Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 554, 2026 г.

Л. Ю. Колотилина

ОБ ОДНОМ ПОДКЛАССЕ КЛАССА CKVT МАТРИЦ, СОДЕРЖАЩЕМ DZT МАТРИЦЫ

§1. Введение и предварительные сведения

В работе продолжается исследование различных подклассов класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, содержащих подкласс матриц, обладающих строгим диагональным преобладанием. До настоящего времени были введены в рассмотрение и исследовались многие такие подклассы. В частности, упомянем так называемые матрицы Дашница–Зусмановича (DZ матрицы), введённые в работе [1], S-SDD матрицы (см., например, [15]), SDD_1 матрицы, которые были предложены в статье [13] и исследовались, например, в работах [5, 9, 11], S-SDD_1 матрицы, введённые в [6], и SSDD матрицы, предложенные и исследованные в той же работе [6], а также новый класс S-DZ матриц, см. [7].

Традиционно в связи с невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами рассматриваются такие вопросы, как установление взаимосвязей между различными подклассами, вывод верхних оценок для l_∞-нормы обратных матриц, описание ассоциированных областей локализации собственных значений, а также получение соответствующих верхних оценок для перроновского корня неотрицательных матриц.

В этой работе мы вводим в рассмотрение и исследуем новый класс так называемых S-DZT матриц, где S – это некоторое подмножество множества индексов. Показано, что класс S-DZT матриц расположен между DZT и CKVT матрицами, а также между S-DZ и S-SDD_1 матрицами, откуда следует, что S-DZT являются S-SSDD матрицами и заведомо являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами.

Также мы устанавливаем и сравниваем между собой некоторые верхние оценки для l_∞-нормы обратных к невырожденным S-DZT матрицам и применяем их к частным случаям SDD и DZT матриц. Наконец, основываясь на том факте, что S-DZT матрицы являются

Ключевые слова: S-DZT матрицы, S-DZ-матрицы, CKVT матрицы, S-SDD_1 матрицы, SDD матрицы, $\mathcal{H}$-матрицы, l_∞-норма обратной, множества локализации собственных значений, перроновский корень, верхние оценки.

невырожденными, мы получаем новые множества локализации собственных значений квадратных матриц и устанавливаем новые верхние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы.

В работе приняты следующие обозначения и определения.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 1$. Через $\langle n\rangle = \{1, \ldots, n\}$ обознается множество индексов, и если $S \subseteq \langle n\rangle$, то $\bar{S} = \langle n\rangle \backslash S$ – это дополнение S в $\langle n\rangle$, а $|S|$ – мощность множества S.

Для абсолютных строчных сумм матрицы $A = (a_{ij})$ используются обозначения

$$r_i(A) = \sum_{j\in\langle n\rangle\backslash\{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$R_i(A) = |a_{ii}| + r_i(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

а через

$$r_i^S(A) = \begin{cases} \sum_{\substack{j\in S,\\ j\neq i}} |a_{ij}|, & i \in S, \\ \sum_{j\in S} |a_{ij}|, & i \notin S, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$R_i^S(A) = |a_{ii}| + r_i^S(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

обозначаются частичные абсолютные строчные суммы матрицы A, соответствующие некоторому подмножеству $S \subseteq \langle n\rangle$, так что $r_i^{\langle n\rangle}(A) = r_i(A)$ и $R_i^{\langle n\rangle}(A) = R_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$.

Кроме того, мы полагаем

$$r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}| \quad \text{и} \quad R_i^j(A) = R_i(A) - |a_{ij}|, \quad j \neq i \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Спектр квадратной матрицы A, т.е. множество всех её собственных значений, обозначается через $\operatorname{Spec} A$.

Если A – (необязательно неприводимая) неотрицательная квадратная матрица, то *перроновский корень* матрицы A, $\rho(A)$, – это её положительное собственное значение, равное спектральному радиусу, т.е.

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\operatorname{Spec} A} |\lambda| \in \operatorname{Spec} A.$$

Множество номеров строк матрицы A, обладающих строгим диагональным преобладанием, обозначается через

$$R_A = \{i \in \langle n\rangle : \ |a_{ii}| > r_i(A)\}.$$

Заметим, что если A – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица, то, как хорошо известно, $R_A \neq \varnothing$.

Через $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

обозначается матрица сравнения для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Если $S, T \subseteq \langle n\rangle$ – непустые подмножества $\langle n\rangle$, то $A[S,T] = (a_{ij})_{\substack{i\in S\\ j\in T}}$ – это подматрица матрицы A с номерами строк и столбцов соответственно из S и T, а $A[S] = A[S,S]$ – главная подматрица A.

Если S – непустое собственное подмножество $\langle n\rangle$ и подматрица $A[S]$ является невырожденной, то дополнение по Шуру подматрицы $A[S]$ в A – это матрица

$$A/S = A[\bar{S}] - A[\bar{S}, S]\, A[S]^{-1} A[S, \bar{S}].$$

Как обычно, через I_n обозначается единичная матрица порядка $n \geqslant 1$.

В дальнейшем нам также понадобятся следующие определения и теоремы.

Определение 1.1. *Будем говорить, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$,* имеет строгое диагональное преобладание, *т.е.* является SDD (strictly diagonally dominant) матрицей, *если*

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следующее обобщение DZ матриц, введённых Дашницем и Зусмановичем [1], было предложено в работе [16].

Определение 1.2 ([16])**.** *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, называется* DZT (Dashnic–Zusmanovich-type) матрицей, *если для любого $j \in \langle n\rangle$*

$$\exists i_j \neq j: \quad |a_{i_j i_j}| \left[|a_{jj}| - r_j^{i_j}(A)\right] > r_{i_j}(A)\, |a_{ji_j}|. \tag{1.1}$$

Как было установлено в работе [2], DZT матрицы могут быть охарактеризованы следующим образом.

Теорема 1.1 ([2])**.** *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является DZT матрицей тогда и только тогда, когда*

- *либо $R_A = \langle n\rangle$, т.е. A – SDD матрица,*
- *либо условие* (1.1) *выполняется при всех $j \in \overline{R_A}$.*

Определение 1.3 ([7]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *и пусть* $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. *Матрица* A *называется* S-DZ (S-Dashnic–Zusmanovich) матрицей, *если условие*

$$|a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] > r_i(A)\, r_j^S(A)$$

выполняется для всех $i \in S$ *и всех* $j \in \bar{S}$; *при этом, если* $S \subseteq R_A$, *то* A *является* S-DZ матрицей первого типа.

Матрицы типа CKV (CKV-type), или CKVT матрицы были введены в рассмотрение в работе [10]. Ниже мы напоминаем их модифицированное определение, предложенное в [6].

Определение 1.4 ([6, 10]). *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *называется CKVT* (CKV-type) *матрицей, если*

- *либо* $R_A = \langle n\rangle$, *т.е.* A *является SDD матрицей,*
- *либо для каждого* $j \in \overline{R_A}$ *найдется непустое подмножество* $S_j \subseteq R_A$ *такое, что при всех* $i \in S_j$ *имеет место неравенство*

$$\left[|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A)\right]\left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] > r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A).$$

В работе [13] было предложено следующее обобщение SDD матриц.

Определение 1.5 ([13]). *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *называется* SDD_1 матрицей, *если выполняется условие*

$$|a_{ii}| > p_i(A) \quad \textit{при всех} \quad i \notin R_A,$$

где

$$p_i(A) = \sum_{j\in R_A,\, j\neq i} |a_{ij}|\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\overline{R_A}}(A), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Заменяя в (1.2) множество R_A на подмножество $S \subseteq R_A$, мы приходим к следующему более общему определению, предложенному в работе [6].

Определение 1.6 ([6]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *и пусть* $S \subseteq R_A$. *Тогда* A *называется* S-SDD_1 матрицей, *если*

$$|a_{ii}| > p_i(A, S) \quad \textit{при всех} \quad i \in \bar{S},$$

где

$$p_i(A, S) = \sum_{j\in S,\, j\neq i} |a_{ij}|\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\bar{S}}(A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Нам также понадобится следующее определение.

Определение 1.7 ([6]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$. Мы говорим, что A является* S-SSDD матрицей, *если $S \subseteq R_A$ и дополнение по Шуру $\mathcal{M}(A)/S$ матрицы сравнения $\mathcal{M}(A)$ имеет строгое диагональное преобладание.*

Напомним для удобства три известные верхние оценки для l_∞-нормы обратных к SDD и DZT матрицам. Следующая теорема – это классическая оценка для SDD матриц.

Теорема 1.2 ([8, 14]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – SDD матрица. Тогдв*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}.$$

Для обратных к DZT матрицам в работе [2] была получена следующая оценка.

Теорема 1.3 ([2]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – DZT матрица, удовлетворяющая условиям*

$$|a_{i_k i_k}| \left[|a_{j_k j_k}| - r^{i_k}_{j_k}(A)\right] > r_{i_k}(A)\,|a_{j_k i_k}|, \quad k = 1, \ldots, p,$$

где

$$\overline{R_A} = \{j_1, \ldots, j_p\}, \quad p \geqslant 1.$$

Тогда

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{i\in R_A} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}, \right.$$
$$\left. \max_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{|a_{i_k i_k}| + |a_{j_k i_k}|}{|a_{i_k i_k}| \left[|a_{j_k j_k}| - r^{i_k}_{j_k}(A)\right] - r_{i_k}(A)\,|a_{j_k i_k}|} \right\}.$$

Альтернативная оценка нормы обратной к DZT матрице была предложена в работе [12].

Теорема 1.4 ([12]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – DZT матрица. Обозначим*

$$\gamma_j(A) = \left\{ i \in \langle n\rangle \setminus \{j\} : \ |a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r^i_j(A)\right] > r_i(A)\,|a_{ji}| \right\}, \quad j \in \langle n\rangle.$$

Тогда

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{j\in\langle n\rangle} \min_{i\in\gamma_j(A)} \frac{|a_{ii}| + |a_{ji}|}{|a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r^i_j(A)\right] - r_i(A)\,|a_{ji}|}.$$

Статья построена следующим образом. В §2 мы вводим в рассмотрение S-DZT матрицы, предлагаем их альтернативное описание и устанавливаем их принадлежность к классу невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Также исследуются соотношения между S-DZT матрицами и некоторыми известными подклассами класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, такими как классы DZT, S-DZ, CKVT, S-SDD$_1$ и S-SSDD матриц. Следующий §3 посвящён выводу и сравнению верхних оценок для l_∞-нормы обратных к S-DZT матрицам, а также их применению к DZT и SDD матрицам. В §4 приведены области локализации собственных значений матриц, основанные на факте невырожденности S-DZT матриц. Наконец, в §5 представлены некоторые верхние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы, вытекающие из результатов §4.

§2. S-DZT (S-DZ-type) матрицы

Введем следующее определение.

Определение 2.1. *Пусть $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, где $n\geqslant 2$, и пусть $S\subseteq R_A$. Будем говорить, что A является S-DZT (S-DZ-type) матрицей, если для любого $j\in\bar{S}$ найдется непустое подмножество $S_j\subseteq\langle n\rangle\setminus\{j\}$, такое что условие*

$$|a_{ii}|\left[|a_{jj}|-r_j^{\overline{S_j}}(A)\right]>r_i(A)\,r_j^{S_j}(A) \tag{2.1}$$

выполняется при всех $i\in S_j$.

Заметим, что в том случае, когда $S=\varnothing$, A является S-DZT матрицей тогда и только тогда, когда условие (2.1) выполняется для произвольного $j\in\langle n\rangle$, некоторого непустого подмножества $S_j\subseteq\langle n\rangle\setminus\{j\}$ и всех $i\in S_j$.

Ясно, что если $j\in\overline{R_A}$, а условие (2.1) выполнено при всех $i\in S_j$, то $S_j\subseteq R_A$. Кроме того, если $S=R_A$, т.е. $\bar{S}=\overline{R_A}$, то, необходимо, $S_j\subseteq S$, т.е. $S_j\cap\bar{S}=\varnothing$.

Из определения 2.1 мы немедленно получаем следующее свойство монотонности S-DZT матриц.

Предложение 2.1. *Пусть $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, где $n\geqslant 2$, и пусть $S\subseteq T\subseteq R_A$. Если A является S-DZT матрицей, то она является также и T-DZT матрицей. В частности, A есть R_A-DZT матрица.*

Заметим, что, в соответствии с определением 2.1, любая SDD матрица A является S-DZT матрицей для любого множества $S\subseteq\langle n\rangle$.

Действительно, если $S = R_A = \langle n\rangle$, то $\bar{S} = \varnothing$, и условие (2.1) исчезает. С другой стороны, если $S \subsetneq R_A = \langle n\rangle$, то $\varnothing \neq \bar{S} \subseteq R_A$, так что условие (2.1) заведомо выполняется для каждого $j \in \bar{S}$, произвольного непустого подмножества $S_j \subseteq \langle n\rangle \setminus \{j\}$ и всех $i \in S_j$.

Таким образом,

$$\{\text{SDD}\} \subset \{S\text{-DZT}\} \quad \text{для любого} \quad S \subseteq \langle n\rangle. \tag{2.2}$$

Принимая во внимание (2.2), ны приходим к следующему описанию S-DZT матриц.

Теорема 2.1. *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZT матрицей при $S \subseteq R_A$ тогда и только тогда, когда*

- *либо $R_A = \langle n\rangle$, т.е. A – SDD матрица,*
- *либо $\overline{R_A} \neq \varnothing$ и A – R_A-DZT матрица.*

Доказательство. Необходимость. Если $R_A = \langle n\rangle$, то доказывать нечего.

Если $R_A \neq \langle n\rangle$ и A является S-DZT матрицей, где $S \subseteq R_A$, то A – R_A-DZT матрица по предложению 2.1.

Достаточность. Если A является SDD матрицей, то она является и S-DZT матрицей для любого $S \subseteq R_A$ в силу (2.2).

Предположим, что $R_A \neq \langle n\rangle$ и что A есть R_A-DZT матрица. В этом случае, $\overline{R_A} \neq \varnothing$, а из (2.1) следует, что $R_A \neq \varnothing$.

Требуется показать, что A является S-DZT матрицей для любого $S \subseteq R_A$. В силу предложения 2.1, для этого достаточно доказать, что A является S-DZT матрицей при $S = \varnothing$, т.е. что для любого $j \in \langle n\rangle$ найдется $S_j \neq \varnothing$, такое что (2.1) справедливо при любом $i \in S_j$. Поскольку A – R_A-DZT матрица по условию, остаётся рассмотреть случай $j \in R_A$. Здесь имеются две возможности.

Если $|R_A| \geqslant 2$ и $j \in R_A$, то, очевидно, в качестве S_j можно взять произвольное непустое подмножество множества $R_A \setminus \{i\} \neq \varnothing$.

Если же $|R_A| = 1$ и $R_A = \{j\}$, то $\overline{R_A} = \langle n\rangle \setminus \{j\} \neq \varnothing$. Поскольку A – R_A-DZT матрица, то при всех $k \neq j$ и при некоторых непустых $S_k \subseteq \langle n\rangle \setminus \{k\}$, мы имеем

$$|a_{jj}| \left[|a_{kk}| - r_k^{\overline{S_k}}(A)\right] > r_j(A)\, r_k^{S_k}(A).$$

Используя последнее неравенство и соотношения $|a_{jj}| > r_j(A)$ и $|a_{kk}| \leqslant r_k(A)$, для любого непустого $S_j \subseteq \overline{R_A}$ мы выводим:

$$\begin{aligned}|a_{kk}|\left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] &= |a_{jj}|\left[|a_{kk}| - r_k^{\overline{S_k}}(A)\right] + |a_{jj}|\, r_k^{\overline{S_k}}(A) - |a_{kk}|\, r_j^{\overline{S_j}}(A)\\ &> r_j(A)\, r_k^{S_k}(A) + r_j(A)\, r_k^{\overline{S_k}}(A) - r_k(A)\, r_j^{\overline{S_j}}(A)\\ &= r_j(A)\, r_k(A) - r_k(A)\, r_j^{\overline{S_j}}(A) = r_k(A)\, r_j^{S_j}(A).\end{aligned}$$

Этим доказано, что при $R_A = \{j\}$ неравенство (2.1) справедливо для произвольного $S_j \subseteq \overline{R_A}$ и всех $k \in S_j$.

Таким образом, A есть S-DZT матрица при $S = \varnothing$ и, следовательно, при всех $S \subseteq R_A$. □

Из теоремы 2.1 немедленно вытекает следующий нетривиальный результат, усиливающий предложение 2.1.

Следствие 2.1. *Пусть $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, где $n\geqslant 2$, и пусть $S,T\subseteq R_A$. Тогда A является S-DZT матрицей в том и только том случае, когда она является T-DZT матрицей.*

В частности, A является S-DZT матрицей, где $S \subseteq R_A$, тогда и только тогда, когда для любого $j \in \langle n\rangle$ найдется непустое подмножество $S_j \subseteq \langle n\rangle \setminus \{j\}$, для которого условие (2.1) *выполняется при всех $i \in S_j$, т.е. A является $\varnothing$-DZT матрицей.*

Также S-DZT матрицы могут быть охарактеризованы и в терминах множеств

$$\begin{aligned}\Sigma_j = \Sigma_j(A) := \Big\{ S_j :\ \varnothing \neq S_j \subseteq \langle n\rangle \setminus \{j\} \text{ и}\\ \forall i \in S_j \quad |a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] > r_i(A)\, r_j^{S_j}(A)\Big\},\\ j = 1,\dots,n.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Теорема 2.2. *Пусть $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, где $n\geqslant 2$, и пусть $S\subseteq R_A$. Тогда A является S-DZT матрицей в том и только том случае, когда $\Sigma_j\neq\varnothing$, $j = 1,\dots,n$.*

Доказательство. Поскольку при любом $j \in \langle n\rangle$ условие $\Sigma_j \neq \varnothing$ выполнено тогда и только тогда, когда неравенство (2.1) выполняется для некоторого непустого множества $S_j \subseteq \langle n\rangle \setminus \{j\}$ и для всех $i \in S_j$, требуемое утверждение немедленно вытекает из следствия 2.1. □

Ясно, что S-DZT матрицы могут рассматриваться как обобщение S-DZ матриц первого типа. При этом, если $S \subseteq R_A$, то S-DZT матрицы соотносятся с S-DZ матрицами так же, как DZT матрицы соотносятся с DZ матрицами. Действительно, если A – S-DZ матрица, где $S \subseteq R_A$, $S \neq \varnothing, \langle n \rangle$, то из определения 1.3 следует, что для любого $j \in \bar{S}$ условие (2.1) выполняется для всех $i \in S_j$, если положить $S_j = S$.

Таким образом, если $\varnothing \neq S \subseteq R_A$ и $S \neq \langle n \rangle$, то

$$\{S\text{-DZ}\} \subset \{S\text{-DZT}\}.$$

С другой стороны, понятие S-DZT матриц естественным образом обобщает и понятие DZT матриц. Действительно, пусть A – DZT матрица. Если $R_A = \langle n \rangle$, то, в силу (2.2), A является S-DZT матрицей для любого $S \subseteq \langle n \rangle$. Если же A не является SDD матрицей, то, в соответствии с теоремой 1.1, при любом $j \in \overline{R_A}$ найдётся такой индекс $i_j \in R_A$, что

$$|a_{i_j i_j}| \left[|a_{jj}| - r_j^{i_j}(A) \right] > r_{i_j}(A)\, |a_{j i_j}|.$$

Этим показано, что при любом $j \in \overline{R_A}$ условие (2.1) выполнено, если положить $S_j := \{i_j\}$, так что A есть R_A-DZT матрица. Следовательно, по теореме 2.1, A является S-DZT матрицей при всех $S \subseteq R_A$.

Итак,

$$\{\text{DZT}\} \subset \{S\text{-DZT}\} \quad \text{для любого} \quad S \subseteq R_A. \tag{2.4}$$

Заметим, что тот факт, что DZT матрица A является S-DZT матрицей при $S = \varnothing$ вытекает из определения 1.2, а значит, в силу предложения 2.1, A является S-DZT матрицей также и при любом $\varnothing \neq S \subseteq R_A$.

Теперь мы покажем, что сами S-DZT матрицы образуют подкласс двух ранее введённых классов невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Покажем сперва, что S-DZT матрицы являются CKVT матрицами.

Теорема 2.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, где $n \geqslant 2$, – S-DZT матрица, где $S \subseteq R_A$. Тогда A – CKVT матрица.*

Доказательство. В соответствии с определением 1.4, требуется показать, что если $\overline{R_A} \neq \varnothing$, то при любом $j \in \overline{R_A}$ неравенство

$$\left[|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A) \right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A) \right] > r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A) \tag{2.5}$$

выполнено для некоторого непустого подмножества $S_j \subseteq R_A$ и для всех $i \in S_j$.

Действительно, пусть A – S-DZT матрица, где $S \subseteq R_A$. Тогда, используя (2.1), для $j \in \overline{R_A}$ и $i \in S_j \subseteq R_A$ мы выводим (2.5) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\left[|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A)\right]\left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] \\
&\quad = |a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] - r_i^{S_j}(A)|a_{jj}| + r_i^{S_j}(A)\, r_j^{\overline{S_j}}(A) \\
&\quad > r_i(A)\, r_j^{S_j}(A) - r_i^{S_j}(A)|a_{jj}| + r_i^{S_j}(A)\, r_j^{\overline{S_j}}(A) \\
&\quad = r_i^{S_j}(A)\, r_j^{S_j}(A) + r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A) - r_i^{S_j}(A)|a_{jj}| + r_i^{S_j}(A)\, r_j^{\overline{S_j}}(A) \\
&\quad = r_i^{S_j}(A)\, r_j^{S_j}(A) + r_i^{S_j}(A)\,[r_j(A) - |a_{jj}|] \\
&\quad \geqslant r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A). \qquad \square
\end{aligned}$$

Поскольку, как известно, CKVT матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами, см. [10], то из теоремы 2.3 мы немедленно получаем следующий важный результат, первоначально установленный в работе [4, теорема 3.2].

Следствие 2.2. *Всякая S-DZT матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $S \subseteq R_A$ и $n \geqslant 2$, является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.*

Теперь мы установим аналог теоремы 2.2 для CKVT матриц. Для этого определим множества

$$\begin{aligned}
\Sigma_j' = \Sigma_j'(A) := \Big\{ S_j :\ \varnothing \neq S_j \subseteq \langle n\rangle \setminus \{j\} \text{ и } \\
\forall i \in S_j\ \left[|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A)\right]\left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] > r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A)\Big\}, \\
j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Теорема 2.4. *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является CKVT матрицей тогда и только тогда, когда $\Sigma_j'(A) \neq \varnothing$ при всех $j = 1, \ldots, n$ и, если $S_j \in \sum_j'$, где $j \in \overline{R_A}$, то $S_j \subseteq R_A$.*

Доказательство. Поскольку достаточность очевидна, установим необходимость.

Если A является SDD матрицей, то $\Sigma_j'(A) \neq \varnothing$ при всех $j \in \langle n\rangle$. Действительно, в рассматриваемом случае для всех $k \neq j$ имеем $S_j := \{k\} \in \Sigma_j'(A)$.

Пусть теперь $R_A \neq \langle n\rangle$. Поскольку, по определению 1.4, для всех $j \in \overline{R_A}$ мы имеем $\Sigma'_j(A) \neq \varnothing$ и $S_j \subseteq R_A$, то нам остаётся показать, что $\Sigma'_j(A) \neq \varnothing$ при всех $j \in R_A$.

Как и при доказательстве теоремы 2.1, рассмотрим два случая. Если $|R_A| \geqslant 2$ и $j \in R_A$, то, очевидно, $\Sigma'_j(A) \ni R_A \setminus \{j\} \neq \varnothing$.

Наконец, пусть $|R_A| = 1$ и пусть $R_A = \{j\}$. По определению 1.4, для любого $k \in \overline{R_A} = \langle n\rangle \setminus \{j\}$ существует непустое подмножество S_k такое, что при любом $i \in S_k$

$$\Big[|a_{ii}| - r_i^{S_k}(A)\Big]\,\Big[|a_{kk}| - r_k^{\overline{S_k}}(A)\Big] > r_i^{\overline{S_k}}(A)\, r_k^{S_k}(A). \tag{2.6}$$

Поскольку $k \in \overline{R_A}$, из (2.6) вытекает, что $S_k \subseteq R_A$, так что $S_k = \{j\}$ для всех $k \in \overline{R_A}$, и неравенство (2.6) принимает следующий вид:

$$|a_{jj}|\,\Big[|a_{kk}| - r_k^j(A)\Big] > r_j(A)\,|a_{kj}|.$$

Это означает, что $S_j := \langle n\rangle \setminus \{j\} \in \Sigma'_j(A)$, и завершает доказательство. □

Замечание 2.1. Результат, равносильный теореме 2.4, был ранее установлен в работе [10, Remark 9].

Для S-DZT матриц из теорем 2.3 и 2.4 мы получаем следующий результат.

Следствие 2.3. *Если A – S-DZT матрица, где $S \subseteq R_A$, то $\Sigma'_j(A) \neq \varnothing$ для всех $j \in \langle n\rangle$ и, если $S_j \in \Sigma'_j$, где $j \in \overline{R_A}$, то $S_j \subseteq R_A$. .*

Как было установлено в работе [7], S-DZ матрицы образуют подкласс класса S-SDD$_1$ матриц. Ниже мы перенесём этот результат на случай S-DZT матриц. Для этого мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.1. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, удовлетворяет условию* (2.1) *для всех $j \in \overline{R_A}$ и всех $i \in S_j \neq \varnothing$. Тогда для любого $j \in \overline{R_A}$ имеем $r_j^{S_j}(A) > 0$, и неравенства*

$$\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} < \frac{|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)}{r_j^{S_j}(A)} \leqslant 1 \tag{2.7}$$

справедливы для всех $i \in S_j$.

Доказательство. Заметим сперва, что, в силу (2.1), при $j \in \overline{R_A}$ мы имеем $|a_{jj}| > r_j^{\overline{S_j}}(A)$. Отсюда следует, что при любом $j \in \overline{R_A}$

$$r_j^{S_j}(A) = r_j(A) - r_j^{\overline{S_j}}(A) \geqslant |a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A) > 0.$$

Следовательно, левое неравенство в (2.7) немедленно следует из (2.1). Что же касается правого неравенства в (2.7), то оно, очевидно, выполняется для любого $j \in \overline{R_A}$. □

Требуемое соотношение между S-DZT и S-SDD$_1$ матрицами устанавливается в следующей теореме.

Теорема 2.5. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZT матрицей при $\varnothing \neq S \subseteq R_A$. Если $S_j \subseteq S$ для всех $j \in \overline{R_A}$, т.е. $\bigcup\limits_{j\in\overline{R_A}} S_j \subseteq S$, то A также является и S-SDD$_1$ матрицей.*

Доказательство. Нужно показать, что при любом $j \in \overline{S}$ имеет место неравенство

$$p_j(A,S) < |a_{jj}|. \tag{2.8}$$

Действительно, если $j \in \bar{S} \cap R_A$, то, поскольку $S \subseteq R_A$, то

$$p_j(A,S) = \sum_{i\in S} |a_{ji}|\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} + r_j^{\bar{S}}(A) \leqslant r_j^S(A) + r_j^{\bar{S}}(A) = r_j(A) < |a_{jj}|.$$

Пусть теперь $j \in \overline{R_A} = \bar{S} \cap \overline{R_A}$. Тогда A удовлетворяет условию (2.1) для некоторого непустого подмножества $S_j \subseteq R_A$ и всех $i \in S_j$. В этом случае, опираясь на лемму 2.1, мы выводим:

$$\begin{aligned}
p_j(A,S) &= \sum_{i\in S} |a_{ji}|\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} + r_j^{\bar{S}}(A) \\
&= \sum_{i\in S_j} |a_{ji}|\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} + \sum_{i\in S\setminus S_j} |a_{ji}|\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} + r_j^{\bar{S}}(A) \\
&< \frac{|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)}{r_j^{S_j}(A)} \sum_{i\in S_j} |a_{ji}| + r_j^{S\setminus S_j}(A) + r_j^{\bar{S}}(A) \\
&= |a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A) + r_j^S(A) - r_j^{S_j}(A) + r_j^{\bar{S}}(A) = |a_{jj}|.
\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (2.8) выполняется при всех $j \in \bar{S}$, так что, в соответствии с определением 1.7, A является S-SDD$_1$ матрицей. □

Выведем некоторые следствия из теоремы 2.5. Сперва применим ее к S-DZ матрицам первого типа и докажем следующий результат, ранее установленный в работе [7].

Следствие 2.4. *Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZ матрицей, где $\varnothing \neq S \subseteq R_A$ и $S \neq \langle n\rangle$, то A является и S-SDD_1 матрицей.*

Доказательство. Поскольку, как было показано выше, S-DZ матрица A является S-DZT матрицей, для которой $S_j = S$, $j \in \bar{S}$, то желаемый результат немедленно следует из теоремы 2.5. □

Из предложения 2.1 и теоремы 2.5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.5. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZT матрицей при $\varnothing \neq S \subseteq R_A$ и пусть $S_j \subseteq S$ для всех $j \in \overline{R_A}$. Тогда для любого T, такого что $S \subseteq T \subseteq R_A$, A также является и T-SDD_1 матрицей. В частности, A – R_A-SDD_1 матрица, т.е. SDD_1 матрица.*

Из следствия 2.5 и соотношения (2.4) мы получаем следующий результат, который представляется новым.

Следствие 2.6. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является DZT матрицей и удовлетворяет условию*

$$|a_{i_j i_j}| \left[|a_{jj}| - r_j^{i_j}(A)\right] > r_{i_j}(A)\,|a_{j i_j}|$$

при всех $j \in \overline{R_A}$ и некоторых $i_j \in R_A$. Тогда она является S-SDD_1 матрицей при любом S, таком что

$$\bigcup_{j\in\overline{R_A}} \{i_j\} \subseteq S \subseteq R_A.$$

В частности, всякая DZT матрица является SDD_1 матрицей.

Напомним, что, как было установлено в работе [6], если A является CKVT матрицей и $\bigcup\limits_{j\in\overline{R_A}} S_j \subseteq S$, то A является и S-SSDD матрицей. Следовательно, из теоремы 2.3 также вытекает и следующий результат.

Теорема 2.6. *Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZT матрицей, причём*

$$\bigcup_{j\in\overline{R_A}} S_j \subseteq S \subseteq R_A,$$

то A является S-SSDD матрицей.

Замечание 2.2. Поскольку, по теореме 2.2 из работы [6], всякая S-SDD$_1$ матрица, где $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$, заведомо является и S-SSDD матрицей, то теорема 2.6 вытекает не только из теоремы 2.3, но также и из теоремы 2.5.

Ниже для полноты изложения мы приводим независимое доказательство теоремы 2.6. Оно основано на определении S-DZT матриц и использует рассуждения, которые применялись в работе [7] для доказательства того факта, что при $\varnothing \neq S \subseteq R_A$ любая S-DZ матрица является S-SSDD матрицей.

Доказательство теоремы 2.6. Пусть

$$v = (v_i)_i \in S := \mathcal{M}(A[S])^{-1}\,|A[S,\bar{S}]|\,e. \tag{2.9}$$

Поскольку $S \subseteq R_A$, то, очевидно,

$$\mathcal{M}(A[S])\,e > |A[S,\bar{S}]|\,e.$$

С другой стороны, (2.9) равносильно равенству

$$\mathcal{M}(A[S])\,v = |A[S,\bar{S}]|\,e. \tag{2.9 а}$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\mathcal{M}(A[S])\,v < \mathcal{M}(A[S])\,e,$$

а тогда, в силу монотонности SDD $\mathcal{M}$-матрицы $\mathcal{M}(A[S])$, мы имеем

$$v < e. \tag{2.10}$$

Теперь, используя (2.9 а) и (2.10), мы выводим:

$$|a_{ii}|v_i = \sum_{k\in S,\,k\neq i} |a_{ik}|v_k + r_i^{\bar{S}}(A) \leqslant \sum_{k\in s,\,k\neq i} |a_{ik}| + r_i^{\bar{S}}(A) = r_i(A), \quad i \in S.$$

Этим показано, что

$$v_i \leqslant \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, \quad i \in S. \tag{2.11}$$

Пусть $j \in \bar{S}$. Тогда, опираясь на определение 2.1, мы заключаем, что

$$|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A) > r_j^{S_j}(A)\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} \quad \text{для всех} \quad i \in S_j. \tag{2.12}$$

Пусть $i_0 \in S_j$ таково, что

$$\frac{r_{i_0}(A)}{|a_{i_0 i_0}|} = \max_{k \in S_j} \frac{r_k(A)}{|a_{kk}|}. \tag{2.13}$$

Тогда из (2.12), используя (2.13), (2.11) и тот факт, что $S_j \subseteq S$ по предположению, мы выводим:

$$\begin{aligned} |a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A) &> r_j^{S_j}(A)\frac{r_{i_0}(A)}{|a_{i_0 i_0}|} = \sum_{k \in S_j} |a_{jk}| \frac{r_{i_0}(A)}{|a_{i_0 i_0}|} \\ &\geqslant \sum_{k \in S_j} |a_{jk}| \frac{r_k(A)}{|a_{kk}|} \geqslant \sum_{k \in S_j} |a_{jk}|\, v_k \\ &= \left\{ |A[\bar{S}, S]|\, v \right\}_j = \left\{ |A[\bar{S}, S]|\, \mathcal{M}(A[S])^{-1}\, |A[S, \bar{S}]|\, e \right\}_j, \quad j \in \bar{S}. \end{aligned}$$

Этим показано, что дополнение по Шуру $\mathcal{M}(A)/S$ является SDD матрицей, что и завершает доказательство. □

В заключение данного параграфа мы соберем вместе установленные выше соотношения между различными подклассами класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, содержащими SDD матрицы, в виде следующей цепочки включений, где $\varnothing \neq S \subseteq R_A$:

$$\begin{aligned} \{\text{SDD}\} &\subset \{S\text{-DZ}\} \cap \{\text{DZT}\} \subset \{S\text{-DZ}\} \cup \{\text{DZT}\} \subset \{S\text{-DZT}\} \\ &\subset \{\text{CKVT}\} \cap \{S\text{-SDD}_1\} \subset \{\text{CKVT}\} \cup \{S\text{-SDD}_1\} \subset \{S\text{-SSDD}\}. \end{aligned}$$

§3. Верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$

В этом параграфе мы выводим и сравниваем между собой некоторые верхние оценки для l_∞-нормы обратных к S-DZT матрицам и, в частности, к DZT матрицам.

Доказательство теоремы 3.1 ниже основывается на следующей хорошо известной лемме (см., например, [3, 15]).

Лемма 3.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, где $n \geqslant 2$, – невырожденная матрица. Тогда существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$, такой что $\|x\|_\infty = 1$ и*

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} = \|Ax\|_\infty = \max_{i \in \langle n \rangle} |\{Ax\}_i|. \tag{3.1}$$

Также нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, невырождена и пусть вектор $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$, такой что $\|x\|_\infty = 1$, удовлетворяет условию* (3.1). *Если $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, то*

$$|x_i| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|_\infty^{-1} + r_i(A)}{|a_{ii}|}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть $i \in \langle n\rangle$. Из равенства

$$\{Ax\}_i = a_{ii}x_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j$$

следует, что

$$|a_{ii}|\,|x_i| \leqslant |\{Ax\}_i| + r_i(A),$$

откуда

$$|x_i| \leqslant \frac{|\{Ax\}_i| + r_i(A)}{|a_{ii}|}.$$

Теперь для завершения доказательства остаётся воспользоваться условием (3.1). □

Далее по тексту для матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ мы будем использовать обозначение

$$p_i(A) = |a_{ii}| - r_i(A), \quad i \in \langle n\rangle.$$

Теперь мы готовы доказать первую верхнюю оценку для обратной к S-DZT матрице A, которая основывается на определении 2.1, следствии 2.1 и теореме 2.2.

Теорема 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является $\widetilde{S}$-DZT матрицей при $\widetilde{S} \subseteq R_A$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \min_{S\subseteq R_A} \max \left\{ \max_{j\in S} p_j^{-1}(A), \right.$$
$$\left. \max_{j\in\overline{S}} \min_{S_j\in\Sigma_j} \max_{i\in S_j} \frac{|a_{ii}| + r_j^{S_j}(A)}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] - r_i(A)\, r_j^{S_j}(A)} \right\}, \quad (3.2)$$

где множества Σ_j, $j \in \langle n\rangle$, определены в (2.3).

Доказательство. Заметим, прежде всего, что, в силу следствия 2.1, A является S-DZT матрицей для любого $S \subseteq R_A$. Для доказательства оценки (3.2), очевидно, достаточно доказать, что для любого $S \subseteq R_A$ и произвольных (непустых) подмножеств $S_j \in \Sigma_j$, $j \in \bar{S}$, справедлива оценка

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{j\in S} p_j^{-1}(A), \max_{j\in\bar{S},\, i\in S_j} \frac{|a_{ii}| + r_j^{S_j}(A)}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] - r_i(A)\, r_j^{S_j}(A)} \right\}. \quad (3.3)$$

Для этого, основываясь на лемме 3.1, выберем вектор $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$, такой что $\|x\|_\infty = 1 = |x_k|$, $k \in \langle n\rangle$, и выполнено условие (3.1).

Если $k \in S$, то из равенства

$$\{Ax\}_k = a_{kk}x_k + \sum_{j\neq k} a_{kj}x_j,$$

используя (3.1), мы выводим:

$$|a_{kk}| = |a_{kk}|\,|x_k| \leqslant |\{Ax\}_k| + \sum_{j\neq k} |a_{kj}|\,|x_j| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1} + r_k(A).$$

Следовательно, учитывая, что $k \in S \subseteq R_A$, мы получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{|a_{kk}| - r_k(A)} \leqslant \max_{j\in S} p_j^{-1}(A).$$

Рассмотрим тот случай, когда $k \in \bar{S}$, и предположим, что $S_k \in \Sigma_k$ и индекс $t \in S_k$ выбран таким образом, что

$$|x_t| = \max_{j\in S_k} |x_j|. \quad (3.4)$$

В этом случае, из соотношения

$$\{Ax\}_k = a_{kk}x_k + \sum_{j\in S_k} a_{kj}x_j + \sum_{j\in\overline{S_k},\, j\neq k} a_{kj}x_j,$$

используя (3.4), (3.1) и лемму 3.2, мы выводим

$$\begin{aligned} |a_{kk}| = |a_{kk}|\,|x_k| &\leqslant |\{Ax\}_k| + r_k^{S_k}(A)\,|x_t| + r_k^{\overline{S_k}}(A) \\ &\leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1} + \frac{\|A^{-1}\|_\infty^{-1} + r_t(A)}{|a_{tt}|} r_k^{S_k}(A) + r_k^{\overline{S_k}}(A). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1}\left[|a_{tt}|+r_k^{S_k}(A)\right]\geqslant|a_{tt}|\left[|a_{kk}|-r_k^{\overline{S_k}}(A)\right]-r_t(A)\,r_k^{S_k}(A).$$

Поскольку $k\in\bar{S}$, $t\in S_k$ и A является S-DZT матрицей, то правая часть последнего неравенства положительна. Следовательно,

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty&\leqslant\frac{|a_{tt}|+r_k^{S_k}(A)}{|a_{tt}|\left[|a_{kk}|-r_k^{\overline{S_k}}(A)\right]-r_t(A)\,r_k^{S_k}(A)}\\&\leqslant\max_{j\in\bar{S},\,i\in S_j}\frac{|a_{ii}|+r_j^{S_j}(A)}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}|-r_j^{\overline{S_j}}(A)\right]-r_i(A)\,r_j^{S_j}(A)}.\end{aligned}$$

Этим завершается доказательство оценки (3.3) и теоремы 3.1. □

Рассмотрим два частных случая оценки (3.2).

Если в условиях теоремы 3.1 положить $S=R_A$, то мы получим оценку

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty\leqslant\max\Bigg\{&\max_{j\in R_A}p_j^{-1}(A),\\&\max_{j\in\overline{R_A}}\min_{S_j\in\Sigma_j}\max_{i\in S_j}\frac{|a_{ii}|+r_j^{S_j}(A)}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}|-r_j^{\overline{S_j}}(A)\right]-r_i(A)\,r_j^{S_j}(A)}\Bigg\}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

С другой стороны, положив $S=\varnothing$, мы приходим к оценке

$$\|A^{-1}\|_\infty\leqslant\max_{j\in\langle n\rangle}\min_{S_j\in\Sigma_j}\max_{i\in S_j}\frac{|a_{ii}|+r_j^{S_j}(A)}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}|-r_j^{\overline{S_j}}(A)\right]-r_i(A)\,r_j^{S_j}(A)}.\tag{3.6}$$

Рассмотрим случай SDD матриц. Напомним, что, в силу (2.2), любая SDD матрица A является S-DZT матрицей при любом $S\subseteq R_A=\langle n\rangle$, так что к ней применима оценка теоремы 3.1. При $S=\langle n\rangle$ эта оценка сводится к классической оценке

$$\|A^{-1}\|_\infty\leqslant\max_{i\in\langle n\rangle}p_i^{-1}(A)$$

теоремы 1.2.

В том же случае, когда $S\subsetneq\langle n\rangle$, общая оценка (3.3) справедлива и для SDD матрицы A.

Заметим, что, как нетрудно убедиться, если $i \neq j$, $p_i(A) > 0$ и $p_j(A) > 0$, то

$$\frac{|a_{ii}|+r_j^{S_j}(A)}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}|-r_j^{\overline{S_j}}(A)\right]-r_i(A)r_j^{S_j}(A)} \leqslant \begin{cases} p_i^{-1}(A), & \text{если} \quad p_i(A) \leqslant p_j(A), \\ p_j^{-1}(A), & \text{если} \quad p_i(A) \geqslant p_j(A). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{|a_{ii}| + r_j^{S_j}(A)}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] - r_i(A)\, r_j^{S_j}(A)} &\leqslant \max\left\{p_i^{-1}(A),\ p_j^{-1}(A)\right\} \\ &\leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} p_i^{-1}(A). \end{aligned}$$

Этим показано, что для SDD матрицы A оценка теоремы 3.1 с произвольным $S \subsetneq \langle n\rangle$, вообще говоря, является более точной, чем классическая оценка теоремы 1.2.

Теперь рассмотрим случай DZT матриц. Как указано в §2, см. (2.4), всякая DZT матрица A является S-DZT матрицей при любом $S \subseteq R_A$.

Следуя [12], положим

$$\gamma_j = \gamma_j(A) := \left\{i \in \langle n\rangle \setminus \{j\} :\ |a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] > r_i(A)\,|a_{ji}|\right\}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

и заметим, что для DZT матрицы A мы имеем:

$$\Sigma_j(A) \supseteq \left\{\{i\} :\ i \in \langle n\rangle \setminus \{j\} \text{ и } |a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] > r_i(A)\,|a_{ji}|\right\}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$i \in \gamma_j \quad \Longleftrightarrow \quad \{i\} \in \Sigma_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

и, переходя к минимуму по всем одноэлементным множествам $S_j \in \Sigma_j$, $j \in \bar{S}$, и учитывая, что $r_j^{S_j}(A) = |a_{ji}|$ при $S_j = \{i\}$, мы приходим к ещё одному следствию из теоремы 3.1.

Следствие 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – DZT матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \min_{S\subseteq R_A} \max \left\{ \max_{j\in S} p_j^{-1}(A), \right.$$
$$\left. \max_{j\in \overline{S}} \min_{i\in\gamma_j} \frac{|a_{ii}| + |a_{ji}|}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] - r_i(A)\,|a_{ji}|} \right\}. \quad (3.7)$$

В частности, если $S = R_A$ и

$$\overline{R_A} = \bigcup_{k=1}^{p} \{j_k\}, \quad 1 \leqslant p < n,$$

то

$$i_k \in \gamma_{j_k} \quad \Longleftrightarrow \quad \{i_k\} \in \Sigma_{j_k}, \quad k = 1, \ldots, p,$$

и из (3.7) следует, что

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max \left\{ \max_{j\in R_A} p_j^{-1}(A), \right.$$
$$\left. \max_{1\leqslant k\leqslant p} \min_{i_k\in\gamma_{j_k}} \frac{|a_{i_ki_k}| + |a_{j_ki_k}|}{|a_{i_ki_k}|\left[|a_{j_kj_k}| - r_{j_k}^{i_k}(A)\right] - r_{i_k}(A)\,|a_{j_ki_k}|} \right\}. \quad (3.8)$$

С другой стороны, если взять $S = \varnothing$, то (3.7) приводит к оценке

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{j\in\langle n\rangle} \min_{i\in\gamma_j} \frac{|a_{ii}| + |a_{ji}|}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] - r_i(A)\,|a_{ji}|}. \quad (3.9)$$

Таким образом, следствие 3.1 одновременно обобщает и улучшает как теорему 1.3, так и теорему 1.4.

Теперь мы докажем аналог теоремы 3.1 для CKVT матриц, обобщающий теоремы 21 и 22 из работы [10].

Теорема 3.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является CKVT матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \min_{S\subseteq R_A} \max \left\{ \max_{i\in S} p_i^{-1}(A), \right.$$
$$\left. \max_{j\in\overline{S}} \min_{S_j\in\Sigma_j'} \max_{i\in S_j} \frac{|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A) + r_j^{S_j}(A)}{\left[|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A)\right]\left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] - r_i^{\overline{S_j}}(A) r_j^{S_j}(A)} \right\}. \quad (3.10)$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3.1, пусть $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$ удовлетворяет условию (3.1) и пусть $\|x\|_\infty = 1 = |x_k|$, где $k \in \langle n \rangle$.

Пусть задано множество $S \subseteq R_A$. Если $k \in S$, то, как и в доказательстве теоремы 3.1, мы заключаем, что

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i \in S} p_i^{-1}(A).$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остаётся показать, что если $k \in \bar{S}$, то

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{\substack{j \in \bar{S}, \\ i \in S_j}} \frac{|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A) + r_j^{S_j}(A)}{\left[|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] - r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A)}. \quad (3.11)$$

Для этого предположим, что $k \in \bar{S}$ и что индекс $t \in S_k$, где $S_k \in \Sigma'_k(A)$, выбран таким образом, что

$$|x_t| = \max_{i \in S_k} |x_i|.$$

Из равенства

$$\{Ax\}_k = a_{kk}x_k + \sum_{j \in S_k} a_{kj}x_j + \sum_{j \in \overline{S_k},\, j \neq k} a_{kj}x_j$$

с помощью (3.1) мы выводим

$$|a_{kk}| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1} + |x_t|\, r_k^{S_k}(A) + r_k^{\overline{S_k}}(A). \quad (3.12)$$

Аналогично, из соотношения

$$\{Ax\}_t = a_{tt}x_t + \sum_{j \in S_k,\, i \neq t} a_{ti}x_i + \sum_{i \in \overline{S_k}} a_{ti}x_i$$

вытекает, что

$$|a_{tt}|\, |x_t| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1} + |x_t|\, r_t^{S_k}(A) + r_t^{\overline{S_k}}(A). \quad (3.13)$$

Заметим, что поскольку A является CKVT матрицей, то для любого $t \in S_k \in \Sigma'_k(A)$ справедливо неравенство $|a_{tt}| - r_t^{S_k}(A) > 0$. Действительно, если $k \in \overline{R_A}$, то, по определению 1.4, $t \in R_A$, а в противном случае $k \in R_A$, и нужное соотношение следует из неравенства $\left[|a_{tt}| - r_t^{S_k}(A)\right] \left[|a_{kk}| - r_k^{\overline{S_k}}(A)\right] > r_t^{\overline{S_k}}(A)\, r_k^{S_k}(A)$.

Следовательно, из (3.13) вытекает, что

$$|x_t| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|_\infty^{-1} + r_t^{\overline{S_k}}(A)}{|a_{tt}| - r_t^{S_k}(A)}. \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) в (3.12), мы получаем

$$|a_{kk}| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1} + \frac{\|A^{-1}\|_\infty^{-1} + r_t^{\overline{S_k}}(A)}{|a_{tt}| - r_t^{S_k}(A)}\, r_k^{S_k}(A) + r_k^{\overline{S_k}}(A),$$

или

$$\begin{aligned} &\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \left[|a_{tt}| - r_t^{S_k}(A) + r_k^{S_k}(A)\right] \\ &\qquad \geqslant \left[|a_{tt}| - r_t^{S_k}(A)\right] \left[|a_{kk}| - r_k^{\overline{S_k}}(A)\right] - r_t^{\overline{S_k}}(A)\, r_k^{S_k}(A). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Поскольку A – CKVT матрица, то правая часть (3.15) положительна для любого $t \in\ S_k \in \Sigma_k'$, так что из (3.15) получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{|a_{tt}| - r_t^{S_k}(A) + r_k^{S_k}(A)}{\left[|a_{tt}| - r_t^{S_k}(A)\right] \left[|a_{kk}| - r_k^{\overline{S_k}}(A)\right], -r_t^{\overline{S_k}}(A)\, r_k^{S_k}(A)},$$

откуда и следует требуемое неравенство (3.11). □

По теореме 2.3, если $S \subseteq R_A$, то S-DZT матрица A является CKVT матрицей. Следовательно, её обратная удовлетворяет оценке теоремы 3.2. Кроме того, поскольку, как показано в доказательстве теоремы 2.3, $\Sigma_j \subseteq \Sigma_j'$ при $j \in \overline{R_A}$, то из теоремы 3.2 вытекает следующая, несколько менее точная оценка, которая получается, если в (3.10) положить $S = R_A$ и заменить Σ_j' на Σ_j.

Следствие 3.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZT матрицей при $S \subseteq R_A$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max \left\{ \max_{i\in R_A} p_i^{-1}(A), \right.$$

$$\left. \max_{j\in\overline{R_A}} \min_{S_j\in\Sigma_j} \max_{i\in S_j} \frac{|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A) + r_j^{S_j}(A)}{\left[|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] - r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A)} \right\}. \tag{3.16}$$

Заметим, что если $|S_j| = 1$, скажем, $S_j = \{i\}$, где $i \neq j$, то $r_i^{S_j}(A) = r_i^{\{i\}} = 0$, так что $S_j \in \Sigma_j$ тогда и только тогда, когда $S_j \in \Sigma_j'$, $j \in \langle n\rangle$. Значит, если минимум в (3.10) взять по одноэлементным множествам

$S_j \in \Sigma'_j$, то результирующая оценка будет совпадать с оценкой (3.7), а при $S = R_A$ и $S = \varnothing$ она будет совпадать с оценками (3.8) и (3.9) соответственно.

Сравним оценки теорем 3.1 и 3.2 в применении к S-DZT матрицам. Для этого нам понадобится следующая техническая лемма, которая устанавливается непосредственной проверкой.

Лемма 3.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, пусть $i \neq j$, $i, j \in \langle n\rangle$ и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle \setminus \{j\}$.*

Если $|a_{ii}| - r_i(A) \geqslant |a_{jj}| - r_j(A)$, то

$$\frac{|a_{ii}| + r_j^S(A)}{|a_{ii}|\big[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\big] - r_i(A)\, r_j^S(A)} \geqslant \frac{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A)}{\big[|a_{ii}| - r_i^S(A)\big]\,\big[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\big] - r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A)}$$

при условии, что оба знаменателя положительны.

Теперь мы готовы сравнить оценки теорем 3.1 и 3.2 в том случае, когда $S = R_A$.

Теорема 3.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZT матрицей при $S \subseteq R_A$. Тогда, вообще говоря, оценка* (3.16) *является более точной, чем оценка* (3.5)*, так что и оценка* (3.10) *теоремы* 3.2 *при $S = R_A$ заведомо не хуже, чем* (3.5)*.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 3.3, положив $S := S_j$ и заметив, что при $j \in \overline{R}_A$ необходимо $S_j \subseteq R_A$, так что $|a_{ii}| - r_i(A) > 0 \geqslant |a_{jj}| - r_j(A)$. □

§4. Множества, содержащие собственные значения

В этом параграфе мы приводим множества, содержащие собственные значения, которые получены на основе факта невырожденности S-DZT матриц.

Пусть

$$\Gamma_i(A) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - a_{ii}| \leqslant r_i(A)\}, \quad i \in \langle n\rangle,$$

– это круги Гершгорина. Следуя [7], обозначим

$$\Omega_{ji}^{S}(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{ii}| \left[|z - a_{jj}| - r_j^S(A) \right] \leqslant r_i(A)\, r_j^{\bar{S}}(A) \right\}, \quad i \in \bar{S},\ j \in S, \quad (4.1)$$

где $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n \rangle$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть $A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть $\varnothing \subseteq S \subseteq \langle n \rangle$. Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{i\in S} \Gamma_i(A) \ \cup \bigcup_{j\in \bar{S}} \bigcap_{\substack{S_j : \\ \varnothing \neq S_j \subseteq \langle n \rangle \setminus \{j\}}} \bigcup_{k\in S_j} \Omega_{jk}^{\overline{S_j}}(A). \quad (4.2)$$

Доказательство. Заметим сперва, что в том случае, когда $S = \langle n \rangle$, включение (4.2) сводится к теореме Гершгорина. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $S \subsetneq \langle n \rangle$.

Пусть $\lambda \in \operatorname{Spec} A$. Тогда матрица $B_\lambda := \lambda I_n - A$ является вырожденной. Следовательно, ввиду следствия 2.2, матрица B_λ не может быть S-DZT матрицей при $S \subseteq R_{B_\lambda}$. Значит,

• либо $S \nsubseteq R_{B_\lambda}$, что означает, что при некотором $i \in S$ выполнено неравенство $|\lambda - a_{ii}| \leqslant r_i(A)$, т.е.

$$\lambda \in \bigcup_{i\in S} \Gamma_i(A),$$

• либо при некотором $j \in \bar{S}$ найдётся некоторое подмножество S_j, $\varnothing \neq S_j \subseteq \langle n \rangle \setminus \{j\}$, такое что при некотором $k \in S_j$ выполняется включение $\lambda \in \Omega_{jk}^{\overline{S_j}}(A)$, так что

$$\lambda \in \bigcup_{j\in \bar{S}} \bigcap_{\substack{S_j : \\ \varnothing \neq S_j \subseteq \langle n \rangle \setminus \{j\}}} \bigcup_{k\in S_j} \Omega_{jk}^{\overline{S_j}}(A).$$

Теорема 4.1 доказана. □

Полагая в теореме 4.1 $S_j = S$ для всех $j \in \bar{S}$, мы немедленно приходим к следующему утверждению, первоначально установленному в работе [7] на основе результата о невырожденности S-DZ матриц.

Следствие 4.1. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *и пусть* $\varnothing \neq S \subseteq \langle n\rangle$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{i\in S}\left\{\Gamma_i(A) \cup \bigcup_{j\in\bar{S}} \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}.$$

Следующий результат, вытекающий из теоремы 4.1, обобщает включение

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{j\in\langle n\rangle} \bigcap_{k\in\langle n\rangle\setminus\{j\}} \Omega_{jk}^{\langle n\rangle\setminus\{k\}}(A),$$

первоначально доказанное в статье [16] и основанное на невырожденности DZT матриц. Здесь, в соответствии с определением (4.1) множеств $\Omega_{ji}^{\bar{S}}(A)$,

$$\Omega_{jk}^{\langle n\rangle\setminus\{k\}}(A) = \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z-a_{kk}|\left[|z-a_{jj}| - r_j^k(A)\right] \leqslant r_k(A)\,|a_{jk}|\right\}.$$

Следствие 4.2. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *и пусть* $\varnothing \subseteq S \subseteq \langle n\rangle$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{i\in S}\Gamma_i(A) \cup \bigcup_{j\in\bar{S}} \bigcap_{k\in\langle n\rangle\setminus\{j\}} \Omega_{jk}^{\langle n\rangle\setminus\{k\}}(A).$$

Доказательство. Требуемый результат немедленно вытекает из теоремы 4.1, если рассмотреть все допустимые одноэлементные множества S_j, $j \in \bar{S}$, т.е. множества $S_{j_k} = \{k\}$, где $k \neq j$. □

Замечание 4.1. Ясно, что теорему 4.1, как и следствия 4.1 и 4.2, можно улучшить, переходя к пересечению (по некоторым или) по всем множествам S, таким что $\varnothing \subseteq S \subseteq \langle n\rangle$.

§5. Верхние оценки для перроновского корня

В этом параграфе мы приводим верхние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы, вытекающие из результатов §4.

Мы воспользуемся следующей технической леммой, установленной в статье [7].

Лемма 5.1 ([7]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *– неотрицательная матрица и пусть* $S \subsetneq \langle n\rangle$. *Если* $\rho(A) \in \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A)$, *где* $i \in S$, $j \in \bar{S}$, *то* $\rho(A) \leqslant \varphi_{ji}^{\bar{S}}(A)$, *где*

$$\varphi_{ji}^{\bar{S}}(A) := \frac{1}{2}\left\{a_{ii} + R_j^{\bar{S}}(A) + \left[\left(a_{ii} - R_j^{\bar{S}}(A)\right)^2 + 4r_i(A)\,r_j^S(A)\right]^{1/2}\right\}. \quad (5.1)$$

Ввиду леммы 5.1, из теоремы 4.1 мы немедленно получаем следующую верхнюю оценку для перроновского корня.

Теорема 5.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $S \subseteq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \max\left\{\max_{i\in S} R_i(A),\quad \max_{j\in\bar{S}}\min_{\substack{S_j:\\ \varnothing\neq S_j\subseteq\langle n\rangle\setminus\{j\}}}\max_{k\in S_j}\varphi_{jk}^{\overline{S_j}}(A)\right\}. \tag{5.2}$$

Переходя к минимуму по всем (или некоторым) подмножествам S, оценку (5.2) можно улучшить следующим образом.

Следствие 5.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \min_{S\subseteq\langle n\rangle}\max\left\{\max_{i\in S} R_i(A),\quad \max_{j\in\bar{S}}\min_{\substack{S_j:\\ \varnothing\neq S_j\subseteq\langle n\rangle\setminus\{j\}}}\max_{k\in S_j}\varphi_{jk}^{\overline{S_j}}(A)\right\}.$$

Аналогично, с помощью леммы 5.1 и следствия 4.1 мы получаем следующий известный результат.

Следствие 5.2 ([7])**.** *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $\varnothing \neq S \subseteq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in S}\max\left\{R_i(A),\ \max_{j\in\bar{S}}\varphi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}$$

и, следовательно,

$$\rho(A) \leqslant \min_{S:\,\varnothing\neq S\subseteq\langle n\rangle}\max_{i\in S}\max\left\{R_i(A),\ \max_{j\in\bar{S}}\varphi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}.$$

Наконец, из леммы 5.1 и следствия 4.2, принимая во внимание, что, в соответствии с (5.1),

$$\varphi_{jk}^{\langle n\rangle\setminus\{j\}}(A) = \frac{1}{2}\left\{a_{kk} + R_j^k(A) + \left[\left(a_{kk} - R_j^k(A)\right)^2 + 4r_k(A)\,a_{jk}\right]^{1/2}\right\},$$

мы выводим следующий результат.

Следствие 5.3 ([7]). *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $\varnothing \subseteq S \subseteq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \max\left\{ \max_{i\in S} R_i(A), \right.$$
$$\left. \frac{1}{2}\max_{j\in\overline{S}} \min_{k\in\langle n\rangle\setminus\{j\}} \left\{ a_{kk} + R_j^k(A) + \left[\left(a_{kk} - R_j^k(A)\right)^2 + 4r_k(A)\, a_{jk} \right]^{1/2} \right\} \right\}.$$

Список литературы

1. Л. С. Дашниц, М. С. Зусманович, *О некоторых критериях регулярности матриц и локализации их спектра.* — Ж. вычисл. мат. мат. физ. **10**, No. 5 (1970), 1092–1097.
2. Л. Ю. Колотилина, *О матрицах Дашница–Зусмановича (DZ) и матрицах типа Дашница–Зусмановича (DZT) и их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 145–165.
3. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые оценки обратных, зависящие от структуры разреженности матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 201–219.
4. Л. Ю. Колотилина, *Новые двусторонние оценки для перроновского корня и соответствующие критерии невырожденности матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 120–137.
5. Л. Ю. Колотилина, *Об SDD_1 матрицах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 88–112.
6. Л. Ю. Колотилина, *SSDD матрицы и их соотношения с другими подклассами класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **534** (2024), 57–88.
7. Л. Ю. Колотилина, *S-DZ матрицы – ещё один подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **554** (2026), 139–162.
8. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
9. X. Cheng, Y. Li, L. Liu, Y. Wang, *Infinity norm upper bounds for the inverse of SDD_1 matrices.* — AIMS Math. **7**, No. 5 (2022), 8847–8860.
10. D. L. Cvetković, L. Cvetković, C. Q. Li, *CKV-type matrices with applications.* — Linear Algebra Appl. **608** (2021), 158–184.
11. P. F. Dai, *A note on diagonal dominance, Schur complements and some classes of H-matrices and P-matrices.* — Adv. Comput. Math. **42** (2016), 1–4.
12. Chaoqian Li, Ljiljana Cvetković, Yimin Wei, and Jianxing Zhao, *An infinity norm bound for the inverse of Dashnic–Zusmanovich type matrices with applications.* — Linear Algebra Appl. **565** (2019), 99–122.
13. J. M. Peña, *Diagonal dominance, Schur complements and some classes of H-matrices and P-matrices.*— Adv. Comput. Math. **35** (2011), 357–373.
14. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
15. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* Springer, 2004.

16. Jianxing Zhao, Qilong Liu, Chaoqian Li, and Yaotang Li, *Dashnic–Zusmanovich type matrices: a new subclass of nonsingular H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **552** (2018), 277–287.

Kolotilina L. Yu. A subclass of the CKV-type matrices containing the DZ-type matrices.

The paper introduces into consideration and studies the new class of the so-called S-DZT matrices, which lies in between the Dashnic–Zusmanovich-type (DZT) and CKV-type (CKVT) matrices and also in between the S-DZ and S-SDD_1 matrices. It follows, in particular, that the S-DZT matrices are nonsingular $\mathcal{H}$-matrices. Upper bounds for the l_∞-norm of the inverse to an S-DZT matrix are considered and applied to SDD and DZT matrices. Also the related eigenvalue inclusion sets and the corresponding upper bounds for the Perron root of a nonnegative matrix are presented.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 26 октября 2026 г.