Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 554, 2026 г.

,

Н. А. Колегов, О. В. Маркова

ВЗАИМНО ЦИКЛИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ

§1. Введение

Для натурального числа n обозначим через $M_n(\mathbb{F})$ алгебру всех $n \times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$. Пусть $\mathbb{F}^n$ – пространство всех векторов-столбцов из n элементов поля $\mathbb{F}$.

Циклические матрицы – классический объект линейной алгебры и комбинаторики. Известны различные эквивалентные определения [9]. Одно из них заключается в существовании циклического вектора. Назовём матрицу $A \in M_n(\mathbb{F})$ *циклической*, если существует такой вектор $v \in \mathbb{F}^n$, что векторы $v, Av, A^2v, \ldots, A^{n-1}v$ составляют базис пространства $\mathbb{F}^n$.

В работе будет рассмотрено обобщение понятия цикличности на случай двух матриц. Оно возникает при исследовании пар коммутирующих матриц. В 1961 г. Герштенхабер получил следующий результат.

Теорема 1.1 ([10])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и $AB = BA$. Тогда эти матрицы порождают алгебру размерности не более n:*

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A, B] \leqslant n.$$

В дальнейшем были получены другие доказательства этого факта. Лаффи, Лазарус [16], Бариа, Халмош [7] независимо получили доказательства средствами линейной алгебры. Гуральник [11] показал, что неравенство $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A, B] \leqslant n$ вытекает из неприводимости многообразия пар коммутирующих матриц. Уодсворт [19] доказал результат Герштенхабера при помощи теоремы о строении конечно-порождённых модулей над кольцами главных идеалов.

Нойбауэр, Солтман [17] исследовали матричные алгебры, для которых оценка Герштенхабера достигается, т.е. $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A, B] = n$. Частным

Ключевые слова: коммутативная матричная подалгебра, циклическая матрица, длина алгебры.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект No. 25-11-00348).

случаем является ситуация, когда алгебра $\mathbb{F}[A, B]$ обладает циклическим вектором: $\mathbb{F}[A, B]v = \mathbb{F}^n$. Мы будем исследовать именно такие пары матриц.

Главным образом нас будет интересовать вопрос о значениях функции длины. Длина – это численный инвариант конечномерной алгебры и её подмножеств, который в некотором смысле характеризует "сложность" операции умножения в алгебре. Исследование функции длины ведётся для матричных алгебр, групповых алгебр, неассоциативных алгебр. До сих пор остаётся открытой проблема Паза 1984 г. [18] о длине полной матричной алгебры, но недавно в этой области был достигнут значительный прогресс. В этом контексте коммутативные алгебры, содержащие циклические матрицы, являются алгебрами максимальной длины в классе всех коммутативных матричных алгебр [3, 5, 13].

Мы рассмотрим вопрос реализуемости значений функции длины на парах взаимно циклических матриц. Знание реализуемых значений представляет интерес, так как позволяет прояснить поведение функции длины на алгебрах или подмножествах специального вида. Изучению проблем реализуемости посвящены исследования [12, 14, 15].

Работа организована следующим образом. В §2 приводятся основные определения, обозначения и обзор известных результатов. В §3 получены результаты о структуре и некоторых свойствах алгебр, порождённых взаимно циклическими матрицами. Отдельно рассмотрен случай, когда одна из матриц изоциклическая. В §4 найдены все реализуемые значения длины пар взаимно циклических матриц; в частности, показано, что они являются всеми целыми точками определённого отрезка (см. теорему 4.4). В §5 разобран случай нильпотентных взаимно циклических матриц специального вида. Для алгебр, порождённых такими парами матриц, получены оценки индекса нильпотентности радикала и, как следствие, – оценки функции длины.

§2. Определения, обозначения, известные результаты

2.1. Взаимно циклические матрицы. Понятия теории колец и алгебр, использованные в статье, можно найти, например, в [6]. Все рассматриваемые в работе алгебры – ассоциативные конечномерные алгебры с единицей над полями.

На протяжении всей работы $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Обозначим через $\overline{\mathbb{F}}$ его алгебраическое замыкание. Пусть $\mathcal{A}$ – конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{F}$. Для произвольного элемента $a \in \mathcal{A}$ через $\mathbb{F}[a]$ обозначим подалгебру, порождённую элементом a. Другими словами, $\mathbb{F}[a]$ является гомоморфным образом алгебры многочленов $\mathbb{F}[t]$ при отображении $t \mapsto a$.

Пусть M – левый унитальный $\mathcal{A}$-модуль. Тогда M можно рассматривать как левый модуль над алгеброй линейных операторов $\operatorname{End}_{\mathbb{F}} M$. Имеются естественные гомоморфизм $\mathcal{A} \hookrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{F}} M$ и вложение $\operatorname{End}_{\mathcal{A}} M \hookrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{F}} M$. Если задан эндоморфизм $B \in \operatorname{End}_{\mathcal{A}} M$, то рассмотрим алгебру операторов $\mathcal{A}[B]$ внутри $\operatorname{End}_{\mathbb{F}} M$. Эндоморфизм B называется *циклическим*, если M – циклический модуль над $\mathcal{A}[B]$. Другими словами, найдётся такой элемент $v \in M$, что множество $\{B^k v\}_{k=0}^{\infty}$ порождает M как $\mathcal{A}$-модуль. Таким образом, элемент v выступает в роли циклического вектора, см. [2].

Пространство $\mathbb{F}^n$ является левым модулем над $M_n(\mathbb{F})$ стандартным образом.

Через E_n или E будем обозначать единичную матрицу в $M_n(\mathbb{F})$, а через O_n или O – нулевую матрицу.

Рассмотрим произвольную матрицу $A \in M_n(\mathbb{F})$. Введём обозначение для её централизатора: $C(A) = \{B \in M_n(\mathbb{F}) \mid AB = BA\}$. Тогда имеется естественный изоморфизм $C(A) \cong \operatorname{End}_{\mathbb{F}[A]} \mathbb{F}^n$. Таким образом, если матрица B коммутирует с A, то её можно понимать как эндоморфизм $\mathbb{F}[A]$-модуля. Однако аналогично можно рассмотреть централизатор матрицы B, а матрицу A считать эндоморфизмом модуля. Если определить в обоих случаях циклические эндоморфизмы, то возникает симметричное отношение.

Определение 2.1. *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ будем называть* взаимно циклическими, *если выполнено любое из эквивалентных условий*:

1) *B является циклическим эндоморфизмом $\mathbb{F}^n$ как модуля над $\mathbb{F}[A]$;*

2) *A является циклическим эндоморфизмом $\mathbb{F}^n$ как модуля над $\mathbb{F}[B]$;*

3) *$AB = BA$ и $\mathbb{F}^n$ является циклическим модулем над коммутативной алгеброй $\mathbb{F}[A, B]$, порождённой матрицами A, B.*

Замечание 2.2. Определение 2.1 обобщает определение циклической матрицы в том смысле, что циклическая матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ будет

взаимно циклической сама с собой. С другой стороны, критерием цикличности это утверждение не будет, поскольку A также является взаимно циклической с любой скалярной матрицей, и вообще с любой матрицей из порождённой ею алгебры $\mathbb{F}[A]$.

Пример 2.3. Пусть $C_k \in M_k(\mathbb{F})$, $C_m \in M_m(\mathbb{F})$ – две циклические матрицы с циклическими векторами $u \in \mathbb{F}^k$ и $v \in \mathbb{F}^m$ соответственно. Тогда матрицы $A = C_k \otimes E_m$ и $B = E_k \otimes C_m$ взаимно циклические, и $\mathbb{F}[A, B]w = \mathbb{F}^n$ для $w = u \otimes v$, $n = mk$.

Зададим эндоморфизм специального вида для дальнейших рассуждений.

Обозначение 2.4. Зафиксируем вектор $v \in \mathbb{F}^n$. Определим отображение

$$\Phi^v : M_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}^n, \quad \Phi^v(C) = Cv.$$

Для матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ через $\Phi^v_{A,B}$ обозначим ограничение Φ^v на алгебру, порождённую матрицами A, B.

Следующее предложение проверяется непосредственно.

Предложение 2.5. *Рассмотрим матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = BA$. Пусть $v \in \mathbb{F}^n$. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\Phi^v_{A,B}$ *– изоморфизм* $\mathbb{F}[A, B]$ *и* $\mathbb{F}^n$ *как* $\mathbb{F}[A, B]$*-модулей;*

2) $\Phi^v_{A,B}$ *– изоморфизм* $\mathbb{F}[A, B]$ *и* $\mathbb{F}^n$ *как* $\mathbb{F}[A]$*-модулей;*

3) $\Phi^v_{A,B}$ *– изоморфизм* $\mathbb{F}[A, B]$ *и* $\mathbb{F}^n$ *как* $\mathbb{F}[B]$*-модулей;*

4) $\Phi^v_{A,B}$ *– изоморфизм* $\mathbb{F}[A, B]$ *и* $\mathbb{F}^n$ *как линейных пространств над полем* $\mathbb{F}$*;*

5) $\mathbb{F}[A, B]v = \mathbb{F}^n$.

Ниже мы приведём основные свойства взаимно циклических матриц, которые были известны ранее. Нам понадобится специальный матричный инвариант.

Предложение 2.6 ([1, глава VII])**.** *Для матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ следующие величины совпадают:*

1) *минимальная мощность порождающего подмножества модуля* ${}_{\mathbb{F}[A]}\mathbb{F}^n$*;*

2) *количество инвариантных множителей в разложении $\mathbb{F}^n$ в прямую сумму циклических модулей над $\mathbb{F}[t]$ в предположении, что t действует как матрица A;*

3) *максимальная размерность собственного подпространства над алгебраическим замыканием поля*

$$\max\{\dim_{\overline{\mathbb{F}}} \ker(A-\lambda E) \mid \lambda \in \overline{\mathbb{F}}\};$$

другими словами, максимальная геометрическая кратность собственных значений;

4) *максимальное количество жордановых клеток с одним собственным значением в жордановой нормальной форме матрицы A над $\overline{\mathbb{F}}$.*

Обозначение 2.7. Предыдущие величины будем обозначать через $\eta(A)$.

Для двух произвольных коммутирующих матриц верен следующий аналог теоремы Гамильтона–Кэли [7,16,19]. Для полноты изложения приведём его доказательство.

Теорема 2.8 (Обобщённая теорема Гамильтона–Кэли, [7,16,19])**.** *Пусть даны коммутирующие матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB=BA$. Тогда найдутся такие матрицы $A_1, \ldots, A_{\eta(A)} \in \mathbb{F}[A]$ и $B_1, \ldots, B_{\eta(B)} \in \mathbb{F}[B]$, что*

$$B^{\eta(A)} = A_1 B^{\eta(A)-1} + \ldots + A_{\eta(A)-1} B + A_{\eta(A)},$$

$$A^{\eta(B)} = B_1 A^{\eta(B)-1} + \ldots + B_{\eta(B)-1} A + B_{\eta(B)}.$$

Доказательство. Проверим равенство для $B^{\eta(A)}$; для $A^{\eta(B)}$ рассуждения аналогичны. Положим $k = \eta(A)$, $\mathcal{A} = \mathbb{F}[A]$. По предложению 2.6, можно выбрать векторы $v_1, \ldots, v_k$, которые порождают $\mathbb{F}^n$ как $\mathcal{A}$-модуль. Так как $AB = BA$, то B является эндоморфизмом $\mathbb{F}^n$ как $\mathcal{A}$-модуля. Рассмотрим разложения $Bv_j = \sum\limits_{i=1}^{k} h_{ij} v_i$, $j = 1, \ldots, k$, где $h_{ij} \in \mathcal{A}$ могут быть определены неоднозначно. Обозначим через H $k \times k$ матрицу над $\mathcal{A}$ с элементами h_{ij}. Заметим, что для любого многочлена $f(t) \in \mathcal{A}[t]$ выполняется $f(B)v_j = \sum\limits_{i=1}^{k} (f(H))_{ij} v_i$. Выберем в качестве f характеристический многочлен матрицы H. Так как теорема Гамильтона–Кэли верна над коммутативными кольцами [8, глава 3, теорема 4], то $f(B)v_j = 0$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Тогда $f(B)\mathbb{F}^n = 0$, откуда $f(B) = O$. □

Предложение 2.9. *Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ взаимно циклические. Положим $\mathcal{A} = \mathbb{F}[A]$, $\mathcal{B} = \mathbb{F}[B]$. Тогда верны следующие утверждения*:

1) *для любого унитарного многочлена $f(t) \in \mathcal{A}[t]$ степени $\deg f < \eta(A)$ выполнено $f(B) \neq O$;*

2) *для любого унитарного многочлена $f(t) \in \mathcal{B}[t]$ степени $\deg f < \eta(B)$ выполнено $f(A) \neq O$.*

Доказательство. 1). Предположим противное, т.е. пусть найдётся $f(t) \in \mathcal{A}[t]$ степени $\deg f = d < \eta(A)$, такой что $f(B) = O$. Так как B – циклический эндоморфизм модуля $\mathbb{F}^n$ над $\mathbb{F}[A]$, то для некоторого вектора $v \in \mathbb{F}^n$ выполнено $\mathcal{A}[B]v = \mathbb{F}^n$. В силу предположения, векторы $v, Bv, \ldots, B^{d-1}v$ порождают $\mathbb{F}^n$ как $\mathcal{A}$-модуль. Получаем противоречие с тем, что $\eta(A)$ равно минимальному числу образующих.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Теорема 2.10 ([19]). *Пусть даны матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = BA$. Рассмотрим $\mathbb{F}^n$ как $\mathbb{F}[t]$-модуль, предполагая, что t действует как матрица A. Выберем унитарные многочлены $h_1, \ldots, h_\ell \in \mathbb{F}[t]$, которые являются инвариантными множителями этого модуля, причём $0 \subsetneq (h_1) \subseteq (h_2) \subseteq \ldots \subseteq (h_\ell) \subsetneq \mathbb{F}[t]$. Для каждого $i = 1, \ldots, \ell$ положим $n_i = \deg h_i$ и рассмотрим*

$$T_i = \mathbb{F}[A] + \mathbb{F}[A]B + \mathbb{F}[A]B^2 + \ldots + \mathbb{F}[A]B^{i-1},$$
$$U_i = \{B^{i-1}, B^{i-1}A, \ldots, B^{i-1}A^{n_i-1}\}.$$

Тогда

1) $h_i(A)B^{i-1} \in T_{i-1}$;

2) $T_i = \langle U_1 \cup \ldots \cup U_i \rangle_{\mathbb{F}}$;

3) $\langle U_1 \cup \ldots \cup U_\ell \rangle_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}[A, B]$.

Следствие 2.11 ([19]). *Пусть даны матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = BA$. Предположим, что $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A, B] = n$. Тогда объединение множеств $U_1 \cup \ldots \cup U_\ell$ является базисом $\mathbb{F}[A, B]$ над $\mathbb{F}$.*

Определение 2.12. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле,* $n \in \mathbb{N}$ *и* $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$ *– унитарный многочлен.* Сопровождающей матрицей многочлена $f(x)$ *называется матрица*

$$C_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

Определение 2.13. *Назовём квадратную матрицу* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *изоциклической, или* k*-изоциклической, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий:*

1) A *подобна матрице вида* $E_k \otimes C_{\mu_A} = C_{\mu_A} \oplus \ldots \oplus C_{\mu_A}$ *(*k *раз), где* C_{μ_A} *– сопровождающая матрица минимального многочлена матрицы* A*;*

2) A *имеет* k *инвариантных множителей, и все они равны минимальному многочлену;*

3) ${}_{\mathbb{F}[A]}\mathbb{F}^n \cong ({}_{\mathbb{F}[A]}\mathbb{F}[A])^k$ *– свободный модуль над* $\mathbb{F}[A]$ *ранга* k*.*

Отметим, что n-изоциклическая $n \times n$ матрица – это скалярная матрица.

Замечание 2.14. Рассмотрим централизатор k-изоциклической матрицы A. Имеем

$$C(A) \cong \operatorname{End}{}_{\mathbb{F}[A]}\mathbb{F}^n \cong \operatorname{End}({}_{\mathbb{F}[A]}\mathbb{F}[A])^k \cong M_k(\mathbb{F}[A]).$$

Тогда для любой матрицы $B \in C(A)$ существует вложение $\mathbb{F}[A, B] \hookrightarrow M_k(\mathbb{F}[A])$, переводящее $\mathbb{F}[A]$ в скалярные матрицы. Отметим, что вложение может быть реализовано внутри алгебры $M_n(\mathbb{F})$. Выберем невырожденную матрицу $U \in M_n(\mathbb{F})$ так, чтобы $U^{-1}AU = E_k \otimes C_{\mu_A}$. Централизатор сопровождающей матрицы C_{μ_A} имеет вид $\mathbb{F}[C_{\mu_A}]$. Следовательно, $U^{-1}BU$ является матрицей блочного вида, в которой каждый блок имеет размер $d \times d$, где $d = \deg \mu_A(t)$, и принадлежит $\mathbb{F}[C_{\mu_A}]$.

2.2. Длина алгебры. Пусть $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_k\} \subset M_n(\mathbb{F})$ – конечное подмножество.

Определение 2.15. Длина *слова* $A_{i_1} \ldots A_{i_t}$*, где* $A_{i_j} \in \mathcal{S}$*, равна* t*. Будем считать* E (*пустое слово*) *словом от элементов* $\mathcal{S}$ длины 0.

Пусть $\mathcal{S}^i$ обозначает множество всех слов в алфавите $\mathcal{S}$ длины не большей i, $i \geqslant 0$.

Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle E \rangle$ для алгебр с единицей, иначе будем считать $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = 0$. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$ – алгебра с единицей, порожденная множеством $\mathcal{S}$.

Из конечномерности $\mathcal{A}$ получаем, что найдется такой номер h, что $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$. Если для некоторого $h \geqslant 0$ выполнено $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$, то

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$$

и также $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geqslant h$.

Определение 2.16. Длиной множества $\mathcal{S}$ *называется число*

$$\ell(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{L}(\mathcal{S})\}.$$

Определение 2.17. Длиной алгебры $\mathcal{A}$ *называется число*

$$\ell(\mathcal{A}) = \max\{\ell(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

Теорема 2.18 ([13, теорема 6.1])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $\mathcal{A}$ – коммутативная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\ell(\mathcal{A}) \leqslant n - 1$.*

Теорема 2.19 ([3, теорема 3])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Коммутативная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$ имеет максимально возможную длину $n-1$ тогда и только тогда, когда она порождена циклической матрицей.*

Также нам понадобится следующий класс алгебр и соответствующие оценки длины.

Определение 2.20. *Ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ называется* локальной*, если факторалгебра по радикалу Джекобсона $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ является алгеброй с делением.*

Теорема 2.21 ([4, теорема 5])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $\mathcal{A}$ – конечномерная локальная $\mathbb{F}$-алгебра. Пусть $J(\mathcal{A})$ – радикал Джекобсона алгебры $\mathcal{A}$, через N обозначен индекс нильпотентности $J(\mathcal{A})$. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ и $D = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$. Тогда $\ell(\mathcal{A}) \leqslant DN - 1$.*

§3. Алгебры, порожденные взаимно циклическими матрицами

В этом параграфе будут исследованы свойства алгебр, порождённых парами взаимно циклических матриц. Сначала покажем, что любая коммутативная алгебра, порождённая двумя элементами, может быть реализована как матричная алгебра указанного вида.

Предложение 3.1. 1. *Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ взаимно циклические. В алгебре $\mathbb{F}[A,B]$ рассмотрим операторы M_A, M_B умножения на A, B, т.е. $M_A(C) = AC$, $M_B(C) = BC$ для всех $C \in \mathbb{F}[A,B]$. Тогда в подходящем базисе $\mathbb{F}[A,B]$ над $\mathbb{F}$ операторы M_A, M_B имеют матрицы A, B соответственно.*

2. *Пусть идеал $J \lhd \mathbb{F}[x,y]$ таков, что факторалгебра $\mathbb{F}[x,y]/J$ конечномерна. Обозначим $n = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x,y]/J$. Рассмотрим на $\mathbb{F}[x,y]/J$ операторы M_x, M_y умножения на x, y. Тогда в любом базисе матрицы операторов M_x, M_y взаимно циклические.*

Доказательство. 1. Выберем вектор $v \in \mathbb{F}^n$ такой, что $\mathbb{F}[A,B]v = \mathbb{F}^n$. Существуют такие многочлены $\{f_i(x,y)\}_{i=1}^n$, что $f_i(A,B)v = e_i$ – вектор с единицей на i-ой позиции и нулями на остальных. Рассмотрим отображение $\Phi = \Phi^v_{A,B}$. Тогда Φ является изоморфизмом модулей над $\mathbb{F}[A,B]$ по предложению 2.5. В частности, Φ – изоморфизм над $\mathbb{F}$, поэтому $\{f_i(A,B)\}_{i=1}^n$ – базис $\mathbb{F}[A,B]$ над $\mathbb{F}$. Подействуем оператором M_A на j-ый базисный вектор: $M_A(f_j(A,B)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i(A,B)$ для некоторых $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \Phi(f_i(A,B)) = \Phi(M_A(f_j(A,B))) = A\Phi(f_j(A,B)) = Ae_j.$$

Отсюда $a_{ij} = \alpha_{ij}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Для M_B проверка аналогична.

2. По построению, $M_x M_y = M_y M_x$. Алгебра $\mathbb{F}[x,y]/J$ является циклическим модулем над $\mathbb{F}[M_x, M_y]$ с порождающим элементом $1+J$. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная коммутативная конечномерная алгебра с единицей над $\mathbb{F}$, порождённая двумя элементами: $\mathcal{A} = \mathbb{F}[a,b]$. Обозначим $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} = n$. Тогда существуют взаимно циклические матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ такие, что $\mathbb{F}[A,B] \cong \mathcal{A}$.*

Известно, что алгебры, порождённые одной циклической матрицей, изоморфны тогда и только тогда, когда они подобны, см. [5, теорема 4].

Оказывается, что аналогичное свойство верно для алгебр, порождённых парами взаимно циклических матриц.

Предложение 3.3. *Пусть даны матрицы $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{F})$. Предположим, что каждая пара $\{A_1, B_1\}$ и $\{A_2, B_2\}$ взаимно циклическая, причём $\mathbb{F}[A_1, B_1] \cong \mathbb{F}[A_2, B_2]$. Тогда существует невырожденная матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что*

$$C\mathbb{F}[A_1, B_1]C^{-1} = \mathbb{F}[A_2, B_2].$$

Доказательство. Выберем векторы $v_1, v_2 \in \mathbb{F}^n$ так, чтобы

$$\mathbb{F}[A_1, B_1]v_1 = \mathbb{F}^n, \quad \mathbb{F}[A_2, B_2]v_2 = \mathbb{F}^n.$$

Обозначим через $\varphi : \mathbb{F}[A_1, B_1] \longrightarrow \mathbb{F}[A_2, B_2]$ некоторый изоморфизм. Положим $\Phi_1 = \Phi^{v_1}_{A_1,B_1}$ и $\Phi_2 = \Phi^{v_2}_{A_2,B_2}$, см. предложение 2.5. Определим отображение $C : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ как композицию $C = \Phi_2 \circ \varphi \circ \Phi_1^{-1}$. Тогда

$$C(Xv_1) = \varphi(X)v_2, \quad X \in \mathbb{F}[A_1, B_1].$$

Заметим, что

$$CA_1(Xv_1) = C(A_1Xv_1) = \varphi(A_1X)v_2 = \varphi(A_1)\varphi(X)v_2 = \varphi(A_1)C(Xv_1).$$

Так как матрица $X \in \mathbb{F}[A_1, B_1]$ произвольная и $\mathbb{F}[A_1, B_1]v_1 = \mathbb{F}^n$, то $CA_1 = \varphi(A_1)C$. Значит, $CA_1C^{-1} = \varphi(A_1)$. Аналогично, $CB_1C^{-1} = \varphi(B_1)$. Матрицы $\varphi(A_1)$ и $\varphi(B_1)$ порождают алгебру $\mathbb{F}[A_2, B_2]$ как изоморфные образы порождающих. □

Далее мы отдельно рассмотрим случай, когда одна из матриц является изоциклической. Оказывается, что при таком ограничении оценка Герштенхабера достигается в точности тогда, когда матрицы взаимно циклические.

Предложение 3.4. *Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, матрица A является k-изоциклической, $AB = BA$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A, B] = n$;

2) *A, B – взаимно циклические.*

В этом случае матрицы $E, B, \ldots, B^{k-1}$ образуют базис $\mathbb{F}[A, B]$ как модуля над $\mathbb{F}[A]$.

Доказательство. Импликация $2 \Rightarrow 1$ верна всегда. Докажем $1 \Rightarrow 2$. Обозначим $\mathcal{A} = \mathbb{F}[A]$. Рассмотрим отображение $\Phi : \mathcal{A}^k \longrightarrow \mathcal{A}[B]$, которое ставит в соответствие набору $(a_1, \ldots, a_k)$ линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i B^{i-1}$. По обобщённой теореме Гамильтона–Кэли, выполнено

$\mathcal{A}[B] = \mathcal{A} + \mathcal{A}B + \ldots + \mathcal{A}B^{k-1}$. Значит, отображение Φ сюръективно. Заметим, что Φ является как эндоморфизмом $\mathcal{A}$-модулей, так и линейным отображением над $\mathbb{F}$. При этом

$$\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{A}^k = k\cdot\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{A} = k\cdot\deg\mu_A(t) = n, \quad \dim_{\mathbb{F}}\mathcal{A}[B] = \dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}[A,B] = n.$$

Так как $\dim_{\mathbb{F}}\ker\Phi + \dim_{\mathbb{F}}\mathrm{Im}\,\Phi = n$, то Φ – биекция. Это означает, что матрицы $E, B, \ldots, B^{k-1}$ линейно независимы над $\mathcal{A}$.

Далее будем строить циклический вектор для $\mathbb{F}[A,B]$. Обозначим через

$$\Psi : {}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}^k \longrightarrow {}_{\mathcal{A}}\mathbb{F}^n \tag{1}$$

изоморфизм $\mathcal{A}$-модулей в соответствии с определением изоциклической матрицы. Тогда Ψ определяет изоморфизм $\widehat{\Psi} : \mathrm{End}\,{}_{\mathcal{A}}\mathbb{F}^n \to M_k(\mathcal{A})$ по правилу $\widehat{\Psi}(X)u = \Psi^{-1}(X\Psi(u))$ для $X \in \mathrm{End}\,{}_{\mathcal{A}}\mathbb{F}^n$ и $u \in \mathcal{A}^k$. Обозначим $\widehat{B} = \widehat{\Psi}(B)$, тогда $\widehat{B}$ является $k\times k$ матрицей над $\mathcal{A}$.

Пусть $\mu_A(t) = h_1^{\alpha_1}\cdot\ldots h_m^{\alpha_m}$ – разложение минимального многочлена матрицы A на неприводимые множители над $\mathbb{F}$. Согласно обобщению китайской теоремы об остатках [6, глава 1, §1.10], выполнено $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_m$, где $\mathcal{A}_i = \mathbb{F}[t]/(h_i^{\alpha_i})$. Обозначим через $\widehat{B}_i \in M_k(\mathcal{A}_i)$ матрицу, полученную из $\widehat{B}$ проекцией каждого элемента на $\mathcal{A}_i$. Тогда матрицы $E, \widehat{B}_i, \widehat{B}_i^2, \ldots, \widehat{B}_i^{k-1}$ линейно независимы над $\mathcal{A}_i$.

Рассмотрим поле $\mathbb{K}_i = \mathbb{F}[t]/(h_i)$. Пусть $\widehat{B}'_i \in M_k(\mathbb{K}_i)$ – это матрица, полученная из $\widehat{B}$ проекцией каждого элемента на $\mathbb{K}_i$. Покажем, что $\widehat{B}'_i$ – циклическая матрица. Предположим противное. Тогда найдётся ненулевой многочлен $\overline{f}'_i \in \mathbb{K}_i[t]$ такой, что $\overline{f}'_i(\widehat{B}'_i) = 0$ и при этом $\deg\overline{f}'_i < k$. Так как $\mathbb{K}_i$ – поле, то $\overline{f}'_i$ можно выбрать унитарным. Пусть $\overline{f}_i \in \mathcal{A}_i[t]$ – это такой многочлен, что проекция его коэффициентов на $\mathbb{K}_i$ даёт $\overline{f}'_i$. Тогда $\overline{f}_i(\widehat{B}_i) \in M_k(\mathfrak{m}_i)$, где $\mathfrak{m}_i = (h_i)/(h_i^{\alpha_i})$ – максимальный идеал в локальной алгебре $\mathcal{A}_i$. Так как $\overline{f}'_i$ унитарный, то многочлен $\overline{f}_i$ также можно выбрать унитарным, в частности, заведомо $\overline{f}_i \not\equiv 0$. Выберем элемент $S_i \in \mathcal{A}_i$, который является проекцией многочлена $h_i^{\alpha_i-1}$ на $\mathcal{A}_i$. Тогда $S_i\overline{f}_i(\widehat{B}_i) = 0$. Многочлен $S_i\overline{f}_i(t) \not\equiv 0$, поскольку $\overline{f}_i(t)$ унитарный. При этом $\deg(S_i\overline{f}_i(t)) = \deg\overline{f}'_i < k$. Это означает, что $E, \widehat{B}_i, \widehat{B}_i^2, \ldots, \widehat{B}_i^{k-1}$ линейно зависимы над $\mathcal{A}_i$, что является противоречием.

Итак, матрица $\widehat{B}'_i$ циклическая. Выберем такой $\overline{v}'_i \in \mathbb{K}_i^k$, что векторы

$$\overline{v}'_i,\ \widehat{B}'_i\overline{v}'_i,\ (\widehat{B}'_i)^2\overline{v}'_i,\ \ldots,\ (\widehat{B}'_i)^{k-1}\overline{v}'_i \tag{2}$$

линейно независимы над полем $\mathbb{K}_i$. Выберем такой $\overline{v}_i \in \mathcal{A}_i^k$, что его проекция на $\mathbb{K}_i^k$ совпадает с $\overline{v}_i'$. Покажем, что векторы

$$\overline{v}_i,\ \widehat{B}_i\,\overline{v}_i,\ (\widehat{B}_i)^2\overline{v}_i,\ \ldots,\ (\widehat{B}_i)^{k-1}\overline{v}_i \tag{3}$$

образуют базис $\mathcal{A}_i^k$ над $\mathcal{A}_i$. Пусть $\overline{Q}_i'$ – $k \times k$ матрица с элементами из $\mathbb{K}_i$, столбцы которой совпадают с векторами из набора (2). Тогда $\det \overline{Q}_i' \neq 0$. Аналогично, введём $k \times k$ матрицу $\overline{Q}_i$ с элементами из $\mathcal{A}_i$, столбцы которой совпадают с векторами из набора (3). Проекция определителя $\det \overline{Q}_i$ на $\mathbb{K}_i$ совпадает с $\det \overline{Q}_i'$. Так как $\mathcal{A}_i$ – локальная алгебра, то $\det \overline{Q}_i$ обратим в $\mathcal{A}_i$. Это означает, что векторы из набора (3) составляют базис $\mathcal{A}_i^k$ над $\mathcal{A}_i$.

Построим вектор $\widehat{v} \in \mathcal{A}^k$ следующим образом. Используя разложение $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_m$, положим $\widehat{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots + \overline{v}_m$. Тогда векторы $\widehat{v},\ \widehat{B}\widehat{v},\ \widehat{B}^2\widehat{v},\ \ldots,\ \widehat{B}^{k-1}\widehat{v}$ составляют базис $\mathcal{A}^k$ над $\mathcal{A}$.

Положим, наконец, $v = \Psi(\widehat{v})$ согласно (1). Тогда $v \in \mathbb{F}^n$. Заметим, что $\Psi(\widehat{B}\widehat{v}) = Bv$. Значит, векторы $v, Bv, \ldots, B^{k-1}v$ порождают $\mathbb{F}^n$ как $\mathcal{A}$-модуль. Следовательно, $\mathbb{F}[A,B]v = \mathbb{F}^n$. □

Если в паре взаимно циклических матриц одна из них является изоциклической, то вторая обладает рядом дополнительных свойств. В частности, её многочлен из обобщённой теоремы Гамильтона–Кэли оказывается определён единственным образом.

Следствие 3.5. *Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A является k-изоциклической, $AB = BA$, $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A,B] = n$. Положим $\mathcal{A} = \mathbb{F}[A]$. Тогда аннулятор $\mathrm{Ann}_{\mathcal{A}[t]}(B)$ является главным идеалом, порождённым унитарным многочленом степени k.*

Доказательство. Пусть $\chi(t) \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{A}[t]}(B)$ – многочлен из обобщённой теоремы Гамильтона–Кэли. Рассмотрим произвольный многочлен $f(t) \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{A}[t]}(B)$. Так как $\chi(t)$ унитарный, то на него можно разделить с остатком: $f(t) = \chi(t)q(t) + r(t)$, $\deg r(t) < \deg \chi(t) = k$. Так как $E, B, \ldots, B^{k-1}$ линейно независимы над $\mathbb{F}[A]$, то $r(t) \equiv 0$. □

В подходящем базисе вторая матрица оказывается сопровождающей матрицей блочного вида. Следствие ниже даёт небольшое уточнение [16, теорема 2.2].

Следствие 3.6. *Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A является k-изоциклической, $AB = BA$, $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A,B] = n$. Тогда существует невырожденная матрица $U \in M_n(\mathbb{F})$ и многочлены $\chi_0(t), \ldots, \chi_{k-1}(t)$ из $\mathbb{F}[t]$ такие, что*

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} C_{\mu_A} & O & \ldots & O \\ O & C_{\mu_A} & \ldots & O \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ O & \ldots & O & C_{\mu_A} \end{pmatrix},$$

$$U^{-1}BU = \begin{pmatrix} O & O & \ldots & -\chi_0(C_{\mu_A}) \\ E & O & \ldots & -\chi_1(C_{\mu_A}) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \ldots & E & -\chi_{k-1}(C_{\mu_A}) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что матрицы $E, B, \ldots, B^{k-1}$ образуют базис $\mathbb{F}[A,B]$ как модуля над $\mathbb{F}[A]$. Используем вложение алгебр $\mathbb{F}[A,B] \hookrightarrow M_k(\mathbb{F}[A])$ из замечания 2.14. По обобщённой теореме Гамильтона–Кэли, $B^k + \chi_{k-1}(A)B^{k-1} + \ldots \chi_1(A)B + \chi_0(A) = O$ для некоторых многочленов $\chi_0(t), \ldots, \chi_{k-1}(t)$ из $\mathbb{F}[t]$. □

Следующее утверждение описывает указанную алгебру в терминах кольца многочленов.

Следствие 3.7. *Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A является k-изоциклической, $AB = BA$, $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A,B] = n$. Пусть $\mu_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ – минимальный многочлен матрицы A. Обозначим через $\chi(x,y) = y^k + \chi_{k-1}(x)y^{k-1} + \ldots + \chi_1(x)y + \chi_0(x)$ многочлен из обобщённой теоремы Гамильтона–Кэли, $\chi(A,B) = O$. Тогда*

$$\mathbb{F}[A,B] \cong \mathbb{F}[x,y]/(\mu_A(x), \chi(x,y)).$$

Доказательство. Построим гомоморфизм $\mathbb{F}$-алгебр

$$\Psi : \mathbb{F}[x,y] \longrightarrow \mathbb{F}[A,B],\ x \mapsto A,\ y \mapsto B.$$

Обозначим $J = (\mu_A(x), \chi(x,y))$; заведомо $J \subseteq \ker \Psi$. Существует сюръективный гомоморфизм алгебр $\mathbb{F}[x,y]/J \longrightarrow \mathbb{F}[x,y]/\ker \Psi$. Рассмотрим множество

$$Q = \{x^i y^j \mid 0 \leqslant i < \deg \mu_A,\ 0 \leqslant j < k\}.$$

Тогда проекция Q на $\mathbb{F}[x,y]/J$ инъективна и является базисом. Имеем

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x,y]/J = |Q| = k \cdot \deg \mu_A = n = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A,B] = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x,y]/\ker \Psi.$$

□

§4. Реализуемые значения длины

В этом параграфе будет исследована проблема о реализуемых значениях длин пар взаимно циклических матриц. Основным результатом является теорема 4.4, где найдено решение этой проблемы. Начнём со следующей леммы о нижней оценке.

Лемма 4.1. *Пусть* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = BA$, $\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}[A,B] = d$. *Тогда*

$$\ell(\{A,B\}) \geqslant \left\lceil \frac{\sqrt{8d+1}-3}{2} \right\rceil.$$

Доказательство. Обозначим $\ell = \ell(\{A,B\})$. Рассмотрим множество

$$G = \{A^i B^j \mid i \in \mathbb{N}_0,\ j \in \mathbb{N}_0,\ i+j \leqslant \ell\}.$$

Имеем $|G| \leqslant (\ell+1)(\ell+2)/2$. С другой стороны, $\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}[A,B] \leqslant |G|$. Решая неравенство $d \leqslant (\ell+1)(\ell+2)/2$ относительно ℓ, получаем искомую оценку. □

Следующая лемма позволяет построить примеры пар взаимно циклических матриц, на которых реализуются различные значения длины.

Лемма 4.2. *Выберем целые числа* $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 1$ *таким образом, что* $\gamma \leqslant \alpha - \beta$. *В алгебре многочленов* $\mathbb{F}[x,y]$ *рассмотрим идеал*

$$I_{\alpha,\beta,\gamma} = (x^{\alpha+1}, x^\alpha y, x^{\alpha-1}y^2, \ldots, x^{\alpha-\beta+1}y^\beta, x^\gamma y^{\beta+1}, y^{\beta+2}).$$

Обозначим $\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathbb{F}[x,y]/I_{\alpha,\beta,\gamma}$, $\overline{x} = x + I_{\alpha,\beta,\gamma}$, $\overline{y} = y + I_{\alpha,\beta,\gamma}$. *Тогда*

$$\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{(2\alpha-\beta+2)(\beta+1)}{2} + \gamma, \quad \ell(\{\overline{x},\overline{y}\}) = \alpha.$$

Доказательство. Заметим, что любой моном $x^i y^j$ для $i+j > \alpha$ лежит в идеале $I_{\alpha,\beta,\gamma}$. При этом для любого многочлена $f(x,y)$ степени меньшей α выполнено $x^\alpha - f(x,y) \notin I_{\alpha,\beta,\gamma}$. Поэтому $\ell(\{\overline{x},\overline{y}\}) = \alpha$. Далее, рассмотрим множества

$$A = \{1, x, \ldots, x^\alpha\},\ B = \{x^i y^j \mid 1 \leqslant j \leqslant \beta, 0 \leqslant i \leqslant \alpha - j\},$$

$$C = \{y^{\beta+1}, xy^{\beta+1}, \ldots, x^{\gamma-1}y^{\beta+1}\}.$$

Предполагается, что если $\beta = 0$, то $B = \varnothing$. Объединение $A \cup B \cup C$ состоит в точности из всех мономов $x^i y^j$, которые не лежат в идеале $I_{\alpha,\beta,\gamma}$. При этом идеал $I_{\alpha,\beta,\gamma}$ сам порождается мономами. Поэтому

проекция $A \cup B \cup C$ на $\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}$ образует базис $\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}$ над $\mathbb{F}$. При этом

$$|A \cup B \cup C| = \frac{(2\alpha - \beta + 2)(\beta + 1)}{2} + \gamma.$$

□

Нам понадобится небольшое уточнение предыдущей леммы, в котором будет рассмотрен случай $\gamma = 0$.

Лемма 4.3. *Выберем целые числа $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$. В алгебре многочленов $\mathbb{F}[x, y]$ рассмотрим идеал*

$$I_{\alpha,\beta} = (x^{\alpha+1}, x^{\alpha}y, x^{\alpha-1}y^2, \ldots, x^{\alpha-\beta+1}y^{\beta}, y^{\beta+1}).$$

Обозначим $\mathcal{A}_{\alpha,\beta} = \mathbb{F}[x, y]/I_{\alpha,\beta}$, $\overline{x} = x + I_{\alpha,\beta}$, $\overline{y} = y + I_{\alpha,\beta}$. Тогда

$$\dim{}_{\mathbb{F}}\mathcal{A}_{\alpha,\beta} = \frac{(2\alpha - \beta + 2)(\beta + 1)}{2}, \quad \ell(\{\overline{x}, \overline{y}\}) = \alpha.$$

Доказательство. Утверждение доказывается аналогично лемме 4.2 с той лишь разницей, что множество C пусто. □

Теперь всё готово для доказательства основной теоремы параграфа.

Теорема 4.4. *Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ – взаимно циклические матрицы. Тогда*

$$\left\lceil \frac{\sqrt{8n+1} - 3}{2} \right\rceil \leqslant \ell(\{A, B\}) \leqslant n - 1.$$

Причём для любого натурального α из указанного выше отрезка существует пара взаимно циклических матриц $A_\alpha, B_\alpha \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что выполнено $\ell(\{A_\alpha, B_\alpha\}) = \alpha$.

Доказательство. Нижняя граница следует из леммы 4.1, а верхняя – из теоремы 2.18. Выберем натуральное α таким, что

$$\left\lceil \frac{\sqrt{8n+1} - 3}{2} \right\rceil \leqslant \alpha \leqslant n - 1.$$

Из доказательства леммы 4.1 вытекает, что предыдущие неравенства равносильны

$$\alpha + 1 \leqslant n \leqslant \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2}.$$

Для всех $\beta \in \{0, 1, \ldots, \alpha\}$ положим

$$P_{\alpha,\beta} = (\alpha + 1) + \alpha + (\alpha - 1) + \ldots + (\alpha - (\beta - 1)) = \frac{(2\alpha - \beta + 2)(\beta + 1)}{2}.$$

Величины $P_{\alpha,\beta}$ образуют возрастающую последовательность относительно β:

$$\alpha+1 = P_{\alpha,0} < P_{\alpha,1} < \ldots < P_{\alpha,\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}.$$

Возможны два случая.

Случай 1. Пусть равенство $n = P_{\alpha,\beta}$ выполняется для некоторого $\beta \in \{0,1,\ldots,\alpha\}$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ из леммы 4.3. Тогда $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_{\alpha,\beta} = n$.

Случай 2. Иначе найдётся единственное $\beta \in \{0,1,\ldots,\alpha-1\}$ такое, что $P_{\alpha,\beta} < n < P_{\alpha,\beta+1}$. Положим $\gamma = n - P_{\alpha,\beta}$. Отсюда $\gamma > 0$, а значит, $\gamma \geqslant 1$. При этом

$$\gamma = n - P_{\alpha,\beta} < P_{\alpha,\beta+1} - P_{\alpha,\beta} = \alpha - \beta.$$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}$ из леммы 4.2. Тогда $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma} = n$.

Остаётся применить предложение 3.1 к алгебре $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ или $\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}$. □

§5. Случай нильпотентных матриц

В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда взаимно циклические матрицы являются нильпотентными, причём одна из матриц изоциклическая. Основные результаты представлены в теоремах 5.4 и 5.8, которые дают оценки для индекса нильпотентности радикала. В таком случае, можно сделать выводы о значениях длин алгебр, используя теорему 2.21.

На протяжении всего параграфа будем предполагать, что натуральное n представимо в виде произведения двух натуральных чисел: $n = km$. Зафиксируем обозначение для многочлена

$$\chi(x,y) = y^k + \chi_{k-1}(x)y^{k-1} + \ldots + \chi_1(x)y + \chi_0(x) \in \mathbb{F}[x,y].$$

Будем предполагать, что $\deg \chi_i < m$, а также, что $\chi_i(0) = 0$ для всех $i = 0,\ldots,k-1$. Обозначим через $\operatorname{ord} \chi_i$ кратность нуля как корня многочлена χ_i. Рассмотрим две нильпотентные $n \times n$ матрицы над

полем $\mathbb{F}$:

$$J_{k,m} = E_k \otimes J_m = \begin{pmatrix} J_m & O & \dots & O \\ O & J_m & \dots & O \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & J_m \end{pmatrix},$$

$$H_\chi = \begin{pmatrix} O & O & \dots & -\chi_0(J_m) \\ E & O & \dots & -\chi_1(J_m) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & E & -\chi_{k-1}(J_m) \end{pmatrix},$$

где J_m обозначает жорданову клетку размера $m \times m$ с собственным значением 0. Заметим, что $J_{k,m}$ является частным случаем k-изоциклической матрицы. Матрицы $J_{k,m}, H_\chi$ взаимно циклические. Алгебра $\mathbb{F}[J_{k,m}, H_\chi]$ локальная, поскольку порождается коммутирующими нильпотентными элементами, и изоморфна

$$\mathbb{F}[J_{k,m}, H_\chi] \cong \mathbb{F}[x,y]/(x^m, \chi(x,y)). \tag{4}$$

Множество

$$\{J_{k,m}^i H_\chi^j \mid 0 \leqslant i \leqslant m-1,\ 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \tag{5}$$

образует базис алгебры $\mathbb{F}[J_{k,m}, H_\chi]$ над $\mathbb{F}$.

Обозначим через $\deg H_\chi$ степень минимального многочлена нильпотентной матрицы H_χ, т.е. наименьшее такое b, что $H_\chi^b = 0$.

Лемма 5.1. *Имеют место неравенства* $k \leqslant \deg H_\chi \leqslant km$.

Доказательство. Имеем $H_\chi^{k-1} \neq O$, так как множество (5) является базисом. С другой стороны, в факторалгебре (4)

$$\overline{y}^{km} = (-\chi_{k-1}(\overline{x})\overline{y}^{k-1} - \ldots - \chi_1(\overline{x})\overline{y} - \chi_0(\overline{x}))^m = \overline{0},$$

поскольку $\overline{x}^m = \overline{0}$ и $\chi_j(0) = 0$, $j = 0, \ldots, k-1$. □

Исследуем многочлен $\chi(x,y) = y^k + \sum\limits_{j=0}^{k-1} \chi_j(x) y^j$. Предположим, что существует хотя бы одно $\chi_j \not\equiv 0$. Используем многоугольник Ньютона следующим образом. Изобразим на координатной плоскости точки $(j, \operatorname{ord} \chi_j)$, $j = 0, \ldots, k-1$, для всех χ_j, которые не равны нулю тождественно. Рассмотрим прямые, проходящие через точку $(k, 0)$. Пусть прямая сначала совпадает с горизонтальной осью, а затем начинает

вращение против часовой стрелки вокруг точки $(k,0)$. Остановим вращение в тот момент, когда прямая впервые пройдёт через некоторую точку $(j_0, \operatorname{ord}\chi_{j_0})$. Тогда все точки $(j, \operatorname{ord}\chi_j)$ находятся либо выше этой прямой, либо лежат на ней. Тангенс угла наклона между прямой и отрицательным направлением горизонтальной оси может быть найден по формуле

$$\mu_\chi = \frac{\operatorname{ord}\chi_{j_0}}{k-j_0} = \min\left\{ \frac{\operatorname{ord}\chi_j}{k-j} \;\middle|\; 0 \leqslant j \leqslant k-1, \chi_j \not\equiv 0 \right\}. \tag{6}$$

Лемма 5.2. *Пусть существует хотя бы одно $\chi_j \not\equiv 0$. Тогда*

$$\deg H_\chi \geqslant \frac{m}{\mu_\chi}.$$

Доказательство. Обозначим $\deg H_\chi = b$. Предположим противное, т.е. пусть $b < m/\mu_\chi$ и пусть $\mu_\chi = p/q$ – представление в виде несократимой дроби. Тогда

$$pb < qm. \tag{7}$$

Зададим весовую функцию $\omega : \mathbb{F}[x,y] \longrightarrow \mathbb{N}_0$ следующим образом. Для одночлена $x^i y^j$ положим $\omega(x^i y^j) = qi + pj$. Вес констант считаем нулевым, вес нулевого многочлена формально равен $+\infty$. Определим ω от многочлена как минимум весов всех его одночленов. Каждый многочлен $f \in \mathbb{F}[x,y]$ единственным образом представим в виде $f = f^* + f_0$, где $\omega(f_0) > \omega(f)$, и при этом все одночлены многочлена f^* имеют один и тот же вес, равный $\omega(f)$. Верны соотношения

$$(fg)^* = f^* g^*, \quad \omega(fg) = \omega(f) + \omega(g), \quad f, g \in \mathbb{F}[x,y].$$

Вычислим $\omega(\chi)$. Каждый многочлен $\chi_j(x)y^j$ разлагается в линейную комбинацию одночленов вида $x^i y^j$, где $i \geqslant \operatorname{ord}\chi_j$. Тогда

$$\omega(x^i y^j) = qi + pj \geqslant q \operatorname{ord}\chi_j + pj \geqslant q(k-j)\mu_\chi + pj = pk. \tag{8}$$

Отсюда заключаем, что $\omega(\chi) \geqslant pk$. При этом $\omega(y^k) = pk$. Значит, $\omega(\chi) = pk$.

Из равенства $H_\chi^b = O$ заключаем, что $y^b \in (x^m, \chi(x,y))$. Значит, найдутся такие многочлены $u, v \in \mathbb{F}[x,y]$, что выполнено $y^b = ux^m + v\chi$. Далее $y^b = (y^b)^* = (ux^m + v\chi)^*$. Из неравенства (7) вытекает, что

$$\omega(ux^m) \geqslant \omega(x^m) = qm > pb = \omega(y^b) = \omega(ux^m + v\chi).$$

Поэтому ни один одночлен из ux^m не встречается среди одночленов многочлена $(ux^m + v\chi)^*$, так как имеет слишком большой вес. Следовательно, $(ux^m + v\chi)^* = (v\chi)^*$, откуда $y^b = v^*\chi^*$.

Таким образом, χ^* делит y^b. С другой стороны, χ содержит одночлен $x^{\operatorname{ord}\chi_{j_0}}y^{j_0}$, где j_0 выбрано согласно равенству (6). Тогда

$$\omega(x^{\operatorname{ord}\chi_{j_0}}y^{j_0}) = q\operatorname{ord}\chi_{j_0} + pj_0 = q(k-j_0)\mu_\chi + pj_0 = pk = \omega(\chi).$$

Это означает, что $\chi^* = y^k + cx^{\operatorname{ord}\chi_{j_0}}y^{j_0} + \dots$ для некоторой константы $c \neq 0$. Получаем противоречие с тем, что χ^* делит y^b. □

Следующая лемма позволяет строить оценки для индекса нильпотентности, выбирая различные параметры.

Лемма 5.3. *Пусть $\alpha, \beta > 0$ – вещественные числа такие, что*

$$\alpha\operatorname{ord}\chi_j + \beta j \geqslant \beta k, \ \text{для } j \in \{0, \dots, k-1\}, \ \chi_j \not\equiv 0.$$

Обозначим $W = \alpha(m-1) + \beta(k-1)$. Тогда в алгебре (4) выполнено $\overline{x}^i\overline{y}^j = \overline{0}$ для всех $i, j \geqslant 0$, удовлетворяющих условию $\alpha i + \beta j > W$.

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по j. При j=0 утверждение сразу вытекает из соотношения $\overline{x}^m = \overline{0}$. Пусть теперь $j > 0$ и пусть $\alpha i + \beta j > W$.

Если $i \geqslant m$, то $\overline{x}^i\overline{y}^j = \overline{0}$ ввиду соотношения $\overline{x}^m = \overline{0}$. Поэтому далее мы будем считать, что $i \leqslant m-1$. Заметим, что случай $j \leqslant k-1$ невозможен, так как в этом случае было бы $\alpha i + \beta j \leqslant \alpha(m-1) + \beta(k-1) = W$, что противоречит исходному предположению. Значит, $j \geqslant k$. Тогда

$$\overline{x}^i\overline{y}^j = (\overline{x}^i\overline{y}^{j-k})\cdot\overline{y}^k = \sum_{j':\ \chi_{j'}\not\equiv 0} \overline{x^i\chi_{j'}(x)y^{j-k+j'}}.$$

Все одночлены в указанной сумме имеют вид $\overline{x}^{i''}\overline{y}^{j''}$, где $i'' \geqslant i + \operatorname{ord}\chi_{j'}$, а также $j'' = j - k + j'$. Далее,

$$\begin{aligned}\alpha i'' + \beta j'' &\geqslant \alpha i + \alpha\operatorname{ord}\chi_{j'} + \beta j - \beta k + \beta j' \\ &\geqslant (\alpha i + \beta j) + (\alpha\operatorname{ord}\chi_{j'} + \beta j' - \beta k) \\ &\geqslant \alpha i + \beta j > W.\end{aligned}$$

Имеем $j'' = j - k + j' \leqslant j - 1$, а значит, степень y уменьшилась, и можно применить предположение индукции. Поэтому все одночлены $\overline{x}^{i''}\overline{y}^{j''}$ равны нулю. □

При дополнительном ограничении индекс нильпотентности радикала может быть определён однозначно.

Теорема 5.4. *Предположим, что $\mu_\chi \geqslant 1$. Тогда индекс нильпотентности радикала локальной алгебры $\mathbb{F}[J_{k,m}, H_\chi]$ равен $m + k - 1$.*

Доказательство. Из условия $\mu_\chi \geqslant 1$ и равенства (6) заключаем, что $\operatorname{ord}\chi_j \geqslant k-j$ для всех $j \in \{0,\dots,k-1\}$ таких, что $\chi_j \not\equiv 0$. Следовательно, условия леммы 5.3 выполнены для $\alpha = \beta = 1$.

С другой стороны, $\overline{x}^{m-1}\overline{y}^{k-1} \neq \overline{0}$. □

В условиях предыдущей теоремы выделяется важный частный случай.

Следствие 5.5. *Если* $\deg H_\chi \leqslant m$, *то индекс нильпотентности радикала локальной алгебры* $\mathbb{F}[J_{k,m}, H_\chi]$ *равен* $m+k-1$.

Доказательство. Объединяя условие $\deg H_\chi \leqslant m$ и лемму 5.2, получаем, что $\mu_\chi \geqslant 1$ и выполнены условия теоремы 5.4. □

Следствие 5.5 и теорема 2.21 дают верхнюю оценку длины

Следствие 5.6. *Если* $\deg H_\chi \leqslant m$, *то* $\ell(\mathbb{F}[J_{k,m}, H_\chi]) \leqslant m+k-2$.

Следующий пример показывает, что условие $\deg H_\chi \leqslant m$ в предыдущих утверждениях существенно.

Пример 5.7. Рассмотрим матрицы

$$A = J_2 \oplus J_2, \quad B = \begin{pmatrix} O & E_2 \\ J_2 & O \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}[A,B] \cong \mathbb{F}[x,y]/(x^2, y^2 - x).$$

Имеем $m = k = 2$, $\chi(x,y) = y^2 - x$, $\chi_0(x) = -x$, $\chi_1(x) = 0$, $n = 4$. Тогда $B^2 = A$, поэтому $\mathbb{F}[A,B] = \mathbb{F}[B] \cong \mathbb{F}[y]/(y^4)$. Матрица B является циклической, $\deg B = 4 > m = 2$. Индекс нильпотентности алгебры $\mathbb{F}[A,B]$ равен 4. При этом $m+k-1 = 3$. Длина алгебры равна $n-1 = 3$, тогда как $m+k-2 = 2$.

В общем случае, рассмотренная выше техника позволяет дать верхнюю оценку индекса нильпотентности.

Теорема 5.8. *Пусть* N – *индекс нильпотентности радикала локальной алгебры* $\mathbb{F}[J_{k,m}, H_\chi]$, $b = \deg H_\chi$. *Тогда*

$$N - 1 \leqslant \left\lfloor \frac{b(m-1) + m(k-1)}{\min(b,m)} \right\rfloor.$$

Доказательство. Если $\chi = y^k$, то для алгебры $\mathbb{F}[x,y]/(x^m, y^k)$ имеем $N = m+k-1$, $b = k$, и неравенство верно. Далее предполагаем, что $\chi_j \not\equiv 0$ хотя бы для одного j.

По лемме 5.2 заключаем, что $b\mu_\chi \geqslant m$. Из равенства (6) следует, что $\operatorname{ord}\chi_j \geqslant \mu_\chi(k-j)$. Тогда $b\operatorname{ord}\chi_j \geqslant m(k-j)$. Это означает, что выполнены условия леммы 5.3 для $\alpha = b$, $\beta = m$. Значит, $\overline{x}^i\overline{y}^j = \overline{0}$ в случае $bi + mj > W = b(m-1) + m(k-1)$. Если $i + j \geqslant t$, то $bi + mj \geqslant \min(b,m)(i+j) \geqslant t\min(b,m)$. Поэтому достаточно выбрать t таким образом, что $t\min(b,m) > W$. □

Следствие 5.9. $\ell(\mathbb{F}[J_{k,m}, H_\chi]) \leqslant \left\lfloor \dfrac{b(m-1)+m(k-1)}{\min(b,m)} \right\rfloor$.

Список литературы

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. ФИЗМАТЛИТ, М., 2010.
2. Н. А. Колегов, *Циклические эндоморфизмы модулей*. — Матем. заметки (2026), статья принята к публикации.
3. О. В. Маркова, *Характеризация коммутативных матричных подалгебр максимальной длины над произвольным полем*. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика **5** (2009), 53–55.
4. О. В. Маркова, *О некоторых свойствах функции длины*. — Матем. заметки **87**, No. 1 (2010), 83–91.
5. О. В. Маркова, *Коммутативные матричные алгебры, порождённые циклическими матрицами*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **524** (2023), 112–124.
6. Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*. Мир, М., 1986.
7. J. Barría, P. R. Halmos, *Vector bases for two commuting matrices*. — Linear Multilinear Algebra **27**, No. 3 (1991), 147–157.
8. W. C. Brown, *Matrices Over Commutative Rings*. Marcel Dekker, New York, 1993.
9. G. Dolinar, A. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak, *Extremal matrix centralizers*. — Linear Algebra Appl. **438**, No. 7 (2013), 2904–2910.
10. M. Gerstenhaber, *On dominance and varieties of commuting matrices*. — Ann. Math. **73**, No. 2 (1961), 324–348.
11. R. M. Guralnick, *A note on commuting pairs of matrices*. — Linear Multilinear Algebra **31**, No. 1–4 (1992), 71–75.
12. A. Guterman, D. Kudryavtsev, *Values of the length function for nonassociative algebras*. — Commun. Algebra **52**, No. 1 (2024), 392–407.
13. A. E. Guterman, O. V. Markova, *Commutative matrix subalgebras and length function*. — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 1790–1805.
14. A. E. Guterman, O. V. Markova, V. Mehrmann, *Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices*. — Linear Algebra Appl. **568** (2019), 135–154.
15. N. A. Kolegov, *On the lengths of matrix incidence algebras with radicals of square zero*. — Linear Multilinear Algebra **71**, No. 10 (2023), 1736–1753.
16. T. J. Laffey, S. Lazarus, *Two-generated commutative matrix subalgebras*. — Linear Algebra Appl. **147** (1991), 249–273.
17. M. G. Neubauer, D. J. Saltman, *Two-generated commutative subalgebras of $M_n(F)$*. — J. Algebra **164** (1994), 545–562.

18. A. Paz, *An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 161–170.
19. A. R. Wadsworth, *The algebra generated by two commuting matrices.* — Linear Multilinear Algebra, **27** (1990), 159–162.

Kolegov N. A., Markova O. V. Mutually cyclic matrices.

Two square matrices over a field are said to be mutually cyclic if they commute and the algebra generated by them has a cyclic vector. All realizable values of the length function for pairs of mutually cyclic matrices are identified, and properties of the algebras generated by such matrices are investigated. The case of nilpotent matrices is considered separately.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Москва;
Петербургский государственный
университет путей сообщения
императора Александра I, Санкт-Петербург
E-mail: na.kolegov@yandex.ru
E-mail: ov_markova@mail.ru

Поступило 28 сентября 2026 г.