

По формуле (3), $GH = \det(U)^{\alpha \cdot \frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i<j}(d_i - d_j)^\alpha$. Многочлен $\det U$ неприводим (см., например, [5, гл. XIV, § 61], где рассуждение ведется над полем комплексных чисел, но дословно переносится на любое поле), а линейные формы $d_i - d_j$ неприводимы и попарно непропорциональны. Из однозначности разложения на неприводимые множители

следует, что

$$G = c\,\det(U)^a \prod_{i<j} (d_i - d_j)^{\beta_{ij}}, \qquad c \in \mathbb{K}^*, \quad 0 \leqslant \beta_{ij} \leqslant \alpha. \tag{5}$$

Многочлен G однороден степени nr по переменным u_{ij} и степени r по переменным d_k. Сравнение с (5) дает $a = r$ и $r = \sum_{i<j} \beta_{ij}$.

Из (4) и однородности g следует, что $G(UP_\sigma, d) = \operatorname{sgn}(\sigma)^r\, G(U, d^\sigma)$. Воспользуемся в последнем равенстве формулой (5). Поскольку

$$\det(UP_\sigma)^a = \operatorname{sgn}(\sigma)^r \det(U)^r,$$

после сокращения остается

$$\prod_{i<j} (d_i - d_j)^{\beta_{ij}} = \prod_{i<j} \bigl(d_{\sigma^{-1}(i)} - d_{\sigma^{-1}(j)}\bigr)^{\beta_{ij}}. \tag{6}$$

Множитель $d_k - d_l$ (с точностью до знака) входит в левую часть с кратностью β_{kl}, а в правую – с кратностью $\beta_{\sigma(k)\sigma(l)}$ (при $i > j$ полагаем $\beta_{ij} = \beta_{ji}$). Поэтому $\beta_{kl} = \beta_{\sigma(k)\sigma(l)}$ для всех $\sigma \in S_n$, т.е. все β_{ij} равны одному числу $\beta \in \{0, \ldots, \alpha\}$. Значит, $\deg g = r = \beta \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ и $\deg h = (\alpha - \beta) \cdot \frac{n(n-1)}{2}$.

При $\beta = 0$ многочлен g – константа, а при $\beta = \alpha$ константой является h. Остается случай $\alpha = 2$, $\beta = 1$, возможный лишь при $p \neq 2$. Для транспозиции $\sigma = (1\,2)$ равенство (6) принимает вид $\Delta(d) = -\Delta(d)$, что неверно при $p \neq 2$. Итак, F неприводим. □

Лемма 2.4. *Линейное отображение $T\colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ удовлетворяет условию $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$ тогда и только тогда, когда $D \circ T = cD$ для некоторого $c \in \mathbb{K}^*$.*

Доказательство. Если $D \circ T = cD$ и $c \neq 0$, то из $D(X) \neq 0$ следует $D(T(X)) \neq 0$, т.е. $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$. Обратно, пусть $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$ и $g = D \circ T$. Возьмем $X_0 \in \mathcal{E}_n$ (например, диагональную матрицу с попарно различными диагональными элементами). Тогда $T(X_0) \in \mathcal{E}_n$, т.е. $g(X_0) \neq 0$. Значит, g – ненулевой однородный многочлен степени $n(n-1)$, так же как и D. Если $g(X) = 0$, то $T(X) \notin \mathcal{E}_n$, откуда $X \notin \mathcal{E}_n$. Следовательно, D обращается в нуль на $V(g)$. По следствию 2.2, каждый неприводимый делитель f многочлена g делит D. По предложению 2.3, отсюда следует, что f пропорционален D при $p \neq 2$ и R при $p = 2$ (в последнем случае $f \mid R^2$, и потому $f \mid R$). Значит, $g = cD^j$ при $p \neq 2$ и $g = cR^j$

при $p = 2$, где $c \in \mathbb{K}^*$, и сравнение степеней дает $g = cD$. □

Теперь можно завершить доказательство теоремы A. Если T стандартно, то $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$ по лемме 1.2(a). Обратно, пусть $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$. По лемме 2.4, $D \circ T = c'D$, где $c' \neq 0$. Выберем $\gamma \in \mathbb{K}$ с $\gamma^{n(n-1)} = 1/c'$. Тогда $D \circ (\gamma T) = D$ по формуле (1). Если $p \nmid n$ (в частности, при $p = 0$, а также при $n = 2$, поскольку тогда $p \neq 2$ по условию теоремы), применяется теорема 1.5, а если $p \mid n$ (тогда $n \geqslant 3$) – теорема 1.6. Значит, отображение γT стандартно, а потому стандартно и $T = \gamma^{-1}(\gamma T)$. Утверждения о биективности следуют из леммы 1.2(b), (c). □

Замечание 2.5. Лемма 2.4 не исключает случай $(n, p) = (2, 2)$ и позволяет описать линейные отображения, сохраняющие $\mathcal{E}_2$, и в этом случае. Пусть $(n, p) = (2, 2)$. Тогда $R(X) = \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} X$, и потому $D = R^2 = (\operatorname{tr})^2$. По лемме 2.4, условие $T(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{E}_2$ равносильно равенству $(\operatorname{tr} \circ T)^2 = c\,(\operatorname{tr})^2$, где $c \in \mathbb{K}^*$. Выберем $c' \in \mathbb{K}$ так, что $c'^2 = c$. Так как $p = 2$, имеем $(\operatorname{tr} \circ T)^2 - c'^2(\operatorname{tr})^2 = (\operatorname{tr} \circ T - c' \operatorname{tr})^2$, а кольцо многочленов не имеет делителей нуля. Поэтому последнее равенство равносильно равенству $\operatorname{tr} \circ T = c' \operatorname{tr}$. Итак, при $(n, p) = (2, 2)$ линейное отображение T удовлетворяет условию $T(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{E}_2$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} \circ T = c' \operatorname{tr}$ для некоторого $c' \in \mathbb{K}^*$. Среди таких отображений есть и нестандартные (пример 1.7).

§3. Доказательство теоремы B

Всюду в этом параграфе $n \geqslant 3$, а $T\colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ – линейное отображение с условием $T(\mathcal{E}_{n-1}) \subseteq \mathcal{E}_{n-1}$. Для матрицы $X \in M_n(\mathbb{K})$ с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ рассмотрим разложение следующего многочлена от новой переменной t по ее степеням:

$$\prod_{k<l} \bigl((\lambda_k - \lambda_l)^2 + t\bigr) = \sum_{j \geqslant 0} G_j(X)\, t^j.$$

Ясно, что $G_0(X) = D(X)$, а

$$G_1(X) = \sum_{i<j} \prod_{\substack{k<l \\ (k,l) \neq (i,j)}} (\lambda_k - \lambda_l)^2.$$

Коэффициенты G_j – симметрические многочлены с целыми коэффициентами от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а потому, как отмечено в §1, они являются многочленами от элементов x_{ij} матрицы X. В частности, G_1 – однородный многочлен от элементов X степени $n(n-1) - 2 \geqslant 4$.

Лемма 3.1. *Для $X \in V(D)$ имеем $G_1(X) \neq 0 \iff X \in \mathcal{E}_{n-1}$.*

Доказательство. Если $X \in \mathcal{E}_{n-1}$, то равенство $\lambda_k = \lambda_l$ с $k < l$ выполнено ровно для одной пары $(k,l) = (i,j)$, и в сумме, выражающей $G_1(X)$, отлично от нуля ровно одно слагаемое – то, где пропущен множитель с номером (i,j). Если $X \in V(D) \setminus \mathcal{E}_{n-1}$, то совпадающих пар хотя бы две, и каждое слагаемое в $G_1(X)$ содержит нулевой множитель. □

Лемма 3.2. *$D \circ T = cD$ для некоторого $c \in \mathbb{K}$ (возможно, $c = 0$).*

Доказательство. Многочлен $(D \circ T) \cdot G_1$ обращается в нуль на $V(D)$. Действительно, пусть $D(X) = 0$ и $G_1(X) \neq 0$. Тогда $X \in \mathcal{E}_{n-1}$ по лемме 3.1, откуда $T(X) \in \mathcal{E}_{n-1} \subseteq V(D)$ и $D(T(X)) = 0$. Пусть $p \neq 2$. Многочлен D неприводим (предложение 2.3), поэтому, по следствию 2.2, он делит $(D \circ T) \cdot G_1$, а так как D – простой элемент, он делит один из множителей. Он не делит G_1, так как $G_1 \neq 0$ в точках непустого множества $\mathcal{E}_{n-1} \subseteq V(D)$. Итак, $D \mid D \circ T$. Многочлен $D \circ T$ либо нулевой, либо однороден той же степени, что и D, поэтому $D \circ T = cD$. Пусть $p = 2$. Тогда $V(R) = V(D)$ и R неприводим (предложение 2.3), поэтому то же рассуждение с R вместо D дает $R \mid D \circ T = (R \circ T)^2$, откуда $R \mid R \circ T$. Сравнивая степени, получаем, что $R \circ T = c_0 R$ для некоторого $c_0 \in \mathbb{K}$, откуда $D \circ T = c_0^2 D$. □

Если $c \neq 0$, то $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$ по лемме 2.4, и T стандартно по теореме A. Покажем, что случай $c = 0$, т.е. $D(T(X)) = 0$ для всех X, невозможен.

Лемма 3.3. *Если $D \circ T$ – нулевой многочлен, то $\dim \ker T \geqslant 2$. В частности, в $\ker T$ содержится нескалярная матрица.*

Доказательство. Образ T – подпространство, лежащее в $V(D)$, поэтому $\operatorname{Im} T \neq M_n(\mathbb{K})$. Следовательно, $\dim \ker T \geqslant 1$. Если $\dim \ker T = 1$, то $\operatorname{Im} T = V(\ell)$ для некоторого ненулевого линейного функционала $\ell\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, и D обращается в нуль на $V(\ell)$. Заметим, что ℓ – многочлен первой степени от элементов матрицы, поэтому он неприводим, и $\ell \mid D$ по следствию 2.2. При $p \neq 2$ многочлен D неприводим (предложение 2.3) и потому отличается от ℓ ненулевым скалярным множителем, что невозможно, так как $\deg D = n(n-1) > 1$. При $p = 2$ имеем $D = R^2$ и, значит, $\ell \mid R$. Так же, как и выше, это противоречит неприводимости R, так как $\deg R = \frac{n(n-1)}{2} \geqslant 3$. □

Рассмотрим многочлен $g = G_1 \circ T$, т.е. $g(X) = G_1(T(X))$.

Лемма 3.4. *Многочлен g обладает следующими свойствами:*

(i) $g(X) \neq 0$ *при* $X \in \mathcal{E}_{n-1}$;

(ii) g *– однородный многочлен степени* $n(n-1)-2$ *от элементов* X;

(iii) $g(X+K) = g(X)$ *для всех* $X \in M_n(\mathbb{K})$ *и* $K \in \ker T$.

Доказательство. (i) $T(X) \in \mathcal{E}_{n-1}$, и $G_1(T(X)) \neq 0$ по лемме 3.1.

(ii) G_1 однороден степени $n(n-1)-2$, а T линейно. Кроме того, $g \neq 0$ по пункту (i).

(iii) Поскольку T линейно и $T(K) = 0$, то

$$g(X+K) = G_1(T(X+K)) = G_1(T(X)+T(K)) = G_1(T(X)) = g(X). \quad \square$$

Лемма 3.5. *Пусть* $\varphi(\mu, t) \in \mathbb{K}[\mu, t]$ *– однородный многочлен степени* $d \geqslant 1$ *от двух переменных и* $\varphi(\mu, t) \neq 0$ *при всех* $\mu \neq 0$, $t \in \mathbb{K}$. *Тогда* $\varphi(\mu, t) = c\,\mu^d$ *для некоторого* $c \neq 0$. *В частности,* $\varphi(0, 1) = 0$.

Доказательство. Запишем $\varphi(\mu, t) = \sum_{k=0}^{d} c_k \mu^{d-k} t^k$. По условию, многочлен $\psi(t) = \varphi(1, t) = \sum_{k=0}^{d} c_k t^k$ не имеет корней в $\mathbb{K}$, а поле алгебраически замкнуто, поэтому ψ – ненулевая константа. Значит, $c_1 = \ldots = c_d = 0$ и $c_0 \neq 0$, т.е. $\varphi(\mu, t) = c_0 \mu^d$, и можно взять $c = c_0$. $\square$

Лемма 3.6. *Для любой нильпотентной матрицы* $N \in M_n(\mathbb{K})$ *имеем* $g(N) = 0$.

Доказательство. Нильпотентная матрица N подобна верхнетреугольной N' с нулевой главной диагональю: $N = PN'P^{-1}$ ($P \in GL_n(\mathbb{K})$). Выберем попарно различные $a_1, a_3, a_4, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ и положим

$$Y = P\,\mathrm{diag}(a_1, a_1, a_3, \ldots, a_n)P^{-1}, \qquad \varphi(\mu, t) = g(\mu Y + tN).$$

При $\mu \neq 0$ матрица

$$\mu Y + tN = P \begin{pmatrix} \mu a_1 & * & \cdots & * \\ & \mu a_1 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mu a_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

подобна верхнетреугольной с диагональю $\mu a_1, \mu a_1, \mu a_3, \ldots, \mu a_n$. У нее ровно $n-1$ различных собственных значений, т.е. $\mu Y + tN \in \mathcal{E}_{n-1}$,

и $\varphi(\mu, t) \neq 0$ по лемме 3.4(i). Кроме того, многочлен φ однороден степени $n(n-1)-2 \geqslant 1$ (лемма 3.4(ii)). По лемме 3.5, $g(N) = \varphi(0,1) = 0$. $\square$

Поскольку из лемм 3.4(iii) и 3.6 следует, что $g(K+N) = g(N) = 0$, а на $\mathcal{E}_{n-1}$ многочлен g в нуль не обращается (лемма 3.4(i)), получаем следующее утверждение.

Следствие 3.7. *Пусть $K \in \ker T$, а матрица N нильпотентна. Тогда $K + N \notin \mathcal{E}_{n-1}$.*

Остается доказать, что при $(n,p) \notin \{(3,3),(4,2)\}$ всякую нескалярную матрицу можно перевести в $\mathcal{E}_{n-1}$ прибавлением нильпотентной матрицы (в исключенных случаях это неверно уже для нескалярных матриц с нулевым следом, см. примеры 1.8 и 1.9). Для этого понадобится классическая теорема Филлмора о диагонали матрицы, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 3.8 (Филлмор [6, теорема 2])**.** *Пусть $K \in M_n(\mathbb{K})$ – нескалярная матрица, а числа $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ таковы, что $d_1 + \ldots + d_n = \operatorname{tr} K$. Тогда найдется матрица $P \in GL_n(\mathbb{K})$, для которой диагональ матрицы $P^{-1}KP$ равна $(d_1, \ldots, d_n)$.*

Поскольку всякая матрица есть сумма верхнетреугольной и строго нижнетреугольной, из теоремы 3.8 получаем следующее утверждение.

Следствие 3.9. *Если $K \in M_n(\mathbb{K})$ нескалярна и $d_1 + \ldots + d_n = \operatorname{tr} K$, то найдется нильпотентная матрица N, для которой собственные значения матрицы $K+N$ с учетом кратности равны $d_1, \ldots, d_n$.*

Доказательство. По теореме 3.8, $P^{-1}KP = U + S$, где U – верхнетреугольная матрица с диагональю $(d_1, \ldots, d_n)$, а S строго нижнетреугольна. Положим $N = -PSP^{-1}$. Эта матрица нильпотентна, и $K + N = PUP^{-1}$. $\square$

Лемма 3.10. *Пусть $n \geqslant 3$, $(n,p) \notin \{(3,3),(4,2)\}$ и $\theta \in \mathbb{K}$. Тогда найдется набор $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ с суммой θ, в котором ровно $n-1$ различных значений.*

Доказательство. Будем искать набор вида $(x, x, y_3, \ldots, y_n)$, где числа $x, y_3, \ldots, y_n$ попарно различны и

$$2x + y_3 + \ldots + y_n = \theta. \tag{7}$$

Нам понадобится следующий факт: объединение конечного числа аффинных гиперплоскостей не покрывает $\mathbb{K}^m$, т.е. для любых непостоянных аффинных функций $\ell_1, \dots, \ell_r$ на $\mathbb{K}^m$ найдется точка, в которой все они отличны от нуля. Действительно, произведение $\ell_1 \cdots \ell_r$ – ненулевой многочлен, а над бесконечным полем ненулевой многочлен не может обращаться в нуль во всех точках.

Случай $p \neq 2$. Положим $x = \frac{1}{2}\bigl(\theta - \sum_{j=3}^{n} y_j\bigr)$. Тогда равенство (7) выполнено при любых $y_3, \dots, y_n$. Остается выбрать $y_3, \dots, y_n$ так, чтобы

$$y_i - y_j \neq 0 \quad (3 \leqslant i < j \leqslant n), \quad 2(x - y_i) = \theta - \sum_{j=3}^{n} y_j - 2y_i \neq 0 \quad (3 \leqslant i \leqslant n).$$

Все эти функции от $y_3, \dots, y_n$ непостоянны. Для первых это очевидно. Во второй функции коэффициент при y_i равен -3, а при y_j, $j \neq i$, равен -1. Если $p \neq 3$, то $-3 \neq 0$. Если $p = 3$, то $n \geqslant 4$, так как случай $(3, 3)$ исключен, и найдется индекс $j \neq i$, при котором коэффициент равен $-1 \neq 0$. В силу сказанного выше, нужные $y_3, \dots, y_n$ существуют.

Случай $p = 2$. Здесь $2x = 0$, и равенство (7) принимает вид $y_3 + \cdots + y_n = \theta$ (число x в него не входит). Случай $n = 4$ исключен. При $n = 3$ положим $y_3 = \theta$. При $n \geqslant 5$ положим $y_n = \theta - \sum_{j=3}^{n-1} y_j$. Тогда равенство выполнено, и, поскольку $2y_i = 0$,

$$y_n - y_i = \theta - \sum_{\substack{3 \leqslant j \leqslant n-1 \\ j \neq i}} y_j \qquad (3 \leqslant i \leqslant n-1).$$

Правые части последних равенств как функции от $y_3, \dots, y_{n-1}$ непостоянны, так как при $n \geqslant 5$ среди индексов $3, \dots, n-1$ есть $j \neq i$. Функции $y_i - y_j$ при $3 \leqslant i < j \leqslant n-1$ также непостоянны. По доказанному выше, найдутся $y_3, \dots, y_{n-1}$, при которых все эти функции отличны от нуля. В обоих подслучаях выберем затем $x \in \mathbb{K}$, отличное от $y_3, \dots, y_n$ (это возможно, так как поле $\mathbb{K}$ бесконечно).

Тем самым в каждом случае набор $(x, x, y_3, \dots, y_n)$ искомый. □

Лемма 3.11. *Множество $\mathcal{E}_{n-1}$ не содержится ни в каком собственном подпространстве $M_n(\mathbb{K})$.*

Доказательство. Предположим противное: $\mathcal{E}_{n-1} \subseteq W$ для некоторого подпространства $W \neq M_n(\mathbb{K})$. Тогда $W \subseteq V(\ell)$ для некоторого ненулевого линейного функционала $\ell\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, и потому $\mathcal{E}_{n-1} \subseteq V(\ell)$. Многочлен ℓG_1 обращается в нуль на $V(D)$: если $D(X) = 0$ и $G_1(X) \neq 0$, то $X \in \mathcal{E}_{n-1}$ по лемме 3.1, откуда $\ell(X) = 0$.

Пусть $p \neq 2$. Многочлен D неприводим (предложение 2.3), поэтому $D \mid \ell G_1$ по следствию 2.2. При этом $D \nmid G_1$, так как $G_1 \neq 0$ в точках непустого множества $\mathcal{E}_{n-1} \subseteq V(D)$ (см. лемму 3.1). Значит, $D \mid \ell$, что невозможно: $\ell \neq 0$, а $\deg D = n(n-1) \geqslant 6 > 1 = \deg \ell$. При $p = 2$ то же рассуждение с неприводимым многочленом R вместо D (напомним, что $V(R) = V(D)$) дает $R \mid \ell$, что невозможно, так как $\deg R = \frac{n(n-1)}{2} \geqslant 3 > \deg \ell$. □

Теперь можно завершить доказательство теоремы B. Предположим, что $T(\mathcal{E}_{n-1}) \subseteq \mathcal{E}_{n-1}$. По лемме 3.2, имеем $D \circ T = cD$ для $c \in \mathbb{K}$.

Случай $c = 0$. По лемме 3.3, в $\ker T$ существует нескалярная матрица K. По лемме 3.10 с $\theta = \operatorname{tr} K$, найдется набор $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ с суммой $\operatorname{tr} K$ и ровно $n-1$ различными значениями. По следствию 3.9, есть нильпотентная N, для которой спектр $K+N$ равен этому набору, т.е. $K + N \in \mathcal{E}_{n-1}$. Это противоречит следствию 3.7. Поэтому данный случай невозможен.

Случай $c \neq 0$. Тогда, по лемме 2.4, имеем $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$, и по теореме A отображение T стандартно.

Достаточность в первой части теоремы B – лемма 1.2(a).

Докажем вторую часть теоремы B. Как показано выше, T стандартно, поэтому по лемме 1.2(b) T биективно тогда и только тогда, когда $T(E) \neq 0$. Если T биективно, то $T(\mathcal{E}_{n-1}) = \mathcal{E}_{n-1}$ по лемме 1.2(c). Если же T вырождено, то $\operatorname{Im} T$ – собственное подпространство $M_n(\mathbb{K})$. Из леммы 3.11 следует, что $\mathcal{E}_{n-1} \not\subseteq \operatorname{Im} T$, а так как $T(\mathcal{E}_{n-1}) \subseteq \operatorname{Im} T$, то $T(\mathcal{E}_{n-1}) \neq \mathcal{E}_{n-1}$. □

Замечание 3.12. Пусть $n = 2$ и $p \neq 2$. Тогда всякое биективное линейное отображение $T\colon M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$ с условием $T(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{E}_1$ стандартно. Действительно, при $n = 2$ имеем $\mathcal{E}_1 = V(D)$, поэтому многочлен $D \circ T$ обращается в нуль на $V(D)$. Многочлен D неприводим (предложение 2.3), и, по следствию 2.2, $D \mid D \circ T$. Так как T биективно, многочлен $D \circ T$ не равен нулю тождественно: $(D \circ T)\big(T^{-1}(X_0)\big) = D(X_0) \neq 0$ для любой $X_0 \in \mathcal{E}_2$. Кроме того, он однороден той же степени, что и D. Значит, $D \circ T = cD$ для некоторого $c \in \mathbb{K}^*$, и T стандартно по лемме 2.4

и теореме A. Обратно, стандартные отображения переводят $\mathcal{E}_1$ в $\mathcal{E}_1$ по лемме 1.2(a). Таким образом, при $n = 2$ и $p \neq 2$ биективные линейные отображения, сохраняющие $\mathcal{E}_1$, – это в точности биективные стандартные отображения. Без предположения о биективности это неверно, а при $p = 2$ неверно и для биективных отображений (пример 1.10).

Благодарности. Авторы благодарят А. Э. Гутермана и А. Ю. Юркова за внимание к работе, конструктивное обсуждение и ценные предложения.

Список литературы

1. М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972.
2. Ф. Г. Фробениус, *О представлении конечных групп через линейные подстановки.* — В кн.: Теория характеров и представлений групп, Харьков, ОНТИ, 1938, 106–127.
3. А. Юрков, *Линейные отображения, сохраняющие матричный дискриминант.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **534** (2024), 147–194.
4. M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
5. M. Bôcher, *Introduction to Higher Algebra*, Macmillan, New York, 1907.
6. P. A. Fillmore, *On similarity and the diagonal of a matrix.* — Amer. Math. Monthly **76** (1969), 167–169.
7. G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen.* — Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.
8. A. Guterman, C.-K. Li, P. Šemrl, *Some general techniques on linear preserver problems.* — Linear Algebra Appl. **315** (2000), 61–81.
9. M. Marcus, B. N. Moyls, *Linear transformations on algebras of matrices.* — Canad. J. Math. **11** (1959), 61–66.
10. S. Pierce, *Discriminant preserving linear maps.* — Linear Multilinear Algebra **8** (1979), 101–114.
11. S. Pierce et al., *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33** (1992), 1–129.
12. V. P. Platonov, D. Ž. Đoković, *Linear preserver problems and algebraic groups.* — Math. Ann. **303** (1995), 165–184.
13. W. C. Waterhouse, *Invertibility of linear maps preserving matrix invariants.* — Linear Multilinear Algebra **13** (1983), 105–113.
14. A. Yurkov, *Linear maps preserving the matrix discriminant. An enhanced approach.* — arXiv:2610.14060 (2026).

Maksaev A. M., Promyslov V. V., Tishutin P. S. Linear maps preserving matrices with n or $n-1$ distinct eigenvalues.

Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field and let $\mathcal{E}_k$ be the set of $n \times n$ matrices over $\mathbb{K}$ with exactly k distinct eigenvalues. Previously, the classification of linear maps $T\colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ satisfying $T(\mathcal{E}_n) \subseteq \mathcal{E}_n$ was obtained for invertible maps over fields of characteristic 0. In this paper, the classification is extended to arbitrary maps, including singular ones, and to an arbitrary characteristic $p \geqslant 0$, except for the case $(n, p) = (2, 2)$. Moreover, for $n \geqslant 3$ and $(n, p) \notin \{(3, 3), (4, 2)\}$, the linear maps satisfying $T(\mathcal{E}_{n-1}) \subseteq \mathcal{E}_{n-1}$ are described.

Национальный
исследовательский университет
“Высшая школа экономики”,
Москва, 101000, Россия

E-mail: artmak95@mail.ru

E-mail: valentin.promyslov@gmail.com

E-mail: paveltishutin@gmail.com

Поступило 16 октября 2026 г.