Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 554, 2026 г.

Л. Ю. Колотилина

S-DZ МАТРИЦЫ – ЕЩЕ ОДИН ПОДКЛАСС КЛАССА НЕВЫРОЖДЕННЫХ $\mathcal{H}$-МАТРИЦ

§1. Введение и предварительные сведения

В работе продолжается изучение различных подклассов класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, содержащих подкласс матриц, обладающих строгим диагональным преобладанием (SDD матриц). Основной предмет изучения данной работы – это так называемые S-DZ матрицы, где S – непустое собственное подмножество множества индексов. В зависимости от множества S, мы будем различать два типа S-DZ матриц.

В статье рассматриваются соотношения между S-DZ матрицами и некоторыми ранее введенными подклассами класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, таких как матрицы Дашница–Зусмановича (DZ матрицы), введенные в работе [1], S-SDD матрицы (см. [10]), SDD_1 матрицы, предложенные в работе [14] и изучаемые в [6, 9, 11], S-SDD_1 матрицы, введенные в [7], а также S-OB матрицы, которые были определены и исследовались в [3].

Также в работе получены верхние оценки для l_∞-нормы обратных к невырожденным S-DZ матрицам, новые множества локализации собственных значений квадратных матриц и новые верхние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы.

В работе используются следующие обозначения.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 1$. Через $\langle n\rangle = \{1, \ldots, n\}$ обознается множество индексов, а если S – подмножество множества $\langle n\rangle$, то $\bar{S} = \langle n\rangle \backslash S$ – это дополнение S в $\langle n\rangle$, а $|S|$ – мощность множества S.

Абсолютные строчные суммы матрицы $A = (a_{ij})$ обозначаются через

$$r_i(A) = \sum_{j\in\langle n\rangle\backslash\{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

Ключевые слова: S-DZ матрицы, DZ-матрицы, S-OB матрицы, S-SDD матрицы, S-SDD_1 матрицы, $\mathcal{H}$-матрицы, l_∞-норма обратной, множества локализации собственных значений, перроновский корень, верхние оценки.

и

$$R_i(A) = |a_{ii}| + r_i(A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Через

$$r_i^S(A) = \begin{cases} \sum_{\substack{j \in S, \\ j \neq i}} |a_{ij}|, & i \in S, \\ \sum_{j \in S} |a_{ij}|, & i \notin S, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$R_i^S(A) = |a_{ii}| + r_i^S(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

обозначаются частичные абсолютные строчные суммы матрицы A, соответствующие некоторому подмножеству $S \subseteq \langle n \rangle$, так что $r_i^{\langle n \rangle}(A) = r_i(A)$ и $R_i^{\langle n \rangle}(A) = R_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$.

Также мы используем обозначения

$$r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}| \quad \text{и} \quad R_i^j(A) = R_i(A) - |a_{ij}|, \quad j \neq i \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Spec A – это спектр квадратной матрицы A, т.е. множество всех ее собственных значений.

Если A – неотрицательная квадратная матрица (необязательно неприводимая), то ее перроновский корень, $\rho(A)$, – это положительное собственное значение, равное спектральному радиусу матрицы A, т.е.

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \operatorname{Spec} A} |\lambda| \in \operatorname{Spec} A.$$

Через

$$R_A = \{i \in \langle n \rangle : \ |a_{ii}| > r_i(A)\}$$

обозначается множество индексов строк матрицы A, обладающих строгим диагональным преобладанием, играющее важную роль в исследовании подклассов класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

Напомним, что элементы матрицы сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$ для A определяются по формуле

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

Если $S, T \subseteq \langle n \rangle$ – непустые подмножества множества $\langle n \rangle$, то $A[S, T] = (a_{ij})_{\substack{i \in S \\ j \in T}}$ и $A[S] = (a_{ij})_{i,j \in S}$ – главная подматрица матрицы A с номерами строк и столбцов из S.

Если S – непустое собственное подмножество $\langle n \rangle$ и подматрица $A[S]$ является невырожденной, то через A/S обозначается дополнение по Шуру подматрицы $A[S]$ в A, т.е.

$$A/S = A[\bar{S}] - A[\bar{S}, S]\, A[S]^{-1} A[S, \bar{S}].$$

I_n – это единичная матрица порядка $n \geqslant 1$.

Ниже мы используем следующие определения.

Определение 1.1. *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, имеет строгое диагональное преобладание (является SDD матрицей), *если*

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определение 1.2 ([10, 15]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *и пусть* $S \subseteq \langle n\rangle$ – *непустое подмножество множества индексов. Тогда* A *является* S-SDD матрицей, *если выполнены следующие два условия*:

$$|a_{ii}| > r_i^S(A) \quad \textit{для всех} \quad i \in S$$

и

$$\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right]\left[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)\right] > r_i^{\bar S}(A) r_j^S(A) \quad \textit{для всех} \quad i \in S \ \textit{и всех} \ j \in \bar S.$$

Определение 1.3 ([8, 13]). *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, является матрицей Островского–Брауэра (OB матрицей), *если*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\, r_j(A), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Определение 1.4 ([1], см. также [2]). *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *называется* DZ матрицей, *если существует* $i \in \langle n\rangle$ *такое, что при всех* $j \neq i$, $j \in \langle n\rangle$, *справедливо неравенство*

$$|a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] > |a_{ji}|\, r_i(A). \tag{1.1}$$

Если A *удовлетворяет условию* (1.1), *то мы говорим, что* A *является* $\mathrm{DZ}^{(i)}$ матрицей.

Определение 1.5 ([3]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *и пусть* S – *непустое собственное подмножество множества* $\langle n\rangle$. *Матрица* A *называется* S-OB матрицей (S-Ostrowski–Brauer), *если при всех* $i \in S$ *и всех* $j \in \bar S$ *выполняются следующие два условия:*

$$|a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)\right] > r_i(A)\, r_j^S(A),$$

$$|a_{jj}|\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] > r_j(A)\, r_i^{\bar S}(A).$$

В работе [14] было предложено следующее обобщение SDD матриц.

Определение 1.6 ([14]). *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *называется* SDD_1 матрицей, *если выполняется условие*

$$|a_{ii}| > p_i(A) \quad \textit{при всех} \quad i \notin R_A,$$

где

$$p_i(A) = \sum_{j\in R_A,\, j\neq i} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\overline{R_A}}(A), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Заменяя в (1.2) множество R_A на подмножество $S \subseteq R_A$, мы приходим к следующему более общему определению, предложенному в работе [7].

Определение 1.7 ([7]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *и пусть* $S \subseteq R_A$. *Тогда* A *называется* S-SDD_1 матрицей, *если*

$$|a_{ii}| > p_i(A, S) \quad \textit{при всех} \quad i \in \bar{S},$$

где

$$p_i(A, S) = \sum_{j\in S,\, j\neq i} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\bar{S}}(A), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Нам также понадобится следующее определение.

Определение 1.8 ([7]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *и пусть* S *– непустое собственное подмножество множества* $\langle n\rangle$. *Мы говорим, что* A *является* S-SSDD матрицей, *если* $S \subseteq R_A$ *и дополнение по Шуру* $\mathcal{M}(A)/S$ *матрицы сравнения* $\mathcal{M}(A)$ *имеет строгое диагональное преобладание.*

Ниже мы приводим две известные верхние оценки для нормы обратной $\|A^{-1}\|_\infty$ к S-OB и S-SDD матрице A.

Теорема 1.1 ([4]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *– S-OB матрица,* $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S, j\in\bar{S}} \max \left\{ \frac{|a_{ii}| + r_j^S(A)}{|a_{ii}|[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)] - r_i(A)\, r_j^S(A)}, \right.$$
$$\left. \frac{|a_{jj}| + r_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{jj}|[|a_{ii}| - r_i^S(A)] - r_j(A)\, r_i^{\bar{S}}(A)} \right\}.$$

Теорема 1.2 ([12]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – S-SDD матрица, S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \frac{\max\{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A),\ |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) + r_i^{\bar{S}}(A)\}}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)] - r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A)}.$$

Статья построена следующим образом. В следующем §2 мы определяем S-DZ матрицы первого и второго типов и исследуем их свойства. Там же рассматриваются соотношения между S-DZ матрицами и некоторыми другими классами матриц. В частности, мы показываем, что если $S \subseteq R_A$, то S-DZ матрицы одновременно являются как S-SDD, так и S-SDD$_1$ матрицами, и, кроме того, они совпадают с S-OB матрицами, так что S-DZ матрицы первого типа заведомо являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами. Также мы демонстрируем на примерах что при $S \nsubseteq R_A$ соответствующие S-DZ матрицы не обязаны быть даже невырожденными. В §3, основываясь на результатах, установленных в §2, и на теоремах 1.1–1.2, мы получаем и сравниваем между собой верхние оценки для нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ обратной к S-DZ матрице A при $S \subseteq R_A$. Затем мы выводим верхнюю оценку для $\|A^{-1}\|_\infty$ в том случае, когда S – произвольное непустое собственное подмножество множества индексов, но на главную подматрицу $A[S]$ матрицы A накладывается дополнительное условие. Отдельно рассматривается частный случай $\{i\}$-DZ матриц, которые совпадают с DZ$^{(i)}$ матрицами, $i \in \langle n\rangle$. В §4 на основе результатов о невырожденности S-DZ матриц мы получаем множества локализации собственных значений квадратных матриц. Наконец, в §5 с помощью результатов §4 устанавливаются новые верхние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы.

§2. S-DZ матрицы

Введем следующее определение.

Определение 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$. Будем говорить, что A является S-DZ матрицей (матрицей S-Дашница–Зусмановича), если неравенство*

$$|a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] > r_i(A)\, r_j^S(A) \tag{2.1}$$

выполнено при всех $i \in S$ *и всех* $j \in \bar{S}$.

Заметим, что дополняющие друг друга подмножества S и $\bar{S}$ входят в (2.1) различным образом.

Ясно, что из определения 2.1 следует, что если $R_A \neq \langle n \rangle$ и $\bar{S} \cap \overline{R_A} \neq \varnothing$, то $S \subseteq R_A$ и $\bar{S} \supseteq \overline{R_A}$. В противоположном случае, когда $S \cap \overline{R_A} \neq \varnothing$, необходимо $\bar{S} \subseteq R_A$ и $S \supseteq \overline{R_A}$. Таким образом, одно из подмножеств S или $\bar{S}$ должно содержаться в R_A, так что $R_A \neq \varnothing$.

В том случае когда $S \subseteq R_A$, мы будем говорить, что A является S-DZ матрицей первого типа, а в том случае когда $\bar{S} \subseteq R_A$, мы будем говорить, что A является S-DZ матрицей второго типа. Ясно, что при любом $S \subset \langle n \rangle$, $S \neq \varnothing, \langle n \rangle$, всякая SDD матрица является и S-DZ матрицей как первого, так и второго типов. Вообще говоря, как будет показано ниже, S-DZ матрицы первого и второго типов существенно различны.

Заметим, что из определения 2.1 немедленно следует, что если A – S-DZ матрица, то $a_{ii} \neq 0$ при всех $i \in S$, а также

$$|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) > 0 \quad \text{при всех} \quad j \in \bar{S}. \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что

$$a_{ii} \neq 0 \quad \text{при всех} \quad i \in \langle n \rangle.$$

В том случае, когда A есть S-DZ матрица первого типа, т.е. $S \subseteq R_A$, мы имеем $|a_{ii}| > r_i(A) \geqslant r_i^S(A)$, так что в дополнение к (2.2) мы также имеем

$$|a_{ii}| - r_i^S(A) > 0 \quad \text{при всех} \quad i \in S. \tag{2.3}$$

Итак, обе главные подматрицы $A[S]$ и $A[\bar{S}]$ S-DZ матрицы A первого типа имеют строгое диагональное преобладание.

S-DZ матрицы первого типа также могут быть охарактеризованы следующим образом.

Теорема 2.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, *где* $n \geqslant 2$. *Если* $\varnothing \neq S \subseteq R_A$, *то матрица* A *является* S*-DZ матрицей тогда и только тогда, когда при всех* $j \in \langle n \rangle$, *выполнено включение*

$$S_j := \left\{ i \in \langle n \rangle : \ |a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) \right] > r_i(A)\, r_j^S(A) \right\} \supseteq S. \tag{2.4}$$

Доказательство. Для доказательства необходимости допустим, что A является S-DZ матрицей. Поскольку $S \subseteq R_A$, то при любом $j \in S$ неравенство (2.1) заведомо выполнено при всех $i \in S$. Следовательно,

$S_j \supseteq S$. С другой стороны, если $j \in \bar{S}$, то (2.1) выполнено по определению. Итак, A удовлетворяет условию (2.4) при всех $j \in \langle n\rangle$, что и доказывает необходимость.

Достаточность условия теоремы очевидна. □

Рассмотрим соотношения между S-DZ и некоторыми другими классами матриц.

Заметим сперва, что при $S = \{i\}$, $i \in \langle n\rangle$, неравенство (2.1) принимает вид

$$|a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] > r_i(A)\,|a_{ji}|.$$

Следовательно, A является $\mathrm{DZ}^{(i)}$ тогда и только тогда, когда она является $\{i\}$-DZ матрицей.

Поскольку, как известно, OB матрицы являются DZ матрицами (см., например, [7]) и, очевидно, содержат SDD матрицы, то справедливы следующие включения:

$$\{\mathrm{SDD}\} \subset \{\mathrm{OB}\} \subset \{\mathrm{DZ}\} = \bigcup_{i\in\langle n\rangle} \{\{i\}\text{-DZ}\} \subset \bigcup_{\varnothing\neq S\subsetneq\langle n\rangle} \{S\text{-}DZ\}. \tag{2.5}$$

С другой стороны, как следует из приводимых ниже теорем 2.2 и 2.3, если $S \subseteq R_A$, то

$$\{S\text{-DZ}\} \subset \{S\text{-SDD}\} \cap \{S\text{-SDD}_1\}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZ матрицей, где $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Если $S \subseteq R_A$, то A является S-SDD матрицей.*

Доказательство. Ввиду (2.2) и (2.3), для того, чтобы убедиться, что A есть S-SDD матрица, остается лишь убедиться, что при всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$ выполнено неравенство

$$\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right]\ \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] > r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A). \tag{2.7}$$

Для этого заметим сперва, что, как легко проверить,

$$\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} \geqslant \frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)} \quad \text{для всех} \quad i \in R_A. \tag{2.8}$$

Теперь, используя (2.1) и (2.8), при $j \in \bar{S}$ и $i \in S \subseteq R_A$ мы выводим:

$$|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) > \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}\, r_j^S(A) \geqslant \frac{r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)},$$

что и доказывает (2.7). □

Искомое соотношение между S-DZ и S-SDD$_1$ матрицами устанавливается в следующей теореме.

Теорема 2.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZ матрицей при $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Если $S \subseteq R_A$, то A является S-SDD$_1$ матрицей и, следовательно, также и SDD$_1$ матрицей.*

Доказательство. Сперва заметим, что если $\overline{R_A} \subseteq \bar{S}$ и $j \in \overline{R_A}$, то $r_j^S(A) \neq 0$. Действительно, в противном случае мы бы имели равенство

$$r_j^{\bar{S}}(A) = r_j(A) \geqslant |a_{jj}|,$$

которое противоречило бы (2.2). Следовательно, при $j \in \overline{R_A}$, используя определение (1.4) и (2.1), мы выводим:

$$p_j(A,S) = \sum_{k\in S} |a_{jk}|\frac{r_k(A)}{|a_{kk}|} + r_j^{\bar{S}}(A) < \sum_{k\in S} |a_{jk}|\frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)}{r_j^S(A)} + r_j^{\bar{S}}(A) = |a_{jj}|.$$

В том же случае когда $j \in \bar{S}\cap R_A$, мы имеем $j \in R_A$, откуда следует, что

$$p_j(A,S) = \sum_{k\in S} |a_{jk}|\frac{r_k(A)}{|a_{kk}|} + r_j^{\bar{S}}(A) \leqslant r_j^S(A) + r_j^{\bar{S}}(A) = r_j(A) < |a_{jj}|.$$

Таким образом, $p_j(A,S) < |a_{jj}|$ для всех $j \in \bar{S}$, т.е. A является S-SDD$_1$ матрицей. Наконец, как легко понять, всякая S-SDD$_1$ матрица A является и R_A-SDD$_1$ матрицей, т.е. SDD$_1$ матрицей, что и завершает доказательство. □

Как известно (см., например, [10,15] и [7]), как S-SDD, так и S-SDD$_1$ матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами. Следовательно, из каждой из теорем 2.2 и 2.3 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZ матрицей первого типа, т.е. $S \subseteq R_A$, $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Тогда A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.*

Заметим, что утверждение следствия 2.1 является частным случаем (при $S(j) = S$ для всех $j \in \bar{S}$) теоремы 3.2 работы [5].

Кроме того, как было показано в работе [7], как S-SDD, так и S-SDD$_1$ матрицы являются S-SSDD матрицами. Следовательно, из теорем 2.2 и 2.3 также вытекает следующий результат.

Следствие 2.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – S-DZ матрица первого типа, т.е. $S \subseteq R_A$, $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Тогда A является S-SSDD матрицей.*

Для полноты изложения, ниже мы приводим доказательство следствия 2.2, основанное непосредственно на определении 2.1.

Доказательство. Положим

$$v = (v_i)_{i\in S} := \mathcal{M}(A[S])^{-1}|A[S,\bar{S}]|\, e.$$

Тогда, очевидно,

$$\mathcal{M}(A[S])v = |A[S,\bar{S}]|e. \tag{2.9}$$

Поскольку $S \subseteq R_A$, то мы имеем

$$\mathcal{M}(A[S])e > |A[S,\bar{S}]|e,$$

и, ввиду (2.9),

$$\mathcal{M}(A[S])e > \mathcal{M}(A[S])v.$$

Следовательно, в силу монотонности SDD $\mathcal{M}$-матрицы $\mathcal{M}(A[S])$, справедливо неравенство

$$v < e. \tag{2.10}$$

С помощью (2.9) и (2.10) мы выводим:

$$|a_{ii}|v_i = \sum_{k\in S,\, k\neq i} |a_{ik}|v_k + r_i^{\bar{S}}(A) \leqslant r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A) = r_i(A), \quad i \in S.$$

Отсюда следует, что

$$v_i \leqslant \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, \quad i \in S. \tag{2.11}$$

По определению S-DZ матрицы, неравенство

$$|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) > r_j^S(A)\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} \tag{2.12}$$

выполняется для всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$. Следовательно, в силу (2.12) и (2.11), для всех $j \in \bar{S}$ и некоторого $i_0 \in S$, такого что

$$\frac{r_{i_0}(A)}{|a_{i_0 i_0}|} = \max_{k\in S}\frac{r_k(A)}{|a_{kk}|},$$

мы имеем

$$|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) > r_j^S(A)\frac{r_{i_0}(A)}{|a_{i_0 i_0}|} \geqslant \sum_{k\in S}|a_{jk}|\frac{r_k(A)}{|a_{kk}|} \geqslant \sum_{k\in S}|a_{jk}|v_k$$

$$= \{|A[\bar{S}, S]|v\}_j = \left\{|A[\bar{S}, S]|\, \mathcal{M}(A[S])^{-1}\, |A[S, \bar{S}]|\, e\right\}_j \quad j \in \bar{S}.$$

Тем самым показано, что дополнение по Шуру $\mathcal{M}(A)/S$ является SDD матрицей, так что A есть S-SSDD матрица. □

Рассмотрим соотношение между S-DZ и S-OB матрицами. Из определений 1.5 и 2.1 немедленно следует, что A является S-OB матрицей тогда и только тогда, когда она одновременно является S-DZ и $\bar{S}$-DZ матрицей. Итак,

$$\{S\text{-OB}\} = \{S\text{-DZ}\} \cap \{\bar{S}\text{-DZ}\}.$$

Ясно, что любая SDD матрица является S-OB для любого непустого собственного подмножества S множества индексов. Таким образом, в дополнение к (2.5) и (2.6) мы также имеем:

$$\{\text{SDD}\} \subset \{S\text{-OB}\} = \{S\text{-DZ}\} \cap \{\bar{S}\text{-DZ}\}.$$

Поскольку S-OB матрица одновременно является как S-DZ, так и $\bar{S}$-DZ матрицей, то мы заключаем, что либо $S \subseteq R_A$ и A есть S-DZ матрица первого типа, либо $\bar{S} \subseteq R_A$ и A есть $\bar{S}$-DZ матрица первого типа. В обоих случаях, A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей по следствию 2.1. Кроме того, поскольку A является S-SDD матрицей тогда и только тогда, когда она является $\bar{S}$-SDD матрицей, то из теоремы 2.2 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 2.3. *Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-OB матрицей для некоторого непустого подмножества $S \subsetneq \langle n\rangle$, то A является и S-SDD матрицей.*

Аналогично, применяя теорему 2.3, мы немедленно приходим к следующему результату.

Следствие 2.4. *Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-OB матрицей для непустого подмножества $S \subsetneq \langle n\rangle$, то A – либо S-SDD_1 матрица, если $S \subseteq R_A$, либо $\bar{S}$-SDD_1 матрица, если $\bar{S} \subseteq R_A$.*

Из следствия 2.3, как и из следствия 2.4, вытекает, что любая S-OB матрица является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, что первоначально было установлено в работе [3]. Утверждения следствий 2.3 и 2.4 по-видимому являются новыми.

Теперь мы покажем, что при $S \subseteq R_A$ всякая S-DZ матрица в действительность есть S-OB матрица и наоборот.

Теорема 2.4. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть $S \subseteq R_A$. Тогда A является S-DZ матрицей тогда и только тогда, когда она является S-OB матрицей.*

Доказательство. Поскольку каждая S-OB матрица, очевидно, является S-DZ матрицей, требуется доказать только обратное утверждение. Поэтому предположим, что A – S-DZ матрица. Нужно показать, что для всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$, наряду с (2.1), матрица A также удовлетворяет неравенству

$$|a_{jj}|[|a_{ii}| - r_i^S(A)] > r_j(A)\, r_i^{\bar{S}}(A). \tag{2.13}$$

Действительно, при $i \in S \subseteq R_A$ и $j \in \bar{S}$ из (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} |a_{ii}|\,|a_{jj}| &> |a_{ii}| r_j^{\bar{S}}(A) + r_i(A)\, r_j^S(A) \\ &\geqslant r_i(A)\, r_j^{\bar{S}}(A) + r_i(A)\, r_j^S(A) = r_i(A)\, r_j(A). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Вычитая $|a_{jj}| r_i^S(A)$ из обеих частей (2.14), для всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$ мы выводим:

$$\begin{aligned} |a_{jj}|(|a_{ii}| - r_i^S(A)) &> r_i(A)\, r_j(A) - |a_{jj}| r_i^S(A) \\ &= r_i^S(A)(r_j(A) - |a_{jj}|) + r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j(A). \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (2.13) установлено для всех $i \in S$ и всех $j \in \overline{R_A}$.

Теперь для доказательства того факта, что A есть S-OB матрица, остается лишь заметить, что при $i \in S \subseteq R_A$ и $j \in \bar{S} \cap R_A$ неравенство (2.13) выполняется очевидным образом.

Теорема доказана. □

Обратимся к S-DZ матрицам второго типа.

Следующая теорема обобщает теорему 2.2 на случай произвольного S, $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$, но при условии, что на подматрицу $A[S]$ S-DZ матрицы A накладывается дополнительное условие.

Теорема 2.5. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Если*

$$r_i^S(A) = 0 \quad \textit{при всех} \quad i \in S, \tag{2.15}$$

то A является S-DZ матрицей тогда и только тогда, когда она является S-SDD матрицей.

Доказательство. Пусть сперва A является S-DZ матрицей. Покажем, что она является S-SDD матрицей. Ввиду (2.15), при всех $i \in S$ выполнено равенство

$$r_i(A) = r_i^{\bar{S}}(A), \quad i \in S,$$

и из определения 2.1 следует, что при всех $i \in S$ и всех $j \in \vec{S}$ мы имеем:

$$\begin{aligned}\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] &= |a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] \\ &> r_i(A)\, r_j^S(A) = r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A).\end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства того, что A является S-SDD матрицей, остается лишь заметить, что, в силу (2.15),

$$|a_{ii}| - r_i^S(A) = |a_{ii}| > 0 \quad \text{при всех} \quad i \in S.$$

Противоположное утверждение доказывается следующим образом. При $i \in S$ и $j \in \bar{S}$, в силу (2.15), для S-SDD матрицы A имеет место соотношение

$$\begin{aligned}|a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] &= \left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] \\ &> r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A) = r_i(A)\, r_j^S(A),\end{aligned}$$

так что A – S-DZ матрица. □

Замечание 2.1. Если $S = \{i\}$, где $i \in \langle n \rangle$, и A является S-DZ матрицей, то, очевидно, $r_i^S(A) = 0$. Следовательно, теорема 2.5 может рассматриваться как обобщение того очевидного факта, что $\mathrm{DZ}^{(i)}$ матрицы – это в точности $\{i\}$-SDD матрицы.

Из теоремы 2.5 мы немедленно получаем следующий результат, применимый, в частности, к S-DZ матрицам второго типа.

Следствие 2.5. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – S-DZ матрица и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n \rangle$. Если A удовлетворяет условию* (2.15)*, то она является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.*

Тем не менее, как показывают следующие примеры, в общем случае S-DZ матрица второго типа не обязана быть не только невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, но даже и просто невырожденной.

Пример 2.1. Пусть

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 2,5 \end{bmatrix}$$

и пусть $S = \overline{R_{A_1}} = \{2,3\}$, так что $\bar{S} = R_{A_1} = \{1\}$.

Поскольку

$$|a_{22}|[|a_{11}| - r_1^{\bar{s}}(A_1)] = 4 \cdot 2 = 8 > 6 = r_2(A_1)\, r_1^S(A_1)$$

и

$$|a_{33}|[|a_{11}| - r_1^{\bar{s}}(A_1)] = 2,5 \cdot 2 = 5 > 4 = r_3(A_1)\, r_1^S(A_1),$$

то мы заключаем, что A_1 – S-DZ матрица. Однако она не является ни S-SDD матрицей, ни SDD_1 матрицей. Действительно,

$$\Big[|a_{11}| - r_1^{\bar{S}}(A_1)\Big]\ \big[|a_{33}| - r_3^S(A_1)\big] = 2 \cdot (2,5-2) = 1 < 2 = r_1^S(A_1)\, r_3^{\bar{S}}(A_1),$$

а также

$$p_2(A) = |a_{21}|\frac{r_1(A_1)}{|a_{11}|} + r_2^S(A_1) = 4 \cdot 1/2 + 2 = 4 = |a_{22}|,$$

и

$$p_3(A) = |a_{31}|\frac{r_1(A_1)}{|a_{11}|} + r_3^S(A_1) = 2 \cdot 1/2 + 2 = 3 > |a_{33}|.$$

Более того, A_1 не является даже и $\bar{S}$-SSDD матрицей, так как ее дополнение по Шуру

$$A_1/\bar{S} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 1,5 \end{bmatrix}$$

не является SDD матрицей.

Далее, поскольку ни одна из строк дополнения по Шуру A_1/R_{A_1} не имеет строгого диагонального преобладания, оно не может быть невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, так что и сама матрица A_1 тем более не является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.

Как показывает следующий пример, S-DZ матрица второго типа может быть вырожденной.

Пример 2.2. Пусть

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2,5 \end{bmatrix}$$

и пусть $S = \overline{R_{A_2}} = \{2,3\}$, $\bar{S} = R_{A_2} = \{1\}$. Поскольку

$$|a_{22}|\left[|a_{11}| - r_1^{\bar{S}}(A_2)\right] = 4 \cdot 2 = 8 > 6 = r_2(A_2)\, r_1^S(A_2)$$

и

$$|a_{33}|\left[|a_{11}| - r_1^{\bar{S}}(A_2)\right] = 2{,}5 \cdot 2 = 5 > 3 = r_3(A_2)\, r_1^S(A_2),$$

то A_2 является S-DZ матрицей второго типа. При этом $\det A_2 = 0$, т.е. матрица A_2 вырожденная.

§3. Верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$

В этом параграфе мы устанавливаем и сравниваем верхние оценки для l_∞-нормы обратных к S-DZ матрицам и, в частности, к DZ матрицам.

Сперва рассмотрим случай S-DZ матриц первого типа. В этом случае из теорем 2.4 и 1.1 немедленно вытекает следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZ матрицей и пусть $S \subseteq R_A$ – непустое собственное подмножество множества индексов $\langle n\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \max\left\{ \frac{|a_{ii}| + r_j^S(A)}{|a_{ii}|[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)] - r_i(A)\, r_j^S(A)}, \right.$$
$$\left. \frac{|a_{jj}| + r_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{jj}|[|a_{ii}| - r_i^S(A)] - r_j(A)\, r_i^{\bar{S}}(A)} \right\}. \quad (3.1)$$

Поскольку, в силу теоремы 2.2, S-DZ матрица первого типа является S-SDD матрицей, то верхнюю оценку l_∞-нормы ее обратной также можно получить, применив оценку теоремы 1.2. В этом случае мы приходим к следующему результату, дополняющему теорему 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является S-DZ матрицей и пусть $S \subseteq R_A$ – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \frac{\max\{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A),\, |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) + r_i^{\bar{S}}(A)\}}{\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right]\left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] - r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A)}. \quad (3.2)$$

Сравним оценки теорем 3.1 и 3.2 для обратных к S-DZ матрицам первого типа. Для этого мы воспользуемся следующей технической леммой, которая устанавливается непосредственной проверкой.

Лемма 3.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, – S-*DZ матрица, пусть* $S \subseteq R_A$ – *непустое собственное подмножество* $\langle n\rangle$ *и пусть* $i \in S$, $j \in \bar{S}$.

(i) *Если* $|a_{ii}| - r_i(A) \geqslant |a_{jj}| - r_j(A)$, *то*

$$\frac{|a_{ii}| + r_j^S(A)}{|a_{ii}|[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)] - r_i(A)\, r_j^S(A)} \geqslant \frac{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A)}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,\big[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\big] - r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A)};$$

(ii) *если* $|a_{ii}| - r_i(A) \leqslant |a_{jj}| - r_j(A)$, *то*

$$\frac{|a_{jj}| + r_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{jj}|[|a_{ii}| - r_i^S(A)] - r_j(A) r_i^{\bar{S}}(A)} \geqslant \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) + r_i^{\bar{S}}(A)\}}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,\big[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\big] - r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A)}.$$

Теперь мы готовы показать, что оценка теоремы 3.2 по крайней мере не хуже, чем оценка теоремы 3.1.

Теорема 3.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *является* S-*DZ матрицей первого типа, где* $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. *Тогда, вообще говоря, оценка* (3.2) *является более точной, чем оценка* (3.1).

Доказательство. Ввиду леммы 3.1, для завершения доказательства желаемых утверждений, остается лишь заметить, что

$$|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A) \geqslant |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) + r_i^{\bar{S}}(A)$$

тогда и только тогда

$$|a_{ii}| - r_i(A) \geqslant |a_{jj}| - r_j(A). \qquad \square$$

Используя теоремы 2.5 и 1.2, мы легко получаем следующий результат, применимый к S-DZ матрицам обоих типов.

Теорема 3.4. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *является* S-*DZ матрицей для непустого собственного подмножества* S *множества индексов* $\langle n\rangle$. *Если*

$$r_i^S(A) = 0 \quad \textit{для всех} \quad i \in S, \tag{3.3}$$

то

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \frac{\max\{|a_{ii}| + r_j^S(A),\ |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) + r_i(A)\}}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] - r_i(A)\, r_j^S(A)}. \tag{3.4}$$

Заметим, что для S-DZ матрицы A первого типа, удовлетворяющей условию (3.3), оценка (3.4), вообще говоря, улучшает оценку теоремы 3.1.

Рассмотрим теперь частный случай DZ матриц. Подставляя $S = \{i\}$ в оценку (3.1), мы немедленно получаем следующую верхнюю оценку для обратной к DZ матрице первого типа.

Следствие 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является $DZ^{(i)}$ матрицей, где $i \in R_A$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{j\neq i} \max \left\{ \frac{|a_{ii}| + |a_{ji}|}{|a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] - r_i(A)\,|a_{ji}|}, \right.$$
$$\left. \frac{|a_{jj}| + r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)} \right\}. \quad (3.5)$$

С другой стороны, в том случае, когда $S = \{i\} \subseteq R_A$, из теоремы 3.2, так же как и из теоремы 3.4, мы получаем следующий результат, установленный в работе [2].

Следствие 3.2 ([2, теорема 4.2]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является $DZ^{(i)}$ матрицей и $i \in R_A$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{j\neq i} \max \left\{ \frac{|a_{ii}| + |a_{ji}|}{|a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] - r_i(A)\,|a_{ji}|}, \right.$$
$$\left. \frac{|a_{jj}| - r_j^i(A) + r_i(A)}{|a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] - r_i(A)\,|a_{ji}|} \right\}. \quad (3.6)$$

Положим

$$p_i(A) = |a_{ii}| - r_i(A), \quad i \in \langle n\rangle.$$

В силу теоремы 3.3, в том случае когда $S = \{i\}$, $i \in R_A$, оценка (3.6) является, вообще говоря, более точной, чем оценка (3.5). С другой стороны, оценка (3.5) по крайней мере столь же точна, сколь и следующая оценка, полученная в работе [2, см. (4.17) и (4.21)]:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max \left\{ \frac{1}{p_i(A)}, \max_{j\neq i} \frac{|a_{ii}| + |a_{ji}|}{|a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] - r_i(A)\,|a_{ji}|} \right\}$$

$$= \max \left\{ \frac{1}{p_i(A)}, \max_{\substack{j\neq i:\\ p_i(A) > p_j(A)}} \frac{|a_{ii}| + |a_{ji}|}{|a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] - r_i(A)\,|a_{ji}|} \right\}. \quad (3.7)$$

Действительно, как нетрудно убедиться, оценку (3.5) можно записать в виде

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{\substack{j\neq i:\\ p_i(A)>p_j(A)}} \frac{|a_{ii}|+|a_{ji}|}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}|-r_j^i(A)\right]-r_i(A)\,|a_{ji}|}, \right.$$
$$\left. \max_{\substack{j\neq i:\\ p_i(A)\leqslant p_j(A)}} \frac{|a_{jj}|+r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}|-r_i(A)\,r_j(A)} \right\}. \quad (3.5a)$$

Наконец, поскольку, как легко видеть,

$$\frac{1}{p_i(A)} \geqslant \frac{|a_{jj}|+r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}|-r_i(A)\,r_j(A)},$$

если $p_i(A) \leqslant p_j(A)$, то мы можем заключить, что, вообще говоря, оценка (3.5a) (а следовательно также и оценка (3.5)) является более точной, чем оценка (3.7).

В завершение этого параграфа представим верхнюю оценку для обратной к $\mathrm{DZ}^{(i)}$ матрице второго типа, где $i \in \overline{R_A}$. В этом случае, по теореме 3.4, мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{j\neq i} \frac{\max\{|a_{ii}|+|a_{ji}|,\ |a_{jj}|-r_j^i(A)+r_i(A)\}}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}|-r_j^i(A)\right]-r_i(A)\,|a_{ji}|}. \quad (3.8)$$

Принимая во внимание, что при $i \in \overline{R_A}$ и $j \neq i$ имеют место неравенства

$$p_i(A) \leqslant 0 < p_j(A),$$

мы заключаем, что оценка (3.8) равносильна оценке

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{j\neq i} \frac{|a_{jj}|-r_j^i(A)+r_i(A)}{|a_{ii}|\left[|a_{jj}|-r_j^i(A)\right]-r_i(A)\,|a_{ji}|}, \quad (3.8a)$$

предложенной в работе [2, см. (4.15)].

§4. Множества локализации собственных значений

В этом параграфе представлены множества локализации собственных значений, полученные на основе результатов о невырожденности матриц, полученных в §2.

Пусть

$$\Gamma_i(A) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z-a_{ii}| \leqslant r_i(A)\}, \quad i \in \langle n\rangle,$$

– круги Гершгорина, а для заданного подмножества $\varnothing \neq T \subsetneq \langle n\rangle$ мы полагаем

$$\Omega_{pq}^{T}(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} :\ |z-a_{qq}|\left[|z-a_{pp}| - r_p^T(A)\right] \leqslant r_q(A)\, r_p^{\bar{T}}(A) \right\}, \quad p \in T,\ q \in \bar{T}.$$

В работе [3] на основе невырожденности S-OB матриц был получен следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть $A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{\substack{i\in S,\\ j\in\bar{S}}} \left\{ \Omega_{ij}^{S}(A) \cup \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A) \right\}. \tag{4.1}$$

Следующая теорема вытекает из невырожденности S-DZ матриц первого типа.

Теорема 4.2. *Пусть $A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть $\varnothing \neq S \subseteq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{i\in S} \left\{ \Gamma_i(A) \cup \left(\bigcup_{j\in\bar{S}} \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A) \right) \right\}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Заметим сперва, что в том случае, когда $S = \langle n\rangle$, включение (4.2) сводится к теореме Гершгорина. Поэтому далее будем предполагать, что $S \neq \langle n\rangle$.

Если $\lambda \in \operatorname{Spec} A$, то матрица $B_\lambda := \lambda I_n - A$ является вырожденной. Следовательно, ввиду следствия 2.1, если $S \neq \varnothing, \langle n\rangle$ и $S \subseteq R_{B_\lambda}$, то B_λ не может быть S-DZ матрицей. Отсюда следует, что

• либо $S \nsubseteq R_{B_\lambda}$, т.е. $|\lambda - a_{ii}| \leqslant r_i(A)$ для некоторого $i \in S$, что означает, что

$$\lambda \in \bigcup_{i\in S} \Gamma_i(A),$$

• либо при некоторых $i \in S$ и $j \in \bar{S}$ имеет место неравенство

$$|\lambda - a_{ii}| \left[|\lambda - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) \right] \leqslant r_i(A)\, r_j^{S}(A),$$

т.е.

$$\lambda \in \bigcup_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A).$$

Таким образом,

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \left\{\bigcup_{i\in S}\Gamma_i(A)\right\} \cup \left\{\bigcup_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}$$

$$= \bigcup_{i\in S}\left\{\Gamma_i(A) \cup \left(\bigcup_{j\in\bar{S}} \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A)\right)\right\}. \qquad \square$$

Ясно, что при всех $i \in S$ и $j \in \bar{S}$ мы имеем:

$$\Gamma_i(A)\cap\Gamma_j(A) \subseteq \Omega_{ij}^{S}(A)\cap\Omega_{ji}^{\bar{S}}(A) \subseteq \Omega_{ij}^{S}(A)\cup\Omega_{ji}^{\bar{S}}(A) \subseteq \Gamma_i(A)\cup\Gamma_j(A), \quad (4.3)$$

и из (4.3) легко следует, что

$$\bigcup_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \left\{\Omega_{ij}^{S}(A) \cup \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\} \subseteq \bigcup_{i\in\langle n\rangle} \Gamma_i(A),$$

а также, что

$$\bigcup_{i\in S}\left\{\Gamma_i(A) \cup \left(\bigcup_{j\in\bar{S}} \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A)\right)\right\} \subseteq \bigcup_{i\in\langle n\rangle} \Gamma_i(A).$$

Значит, множества локализации собственных значений (4.1) и (4.2) являются подмножествами множества кругов Гершгорина

$$\Gamma(A) = \bigcup_{i\in\langle n\rangle} \Gamma_i(A).$$

Из теорем 4.1 и 4.2 мы немедленно получаем следующие более точные результаты.

Следствие 4.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcap_{\varnothing\neq S\subsetneq\langle n\rangle} \bigcup_{\substack{i\in S,\\ j\in\bar{S}}} \left\{\Omega_{ij}^{S}(A) \cup \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}.$$

Следствие 4.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcap_{\varnothing\neq S\subsetneq\langle n\rangle} \bigcup_{i\in S} \left\{\Gamma_i(A) \cup \left(\bigcup_{j\in\bar{S}} \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A)\right)\right\}.$$

В следующей теореме, вытекающей из следствия 2.5, представлено множество локализации собственных значений, зависящее от расположения нулевых элементов в матрице. Точнее говоря, эта теорема применима к матрицам, удовлетворяющим условиям (2.15).

Теорема 4.3. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Если подматрица $A[S]$ является диагональной, т.е.*

$$r_i(A[S]) = r_i^S(A) = 0, \quad i \in S, \tag{4.4}$$

то

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A).$$

Доказательство. В силу следствия 2.5, вырожденная матрица $B_\lambda = \lambda I_n - A$, которая удовлетворяет условию

$$r_i^S(B_\lambda) = r_i^S(A) = 0, \quad i \in S,$$

не может быть S-DZ матрицей. Следовательно, при некоторых $i \in S$ и $j \in \bar{S}$ необходимо выполнено неравенство

$$|\lambda - a_{ii}| \left[|\lambda - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}\right] \leqslant r_i(A)\, r_j^S(A).$$

Это означает, что

$$\lambda \in \bigcup_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \Omega_{ji}^{\bar{S}}(A),$$

чем и завершается доказательство. □

Ясно, что для матриц, удовлетворяющих условию (4.4), теорема 4.3 одновременно улучшает результаты как теоремы 4.1, так и теоремы 4.2.

В том частном случае, когда $|S| = 1$, из теорема 4.3 вытекает следующий результат.

Следствие 4.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$. Тогда при любом $i \in \langle n\rangle$ имеет место включение*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{j\neq i} \Omega_{ji}^{\langle n\rangle\setminus\{i\}}(A)$$

$$= \bigcup_{j\neq i} \left\{z \in \mathbb{C} :\ |z - a_{ii}| \left[|z - a_{jj}| - r_j^i(A)\right] \leqslant r_i(A)\, |a_{ji}|\right\}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcap_{i\in\langle n\rangle}\bigcup_{j\neq i}\Omega_{ji}^{\langle n\rangle\setminus\{i\}}(A)$$

$$= \bigcap_{i\in\langle n\rangle}\bigcup_{j\neq i}\left\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a_{ii}|\left[|z-a_{jj}|-r_j^i(A)\right]\leqslant r_i(A)\,|a_{ji}|\right\}.$$

Доказательство. Положим $S=\{i\}$ и применим теорему 4.3. □

§5. Верхние оценки для перроновского корня

В этом параграфе мы используем результаты §4 для получения верхних оценок перроновского корня неотрицательной матрицы.

Нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 5.1. *Пусть $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $\varnothing\neq S\subsetneq\langle n\rangle$. Если*

$$\rho(A)\in\Omega_{ji}^{\bar S}(A), \tag{5.1}$$

где $i\in S$, $j\in\bar S$, то

$$\rho(A)\leqslant\varphi_{ji}^{\bar S}(A):=\frac{1}{2}\left\{a_{ii}+R_j^{\bar S}(A)+\left[\left(a_{ii}-R_j^{\bar S}(A)\right)^2+4r_i(A)\,r_j^S(A)\right]^{1/2}\right\}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\rho(A)\geqslant\max_{i\in\langle n\rangle}a_{ii},$$

из (5.1) мы получаем, что

$$(\rho(A)-a_{ii})\left(\rho(A)-a_{jj}-r_j^{\bar S}(A)\right)\leqslant r_i(A)\,r_j^S(A),$$

или

$$\rho(A)^2-\left(a_{ii}+a_{jj}+r_j^{\bar S}(A)\right)\rho(A)+a_{ii}\left(a_{jj}+r_j^{\bar S}(A)\right)-r_i(A)\,r_j^S(A)\leqslant 0,$$

или

$$\rho(A)^2-\left(a_{ii}+R_j^{\bar S}(A)\right)\rho(A)+a_{ii}R_j^{\bar S}(A)-r_i(A)\,r_j^S(A)\leqslant 0. \tag{5.3}$$

Теперь для завершения доказательства остается заметить, что оценка (5.2) следует из квадратичного неравенства (5.3). □

Ввиду леммы 5.1, из теоремы 4.1 мы немедленно получаем следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in S,\, j\in \bar{S}} \max\left\{\varphi_{ij}^{S}(A),\ \varphi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}. \tag{5.4}$$

Аналогично, из теоремы 4.2 и леммы 5.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in S} \max\left\{R_i(A),\ \max_{j\in \bar{S}} \varphi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}. \tag{5.5}$$

Ясно, что оценки (5.4) и (5.5) можно улучшить следующим образом.

Следствие 5.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \min_{S:\, \varnothing\neq S\subsetneq\langle n\rangle} \max_{i\in S,\, j\in \bar{S}} \max\left\{\varphi_{ij}^{S}(A),\ \varphi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}. \tag{5.6}$$

Следствие 5.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \min_{S:\, \varnothing\neq S\subsetneq\langle n\rangle} \max_{i\in S} \max\left\{R_i(A),\ \max_{j\in \bar{S}} \varphi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}. \tag{5.7}$$

Из теоремы 5.2 мы также выводим следующий результат.

Следствие 5.3. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Если*

$$\max_{i\in S} R_i(A) \leqslant \min_{j\in \bar{S}} R_j(A), \tag{5.8}$$

то

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in S,\, j\in \bar{S}} \varphi_{ji}^{\bar{S}}(A). \tag{5.9}$$

Доказательство. Прямая проверка показывает, что при $i \in S$ и $j \in \bar{S}$ мы имеем:

$$\max\left\{R_i(A),\ \varphi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\} = \begin{cases} R_i(A), & \text{если} \quad R_i(A) \geqslant R_j(A), \\ \varphi_{ji}^{\bar{S}}(A), & \text{если} \quad R_i(A) \leqslant R_j(A). \end{cases}$$

Следовательно, неравенство (5.9) вытекает из (5.8). □

Оценка (5.9) также немедленно вытекает из теоремы 4.3 и леммы 5.1, если подматрица $A[S]$ диагональна, так что справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $\varnothing \neq S \subsetneq \langle n\rangle$. Если*

$$r_i^S(A) = 0 \quad \textit{для всех} \quad i \in S,$$

то

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \varphi_{ji}^{\bar{S}}(A).$$

В завершение данной работы рассмотрим частный случай теоремы 5.3, в котором $S = \{i\}$. В этом случае, очевидно, $r_i^S(A) = 0$, так что теорема 5.3 применима и приводит к следующему утверждению.

Следствие 5.4. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \max_{j\neq i} \varphi_{ji}^{\langle n\rangle\setminus\{i\}}(A)$$

$$= \min_{i\in\langle n\rangle} \max_{j\neq i} \frac{1}{2}\left\{a_{ii} + R_j^i(A) + \left[\big(a_{ii} - R_j^i(A)\big)^2 + 4r_i(A)\,a_{ji}\right]^{1/2}\right\}. \quad (5.10)$$

Доказательство. Действительно, если $S = \{i\}$, то $\bar{S} = \langle n\rangle \setminus \{i\}$, $r_j^S(A) = a_{ji}$ и $R_j^{\bar{S}}(A) = R_j^i(A)$, так что

$$\varphi_{ji}^{\bar{S}}(A) = \frac{1}{2}\left\{a_{ii} + R_j^i(A) + \left[\big(a_{ii} - R_j^i(A)\big)^2 + 4r_i(A)\,a_{ji}\right]^{1/2}\right\},$$

и требуемая оценка (5.10) следует из теоремы 5.3. □

Список литературы

1. Л. С. Дашниц, М. С. Зусманович, *О некоторых критериях регулярности матриц и локализации их спектра.* — Ж. вычисл. мат. мат. физ. **10**, No. 5 (1970), 1092–1097.
2. Л. Ю. Колотилина, *О матрицах Дашница–Зусмановича (DZ) и матрицах типа Дашница–Зусмановича (DZT) и их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 145–165.
3. Л. Ю. Колотилина, *Об одном подклассе класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц и соответствующих множествах локализации собственных и сингулярных значений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 166–178.
4. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые оценки обратных, зависящие от структуры разреженности матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 201–219.

5. Л. Ю. Колотилина, *Новые двусторонние оценки для перроновского корня и соответствующие критерии невырожденности матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 120–137.
6. Л. Ю. Колотилина, *Об SDD_1 матрицах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 88–112.
7. Л. Ю. Колотилина, *SSDD матрицы и их соотношения с другими подклассами класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **534** (2024), 57–88.
8. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix.* II. — Duke Math. J. **14** (1947), 21–26.
9. X. Cheng, Y. Li, L. Liu, Y. Wang, *Infinity norm upper bounds for the inverse of SDD_1 matrices.* — AIMS Math. **7**, No. 5 (2022), 8847–8860.
10. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
11. P. F. Dai, *A note on diagonal dominance, Schur complements and some classes of H-matrices and P-matrices.* — Adv. Comput. Math. **42** (2016), 1–4.
12. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and $\mathcal{S}$-SDD matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.
13. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
14. J. M. Peña, *Diagonal dominance, Schur complements and some classes of H-matrices and P-matrices.*— Adv. Comput. Math. **35** (2011), 357–373.
15. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. S-DZ matrices – a new subclass of the nonsingular $\mathcal{H}$-matrices.

The paper introduces into consideration the so-called S-DZ matrices of two types, which generalize the Dashnic–Zusmanovich (DZ) matrices and contain the SDD matrices. It is established that the S-DZ matrices of the first type form a subclass of both the S-SDD and S-SDD_1 matrices and actually coincide with the S-OB matrices, implying that the S-DZ matrices of the first type are nonsingular $\mathcal{H}$-matrices, whereas S-DZ matrices of the second type can be singular. Some upper bounds for the l_∞-norm of the inverse of an invertible S-DZ matrix are derived, compared, and applied to DZ matrices. Also new eigenvalue inclusion sets, related to S-DZ and DZ matrices, and new upper bounds for the Perron root of a nonnegative matrix are presented.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 23 сентября 2026 г.