Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 554, 2026 г.

Е. К. Куликов, А. А. Макаров, С. В. Макарова, Д. С. Шалымов

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ НЕВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

§1. Введение

Полиномиальные B-сплайны являются одним из основных инструментов локальной аппроксимации и её приложений. Их эффективность во многом связана с сочетанием локальности носителя, высокой гладкости и устойчивых вычислительных свойств [13]. Одним из естественных направлений развития этой конструкции является построение сплайновых базисов, сохраняющих указанные свойства, но допускающих неполиномиальный характер на интервалах сетки. Эта задача относится к более общему направлению, связанному с переносом классических аппроксимационных конструкций с полиномиальных пространств на произвольные конечномерные пространства функций; в частности, в работе [10] такой подход развивается для базисов Бернштейна и кривых Безье. Общие сведения о теории неполиномиальных сплайнов и её приложениях можно найти, например, в монографии [19].

К числу рассматриваемых в этой монографии обобщений относятся минимальные сплайны. Их конструкция задаётся системой порождающих функций и приводит к базисным функциям минимального носителя и максимальной гладкости (подробнее см. [1, 2, 7]). Существенным преимуществом нормализованной конструкции минимальных сплайнов является сохранение не только локальности носителя и высокой гладкости, но и свойства разбиения единицы. В близких конструкциях неполиномиальных B-сплайнов ситуация может быть иной: например, тригонометрические и гиперболические B-сплайны не образуют разбиение единицы, что требует отдельной процедуры нормировки [21].

Ключевые слова: B-сплайны, неполиномиальные сплайны, минимальные сплайны, условия существования сплайнов, локальная аппроксимация, неравномерные сетки.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, шифр проекта 121061000159-6.

Выбор неполиномиальных порождающих вектор-функций в конструкции минимальных сплайнов позволяет учитывать аналитические особенности приближаемых функций и тем самым строить более специализированные аппроксимационные схемы. Этот подход использовался как при аппроксимации кривых специального вида, например, дуг окружности [14] и трансцендентных кривых [4], так и при построении численных методов. В частности, применение минимальных сплайнов позволило повысить точность сплайн-коллокационных схем для различных интегральных уравнений [5, 15]. В перечисленных приложениях использовались минимальные сплайны невысоких порядков: с ростом порядка увеличивается длина носителя сплайн-функций и ослабевает эффект локальности, а проверка свойств сплайнов усложняется. Поэтому в настоящей работе рассматриваются линейный и квадратичный случаи.

Вопрос существования неполиномиальных сплайнов напрямую зависит от свойств порождающих вектор-функций и расчётной сетки. Полиномиальные B-сплайны существуют на любой сетке. Для неполиномиальных $NUAT$ B-сплайнов (см. [22]) возникают ограничения на длины интервалов сетки, связанные с сохранением необходимых чебышёвских свойств локального пространства; предельные значения таких длин описываются понятием *критической длины* [8], тогда как для $NUAH$ B-сплайнов (см. [12]) таких ограничений нет. Общая задача о существовании базисов чебышёвских сплайнов исследовалась в работах [17, 18], а их применение в изогеометрическом анализе – в работах [16, 20]. Для минимальных сплайнов вопрос существования сводится к полноте соответствующей цепочки векторов. Общая теорема существования из работы [7] для нормализованной конструкции при условии локальной квазиравномерности сетки устанавливает существование достаточно малого максимального шага сетки, при котором нормализованная цепочка полна. Однако этот результат носит качественный характер: он не даёт явного значения предельного шага и непосредственно проверяемого условия полноты цепочки для заданной порождающей вектор-функции и конкретной сетки. Для линейных минимальных сплайнов достаточное условие существования указано в [6]: они существуют, если порождающая функция непрерывно дифференцируема и её производная не обращается в нуль.

Явное значение предельного шага существенно и для априорных оценок точности аппроксимации минимальными сплайнами: такие

оценки устанавливаются на сетках, для которых существование сплайнов гарантировано. Поэтому и при явно выписанной константе область применимости оценки остаётся заданной неявно, пока сам порог шага не указан явно. В этой связи представляет интерес получение условий существования, допускающих непосредственную проверку.

Цель настоящей работы состоит в получении проверяемых условий существования минимальных сплайнов невысоких порядков. Для линейных минимальных сплайнов получен критерий существования, выражаемый через значения порождающей вектор-функции в соседних узлах сетки и не требующий её дифференцируемости. Для квадратичных минимальных сплайнов получен критерий полноты нормализованной цепочки: она полна тогда и только тогда, когда отличны от нуля величины, отвечающие парам и тройкам соседних узлов сетки. Кроме того, при условии дополнительной гладкости порождающей вектор-функции указано явное достаточное ограничение на максимальный шаг сетки, выраженное через определители, составленные из порождающей вектор-функции и её производных; оно не требует локальной квазиравномерности сетки. При дополнительных предположениях это ограничение удаётся уточнить до неулучшаемого. Полученные условия применены к полиномиальным, гиперболическим и тригонометрическим минимальным сплайнам, а также к логарифмическим спиралям и архимедовой спирали.

§2. Минимальные сплайны невысоких порядков

Пусть $d \in \{1, 2\}$. На отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ рассмотрим сетку X с дополнительными узлами вне отрезка $[a, b]$, лежащими на некотором интервале $(\alpha, \beta) \supset [a, b]$:

$$\begin{aligned} x_{-d} < \ldots < x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \\ x_{n+1} < \ldots < x_{n+d}. \end{aligned} \tag{1}$$

Положим $J_{i,k} := \{i, i+1, \ldots, k\}$ при $i \leqslant k$ и

$$h_j := x_{j+1} - x_j, \quad j \in J_{-d,n+d-1}; \qquad h := \max_{j \in J_{-d,n+d-1}} h_j.$$

Упорядоченное множество $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-d,n-1}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{d+1}$ называется *цепочкой векторов*. Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной*, если

$$\det(\mathbf{a}_{j-d}, \mathbf{a}_{j-d+1}, \ldots, \mathbf{a}_j) \neq 0, \qquad j \in J_{0,n-1}. \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{A}$ — полная цепочка векторов, а $\varphi \in C^{d-1}(\alpha, \beta)$ — некоторая заданная вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^{d+1}$. *Минимальными координатными* $(\mathbf{A}, \varphi)$*-сплайнами порядка* d, отвечающими цепочке $\mathbf{A}$ и построенными на сетке (1), называются функции ω_j, $j \in J_{-d,n-1}$, заданные на разбиении $M := \bigcup_{k \in J_{0,n-1}} (x_k, x_{k+1})$ и удовлетворяющие тождествам

$$\begin{cases} \sum\limits_{j'=k-d}^{k} \mathbf{a}_{j'} \omega_{j'}(t) = \varphi(t), \quad t \in (x_k, x_{k+1}), \quad k \in J_{0,n-1}, \\ \omega_j(t) = 0, \qquad t \in M \setminus [x_j, x_{j+d+1}], \quad j \in J_{-d,n-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Тождества (3) называются *аппроксимационными соотношениями*, а вектор-функция $\varphi(t)$ называется *порождающей* сплайн вектор-функцией.

Для всякого фиксированного $t \in (x_k, x_{k+1})$ соотношения (3) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду полноты цепочки $\mathbf{A}$ система (3) имеет единственное решение. Отсюда также следует, что $\operatorname{supp} \omega_j \subset [x_j, x_{j+d+1}]$. Линейная оболочка функций ω_j, заданных аппроксимационными соотношениями (3), называется *пространством минимальных координатных* $(\mathbf{A}, \varphi)$*-сплайнов порядка* d.

Для $j \in J_{-d,n+d}$ положим $\varphi_j^{(i)} := \varphi^{(i)}(x_j)$, $i \in J_{0,d-1}$, и рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^{d+1}$, задаваемые тождеством

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{z} \equiv \det\bigl(\varphi_j, \varphi_j', \ldots, \varphi_j^{(d-1)}, \mathbf{z}\bigr), \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Рассмотрим цепочку векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-d,n-1}}$, заданную формулой

$$\mathbf{a}_j := \begin{vmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi_{j+1}' & \cdots & \varphi_{j+1}^{(d-1)} \\ \mathbf{d}_{j+2}^T \varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+2}^T \varphi_{j+1}' & \cdots & \mathbf{d}_{j+2}^T \varphi_{j+1}^{(d-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{d}_{j+d}^T \varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+d}^T \varphi_{j+1}' & \cdots & \mathbf{d}_{j+d}^T \varphi_{j+1}^{(d-1)} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где определитель порядка d понимается символически, т.е. раскрывается по элементам первой строки, а при $d = 1$ полагается $\mathbf{a}_j := \varphi_{j+1}$. Наряду с введённой цепочкой $\mathbf{a}_j$ рассмотрим *нормализованную* цепочку $\mathbf{A}^N := \{\mathbf{a}_j^N\}_{j \in J_{-d,n-1}}$, $\mathbf{a}_j^N := \mathbf{a}_j / [\mathbf{a}_j]_0$, где нулевая компонента вектора из $\mathbb{R}^{d+1}$ обозначена через $[\cdot]_0$.

Сетка X называется *локально квазиравномерной*, если при некотором $\theta \geqslant 1$

$$\theta^{-1} \leqslant \frac{h_j}{h_{j-1}} \leqslant \theta, \qquad j \in J_{-d+1,n+d-1}.$$

Известна следующая теорема [7].

Теорема 1. *Пусть сетка* (1) *локально квазиравномерна, порождающая вектор-функция удовлетворяет условию* $\varphi \in C^d(\alpha,\beta)$, *а вронскиан*

$$W_d(t) := \det\bigl(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(d)}(t)\bigr)$$

удовлетворяет условию

$$|W_d(t)| \geqslant c = \mathrm{const} > 0, \qquad t \in (\alpha,\beta).$$

Тогда существует такое число $h_\varphi > 0$, *что при* $h < h_\varphi$ *цепочка* $\mathbf{A}^N$ *полна, а соответствующие минимальные координатные сплайны* ω_j, $j \in J_{-d,n-1}$, *существуют и лежат в пространстве* $C^{d-1}[a,b]$.

Более того, если $[\varphi(t)]_0 \equiv 1$, то, поскольку $[\mathbf{a}_j^N]_0 = 1$, рассматривая нулевую компоненту соотношений (3) для цепочки $\mathbf{A}^N$, получаем свойство разбиения единицы

$$\sum_{j \in J_{-d,n-1}} \omega_j(t) \equiv 1, \qquad t \in [a,b].$$

В этом случае функции ω_j называются *нормализованными* минимальными координатными сплайнами. Всюду ниже рассматриваются только нормализованные сплайны и отвечающая им нормализованная цепочка $\mathbf{A}^N$.

Теорема 1 носит качественный характер: она гарантирует полноту цепочки $\mathbf{A}^N$ при достаточно малом шаге, но не даёт ни явного значения h_φ, ни непосредственно проверяемого условия полноты. Далее для линейных сплайнов будет получен критерий их существования в терминах значений порождающей вектор-функции в соседних узлах (§3). Для квадратичных сплайнов будут получены критерий их существования через определители по парам и тройкам соседних узлов и явная оценка шага сетки, гарантирующая полноту цепочки (§§4–5); в §6 полученные условия применяются к конкретным порождающим вектор-функциям.

§3. Условие существования линейных минимальных сплайнов

Пусть $d = 1$. Положим $\varphi(t) := (1, \rho(t))^T$, где $\rho \in C(\alpha, \beta)$. Тогда, по формуле (4), цепочка $\mathbf{A}^N$ определяется векторами, имеющими вид

$$\mathbf{a}_j^N := \varphi_{j+1}, \qquad j \in J_{-1,n-1}. \tag{5}$$

Существование нормализованных линейных минимальных сплайнов обеспечивает следующая теорема.

Теорема 2. *Цепочка* (5) *полна тогда и только тогда, когда*

$$\rho(x_{j+1}) \neq \rho(x_j), \qquad j \in J_{0,n-1}. \tag{6}$$

Доказательство. Для каждого $j \in J_{0,n-1}$ имеем

$$\det(\mathbf{a}_{j-1}^N, \mathbf{a}_j^N) = \det(\varphi_j, \varphi_{j+1}) = \rho(x_{j+1}) - \rho(x_j).$$

Поэтому полнота цепочки $\mathbf{A}^N$ эквивалентна условию (6). □

Следствие 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если функция ρ строго монотонна на отрезке $[a, b]$, то линейные минимальные сплайны существуют на любой сетке вида* (1)*;*

(2) *если функция ρ не является строго монотонной на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует сетка вида* (1) *с максимальным шагом $h < \varepsilon$, на которой линейные минимальные сплайны не существуют.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из теоремы 2, поскольку при строгой монотонности значения функции ρ в любых двух соседних узлах различны. Пусть теперь ρ не является строго монотонной на отрезке $[a, b]$. Достаточно при любом $\varepsilon > 0$ указать точки $t < u$ отрезка $[a, b]$ с $\rho(t) = \rho(u)$ и $u - t < \varepsilon$: включив их в сетку (1) в качестве соседних узлов и выбрав остальные узлы так, чтобы $h < \varepsilon$, получим сетку, на которой условие (6) нарушается и, по теореме 2, линейные минимальные сплайны не существуют. Любая непрерывная инъективная функция на отрезке строго монотонна, поэтому функция ρ неинъективна: $\rho(t_1) = \rho(u_1)$ при некоторых $t_1 < u_1$. Если ρ постоянна на $[t_1, u_1]$, то любые две точки этого отрезка на расстоянии меньше ε годятся в качестве t и u. В противном случае непрерывная функция ρ на $[t_1, u_1]$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке c, поскольку значения на

концах равны. Пусть, для определённости, это наибольшее значение и пусть $0 < \delta < \varepsilon/2$ таково, что $[c-\delta, c+\delta] \subset [t_1, u_1]$. Если $\rho(c-\delta) = \rho(c)$ или $\rho(c+\delta) = \rho(c)$, положим $t = c-\delta$, $u = c$ или соответственно $t = c$, $u = c+\delta$. В противном случае, по теореме о промежуточном значении, число $v := \max\{\rho(c-\delta), \rho(c+\delta)\} < \rho(c)$ принимается функцией ρ в некоторой точке $t \in [c-\delta, c)$ и в некоторой точке $u \in (c, c+\delta]$. В обоих случаях, $t < u$, $\rho(t) = \rho(u)$ и $u - t \leqslant 2\delta < \varepsilon$. □

При выполнении условия (6) применение правила Крамера к системе (3) даёт следующее представление сплайн-функций:

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\det(\varphi_j, \varphi(t))}{\det(\varphi_j, \varphi_{j+1})} = \dfrac{\rho(t) - \rho(x_j)}{\rho(x_{j+1}) - \rho(x_j)}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\det(\varphi(t), \varphi_{j+2})}{\det(\varphi_{j+1}, \varphi_{j+2})} = \dfrac{\rho(x_{j+2}) - \rho(t)}{\rho(x_{j+2}) - \rho(x_{j+1})}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases} \tag{7}$$

Непрерывность функций (7) на разбиении M обеспечивается непрерывностью функции ρ, а в узлах сетки она следует из равенства $\omega_j(x_i) = \delta_{j,i-1}$, $i \in J_{0,n}$, где $\delta_{j,i}$ — символ Кронекера. Таким образом, $\omega_j \in C[a,b]$.

Замечание 1. Для $\varphi(t) = \varphi_1^{\mathcal{B}}(t) := (1,t)^T$ функции (7) совпадают с известными линейными полиномиальными B-сплайнами:

$$\omega_j^{\mathcal{B}}(t) = \begin{cases} \dfrac{t - x_j}{x_{j+1} - x_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{x_{j+2} - t}{x_{j+2} - x_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

Замечание 2. Цепочка (5) и отвечающие ей сплайны (7) рассматривались в работе [6], где полнота цепочки установлена при условиях $\rho \in C^1[a,b]$ и $\rho'(t) \neq 0$, а также получены асимптотические представления сплайнов и построена квазилинейная интерполяция. Теорема 2 заменяет условия из [6] критерием (6), не требующим дифференцируемости функции ρ.

§4. Критерий существования квадратичных минимальных сплайнов

В квадратичном случае, при $d = 2$, положим $\varphi(t) := (1, \rho(t), \sigma(t))^T$, где $\rho, \sigma \in C^2(\alpha, \beta)$. По формуле (4), цепочка $\mathbf{A}^N$ определяется векторами, имеющими вид

$$\mathbf{a}_j^N = \varphi_{j+1} - \frac{\mathbf{d}_{j+2}^T \varphi_{j+1}}{\mathbf{d}_{j+2}^T \varphi'_{j+1}} \varphi'_{j+1}, \qquad j \in J_{-2,n-1}. \tag{8}$$

Известна следующая теорема, указывающая явные формулы для квадратичных минимальных сплайнов [7].

Теорема 3. *Пусть цепочка $\mathbf{A}^N$, определяемая равенством (8), полна, а вронскиан $W_2(t)$ отличен от нуля на (α, β). Тогда существуют сплайн-функции ω_j, $j \in J_{-2,n-1}$, лежащие в пространстве $C^1[a, b]$, для которых при $i = 0, 1$ справедливо следующее представление:*

$$\omega_j^{(i)}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T \varphi^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\mathbf{d}_j^T \varphi^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} - \dfrac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} \dfrac{\mathbf{d}_{j+1}^T \varphi^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \dfrac{\mathbf{d}_{j+3}^T \varphi^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^N}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases} \tag{9}$$

Замечание 3. Для $\varphi(t) = \varphi_2^{\mathcal{B}}(t) := (1, t, t^2)^T$ функции $\omega_j(t)$ совпадают с квадратичными полиномиальными B-сплайнами $\omega_j^{\mathcal{B}}(t)$:

$$\omega_j^{\mathcal{B}}(t) = \begin{cases} \dfrac{(t - x_j)^2}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_j)}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{1}{x_{j+1} - x_j} \Big(\dfrac{(t - x_j)^2}{x_{j+2} - x_j} & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \qquad - \dfrac{(t - x_{j+1})^2 (x_{j+3} - x_j)}{(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+3} - x_{j+1})} \Big), & \\ \dfrac{(t - x_{j+3})^2}{(x_{j+3} - x_{j+1})(x_{j+3} - x_{j+2})}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases}$$

Теорема 3 сводит вопрос о существовании квадратичных минимальных сплайнов к полноте цепочки (8), т.е. к отличию от нуля определителей $\det(\mathbf{a}^N_{j-2}, \mathbf{a}^N_{j-1}, \mathbf{a}^N_j)$, $j \in J_{0,n-1}$. Ниже эти определители вычислены явно через значения φ и φ' в соседних узлах.

Положим

$$\mathbf{d}(t) := \varphi(t) \times \varphi'(t) = \big(\rho(t)\sigma'(t) - \sigma(t)\rho'(t),\ -\sigma'(t),\ \rho'(t)\big)^T, \qquad (10)$$

где $t \in (\alpha, \beta)$. Отсюда ясно, что $\mathbf{d}(x_j) = \mathbf{d}_j$. Для $t, u, y_0, y_1, y_2 \in (\alpha, \beta)$ введём следующие обозначения:

$$\Delta(t, u) := \mathbf{d}^T(u)\varphi'(t) = \rho'(u)\sigma'(t) - \sigma'(u)\rho'(t), \qquad (11)$$

$$G(y_0, y_1, y_2) := \det\big(\mathbf{d}(y_0), \mathbf{d}(y_1), \mathbf{d}(y_2)\big). \qquad (12)$$

Лемма 1. *Пусть $\Delta(x_j, x_{j+1}) \neq 0$ при всех $j \in J_{-1,n}$. Тогда для $j \in J_{0,n-1}$ верно равенство*

$$\det\big(\mathbf{a}^N_{j-2}, \mathbf{a}^N_{j-1}, \mathbf{a}^N_j\big) = -\frac{G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1})\, G(x_j, x_{j+1}, x_{j+2})}{\Delta(x_{j-1}, x_j)\, \Delta(x_j, x_{j+1})\, \Delta(x_{j+1}, x_{j+2})}. \qquad (13)$$

Доказательство. Покажем сначала, что, с точностью до скалярного множителя, вектор $\mathbf{a}^N_j$ совпадает с векторным произведением $\mathbf{d}_{j+1} \times \mathbf{d}_{j+2}$. Знаменатель дроби в определении (8) равен $\Delta(x_{j+1}, x_{j+2})$ и, по условию, отличен от нуля. При $d = 2$ формула (4) даёт

$$\mathbf{a}_j = \varphi_{j+1}\, \mathbf{d}^T_{j+2}\varphi'_{j+1} - \varphi'_{j+1}\, \mathbf{d}^T_{j+2}\varphi_{j+1}.$$

С другой стороны, по формуле двойного векторного произведения в $\mathbb{R}^3$: $(\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \times \mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_2\, \mathbf{z}_1^T\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1\, \mathbf{z}_2^T\mathbf{z}_3$ и определению (10), имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{j+1} \times \mathbf{d}_{j+2} &= (\varphi_{j+1} \times \varphi'_{j+1}) \times \mathbf{d}_{j+2} \\ &= \varphi'_{j+1}\, \mathbf{d}^T_{j+2}\varphi_{j+1} - \varphi_{j+1}\, \mathbf{d}^T_{j+2}\varphi'_{j+1} = -\mathbf{a}_j.\end{aligned}$$

Нулевая компонента полученного вектора равна

$$\begin{aligned}[\mathbf{d}_{j+1}]_1[\mathbf{d}_{j+2}]_2 - [\mathbf{d}_{j+1}]_2[\mathbf{d}_{j+2}]_1 &= \rho'(x_{j+1})\sigma'(x_{j+2}) - \sigma'(x_{j+1})\rho'(x_{j+2}) \\ &= -\Delta(x_{j+1}, x_{j+2}),\end{aligned}$$

откуда $[\mathbf{a}_j]_0 = \Delta(x_{j+1}, x_{j+2})$. Следовательно,

$$\mathbf{a}^N_j = \frac{\mathbf{a}_j}{[\mathbf{a}_j]_0} = -\frac{\mathbf{d}_{j+1} \times \mathbf{d}_{j+2}}{\Delta(x_{j+1}, x_{j+2})}, \qquad j \in J_{-2,n-1}. \qquad (14)$$

Подставляя выражение (14) в левую часть равенства (13) и пользуясь полилинейностью определителя, для $j \in J_{0,n-1}$ получаем:

$$\det(\mathbf{a}_{j-2}^N, \mathbf{a}_{j-1}^N, \mathbf{a}_j^N) = -\frac{\det\big(\mathbf{d}_{j-1} \times \mathbf{d}_j,\ \mathbf{d}_j \times \mathbf{d}_{j+1},\ \mathbf{d}_{j+1} \times \mathbf{d}_{j+2}\big)}{\Delta(x_{j-1}, x_j)\,\Delta(x_j, x_{j+1})\,\Delta(x_{j+1}, x_{j+2})}.$$

В силу тождества Лагранжа в $\mathbb{R}^3$, имеем равенство

$$(\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \times (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_2 \det(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3),$$

применяя которое к тройке векторов $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) = (\mathbf{d}_j, \mathbf{d}_{j+1}, \mathbf{d}_{j+2})$ и используя равенство $\det(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_1^T(\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3)$, находим:

$$\begin{aligned}\det\big(\mathbf{d}_{j-1} \times \mathbf{d}_j,\ \mathbf{d}_j \times \mathbf{d}_{j+1},\ \mathbf{d}_{j+1} \times \mathbf{d}_{j+2}\big) &= \big(\mathbf{d}_{j-1} \times \mathbf{d}_j\big)^T \mathbf{d}_{j+1} \det(\mathbf{d}_j, \mathbf{d}_{j+1}, \mathbf{d}_{j+2}) \\ &= \det(\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{d}_j, \mathbf{d}_{j+1}) \det(\mathbf{d}_j, \mathbf{d}_{j+1}, \mathbf{d}_{j+2}),\end{aligned}$$

что вместе с определением (12) даёт правую часть равенства (13). □

Будем называть сетку (1) *допустимой* для порождающей вектор-функции φ, если

$$\begin{aligned}\Delta(x_j, x_{j+1}) &\neq 0, \qquad j \in J_{-1,n}, \\ G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) &\neq 0, \qquad j \in J_{0,n}.\end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 4. *Пусть $\rho, \sigma \in C^2(\alpha, \beta)$. Цепочка $\mathbf{A}^N$, определяемая равенством* (8)*, полна и квадратичные минимальные координатные сплайны существуют тогда и только тогда, когда сетка* (1) *допустима. Более того, если $W_2(t) \neq 0$ на (α, β), то соответствующие сплайн-функции лежат в пространстве $C^1[a, b]$.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть сетка X допустима. Тогда $\Delta(x_j, x_{j+1}) \neq 0$ при всех $j \in J_{-1,n}$, и потому знаменатель в формулах (8) и (13) отличен от нуля. Числитель в равенстве (13) есть произведение величин $G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1})$ и $G(x_j, x_{j+1}, x_{j+2})$, которые отвечают индексам j и $j+1$ из набора $J_{0,n}$, и потому он отличен от нуля в силу допустимости сетки. Следовательно, $\det(\mathbf{a}_{j-2}^N, \mathbf{a}_{j-1}^N, \mathbf{a}_j^N) \neq 0$ для всех $j \in J_{0,n-1}$, а цепочка $\mathbf{A}^N$ полна.

Необходимость. Пусть цепочка $\mathbf{A}^N$ полна. Тогда знаменатель в определении (8) отличен от нуля, поэтому $\Delta(x_j, x_{j+1}) \neq 0$ при всех

$j \in J_{-1,n}$ и справедливо равенство (13). Левая часть равенства (13) отлична от нуля в силу полноты, поэтому отличен от нуля и числитель в его правой части, т.е. $G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \neq 0$ и $G(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}) \neq 0$ при всех $j \in J_{0,n-1}$. Тем самым $G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \neq 0$ при всех $j \in J_{0,n}$, и сетка допустима.

Полнота цепочки $\mathbf{A}^N$ обеспечивает существование квадратичных минимальных координатных сплайнов, а принадлежность пространству $C^1[a,b]$ следует из теоремы 3. □

Замечание 4. Число условий (15), проверяемых в теореме 4, равно $2n+3$: величина Δ проверяется на $n+2$ парах соседних узлов сетки, а величина G – на $n+1$ тройке соседних узлов. Каждая из проверяемых величин зависит лишь от значений $\rho, \sigma, \rho', \sigma'$ в двух или трёх соседних узлах, поэтому число локальных проверок линейно по числу элементарных интервалов сетки.

§5. Явная оценка шага сетки

Теорема 1 устанавливает существование достаточно малого максимального шага сетки, не давая его явной оценки. В этом параграфе величины Δ и G выражаются через решения линейного дифференциального уравнения с коэффициентами, которые выражаются через определители, составленные из порождающей вектор-функции и её производных.

Всюду далее мы будем предполагать, что $\rho, \sigma \in C^4(\alpha, \beta)$. В рассматриваемом квадратичном случае введём следующее обозначение для вронскиана:

$$W(t) := W_2(t) = \rho'(t)\sigma''(t) - \rho''(t)\sigma'(t) \neq 0, \qquad t \in (\alpha, \beta). \tag{16}$$

Положим (явное указание зависимости от t для краткости опускаем)

$$V := \rho'''\sigma'' - \rho''\sigma''', \qquad \varkappa := \frac{W'}{W}, \qquad \mu := \frac{V}{W}. \tag{17}$$

Далее будет показано, что $\varkappa$ и μ служат коэффициентами дифференциального уравнения второго порядка, решениями которого являются функции ρ' и σ', а величины

$$p := \mu' - \varkappa\mu, \qquad q := \varkappa' + \mu - \varkappa^2, \qquad r := 2\varkappa \tag{18}$$

суть коэффициенты уравнения третьего порядка, которому удовлетворяют все компоненты вектор-функции $\mathbf{d}(t)$, заданной равенством (10).

Лемма 2. *Функции ρ' и σ' образуют базис пространства решений уравнения*

$$z'' = \varkappa z' + \mu z. \tag{19}$$

Доказательство. Функции ρ' и σ' удовлетворяют уравнению (19). Действительно, $\varkappa\rho''+\mu\rho' = (W'\rho''+V\rho')/W$, где, ввиду представлений (16) и (17), имеем

$$\begin{aligned} W'\rho'' + V\rho' &= (\rho'\sigma''' - \rho'''\sigma')\rho'' + (\rho'''\sigma'' - \rho''\sigma''')\rho' \\ &= \rho'''(\rho'\sigma'' - \rho''\sigma') = \rho'''W, \end{aligned}$$

так что $\rho''' = \varkappa\rho'' + \mu\rho'$; аналогично для σ'. Эти функции линейно независимы, поскольку в противном случае вронскиан $W = \rho'\sigma''-\rho''\sigma'$ обращался бы в нуль вопреки неравенству (16), и образуют базис пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (19). □

Лемма 3. *Тройка $(\mathbf{d}, \mathbf{d}', \mathbf{d}'')$ образует базис $\mathbb{R}^3$ в каждой точке интервала (α, β); при этом верно разложение*

$$\mathbf{d}''' = p\,\mathbf{d} + q\,\mathbf{d}' + r\,\mathbf{d}''. \tag{20}$$

Доказательство. По определению (10), вектор $\mathbf{d} = \varphi \times \varphi'$ ортогонален векторам φ и φ': $\mathbf{d}^T\varphi = \mathbf{d}^T\varphi' = 0$. Далее, $\mathbf{d}^T\varphi'' = \det(\varphi, \varphi', \varphi'') = W$. Наконец, $\varphi' \times \varphi' = 0$, поэтому $\mathbf{d}' = \varphi \times \varphi''$, откуда ${\mathbf{d}'}^T\varphi'' = 0$.

Дифференцируя тождества $\mathbf{d}^T\varphi = 0$ и $\mathbf{d}^T\varphi' = 0$, получаем ${\mathbf{d}'}^T\varphi = -\mathbf{d}^T\varphi' = 0$ и ${\mathbf{d}'}^T\varphi' = -\mathbf{d}^T\varphi'' = -W$. Дифференцируя эти два равенства ещё раз, находим ${\mathbf{d}''}^T\varphi = -{\mathbf{d}'}^T\varphi' = W$ и ${\mathbf{d}''}^T\varphi' = -W' - {\mathbf{d}'}^T\varphi'' = -W'$. Таким образом,

$${\mathbf{d}'}^T\varphi = 0, \qquad {\mathbf{d}'}^T\varphi' = -W, \qquad {\mathbf{d}''}^T\varphi = W, \qquad {\mathbf{d}''}^T\varphi' = -W'. \tag{21}$$

Покажем теперь, что тройка $(\mathbf{d}, \mathbf{d}', \mathbf{d}'')$ линейно независима. В силу тождества $(\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \times (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_1 \det(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3)$, при $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) = (\varphi, \varphi', \varphi'')$ имеем $\mathbf{d} \times \mathbf{d}' = W\varphi$. Поэтому

$$\det(\mathbf{d}, \mathbf{d}', \mathbf{d}'') = (\mathbf{d} \times \mathbf{d}')^T\mathbf{d}'' = W\,{\mathbf{d}''}^T\varphi = W^2 \neq 0 \tag{22}$$

в силу неравенства (16). Значит, тройка $(\mathbf{d}, \mathbf{d}', \mathbf{d}'')$ линейно независима в каждой точке интервала (α, β), так что эта тройка образует базис $\mathbb{R}^3$.

Покажем, наконец, что выполнено равенство (20), т.е. каждая из компонент $[\mathbf{d}]_0$, $[\mathbf{d}]_1$, $[\mathbf{d}]_2$ удовлетворяет скалярному уравнению $w''' = p\,w + q\,w' + r\,w''$. Начнём с компонент $[\mathbf{d}]_1 = -\sigma'$ и $[\mathbf{d}]_2 = \rho'$, которые,

по лемме 2, являются решениями уравнения (19). Пусть z — произвольное решение уравнения (19). Дифференцируя (19) и подставляя в результат $z'' = \varkappa z' + \mu z$, получаем

$$z''' = \varkappa' z' + \varkappa z'' + \mu' z + \mu z' = (\mu' + \varkappa\mu)\, z + (\varkappa' + \varkappa^2 + \mu)\, z',$$

а при коэффициентах (18) имеем

$$p\, z + q\, z' + r\, z'' = (p + r\mu)\, z + (q + r\varkappa)\, z' = (\mu' + \varkappa\mu)\, z + (\varkappa' + \varkappa^2 + \mu)\, z',$$

так что $z''' = p\, z + q\, z' + r\, z''$; в частности, это верно для $z = [\mathbf{d}]_1$ и $z = [\mathbf{d}]_2$.

Перейдём к компоненте $[\mathbf{d}]_0$. Для $w_0 := [\mathbf{d}]_0 = \rho\sigma' - \sigma\rho'$ имеем $w_0' = \rho\sigma'' - \sigma\rho''$ и $w_0'' = \rho\sigma''' - \sigma\rho''' + W$. По лемме 2, $\rho''' = \varkappa\rho'' + \mu\rho'$ и $\sigma''' = \varkappa\sigma'' + \mu\sigma'$, откуда $\rho\sigma''' - \sigma\rho''' = \varkappa w_0' + \mu w_0$, т.е.

$$w_0'' = \varkappa w_0' + \mu w_0 + W.$$

Дифференцируя это равенство и подставляя $W' = \varkappa W$ и $W = w_0'' - \varkappa w_0' - \mu w_0$, получаем

$$\begin{aligned} w_0''' &= \varkappa' w_0' + \varkappa w_0'' + \mu' w_0 + \mu w_0' + \varkappa W \\ &= \varkappa' w_0' + \varkappa w_0'' + \mu' w_0 + \mu w_0' + \varkappa w_0'' - \varkappa^2 w_0' - \varkappa\mu w_0 \\ &= (\mu' - \varkappa\mu)\, w_0 + (\varkappa' + \mu - \varkappa^2)\, w_0' + 2\varkappa\, w_0'' = p\, w_0 + q\, w_0' + r\, w_0''. \end{aligned}$$

Итак, все три компоненты вектор-функции $\mathbf{d}$ удовлетворяют уравнению $w''' = p\, w + q\, w' + r\, w''$, что и означает (20). □

Зафиксируем $y_0 \in (\alpha, \beta)$. Поскольку лемма 3 гарантирует, что тройка $(\mathbf{d}, \mathbf{d}', \mathbf{d}'')(y_0)$ — базис пространства $\mathbb{R}^3$, каждый вектор $\mathbf{d}(y)$ единственным образом раскладывается по этому базису:

$$\mathbf{d}(y) = A(y)\, \mathbf{d}(y_0) + B(y)\, \mathbf{d}'(y_0) + C(y)\, \mathbf{d}''(y_0), \qquad y \in (\alpha, \beta). \tag{23}$$

Лемма 4. *Функции A, B, C, введённые в разложении* (23)*, являются решениями уравнения*

$$w''' = p\, w + q\, w' + r\, w'' \tag{24}$$

с начальными данными $(A, A', A'')(y_0) = (1, 0, 0)$, $(B, B', B'')(y_0) = (0, 1, 0)$, $(C, C', C'')(y_0) = (0, 0, 1)$, причём для любых $u, y_1, y_2 \in (\alpha, \beta)$

$$\Delta(y_0, u) = -W(y_0)\big[B(u) + \varkappa(y_0)\, C(u)\big], \tag{25}$$

$$G(y_0, y_1, y_2) = W^2(y_0)\big[B(y_1)C(y_2) - B(y_2)C(y_1)\big]. \tag{26}$$

Доказательство. Обозначим через D_0 матрицу, столбцами которой служат векторы $\mathbf{d}(y_0)$, $\mathbf{d}'(y_0)$, $\mathbf{d}''(y_0)$. Эта матрица постоянна, её определитель, согласно формуле (22), равен $W^2(y_0) \neq 0$, поэтому она невырождена.

Положим $\mathbf{w} := (A, B, C)^T$. Тогда разложение (23) во введённых обозначениях записывается как $\mathbf{d} = D_0\mathbf{w}$, откуда $\mathbf{w} = D_0^{-1}\mathbf{d}$. Поскольку обратная матрица D_0^{-1} постоянна, при дифференцировании она выносится как константа, так что $\mathbf{w}^{(k)}(t) = D_0^{-1}\mathbf{d}^{(k)}(t)$ при всех $k \geqslant 0$.

Умножим равенство (20) из леммы 3 слева на D_0^{-1}. Слева получится $\mathbf{w}'''$, справа $-\,p\,\mathbf{w} + q\,\mathbf{w}' + r\,\mathbf{w}''$, так что каждая из функций A, B, C есть решение уравнения (24). Начальные данные этих решений даёт то же равенство $\mathbf{w}^{(k)} = D_0^{-1}\mathbf{d}^{(k)}$ при $y = y_0$ и $k = 0, 1, 2$: векторы $\mathbf{d}(y_0), \mathbf{d}'(y_0), \mathbf{d}''(y_0)$ – это первый, второй и третий столбцы матрицы D_0, поэтому применение к ним D_0^{-1} даёт соответствующие столбцы единичной матрицы. Следовательно, $\mathbf{w}(y_0) = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{w}'(y_0) = (0, 1, 0)^T$ и $\mathbf{w}''(y_0) = (0, 0, 1)^T$.

Докажем равенство (25). Умножим (23) при $y = u$ скалярно на $\varphi'(y_0)$. Слагаемое с $A(u)$ обращается в нуль, поскольку $\mathbf{d}^T(y_0)\varphi'(y_0) = 0$, а два оставшихся слагаемых вычисляются по формулам (21), так что, используя представление (11), имеем

$$\begin{aligned}\Delta(y_0, u) = \mathbf{d}^T(u)\varphi'(y_0) &= B(u)\,\mathbf{d}'^T(y_0)\varphi'(y_0) + C(u)\,\mathbf{d}''^T(y_0)\varphi'(y_0)\\ &= -W(y_0)B(u) - W'(y_0)C(u),\end{aligned}$$

что вместе с равенством $W' = \varkappa W$ даёт первое искомое утверждение (25).

Докажем равенство (26). Используя определение (12) и разложение (23), находим

$$\begin{aligned}G(y_0, y_1, y_2) &= \det\big(D_0\mathbf{w}(y_0), D_0\mathbf{w}(y_1), D_0\mathbf{w}(y_2)\big)\\ &= \det D_0 \cdot \det\big(\mathbf{w}(y_0), \mathbf{w}(y_1), \mathbf{w}(y_2)\big),\end{aligned}$$

где $\det D_0 = W^2(y_0)$. Первый столбец оставшегося определителя равен $\mathbf{w}(y_0) = (1, 0, 0)^T$, и разложение по нему даёт $B(y_1)C(y_2) - B(y_2)C(y_1)$. Отсюда следует равенство (26). $\square$

Лемма 5 (Критерий Валле–Пуссена [9]). *Пусть на отрезке* $[0, L]$ *задано дифференциальное уравнение порядка* m

$$w^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i(t)\, w^{(i)}(t), \qquad t \in [0, L], \tag{27}$$

с непрерывными коэффициентами $c_i(t)$, *которые удовлетворяют неравенствам* $\max_{t\in[0,L]} |c_i(t)| \leqslant C_i$ *с некоторыми постоянными* $C_i \geqslant 0$. *Если*

$$\sum_{i=0}^{m-1} C_i \frac{L^{m-i}}{(m-i)!} < 1, \tag{28}$$

то всякое нетривиальное решение уравнения (27) *имеет на* $[0, L]$ *не более* $m-1$ *нулей с учётом кратности.*

Установленные выше утверждения позволяют выразить достаточное условие допустимости сетки через величины (17) и (18). Положим

$$\begin{gathered} K := \sup_{t\in(\alpha,\beta)} |\varkappa(t)|, \qquad \bar{\mu} := \sup_{t\in(\alpha,\beta)} |\mu(t)|, \\ P := \sup_{t\in(\alpha,\beta)} |p(t)|, \qquad Q := \sup_{t\in(\alpha,\beta)} |q(t)|, \qquad R := \sup_{t\in(\alpha,\beta)} |r(t)|. \end{gathered} \tag{29}$$

Теорема 5. *Пусть определенные равенствами* (29) *величины* $K, \bar{\mu}, P, Q, R$ *конечны. Если максимальный шаг сетки* (1) *удовлетворяет системе неравенств*

$$\begin{cases} Kh + \dfrac{\bar{\mu}}{2}\, h^2 < 1, \\ 2Rh + 2Qh^2 + \dfrac{4P}{3}\, h^3 < 1, \end{cases} \tag{30}$$

то сетка (1) *допустима и квадратичные минимальные координатные сплайны существуют. В частности, при* $K = \bar{\mu} = 0$ *неравенства* (30) *выполняются для любой сетки вида* (1).

Доказательство. По определению (15), допустимость сетки означает, что $\Delta(x_j, x_{j+1}) \neq 0$ при $j \in J_{-1,n}$ и $G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \neq 0$ при $j \in J_{0,n}$. Оба условия доказываются от противного по одной схеме: если бы $\Delta(x_j, x_{j+1}) = 0$, то нашлось бы нетривиальное решение уравнения (19) второго порядка с двумя нулями на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ длины $h_j \leqslant h$; если бы $G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) = 0$, то нашлось бы нетривиальное решение уравнения (24) третьего порядка с тремя нулями на отрезке

$[x_{j-1}, x_{j+1}]$ длины $h_{j-1} + h_j \leqslant 2h$. Первое из неравенств (30) исключает первую ветвь указанной схемы, если применить лемму 5 с $L = h$; второе неравенство исключает вторую ветвь с $L = 2h$.

Уточним применение леммы 5. Величины (29) мажорируют модули коэффициентов уравнений (19) и (24) на всём интервале (α, β), поэтому после сдвига переменной лемма применима к любому отрезку $[t_0, t_0 + L] \subset (\alpha, \beta)$, а так как левая часть (28) возрастает по L, то и к любому более короткому отрезку. Для уравнения (19) имеем $m = 2$, $C_0 = \bar{\mu}$, $C_1 = K$, и при $L = h$ условие (28) принимает вид $Kh + \frac{\bar{\mu}}{2}h^2 < 1$; для уравнения (24) имеем: $m = 3$, $C_0 = P$, $C_1 = Q$, $C_2 = R$, и при $L = 2h$ условие (28) принимает вид

$$R\,(2h) + Q\,\frac{(2h)^2}{2} + P\,\frac{(2h)^3}{6} = 2Rh + 2Qh^2 + \frac{4P}{3}\,h^3 < 1.$$

Это в точности неравенства (30). Итак, всякое нетривиальное решение уравнения (19) имеет не более одного нуля на любом отрезке длины не более h, а всякое нетривиальное решение уравнения (24) — не более двух нулей на любом отрезке длины не более $2h$.

Докажем сначала, что $\Delta(x_j, x_{j+1}) \neq 0$ при $j \in J_{-1,n}$. Зафиксируем $u = x_{j+1}$ и рассмотрим функцию одной переменной $z(t) := \Delta(t, u) = \rho'(u)\sigma'(t) - \sigma'(u)\rho'(t)$. Это линейная комбинация функций ρ' и σ', образующих, по лемме 2, базис решений уравнения (19) с коэффициентами $-\sigma'(u)$ и $\rho'(u)$; они не равны нулю одновременно, так как при $\rho'(u) = \sigma'(u) = 0$ было бы $W(u) = \rho'(u)\sigma''(u) - \rho''(u)\sigma'(u) = 0$ вопреки (16). Значит, z – нетривиальное решение уравнения (19), причём $z(x_{j+1}) = \Delta(u, u) = 0$. Предположим, что $\Delta(x_j, x_{j+1}) = 0$, т.е. $z(x_j) = 0$. Тогда z имеет два нуля на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ длины $h_j \leqslant h$, что невозможно. Следовательно, $\Delta(x_j, x_{j+1}) \neq 0$.

Докажем теперь, что $G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \neq 0$ при $j \in J_{0,n}$. Всюду в этом абзаце $y_0 = x_{j-1}$, а B и C — отвечающие этой точке решения уравнения (24) из леммы 4; напомним, что $B(y_0) = C(y_0) = 0$ и, по формуле (26),

$$G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) = W^2(x_{j-1})\big[B(x_j)C(x_{j+1}) - B(x_{j+1})C(x_j)\big].$$

Покажем, что из равенства $G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) = 0$ следовало бы существование нетривиального решения уравнения (24) с нулями во всех трёх узлах x_{j-1}, x_j, x_{j+1}. Предположим, что $G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) = 0$. Так

как $W \neq 0$, выражение в квадратных скобках равно нулю, т.е. векторы $\big(B(x_j), B(x_{j+1})\big)$ и $\big(C(x_j), C(x_{j+1})\big)$ линейно зависимы. Значит найдутся числа $(\lambda, \nu) \neq (0,0)$, для которых функция $w := \lambda B + \nu C$ обращается в нуль в точках x_j и x_{j+1}. Функция w — решение уравнения (24) с начальными данными $\big(w, w', w''\big)(y_0) = (0, \lambda, \nu) \neq (0,0,0)$, поэтому она нетривиальна, а $w(x_{j-1}) = w(y_0) = 0$. Итак, w имеет три нуля на отрезке $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ длины $h_{j-1} + h_j \leqslant 2h$, что невозможно. Следовательно, $G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \neq 0$.

Итак, сетка допустима, и, по теореме 4, квадратичные минимальные координатные сплайны существуют. Если $K = \bar{\mu} = 0$, то $\varkappa \equiv \mu \equiv 0$, а ввиду равенств (18) имеем $p \equiv q \equiv r \equiv 0$. Следовательно, оба неравенства (30) выполнены при любом h. □

Если вронскиан $W(t)$ и величина $\mu(t)$ постоянны, то уравнение (24) решается явно, и вместо неравенств (30) получается ограничение на шаг сетки, гарантирующее выполнение условий критерия на всякой сетке с данным максимальным шагом, причём это ограничение неулучшаемо.

Следствие 2. *Пусть* $W(t) = W = \mathrm{const}$ *и* $\mu(t) = \mu = \mathrm{const}$. *Тогда при* $\mu \geqslant 0$ *допустима любая сетка вида* (1), *а при* $\mu < 0$ *— всякая сетка, максимальный шаг которой удовлетворяет неравенству*

$$h < \frac{\pi}{\sqrt{-\mu}}. \tag{31}$$

Неравенство (31) *неулучшаемо: всякая сетка, содержащая пару соседних узлов на расстоянии* $\pi/\sqrt{-\mu}$, *недопустима.*

Доказательство. Постоянство вронскиана W означает, что $\varkappa \equiv 0$. Поэтому, в силу (18), $p \equiv r \equiv 0$ и $q \equiv \mu$, а уравнение (24) принимает вид $w''' = \mu\, w'$. Его коэффициенты постоянны, поэтому решения B и C зависят лишь от разности $\eta = y - y_0$; далее они рассматриваются как функции от переменной η. Решения с начальными данными $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$ выписываются явно:

$$\mu > 0: \quad B = \frac{\operatorname{sh} s\eta}{s}, \quad C = \frac{\operatorname{ch} s\eta - 1}{s^2}, \quad s = \sqrt{\mu};$$

$$\mu = 0: \quad B = \eta, \quad C = \frac{\eta^2}{2};$$

$$\mu < 0: \quad B = \frac{\sin \gamma\eta}{\gamma}, \quad C = \frac{1 - \cos \gamma\eta}{\gamma^2}, \quad \gamma = \sqrt{-\mu}.$$

Выразим величины, входящие в условие допустимости (15), через B и C. Так как $\varkappa \equiv 0$, равенства (25) и (26) принимают вид:

$$\Delta(y_0, y_1) = -W\, B(\eta_1),$$
$$G(y_0, y_1, y_2) = W^2\big[B(\eta_1)C(\eta_1+\eta_2) - B(\eta_1+\eta_2)C(\eta_1)\big],$$

где $\eta_1 = y_1 - y_0$, $\eta_2 = y_2 - y_1$. Подстановка выписанных решений с последующим применением формул преобразования произведений тригонометрических и гиперболических функций приводит к следующим представлениям выражения в квадратных скобках:

$$\mu > 0: \quad \frac{4}{s^3}\,\operatorname{sh}\frac{s\eta_1}{2}\,\operatorname{sh}\frac{s\eta_2}{2}\,\operatorname{sh}\frac{s(\eta_1+\eta_2)}{2};$$
$$\mu = 0: \quad \frac{\eta_1\eta_2(\eta_1+\eta_2)}{2};$$
$$\mu < 0: \quad \frac{4}{\gamma^3}\,\sin\frac{\gamma\eta_1}{2}\,\sin\frac{\gamma\eta_2}{2}\,\sin\frac{\gamma(\eta_1+\eta_2)}{2}.$$

Поскольку $W \neq 0$, условие допустимости (15) равносильно тому, что $B(h_j) \neq 0$ при $j \in J_{-1,n}$ и выражение в квадратных скобках отлично от нуля при $\eta_1 = h_{j-1}$, $\eta_2 = h_j$, $j \in J_{0,n}$.

Пусть $\mu \geqslant 0$. Тогда $B(\eta_1) > 0$ при $\eta_1 > 0$, а все сомножители в выражении в квадратных скобках положительны при $\eta_1, \eta_2 > 0$. Поэтому $\Delta \neq 0$ и $G \neq 0$, а значит сетка допустима при любом шаге.

Пусть $\mu < 0$ и $h < \pi/\gamma$. Для $j \in J_{-1,n}$ имеем $0 < \gamma h_j \leqslant \gamma h < \pi$, поэтому $B(h_j) = \sin(\gamma h_j)/\gamma > 0$ и $\Delta \neq 0$. Для $j \in J_{0,n}$ все три числа $\gamma h_{j-1}/2$, $\gamma h_j/2$ и $\gamma(h_{j-1}+h_j)/2$ лежат в интервале $(0, \pi)$, поскольку $h_{j-1} + h_j \leqslant 2h < 2\pi/\gamma$. Таким образом, все три сомножителя и выражение в квадратных скобках положительны, $G \neq 0$ и сетка допустима.

Пусть, наконец, $\mu < 0$ и $h_j = \pi/\gamma$ при некотором $j \in J_{-1,n}$. Тогда $B(\pi/\gamma) = 0$, поэтому $\Delta(x_j, x_{j+1}) = 0$, и сетка недопустима. □

Замечание 5. Достаточное условие теоремы 5 получено из критерия Валле-Пуссена (28), в который коэффициенты уравнений (19) и (24) входят лишь мажорантами своих модулей. Знаки коэффициентов при этом не учитываются, и доставляемое критерием ограничение на шаг оказывается, вообще говоря, строже требуемого допустимостью сетки. Так, для уравнения $w''' = -\gamma^2 w'$, отвечающего постоянным W и $\mu = -\gamma^2$, неравенства (30) дают оценку $h < 1/(\gamma\sqrt{2})$, тогда как, по следствию 2, допустима всякая сетка с $h < \pi/\gamma$.

Допустимость (15) состоит в отличии от нуля величин (11) и (12), однако на мелкой сетке эти величины сами малы: они убывают как h и h^3 соответственно. Устранить это убывание можно делением на выражение того же порядка малости, составленное из шагов сетки. Действительно, $\Delta(y_0, y_0) = \mathbf{d}^T(y_0)\varphi'(y_0) = 0$, поэтому, в силу равенств (21), при $y_1 \to y_0$ имеем:

$$\frac{\Delta(y_0, y_1)}{y_1 - y_0} = \frac{\big(\mathbf{d}(y_1) - \mathbf{d}(y_0)\big)^T}{y_1 - y_0}\,\varphi'(y_0) \to \mathbf{d}'^T(y_0)\varphi'(y_0) = -W(y_0). \quad (32)$$

Далее, вычитая в определителе (12) первый столбец из остальных, а затем второй из третьего, получаем

$$G(y_0, y_1, y_2) = (y_1 - y_0)(y_2 - y_1)(y_2 - y_0)\det\big(\mathbf{d}(y_0),\ \mathbf{d}[y_0, y_1],\ \mathbf{d}[y_0, y_1, y_2]\big),$$

где через $\mathbf{d}[y_0, y_1]$ и $\mathbf{d}[y_0, y_1, y_2]$ обозначены разделённые разности первого и второго порядков вектор-функции $\mathbf{d}(t)$. При $y_1, y_2 \to y_0$ они стремятся к $\mathbf{d}'(y_0)$ и $\mathbf{d}''(y_0)/2$ соответственно, поэтому, согласно представлению (22), находим

$$\frac{2\,G(y_0, y_1, y_2)}{(y_1 - y_0)(y_2 - y_1)(y_2 - y_0)} \to \det\big(\mathbf{d}(y_0), \mathbf{d}'(y_0), \mathbf{d}''(y_0)\big) = W^2(y_0). \quad (33)$$

В силу предположения (16), полученные пределы (32)–(33) отличны от нуля, поэтому отношения

$$\frac{\Delta(x_j, x_{j+1})}{h_j}, \qquad \frac{2\,G(x_{j-1}, x_j, x_{j+1})}{h_{j-1}h_j(h_{j-1} + h_j)} \quad (34)$$

на мелкой сетке отделены от нуля. Таким образом, проверку условий допустимости сетки удобнее вести по отношениям (34), а не по самим величинам Δ и G.

§6. Порождающие функции и сеточные ограничения

Полученные выше условия существования квадратичных минимальных координатных сплайнов различаются по характеру. Теорема 4 даёт необходимое и достаточное условие, но формулируется в терминах заданной сетки: при $\rho, \sigma \in C^2(\alpha, \beta)$ требуется проверка $2n + 3$ условий, и проверка выполняется для каждой сетки отдельно. Теорема 5 даёт достаточное условие, зато входящие в неравенства (30) величины (29) вычисляются по порождающей вектор-функции один

раз и пригодны сразу для всех сеток с данным максимальным шагом; при этом, однако, необходима повышенная гладкость функций $\rho, \sigma \in C^4(\alpha, \beta)$, а оценка шага содержит запас.

Далее полученные условия применяются к пяти различным порождающим вектор-функциям квадратичных сплайнов. У трёх из них — полиномиальной, гиперболической и тригонометрической — вронскиан W и величина μ постоянны, поэтому применимо следствие 2. Для логарифмических спиралей вронскиан не постоянен, однако условия удаётся проверить сразу для всех сеток с данным максимальным шагом, что позволяет сопоставить их с оценкой теоремы 5. Для архимедовой спирали такая проверка недоступна, и ограничение на шаг доставляет только теорема 5.

Однако прежде чем переходить к квадратичным сплайнам, рассмотрим несколько примеров линейных минимальных сплайнов, для которых условия существования проверяются непосредственно.

6.1. Линейные минимальные сплайны. В линейном случае условие (6) содержит только узлы $x_0, \ldots, x_n$, и, по следствию 1, сеточные ограничения либо отсутствуют вовсе, либо не снимаются измельчением сетки; ограничение на шаг, подобное используемому в теореме 5, здесь невозможно.

Для строго монотонных функций ρ, например, $\rho(t) = t$, $\rho(t) = \operatorname{sh} t$ или $\rho(t) = e^t$ линейные минимальные сплайны существуют на всякой сетке вида (1).

Для $\rho(t) = \sin t$ условие $\sin x_{j+1} \neq \sin x_j$ нарушается лишь в двух случаях: когда шаг h_j кратен 2π и когда узлы x_j и x_{j+1} расположены симметрично относительно точки $\pi/2 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Поэтому условие (6) выполнено тогда и только тогда, когда ни один из шагов h_j, $j \in J_{0,n-1}$, не кратен 2π и ни одна пара соседних узлов x_j, x_{j+1}, $j \in J_{0,n-1}$, не симметрична относительно такой точки. В частности, если интервал (a, b) не содержит точек вида $\pi/2 + \pi m$, то функция $\sin t$ на отрезке $[a, b]$ строго монотонна, и сплайны существуют на всякой сетке; в противном случае, согласно следствию 1, найдётся сколь угодно мелкая сетка, на которой сплайны не существуют.

6.2. Квадратичные полиномиальные, гиперболические и тригонометрические сплайны. Для вектор-функции $\varphi^{\mathcal{B}}(t) = (1, t, t^2)^T$, отвечающей квадратичным полиномиальным B-сплайнам, имеем $W(t) = 2$ и $V(t) = 0$, поэтому $\varkappa \equiv 0$ и $\mu \equiv 0$. Вронскиан постоянен,

величина μ постоянна и не является отрицательной, и, по следствию 2, условия существования сплайнов выполнены. Тем самым квадратичные полиномиальные B-сплайны существуют на всякой сетке вида (1).

В случае гиперболической порождающей вектор-функции $\varphi^{\mathcal{H}}(t) = (1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)^T$ [4] имеем $W(t) = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ и $V(t) = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, откуда $\varkappa \equiv 0$ и $\mu \equiv 1$. Вронскиан постоянен, величина μ постоянна и положительна, а поэтому гиперболические минимальные сплайны также существуют на всякой сетке вида (1).

Для тригонометрической порождающей вектор-функции $\varphi^{\mathcal{T}}(t) = (1, \sin t, \cos t)^T$ [11] имеем

$$W(t) = -\cos^2 t - \sin^2 t = -1 \quad \text{и} \quad V(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

откуда $\varkappa \equiv 0$ и $\mu \equiv -1$. Здесь μ отрицательна, и, по следствию 2, допустима всякая сетка с $h < \pi/\sqrt{-\mu} = \pi$. Это условие достаточно, но не необходимо: подстановка $\rho(t) = \sin t$, $\sigma(t) = \cos t$ в формулы (11) и (12) даёт

$$\Delta(t, u) = \sin(u - t),$$

$$G(y_0, y_1, y_2) = 4 \sin \frac{\eta_1}{2} \sin \frac{\eta_2}{2} \sin \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}, \quad \eta_1 := y_1 - y_0, \quad \eta_2 := y_2 - y_1.$$

Условие $\Delta(x_j, x_{j+1}) \neq 0$ означает, что шаг h_j не кратен π. При этом условии первые два сомножителя в G отличны от нуля, поскольку их обращение в нуль потребовало бы кратности шага числу 2π; остаётся требование $\sin \frac{h_{j-1}+h_j}{2} \neq 0$. Поэтому сетка допустима тогда и только тогда, когда ни один шаг h_j, $j \in J_{-1,n}$, не кратен π и ни одна сумма $h_{j-1} + h_j$, $j \in J_{0,n}$, соседних шагов не кратна 2π; в частности, допустима равномерная сетка с шагом $3\pi/2$.

Существование сплайнов не означает, однако, их неотрицательности: на той же равномерной сетке с шагом $3\pi/2$ функция ω_j при $j \in J_{0,n-3}$ принимает в середине интервала (x_{j+1}, x_{j+2}) значение $-\sqrt{2}/2$. Неотрицательность квадратичных тригонометрических сплайнов обеспечивается условием $h < \pi$ [3].

6.3. Логарифмические спирали. Пусть порождающая вектор-функция имеет вид $\varphi^{\mathcal{S}}(t) := \big(1, \rho(t), \sigma(t)\big)^T = \big(1,\ e^{kt} \cos t,\ e^{kt} \sin t\big)^T$ при $k > 0$; отвечающая ей кривая $t \mapsto (\rho(t), \sigma(t))$ является логарифмической спиралью. Подстановка в формулу (10) даёт

$$\mathbf{d}(t) = \big(e^{2kt},\ -(k \sin t + \cos t)e^{kt},\ (k \cos t - \sin t)e^{kt}\big)^T.$$

Прямым вычислением получаем

$$W(t) = (k^2+1)e^{2kt}, \qquad V(t) = -(k^2+1)^2 e^{2kt},$$
$$\varkappa \equiv 2k, \qquad \mu \equiv -(k^2+1),$$

так что $W(t) \neq 0$, однако вронскиан не является константой, и следствие 2 неприменимо.

Условия теоремы 4 в данном случае удаётся проверить сразу для всех сеток с $h < \pi$. По определению (11),

$$\Delta(t,u) = (k^2+1)e^{k(t+u)}\sin(t-u),$$

поэтому $\Delta(x_j, x_{j+1}) \neq 0$ при $h_j < \pi$.

Далее, по лемме 3, компоненты вектор-функции $\mathbf{d}(t)$ удовлетворяют уравнению (24) и линейно независимы, поскольку линейно независимы векторы $\mathbf{d}, \mathbf{d}', \mathbf{d}''$; следовательно, они образуют базис пространства решений этого уравнения, и равенство $G(y_0, y_1, y_2) = 0$ означает существование нетривиального решения с нулями y_0, y_1, y_2. Для вектор-функции $\varphi^{\mathcal{S}}$ все решения имеют вид $e^{kt}f(t)$, где

$$f(t) = ae^{kt} + b\cos t + c\sin t.$$

Пусть f обращается в нуль в точках $y_0 < y_1 < y_2$, причём $y_1 - y_0 < \pi$ и $y_2 - y_1 < \pi$. При $a = 0$ расстояние между любыми двумя нулями функции f кратно π, что несовместимо с $0 < y_1 - y_0 < \pi$. При $a \neq 0$ функция

$$s := f'' + f = a(k^2+1)e^{kt}$$

знакопостоянна и не обращается в нуль, а для всякой функции ϕ, удовлетворяющей уравнению $\phi'' + \phi = 0$, верно равенство

$$(f'\phi - f\phi')' = s\phi.$$

Интегрируя его с функцией $\phi(t) = \sin(t - y_0)$ по $[y_0, y_1]$ и с функцией $\phi(t) = \sin(y_2 - t)$ по $[y_1, y_2]$, получаем

$$f'(y_1)\sin(y_1 - y_0) = \int_{y_0}^{y_1} s\phi\,dt, \qquad -f'(y_1)\sin(y_2 - y_1) = \int_{y_1}^{y_2} s\phi\,dt.$$

Внутри обоих отрезков $\phi > 0$, поэтому правые части отличны от нуля и одного знака, тогда как левые части либо обе одновременно равны нулю, либо имеют противоположные знаки; это ведёт к противоречию.

Итак, при $h < \pi$ сетка допустима, а число π заменить большим нельзя: всякая сетка, содержащая пару соседних узлов на расстоянии π, недопустима, поскольку для неё $\Delta(x_j, x_{j+1}) = 0$.

Теорема 5 даёт для φ^S более грубое, но получаемое одной подстановкой ограничение. Использование формул (18) приводит к выражениям $p \equiv 2k(k^2{+}1)$, $q \equiv -(5k^2{+}1)$ и $r \equiv 4k$. Все эти величины постоянны, поэтому, по определению (29), имеем: $K = 2k$, $\bar{\mu} = k^2 + 1$, $P = 2k(k^2+1)$, $Q = 5k^2 + 1$, $R = 4k$. Тогда неравенства (30) принимают вид

$$\begin{cases} 2kh + \dfrac{k^2+1}{2}\,h^2 < 1, \\ 8kh + 2(5k^2+1)h^2 + \dfrac{8k(k^2+1)}{3}\,h^3 < 1. \end{cases}$$

Разность левых частей второго и первого неравенств равна

$$\frac{h}{6}\big(36k + 9h + 57k^2h + 16k(k^2+1)h^2\big)$$

и положительна при $h > 0$, поэтому достаточно проверить второе неравенство. Обозначим его левую часть через

$$F_k(h) := 8kh + 2(5k^2+1)h^2 + \frac{8k(k^2+1)}{3}\,h^3.$$

Все коэффициенты многочлена F_k положительны, поэтому F_k возрастает на $(0, +\infty)$. При $k \to \infty$ и при $k \to 0$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} F_k\Big(\frac{c}{k}\Big) = 8c + 10c^2 + \frac{8}{3}c^3, \qquad \lim_{k\to 0} F_k(h) = 2h^2.$$

Первый предел, например, при $c = 1/10$ равен $677/750$ и меньше единицы; второй, соответственно, меньше единицы при $h < 1/\sqrt{2}$. Таким образом, при больших k неравенство $F_k(h) < 1$ выполняется лишь при шаге порядка $1/k$, а при малых k допускает шаг, отделённый от нуля.

Обоим предельным соотношениям отвечает значение

$$\hat{h}_k := \frac{2}{20k+3},$$

для которого $k\hat{h}_k \to 1/10$ при $k \to \infty$ и $\hat{h}_k \to 2/3 < 1/\sqrt{2}$ при $k \to 0$. Подстановка $h = \hat{h}_k$ даёт

$$1 - F_k(\hat{h}_k) = \frac{2336k^3 + 4680k^2 + 644k + 9}{3(20k+3)^3} > 0,$$

поскольку все коэффициенты числителя положительны. По теореме 5, отвечающие $\varphi^{\mathcal{S}}$ минимальные сплайны существуют на всякой сетке, максимальный шаг которой удовлетворяет неравенству $h \leqslant \hat{h}_k$; например, при $k = 1$ это даёт $h \leqslant 2/23$. Сравнение с условием $h < \pi$ показывает, что неравенства (30), не учитывающие знаков коэффициентов уравнений (19) и (24), теряют здесь не только постоянный множитель, но и независимость ограничения от k. Вместе с тем ограничение теоремы 5 гарантировано для любой порождающей вектор-функции с конечными величинами (29), тогда как проверка условий сразу для всех сеток опирается на явный вид решений уравнения (24) и в общем случае недоступна.

6.4. Архимедова спираль. Пусть $\varphi^{\mathcal{A}}(t) = (1,\ t\cos t,\ t\sin t)^T$; отвечающая ей кривая является архимедовой спиралью. Прямое вычисление даёт

$$W(t) = t^2 + 2, \qquad V(t) = -(t^2 + 6),$$
$$\varkappa(t) = \frac{2t}{t^2+2}, \qquad \mu(t) = -\frac{t^2+6}{t^2+2},$$

так что $W(t) \neq 0$, но ни W, ни μ не постоянны, и следствие 2 неприменимо. Компоненты вектор-функции $\mathbf{d}(t)$ равны t^2, $-(t\cos t + \sin t)$ и $\cos t - t\sin t$, так что решения уравнения (24) имеют вид

$$w = at^2 + b(t\cos t + \sin t) + c(\cos t - t\sin t),$$
$$w'' + w = a(t^2+2) - 2b\sin t - 2c\cos t,$$

и, в отличие от случая логарифмической спирали, функция $w'' + w$ не является знакопостоянной для всех нетривиальных решений: при $a = 0$ и $(b, c) \neq (0, 0)$ она равна $-2b\sin t - 2c\cos t$ и меняет знак. Поэтому рассуждение предыдущего пункта к порождающей $\varphi^{\mathcal{A}}$ неприменимо, и неулучшаемого ограничения вида $h < h_0$ таким путём получить не удаётся.

Теорема 5, напротив, даёт единое условие для всех сеток. По формулам (18) находим

$$p(t) = \frac{2t(t^2+10)}{(t^2+2)^2}, \qquad q(t) = -\frac{t^4+14t^2+8}{(t^2+2)^2}, \qquad r(t) = \frac{4t}{t^2+2},$$

причём все эти функции ограничены на всей оси: $|\varkappa| \leqslant 1/\sqrt{2}$, $|\mu| \leqslant 3$, $|p| \leqslant 5/2$, $|q| \leqslant 41/16$, $|r| \leqslant \sqrt{2}$. Поэтому величины (29) не превосходят $1/\sqrt{2}$, 3, 5/2, 41/16 и $\sqrt{2}$ соответственно. Например, при $h = 1/5$

неравенства (30) выполнены тем более:

$$\frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{3}{50} < 1, \qquad \frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{41}{200} + \frac{2}{75} < 1.$$

Поэтому, согласно теореме 5, квадратичные минимальные координатные сплайны, отвечающие порождающей $\varphi^{\mathcal{A}}$, существуют на всякой сетке с шагом $h \leqslant 1/5$.

§7. Заключение

В работе рассмотрены условия существования минимальных сплайнов невысоких порядков. Для линейной нормализованной конструкции получен критерий существования: полнота цепочки равносильна различимости соседних значений порождающей сплайн вектор-функции, так что существование сплайнов либо не требует ограничений на сетку, либо не обеспечивается никаким ограничением на её шаг.

Для квадратичной нормализованной конструкции получен необходимый и достаточный критерий полноты цепочки, выраженный через величины, которые вычисляются по значениям порождающей вектор-функции и её первой производной в двух или трёх соседних узлах; число локальных проверок линейно по числу интервалов сетки.

При дополнительной гладкости порождающей вектор-функции указано явное достаточное ограничение на максимальный шаг сетки, выраженное через определители, составленные из порождающей вектор-функции и её производных. Введённое ограничение отвечает качественному результату из работы [7], в которой такой шаг устанавливается без указания его значения, и не требует локальной квазиравномерности сетки. Тем самым априорные оценки точности аппроксимации минимальными сплайнами, устанавливаемые на сетках с гарантированным существованием сплайнов, получают явно описанную область применимости. Впрочем, это ограничение достаточно, но не необходимо: для гиперболической порождающей сплайны существуют на любой сетке, а для тригонометрической сетка допустима тогда и только тогда, когда ни один шаг не кратен π и ни одна сумма соседних шагов не кратна 2π. Рассмотренные примеры (полиномиальная, гиперболическая и тригонометрическая порождающие вектор-функции, а также

логарифмические спирали и архимедова спираль) показывают три возможности: ограничение на шаг отсутствует вовсе; существует неулучшаемое достаточное ограничение на максимальный шаг; наконец, когда проверка условий сразу для всех сеток с данным максимальным шагом недоступна, явную оценку шага доставляет теорема 5.

Список литературы

1. И. Г. Бурова, Ю. К. Демьянович, *Минимальные сплайны и их приложения.* СПб, 2010.
2. Ю. К. Демьянович, *Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны.* СПб, 1994.
3. Ю. К. Демьянович, А. А. Макаров, *Необходимые и достаточные условия неотрицательности координатных тригонометрических сплайнов второго порядка.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, **4 (62)**, No. 1 (2017), 9–16.
4. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *Об аппроксимации гиперболическими сплайнами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 179–194.
5. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *Об одном методе решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 113–125.
6. Л. П. Лившиц, А. А. Макаров, С. В. Макарова, *О квазилинейной интерполяции минимальными сплайнами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **524** (2023), 94–111.
7. А. А. Макаров, *О построении сплайнов максимальной гладкости.* — Пробл. матем. анал. **60** (2011), 25–38.
8. J. M. Carnicer, E. Mainar, J. M. Peña, *Critical length for design purposes and extended Chebyshev spaces.* — Constr. Approx. **20**, No. 1 (2003), 55–71.
9. W. A. Coppel, *Disconjugacy.* Lecture Notes in Math. **220**, Springer, Berlin, 1971.
10. R. Goldman, I. Jegdic, P. Simeonov, *A universal approach to blossoming with applications to Bernstein bases and Bézier curves for arbitrary function spaces.* — Calcolo **62** (2025), 24.
11. O. Kosogorov, A. Makarov, *On some piecewise quadratic spline functions.* — Lect. Notes Comput. Sci. **10187** (2017), 448–455.
12. Y. Li, G. Wang, *Two kinds of B-basis of the algebraic hyperbolic space.* — J. Zhejiang Univ. Sci. **6A**, No. 7 (2005), 750–759.
13. T. Lyche, C. Manni, H. Speleers, *Foundations of spline theory: B-splines, spline approximation, and hierarchical refinement.* — Lect. Notes Math. **2219** (2018), 1–76.
14. A. A. Makarov, *On example of circular arc approximation by quadratic minimal splines.* — Poincaré J. Anal. Appl. **5**, No. 2(II) (2018), 103–107.
15. A. Makarov, E. Kulikov, *Spline collocation for Volterra integral equations with improved accuracy.* — Numer. Algorithms (2026), https://doi.org/10.1007/s11075-026-02388-7.
16. C. Manni, H. Speleers, D. Toshniwal, *Isogeometric discrete differential forms with Tchebycheffian B-splines.* — J. Comput. Phys. **566** (2026), 115195.

17. M.-L. Mazure, *Towards existence of piecewise Chebyshevian B-spline bases.* — Numer. Algorithms **39**, No. 4 (2005), 399–414.
18. M.-L. Mazure, *How to build all Chebyshevian spline spaces good for geometric design?* — Numer. Math. **119**, No. 3 (2011), 517–556.
19. G. Micula, S. Micula, *Handbook of Splines.* Springer, Dordrecht, 1999.
20. K. Raval, C. Manni, H. Speleers, *Tchebycheffian B-splines in isogeometric Galerkin methods.* — Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. **403** (2023), 115648.
21. H. Speleers, *On the normalization of trigonometric and hyperbolic B-splines.* — Adv. Comput. Math. **51** (2025), 56.
22. G. Wang, Q. Chen, M. Zhou, *NUAT B-spline curves.* — Comput. Aided Geom. Design **21**, No. 2 (2004), 193–205.

Kulikov E. K., Makarov A. A., Makarova S. V., Shalymov D. S. Existence conditions for low-order minimal splines.

Existence criteria are derived for minimal splines of low orders. For linear minimal splines, existence is characterized by an inequality involving values of the generating vector function at adjacent grid points. For quadratic minimal splines, the completeness of a normalized chain is characterized in terms of quantities determined by values of the generating vector function and its first derivative at two or three consecutive grid points. Under an additional smoothness condition on the generating vector function, a sufficient upper bound for the maximum grid stepsize in terms of determinants formed from the generating vector function and its derivatives is derived. The conditions obtained are then applied to several generating vector functions. The examples considered demonstrate that the existence of splines may be guaranteed either for arbitrary grids, or for grids with a constraint on the maximum stepsize; otherwise splines may not exist at all.

Поступило 25 сентября 2026 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия

E-mail: egor.k.kulikov@gmail.com

E-mail: st122359@student.spbu.ru

E-mail: a.a.makarov@spbu.ru

E-mail: d.shalymov@spbu.ru

С.-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
ул. Большая Морская, 67,
190000, С.-Петербург, Россия

E-mail: a.a.makarov@spbu.ru