Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 554, 2026 г.

С. А. Жилина, Д. А. Павлинов

О ГРАФАХ КОММУТАТИВНОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЭЛАСТИЧНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ АЛГЕБР

§1. Введение

Удобным инструментом визуализации и исследования бинарных отношений на алгебраических структурах служат *графы отношений*: вершинами такого графа являются элементы структуры или их классы эквивалентности, а рёбра отвечают выполнению рассматриваемого отношения. Для произвольной алгебры $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$, возможно, неунитальной, некоммутативной или неассоциативной, наибольший интерес представляют графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля.

В текущей работе мы сосредоточимся на изучении графов коммутативности. Их определение тесно связано с понятием коммутативного центра. *Коммутативным центром* алгебры $\mathcal{A}$ называется множество её элементов, коммутирующих со всеми элементами:

$$C_{\mathcal{A}} = \{c \in \mathcal{A} \mid \forall\, b \in \mathcal{A} \quad cb = bc\}.$$

Обозначение 1.1. Для любого подмножества X линейного пространства V над $\mathbb{F}$ обозначим множество прямых, проходящих через элементы X, через

$$\mathbb{P}(X) = \{\mathbb{F}x \mid x \in X \setminus \{0\}\}.$$

Определение 1.2. Графом коммутативности $\Gamma_C(\mathcal{A})$ *алгебры* $\mathcal{A}$ *над полем* $\mathbb{F}$ *называется граф, вершинам которого соответствуют элементы множества*

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}}) = \{[a] = \mathbb{F}a + C_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}\},$$

Ключевые слова: симметрические композиционные алгебры, алгебры Окубо, гурвицевы алгебры, графы отношений, граф коммутативности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению No. 075-15-2025-345.

причём две различные вершины $[a]$ *и* $[b]$ *соединены ребром, если выполнено условие* $ab = ba$.

Напомним, что в графе Γ величина $\mathrm{d}(u, v)$ – это *расстояние* между двумя вершинами u и v, а $\mathrm{diam}(\Gamma) = \sup\limits_{u,v\in\Gamma} \mathrm{d}(u, v)$ – *диаметр* Γ.

Целью настоящей работы является систематическое изучение графов коммутативности конечномерных эластичных композиционных алгебр, в частности, описание их компонент связности и вычисление их диаметров. Эльдуке и Маянг показали [14, теорема 3.2], что любая конечномерная эластичная композиционная алгебра либо содержит единицу, то есть является гурвицевой алгеброй, либо является симметрической композиционной алгеброй. Классический результат Джекобсона [18] утверждает, что размерность конечномерной композиционной алгебры может принимать значения 1, 2, 4 или 8. Широко известно (см., например, [20, (33.17)] и [10, теорема 2.5]), что гурвицевыми алгебрами над $\mathbb{F}$ соответствующих размерностей являются само поле $\mathbb{F}$, квадратичные этальные алгебры над $\mathbb{F}$, а также обобщённые алгебры кватернионов и октонионов. Кроме того, согласно [9, теорема 2.9], класс симметрических композиционных алгебр состоит из алгебр Окубо и форм пара-гурвицевых алгебр – алгебр, полученных из гурвицевых с помощью изменения операции умножения.

Графы отношений композиционных алгебр рассматривались и ранее. Так, в работе [1] были изучены графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля расщепляемых гурвицевых алгебр над полем вещественных чисел. В случае размерности 8 их описание опирается на октонионный аналог вещественной жордановой нормальной формы [1, следствие 5.23]. Для его доказательства используется изоморфизм между расщепляемыми октонионами и векторно-матричной алгеброй Цорна, справедливый для любого основного поля $\mathbb{F}$, см. [2, стр. 62, глава 2, теорема 7]. Похожее, но значительно более сильное утверждение было получено Лопатиным и Зубковым [21] для расщепляемых октонионов над произвольным алгебраически замкнутым полем: они классифицировали орбиты действия группы автоморфизмов на множестве пар всех октонионов, указав минимальный набор представителей этих орбит. Так как коммутирование – отношение, инвариантное относительно автоморфизмов, такая классификация даёт в том числе описание графа коммутативности.

Данная работа продолжает исследования графов отношений алгебр Окубо, начатые в [4, 24]. В [4, предложение 3.2] было показано, что граф коммутативности алгебры псевдо-октонионов $P_8(\mathbb{F})$ (расщепляемой алгебры Окубо) над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$, содержащим первообразный кубический корень из единицы, изоморфен графу коммутативности матричной алгебры $M_3(\mathbb{F})$. Тогда из [5, теорема 19] вытекает, что если $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ связен, то его диаметр равен 4. В частности, если поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, то $P_8(\mathbb{F})$ является единственной алгеброй Окубо над $\mathbb{F}$ с точностью до изоморфизма, $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ связен, и его диаметр равен 4. Кроме того, согласно [4, теорема 5.11], для вещественной алгебры Окубо с делением граф коммутативности снова оказывается связным, и его диаметр также равен 4. Доказательство этого утверждения опирается на [4, следствие 4.6], согласно которому расстояние между любыми двумя идемпотентами в графе коммутативности произвольной алгебры Окубо не превосходит двух, то есть пересечение их централизаторов является ненулевым.

В [24, теорема 3.15] были полностью описаны компоненты связности графа ортогональности произвольной алгебры Окубо с изотропной нормой. Число компонент связности, их структура и значение их диаметров могут быть различными, в зависимости от числовых характеристик основного поля и самой алгебры. Особую роль играют вершины, соответствующие таким делителям нуля x, для которых выполнено $\mathrm{n}(x, x*x) = 0$, – согласно [20, (34.10)], они могут существовать только в алгебрах Окубо с ненулевыми идемпотентами. В [24, §4] было также показано, что граф ортогональности алгебры Окубо всегда является либо геодезическим, либо бигеодезическим, то есть между любой парой вершин существует не более двух кратчайших путей.

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 5.3 и 6.10, в которых описаны компоненты связности графов коммутативности эластичных композиционных алгебр размерности 8, а именно, алгебр обобщённых октонионов и соответствующих им пара-гурвицевых алгебр, а также алгебр Окубо. Независимый интерес представляет вспомогательная теорема 4.9, которая усиливает упомянутый выше результат о расстояниях между идемпотентами в графе коммутативности произвольной алгебры Окубо. Она утверждает, что пересечение централизаторов любых двух элементов, каждый из которых порождает одномерную подалгебру, всегда содержит элемент, который также порождает одномерную подалгебру.

Работа построена следующим образом. В §2 собраны необходимые сведения о гурвицевых и симметрических композиционных алгебрах: даны их определения и различные способы построения, перечислены основные свойства, приведены точные формулировки классификационных теорем, упомянутых во введении. Этот параграф также содержит явные таблицы умножения для алгебр Окубо, содержащих ненулевые идемпотенты, см. таблицы 1 и 2.

§3 посвящён детальному изучению свойств ненулевого элемента x произвольной симметрической композиционной алгебры $(\mathcal{S}, *, \mathrm{n})$ в зависимости от размерности порождённой им подалгебры $\mathrm{alg}\langle x\rangle = \mathrm{span}\{x, x*x\}$. Множество таких x, что $\mathrm{alg}\langle x\rangle$ одномерна, мы обозначаем через $\mathcal{E}$. Нетрудно видеть, что если $x \in \mathcal{E}$, то либо x пропорционален ненулевому идемпотенту, либо $x*x = 0$. Согласно лемме 3.8, подалгебра $\mathrm{alg}\langle x\rangle$ не содержит элементов множества $\mathcal{E}$ в точности тогда, когда многочлен

$$\chi_x(t) = t^3 - 3\mathrm{n}(x)t - \mathrm{n}(x, x*x) \in \mathbb{F}[t]$$

неприводим над $\mathbb{F}$. По лемме 3.9, в этом случае $\mathrm{alg}\langle x\rangle$ оказывается двумерной композиционной подалгеброй, а для элементов с таким свойством явный вид централизатора вычислен в предложении 3.2.

Отметим, что многочлен χ_x уже встречался в работах по изучению симметрических композиционных алгебр. Если $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 3$ и $\mathbb{F}$ содержит первообразный кубический корень из единицы, то всякая симметрическая композиционная алгебра размерности не меньше двух имеет вид $(\mathcal{A}_0, *, \mathrm{n})$, где $\mathcal{A}$ – сепарабельная альтернативная алгебра степени 3, а $\mathcal{A}_0$ – подпространство элементов с нулевым следом. Эта конструкция была получена Фолкнером [16] и легла в основу классификации симметрических композиционных алгебр в [13], см. также [20, §34.C]. При таком описании χ_x – это в точности обобщенный характеристический многочлен элемента $x \in \mathcal{A}_0$. Для алгебры псевдооктонионов $P_8(\mathbb{F})$ он совпадает с обычным характеристическим многочленом матрицы $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$, а для пара-гурвицевых алгебр он всегда приводим, см. замечание 3.10.

В §4 мы уточняем полученное в работе [4] утверждение о кратчайшем пути между ненулевыми идемпотентами в графе коммутативности алгебры Окубо: согласно предложению 4.5, между ними всегда можно построить путь длины не больше 2, промежуточная вершина которого соответствует элементу из $\mathcal{E}$. Затем мы переносим этот

результат на произвольную пару элементов множества $\mathcal{E}$ в симметрической композиционной алгебре $\mathcal{S}$, см. леммы 4.6 и 4.7. Объединяя эти утверждения, мы получаем теорему 4.9 о графе коммутативности произвольной алгебры Окубо: расстояние между любой парой вершин, отвечающих элементам $\mathcal{E}$, не превосходит 2, причем связующую их вершину можно выбрать так, чтобы она снова соответствовала элементу из $\mathcal{E}$. Для нерасщепляемых алгебр Окубо в характеристике 3 множество $\mathcal{E} \cup \{0\}$ оказывается трехмерной коммутативной подалгеброй, поэтому отвечающие ему вершины смежны, см. предложение 4.10.

§5 посвящён описанию компонент связности графа коммутативности $\Gamma_C(\mathcal{O})$ алгебры Окубо $\mathcal{O}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ и вычислению их диаметров. Согласно теореме 5.3, $\Gamma_C(\mathcal{O})$ устроен следующим образом. Если многочлен χ_x неприводим над $\mathbb{F}$, то вершины, отвечающие элементам подалгебры $\mathrm{alg}\langle x\rangle$, образуют компоненту связности, являющуюся кликой. Если $\mathcal{O}$ не содержит ненулевых идемпотентов, то других вершин нет. Иначе все оставшиеся вершины лежат в одной компоненте связности, диаметр которой равен 3, если $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 3$ и алгебра $\mathcal{O}$ не является расщепляемой; во всех остальных случаях, он равен 4. В примерах 5.1 и 5.2 мы строим пары вершин, расположенные на наибольшем расстоянии друг от друга, используя явные таблицы умножения алгебр Окубо с ненулевыми идемпотентами. В замечании 5.4 мы изучаем вопрос существования компонент-клик и, следовательно, несвязности $\Gamma_C(\mathcal{O})$, в зависимости от числовых характеристик поля $\mathbb{F}$ и самой алгебры $\mathcal{O}$.

В §6 мы рассматриваем остальные конечномерные эластичные композиционные алгебры. В случае размерности не больше двух, эти алгебры коммутативны, поэтому их графы коммутативности не имеют вершин. В размерностях 4 и 8 такие алгебры являются либо гурвицевыми, либо пара-гурвицевыми, при этом графы коммутативности гурвицевой алгебры $\mathcal{C}$ и соответствующей ей пара-гурвицевой алгебры совпадают, см. замечание 6.1. Если $\dim \mathcal{C} = 4$, то, согласно предложению 6.2, граф $\Gamma_C(\mathcal{C})$ не имеет ребёр. Случай $\dim \mathcal{C} = 8$ опирается на два известных результата. Во-первых, лемма 6.5 устанавливает явный вид централизатора произвольного элемента, одна из форм записи которого была получена Кнарром и Штроппелем [19]. Во-вторых, лемма 6.8 полностью описывает возможные значения расстояния между вершинами, которые соответствуют элементам x с условием $x \cdot x = 0$,

на основе результатов о расстояниях в графах ортогональности симметрических композиционных алгебр из работы [24]. Согласно теореме 6.10, при $\dim \mathcal{C} = 8$ граф $\Gamma_C(\mathcal{C})$ несвязен: вершины $[x]$ с условием $\mathrm{dis}(x) = \mathrm{t}(x)^2 - 4\mathrm{n}(x) \neq 0$ являются изолированными, а все остальные вершины образуют компоненту связности, диаметр которой равен 3, если $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$, и 2 при $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$.

§2. Основные обозначения и определения

2.1. Композиционные и гурвицевы алгебры. Для квадратичной формы $q : V \to \mathbb{F}$ на линейном пространстве V определим соответствующую ей симметрическую билинейную форму

$$q(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v)$$

и подпространство

$$V^{\perp} = \{u \in V \mid \forall\, v \in V \quad q(u, v) = 0\}.$$

Опираясь на [20, стр. xix], будем называть форму q *несингулярной*, если либо $V^{\perp} = \{0\}$, то есть $q(u, v)$ невырождена, либо $\dim V^{\perp} = 1$ и $q(V^{\perp}) \neq 0$. Второй случай возможен только при $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$ и либо нечётном, либо бесконечном значении размерности V.

Определение 2.1. *Пусть $(\mathcal{A}, +, *)$ – произвольная алгебра над полем $\mathbb{F}$, возможно, неунитальная и неассоциативная, которая снабжена несингулярной квадратичной формой* $\mathrm{n}(\cdot)$. *Будем говорить, что форма* $\mathrm{n}(\cdot)$ *является* мультипликативной, *если* $\mathrm{n}(a * b) = \mathrm{n}(a)\mathrm{n}(b)$ *для всех $a, b \in \mathcal{A}$. В этом случае, $\mathcal{A}$ называется* композиционной *алгеброй, а* $\mathrm{n}(\cdot)$ *называется* нормой.

Замечание 2.2. В ранней литературе о композиционных алгебрах вместо условия несингулярности используется строгая невырожденность квадратичной формы $\mathrm{n}(\cdot)$, то есть невырожденность соответствующей ей симметрической билинейной формы $\mathrm{n}(\cdot, \cdot)$. Это немного сужает класс композиционных алгебр при $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$. В случае конечномерных алгебр, единственное отличие заключается в соглашении о том, считать ли само поле $\mathbb{F}$ композиционной алгеброй: при $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$ норма $\mathrm{n}(a) = a^2$ является несингулярной, но не строго невырожденной.

Аккуратный перенос доказательств основных утверждений о композиционных алгебрах на случай несингулярной нормы был осуществлён в работах [20] и [10], однако в первой из них был рассмотрен только конечномерный случай.

Всякая конечномерная композиционная алгебра имеет размерность 1, 2, 4 или 8, см. [18]. Согласно следующему широко известному критерию, существование делителей нуля в произвольной конечномерной композиционной алгебре $\mathcal{A}$ эквивалентно тому, что норма на $\mathcal{A}$ изотропна.

Предложение 2.3 ([12, лемма 2.1]). *Пусть $\mathcal{A}$ – конечномерная композиционная алгебра. Ненулевой элемент $a \in \mathcal{A}$ является левым (правым) делителем нуля тогда и только тогда, когда $\mathrm{n}(a) = 0$.*

Композиционные алгебры, содержащие единицу, называются *гурвицевыми*. Напомним основные тождества, которым удовлетворяет гурвицева алгебра $(\mathcal{C}, \cdot, \mathrm{n})$ с единицей 1, см. [2, стр. 38–40, глава 2, леммы 1 и 2]. Для каждого $x \in \mathcal{C}$ определим его *след* как $\mathrm{t}(x) = \mathrm{n}(x, 1)$. Тогда на $\mathcal{C}$ можно задать инволюцию по формуле $\overline{x} = \mathrm{t}(x)1 - x$, причём $x \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot x = \mathrm{n}(x)1$, что равносильно выполнению равенства

$$x \cdot x - \mathrm{t}(x)x + \mathrm{n}(x)1 = 0. \tag{2.1}$$

Обозначение 2.4. Для $x \in \mathcal{C}$ положим $\mathrm{dis}(x) = \mathrm{t}(x)^2 - 4\mathrm{n}(x)$.

Величина $\mathrm{dis}(x)$ – это дискриминант многочлена $X^2 - \mathrm{t}(x)X + \mathrm{n}(x)$. Если $x \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}1$, то этот многочлен является минимальным для x, а его дискриминант с точностью до знака совпадает с определителем матрицы билинейной формы $\mathrm{n}(\cdot, \cdot)$ на подалгебре $\mathbb{F}1 \oplus \mathbb{F}x$. В частности, условие $\mathrm{dis}(x) \neq 0$ равносильно несингулярности ограничения нормы на $\mathbb{F}1 \oplus \mathbb{F}x$.

Хорошо известна следующая классификация гурвицевых алгебр над произвольным полем.

Теорема 2.5 ([2, стр. 46, глава 2, теорема 1], [20, (33.17)], [10, теорема 2.5]). *Любая гурвицева алгебра $\mathcal{C}$ над полем $\mathbb{F}$ изоморфна одной из следующих алгебр:*

(1) *поле $\mathbb{F}$ с тождественной инволюцией $\overline{x} = x$;*
(2) *квадратичная этальная алгебра $K(\mu) = \mathbb{F} + \mathbb{F}\ell_1$, где*

$$\ell_1^2 = \ell_1 + \mu, \qquad 4\mu + 1 \neq 0,$$

с инволюцией

$$\overline{x + y\ell_1} = (x + y) - y\ell_1;$$

если $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$, то $K(\mu)$ изоморфна алгебре $(\mathbb{F}, \alpha)$, полученной из $\mathbb{F}$ применением процедуры Кэли–Диксона с параметром $\alpha = (4\mu + 1)/4 \neq 0$;

(3) *обобщённая алгебра кватернионов*

$$Q(\mu,\beta)=(K(\mu),\beta)=K(\mu)+K(\mu)\ell_2,$$

полученная из $K(\mu)$ *применением процедуры Кэли–Диксона с параметром* $\beta\neq 0$*;*

(4) *обобщённая алгебра октонионов* $C(\mu,\beta,\gamma)=(Q(\mu,\beta),\gamma)=Q(\mu,\beta)+Q(\mu,\beta)\ell_4$*, полученная из* $Q(\mu,\beta)$ *применением процедуры Кэли–Диксона с параметром* $\gamma\neq 0$*.*

Пример 2.6. Векторно-матричная алгебра Цорна – это композиционная алгебра, состоящая из всех 2×2 матриц вида

$$x=\begin{pmatrix} a & u \\ v & b \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $a,b\in\mathbb{F}$ и $u,v\in\mathbb{F}^3$, причём $\mathrm{n}(x)=ab-(u\,|\,v)$ и

$$\begin{pmatrix} a & u \\ v & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & u' \\ v' & b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+(u\,|\,v') & au'+b'u-v\times v' \\ a'v+bv'+u\times u' & bb'+(v\,|\,u') \end{pmatrix},$$

где $(\cdot\,|\,\cdot)$ и $\times$ обозначают скалярное и векторное произведение элементов из $\mathbb{F}^3$ соответственно. Алгебра Цорна – это единственная с точностью до изоморфизма расщепляемая гурвицева алгебра размерности 8, то есть гурвицева алгебра с изотропной нормой [2, стр. 62, глава 2, теорема 7]. В [9, стр. 1040–1041] описан так называемый канонический базис алгебры Цорна, в котором таблица умножения имеет особенно простой блочный вид.

Для каждого x из равенства (2.2) выполнено $\mathrm{n}(1,x)=\mathrm{tr}(x)=a+b$, и тогда

$$\overline{x}=\begin{pmatrix} b & -u \\ -v & a \end{pmatrix},$$

то есть мы получили "присоединённую матрицу" для x. Многочлен $X^2-\mathrm{t}(x)X+\mathrm{n}(x)$ совпадает со стандартным характеристическим многочленом для 2×2 матриц с той лишь разницей, что $\mathrm{n}(x)$ – это "определитель", в котором одно из двух умножений заменено скалярным произведением векторов. Кроме того, элемент x является делителем нуля тогда и только тогда, когда он имеет нулевой "определитель" $\mathrm{n}(x)$.

2.2. Симметрические композиционные алгебры.

Определение 2.7. *Композиционная алгебра* $(\mathcal{A},*,\mathrm{n})$ *называется* симметрической*, если для любых* $x,y,z\in\mathcal{A}$ *выполнено равенство*

$$\mathrm{n}(x*y,z)=\mathrm{n}(x,y*z).$$

Теорема 2.8 ([23, теорема 1], [10, теорема 3.2]). *Композиционная алгебра* $(\mathcal{A}, *, \mathrm{n})$ *является симметрической тогда и только тогда, когда для любых* $x, y \in \mathcal{A}$ *выполнено*

$$(x * y) * x = x * (y * x) = \mathrm{n}(x)y. \tag{2.3}$$

Линеаризуя равенство (2.3), получаем тождество

$$(x * y) * z + (z * y) * x = x * (y * z) + z * (y * x) = \mathrm{n}(x, z)y, \tag{2.4}$$

которое будет активно использоваться на протяжении большей части работы. Кроме того, любая симметрическая композиционная алгебра $\mathcal{S}$ удовлетворяет соотношению

$$(x * x) * (x * x) = \mathrm{n}(x, x * x)x - \mathrm{n}(x)x * x \tag{2.5}$$

для всех $x \in \mathcal{S}$, см. [20, (34.3)]. Вместе с равенством (2.3) это означает, что подалгебра, порожденная элементом x, совпадает с линейной оболочкой элементов x и $x * x$:

$$\mathrm{alg}\langle x \rangle = \mathrm{span}\{x, x * x\}. \tag{2.6}$$

Примером симметрической композиционной алгебры служит алгебра Петерсона.

Определение 2.9 ([9, определение 2.7]). *Пусть* $(\mathcal{C}, \cdot, \mathrm{n})$ – *гурвицева алгебра над полем* $\mathbb{F}$, *и* $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}, \cdot, \mathrm{n})$ – *такой автоморфизм, что* $\tau^3 = \mathrm{id}$. *Определим новое умножение на* $\mathcal{C}$ *по формуле*

$$x * y = \tau(\overline{x}) \cdot \tau^2(\overline{y}). \tag{2.7}$$

Тогда алгебра $(\mathcal{C}, *, \mathrm{n})$ *называется* алгеброй Петерсона *и обозначается через* $\mathcal{C}_\tau$.

Пример 2.10. Алгебра Петерсона, отвечающая тождественному автоморфизму, то есть алгебра $(\mathcal{C}, *, \mathrm{n})$ с умножением

$$x * y = \overline{x} \cdot \overline{y}, \tag{2.8}$$

называется *пара-гурвицевой* алгеброй. Единица 1 алгебры $\mathcal{C}$ называется пара-единицей алгебры $(\mathcal{C}, *, \mathrm{n})$ и обозначается через e. Она удовлетворяет условию $e * x = x * e = \overline{x}$ для всех $x \in \mathcal{C}$.

Заметим, что 1 алгебры $\mathcal{C}$ всегда соответствует ненулевому идемпотенту в алгебре $\mathcal{C}_\tau$. Следующее утверждение показывает, что любую симметрическую композиционную алгебру с ненулевыми идемпотентами можно представить как алгебру Петерсона при подходящем выборе гурвицевой алгебры и автоморфизма на ней.

Предложение 2.11 ([9, стр. 1042]). *Пусть* $(\mathcal{S}, *, \mathrm{n})$ *– симметрическая композиционная алгебра, и* $e \in \mathcal{S}$ *– ненулевой идемпотент. Тогда отображение*

$$\tau : x \mapsto e * (e * x) = \mathrm{n}(e, x)e - x * e$$

является автоморфизмом $(\mathcal{S}, *, \mathrm{n})$*, причём* $\tau^3 = \mathrm{id}$*. Кроме того, на* $\mathcal{S}$ *можно задать новое умножение*

$$x \cdot y = (e * x) * (y * e),$$

и тогда $(\mathcal{S}, \cdot, \mathrm{n})$ *– гурвицева алгебра с единицей* e*, причём* τ *является также и её автоморфизмом. Алгебра* $(\mathcal{S}, *, \mathrm{n})$ *является алгеброй Петерсона, построенной по гурвицевой алгебре* $(\mathcal{S}, \cdot, \mathrm{n})$ *и её автоморфизму* τ*, то есть выполнено равенство* (2.7)*.*

2.3. Алгебры Окубо. Мы будем следовать определению алгебр Окубо из работы [9]. Для этого рассмотрим естественный автоморфизм векторно-матричной алгебры Цорна порядка 3:

$$\tau_{st} : \begin{pmatrix} a & (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \\ (\nu_1, \nu_2, \nu_3) & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & (\mu_3, \mu_1, \mu_2) \\ (\nu_3, \nu_1, \nu_2) & b \end{pmatrix}.$$

Определение 2.12. *Пусть* $(\mathcal{C}, \cdot, \mathrm{n})$ *– векторно-матричная алгебра Цорна над произвольным полем* $\mathbb{F}$*. Алгебра Петерсона* $\mathcal{C}_{\tau_{st}}$ *называется* расщепляемой алгеброй Окубо *над* $\mathbb{F}$*.*

Всюду ниже $\overline{\mathbb{F}}$ обозначает алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$ называется $\mathbb{F}$-формой алгебры $\mathcal{B}$ над $\overline{\mathbb{F}}$, если $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}} \cong \mathcal{B}$.

Определение 2.13. *Алгебра* $\mathcal{O}$ *над полем* $\mathbb{F}$ *называется* алгеброй Окубо*, если она является* $\mathbb{F}$*-формой расщепляемой алгебры Окубо* $\mathcal{C}_{\tau_{st}}$ *над* $\overline{\mathbb{F}}$*, то есть* $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}} \cong \mathcal{C}_{\tau_{st}}$*.*

Алгебра $\mathcal{A}$ называется *эластичной*, если для любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено $(ab)a = a(ba)$. Из равенства (2.3) немедленно вытекает, что любая симметрическая композиционная алгебра является эластичной.

Теорема 2.14 ([14, теорема 3.2]). *Всякая конечномерная эластичная композиционная алгебра над произвольным полем* $\mathbb{F}$ *либо гурвицева, либо симметрическая.*

Теорема 2.15 ([9, теорема 2.9]). *Всякая симметрическая композиционная алгебра над полем* $\mathbb{F}$ *является либо* $\mathbb{F}$*-формой пара-гурвицевой алгебры над* $\overline{\mathbb{F}}$*, либо алгеброй Окубо.*

Теорема 2.16 ([6, стр. 298], [12, теоремы 4.2 и 4.3], [15, лемма 3.3]). *Алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$ является $\mathbb{F}$-формой пара-гурвицевой алгебры над $\overline{\mathbb{F}}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(1) *$\mathcal{A}$ – пара-гурвицева алгебра;*
(2) $\dim \mathcal{A} = 2$ *и существует базис $\{u, v\}$ в $\mathcal{A}$, в котором*

$$u^2 = v, \quad uv = vu = u, \quad v^2 = \lambda u - v$$

для такого $\lambda \in \mathbb{F}$, что многочлен $x^3 - 3x - \lambda$ неприводим над $\mathbb{F}$.

Предложение 2.17 ([6, предложение 3.3], [20, (34.10)]). *Пусть $(\mathcal{S}, *, \mathrm{n})$ – симметрическая композиционная алгебра над полем $\mathbb{F}$ и существует такой ненулевой элемент $x \in \mathcal{S}$, что $\mathrm{n}(x, x * x) = 0$. Тогда $\mathcal{S}$ содержит ненулевой идемпотент.*

Теорема 2.18 ([15, теоремы A′ и B′]). *Симметрическая композиционная алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$ содержит ненулевой идемпотент тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ – либо пара-гурвицева алгебра, либо алгебра Окубо с таблицей умножения, заданной*

(1) *таблицей 1 для $\alpha = 1$ и некоторого $\beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, если $\operatorname{char} \mathbb{F} = 3$;*
(2) *таблицей 2 для некоторых $\beta, \gamma \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, если $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 3$. Такая алгебра Окубо изоморфна алгебре Петерсона, построенной по обобщённой алгебре октонионов $C(-1, \beta, \gamma)$ при подходящем выборе её автоморфизма, см. теорему 2.5.*

С помощью равенства (2.3) полностью восстанавливаются значения нормы на элементах алгебры Окубо – для этого достаточно вычислить значение $\mathrm{n}(\cdot)$ на базисных элементах и их суммах. Для таблицы 2 получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\mathrm{n}(x_0) = \mathrm{n}(x_1) = 1, && \mathrm{n}(x_4) = \mathrm{n}(x_5) = -\gamma, \\ &\mathrm{n}(x_2) = \mathrm{n}(x_3) = -\beta, && \mathrm{n}(x_6) = \mathrm{n}(x_7) = \beta\gamma, \\ &\mathrm{n}(x_i, x_j) = \begin{cases} 2\mathrm{n}(x_i), & \text{если } i = j, \\ -\mathrm{n}(x_i), & \text{если } \{i, j\} = \{2k, 2k+1\}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $0 \leqslant i, j \leqslant 7$. Их также можно получить, вычислив значения нормы на соответствующих базисных элементах обобщённой алгебры октонионов $C(-1, \beta, \gamma)$, так как значения нормы на гурвицевой алгебре и на построенной по ней алгебре Петерсона совпадают.

$*$	$z_{1,0}$	$z_{2,0}$	$z_{0,1}$	$z_{0,2}$	$z_{1,1}$	$z_{2,2}$	$z_{1,2}$	$z_{2,1}$
$z_{1,0}$	$z_{2,0}$	0	$-z_{1,1}$	0	$-z_{2,1}$	0	0	$-\alpha z_{0,1}$
$z_{2,0}$	0	$\alpha z_{1,0}$	0	$-z_{2,2}$	0	$-\alpha z_{1,2}$	$-\alpha z_{0,2}$	0
$z_{0,1}$	0	$-z_{2,1}$	$z_{0,2}$	0	0	$-\beta z_{2,0}$	0	$-z_{2,2}$
$z_{0,2}$	$-z_{1,2}$	0	0	$\beta z_{0,1}$	$-\beta z_{1,0}$	0	$-\beta z_{1,1}$	0
$z_{1,1}$	0	$-\alpha z_{0,1}$	$-z_{1,2}$	0	$z_{2,2}$	0	$-\beta z_{2,0}$	0
$z_{2,2}$	$-\alpha z_{0,2}$	0	0	$-\beta z_{2,1}$	0	$\alpha\beta z_{1,1}$	0	$-\alpha\beta z_{1,0}$
$z_{1,2}$	$-z_{2,2}$	0	$-\beta z_{1,0}$	0	0	$-\alpha\beta z_{0,1}$	$\beta z_{2,1}$	0
$z_{2,1}$	0	$-\alpha z_{1,1}$	0	$-\beta z_{2,0}$	$-\alpha z_{0,2}$	0	0	$\alpha z_{1,2}$

Таблица 1. Таблица умножения алгебры Окубо $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}$.

$*$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	x_0	$-x_0-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	x_4+x_5	$-x_4$	x_6+x_7	$-x_6$
x_1	$-x_0-x_1$	x_1	x_2+x_3	$-x_2$	$-x_5$	x_4+x_5	$-x_6$	$-x_7$
x_2	$-x_2$	$-x_3$	βx_0	$-\beta(x_0+x_1)$	$-x_6-x_7$	x_6	$-\beta(x_4+x_5)$	βx_4
x_3	$-x_3$	x_2+x_3	βx_1	βx_0	x_6	x_7	βx_5	$-\beta(x_4+x_5)$
x_4	$-x_5$	x_4+x_5	$-x_7$	x_6+x_7	$-\gamma(x_0+x_1)$	γx_1	$-\gamma x_3$	$\gamma(x_2+x_3)$
x_5	x_4+x_5	$-x_4$	x_6+x_7	$-x_6$	γx_0	$-\gamma(x_0+x_1)$	$-\gamma x_2$	$-\gamma x_3$
x_6	$-x_7$	$-x_6$	$-\beta x_5$	$-\beta x_4$	$-\gamma(x_2+x_3)$	γx_3	$-\beta\gamma x_1$	$\beta\gamma(x_0+x_1)$
x_7	x_6+x_7	$-x_7$	$\beta(x_4+x_5)$	$-\beta x_5$	γx_2	$-\gamma(x_2+x_3)$	$-\beta\gamma x_0$	$-\beta\gamma x_1$

Таблица 2. Таблица умножения алгебры Окубо с ненулевыми идемпотентами, $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 3$.

Таблица умножения 1 в общем случае задаёт алгебры Окубо вида $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}$ с ненулевыми параметрами $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, причём поле $\mathbb{F}$ может быть произвольным. Их базисные элементы удовлетворяют соотношениям

$$\mathrm{n}(z_{i,j}) = 0, \tag{2.10}$$

$$\mathrm{n}(z_{i,j}, z_{i',j'}) = \begin{cases} \alpha^{(i+i')/3}\beta^{(j+j')/3}, & \text{если } i + i' \equiv j + j' \equiv 0 \pmod 3, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{2.11}$$

где $0 \leqslant i, j, i', j' \leqslant 2$ и $(i, j) \neq (0, 0) \neq (i', j')$, см. [11, стр. 3–4]. Согласно [7, теорема 7] и [11, теорема 4.2], алгебры $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}$ в точности соответствуют алгебрам Окубо с изотропной нормой. Для любого поля $\mathbb{F}$ алгебра $\mathcal{O}_{1,1}$ изоморфна расщепляемой алгебре Окубо, см. [15, стр. 1095–1097].

Если $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$ и $\mathbb{F}$ содержит первообразный кубический корень из единицы ω, то расщепляемая алгебра Окубо допускает также матричное описание, см. [7, §1]. На пространстве $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ матриц с нулевым следом вводятся умножение

$$x * y = \mu xy + (1 - \mu)yx - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(xy)I \tag{2.12}$$

и норма

$$\mathrm{n}(x) = -\frac{1}{3}\,\mathrm{s}(x),$$

где $\mu = (1 - \omega)/3$, $I \in M_3(\mathbb{F})$ – единичная матрица, и $\mathrm{s}(x)$ – квадратичная форма, возникающая в качестве коэффициента характеристического многочлена матрицы $x \in M_3(\mathbb{F})$:

$$\det(\lambda I - x) = \lambda^3 - \operatorname{tr}(x)\lambda^2 + \mathrm{s}(x)\lambda - \det(x).$$

Согласно [16, стр. 1027, лемма], имеет место тождество

$$2\,\mathrm{s}(x) = \operatorname{tr}(x)^2 - \operatorname{tr}(x^2),$$

поэтому при $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$ для всех $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ получаем

$$\mathrm{n}(x) = \frac{1}{6}\operatorname{tr}(x^2).$$

Алгебра $(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F}), *, \mathrm{n})$ обозначается через $P_8(\mathbb{F})$ и называется алгеброй *псевдо-октонионов*.

Предложение 2.19 ([11, стр. 3–4]). *Пусть* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$ *и* $\mathbb{F}$ *содержит первообразный кубический корень из единицы* ω. *Тогда расщепляемая алгебра Окубо* $\mathcal{O}_{1,1}$ *изоморфна алгебре псевдо-октонионов* $P_8(\mathbb{F})$.

§3. Подалгебры, порождённые одним элементом

Согласно (2.6), подалгебра $\operatorname{alg}\langle x\rangle$, порождённая произвольным ненулевым элементом x симметрической композиционной алгебры $\mathcal{S}$, имеет размерность не больше двух. В этом параграфе мы подробно разберём оба возможных значения размерности и изучим свойства элементов, на которых они достигаются. В частности, мы получим явный вид централизаторов для элементов, порождающих двумерные композиционные подалгебры. Мы также изучим вопрос существования элементов, порождающих одномерную подалгебру, в подалгебрах вида $\operatorname{alg}\langle x\rangle$.

Определение 3.1. Централизатором *элемента* a *произвольной алгебры* $\mathcal{A}$ *называется множество элементов* $\mathcal{A}$, *с ним коммутирующих:*

$$C_{\mathcal{A}}(a) = \big\{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba\big\}.$$

Предложение 3.2. *Пусть* $(\mathcal{S}, *, \mathrm{n})$ – *симметрическая композиционная алгебра,* $x \in \mathcal{S}$ *и* $(\operatorname{alg}\langle x\rangle, *, \mathrm{n})$ – *двумерная композиционная подалгебра, то есть ограничение нормы на* $\operatorname{alg}\langle x\rangle$ *несингулярно. Тогда* $C_{(\mathcal{S},*,\mathrm{n})}(x) = \operatorname{alg}\langle x\rangle$.

Доказательство. Пусть $z \in C_{(\mathcal{S},*,\mathrm{n})}(x)$. Тогда из равенства (2.4) следует

$$(x * x) * z + (z * x) * x = x * (x * z) + z * (x * x) = \mathrm{n}(x, z)x,$$

причём, согласно (2.3), $(x * z) * x = x * (z * x) = \mathrm{n}(x)z$, откуда

$$(x * x) * z = z * (x * x) = \mathrm{n}(x, z)x - \mathrm{n}(x)z, \tag{3.1}$$

то есть $z \in C_{(\mathcal{S},*,\mathrm{n})}(x * x)$. Значит, для любого $y \in \operatorname{alg}\langle x\rangle$ выполнено $z \in C_{(\mathcal{S},*,\mathrm{n})}(y)$, поэтому аналогично получаем

$$(y * y) * z = z * (y * y) = \mathrm{n}(y, z)y - \mathrm{n}(y)z. \tag{3.2}$$

Положим $y = x * x$ и воспользуемся равенством (2.5), тогда

$$\mathrm{n}(x, x * x)x * z - \mathrm{n}(x)(x * x) * z = \mathrm{n}(x * x, z)x * x - \mathrm{n}(x)^2 z.$$

Подставим выражение (3.1):

$$\mathrm{n}(x, x * x)x * z = \mathrm{n}(x)\mathrm{n}(x, z)x + \mathrm{n}(x * x, z)x * x - 2\mathrm{n}(x)^2 z. \tag{3.3}$$

Линеаризуя тождество (3.2), мы получаем

$$(u * v + v * u) * z = \mathrm{n}(u, z)v + \mathrm{n}(v, z)u - \mathrm{n}(u, v)z$$

для всех $u, v \in \mathrm{alg}\langle x\rangle$. Полагая $u = x$ и $v = x * x$, имеем

$$2\mathrm{n}(x)x * z = \mathrm{n}(x, z)x * x + \mathrm{n}(x * x, z)x - \mathrm{n}(x, x * x)z.$$

Умножив это уравнение на $\mathrm{n}(x, x * x)$ и вычтя (3.3), умноженное на $2\mathrm{n}(x)$, можем видеть, что

$$(4\mathrm{n}(x)^3 - \mathrm{n}(x, x * x)^2)z \in \mathrm{alg}\langle x\rangle.$$

Но в базисе $\{x, x * x\}$ определитель матрицы билинейной формы $\mathrm{n}(\cdot, \cdot)$ равен $4\mathrm{n}(x)^3 - \mathrm{n}(x, x * x)^2$ и отличен от нуля в силу невырожденности $\mathrm{n}(\cdot, \cdot)$ на $\mathrm{alg}\langle x\rangle$. Следовательно, $z \in \mathrm{alg}\langle x\rangle$. □

Следующее утверждение было сформулировано в работе [4] для алгебр Окубо над произвольным полем, но доказательство дословно переносится на случай произвольной симметрической композиционной алгебры.

Предложение 3.3 ([4, предложение 2.8]). *Пусть* $(\mathcal{S}, *, \mathrm{n})$ – *симметрическая композиционная алгебра над произвольным полем* $\mathbb{F}$ *и* $x \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$.

Условие $\dim(\mathrm{alg}\langle x\rangle) = 1$ *равносильно выполнению равенства* $x * x = \lambda x$ *для некоторого* $\lambda \in \mathbb{F}$. *В этом случае,* $\mathrm{n}(x) = \lambda^2$ *и, если* $\lambda \neq 0$, *то* x/λ – *ненулевой идемпотент.*

Таким образом, $\dim(\mathrm{alg}\langle x\rangle) = 2$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих трёх условий:*

(1) $\mathrm{n}(x) \neq \lambda^2$ *ни для какого* $\lambda \in \mathbb{F}$;
(2) $\mathrm{n}(x) = \lambda^2$ *для некоторого* $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$, *и множество* $\mathbb{F}x$ *не содержит ненулевого идемпотента;*
(3) $\mathrm{n}(x) = 0$ *и* $x * x \neq 0$.

Обозначение 3.4. Через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{S})$ обозначим множество таких ненулевых элементов $x \in \mathcal{S}$, что $x * x \in \mathbb{F}x$, то есть $\dim(\mathrm{alg}\langle x\rangle) = 1$.

Для доказательства следующего предложения нам понадобится понятие циклической матрицы, централизатор которой хорошо известен.

Определение 3.5. *Матрица* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *называется* циклической, *если её минимальный и характеристический многочлены совпадают.*

В частности, если характеристический многочлен раскладывается на линейные множители над $\mathbb{F}$, то цикличность матрицы A равносильна тому, что любое её собственное значение имеет геометрическую кратность 1.

Теорема 3.6 ([17, теорема 3.2.4.2, задача 3.2.P2]). *Матрица $a \in M_n(\mathbb{F})$ является циклической тогда и только тогда, когда $C_{M_n(\mathbb{F})}(a)$ совпадает с унитальной подалгеброй $\mathbb{F}[a]$, порождённой матрицей a.*

Предложение 3.7. *Пусть $\mathcal{O}$ – алгебра Окубо над полем $\mathbb{F}$,* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$, *и $x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$. Тогда*

$$\dim C_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} 2, & x \notin \mathcal{E}, \\ 4, & x \in \mathcal{E}. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем $C_{\mathcal{O}}(x) = \ker(L_x - R_x)$, где L_x и R_x – операторы левого и правого умножения на x соответственно. Значит, $\dim C_{\mathcal{O}}(x)$ не изменится при переходе от поля $\mathbb{F}$ к его алгебраическому замыканию $\overline{\mathbb{F}}$, при этом мы получаем расщепляемую алгебру Окубо $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ над $\overline{\mathbb{F}}$. Размерность $\operatorname{alg}\langle x\rangle$ также не меняется при расширении поля, поэтому для $x \in \mathcal{O}$ условия $x \in \mathcal{E}(\mathcal{O})$ и $x \in \mathcal{E}(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}})$ эквивалентны. Следовательно, можно считать, что $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ и $\mathcal{O} = P_8(\mathbb{F})$.

Из равенства (2.12) следует, что коммутирование относительно операции "$*$" равносильно коммутированию матриц, см. также [4, замечание 3.1]. Так как $M_3(\mathbb{F}) = \mathbb{F}I \oplus \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$, то $C_{M_3(\mathbb{F})}(x) = \mathbb{F}I \oplus C_{\mathcal{O}}(x)$. В частности, $\dim C_{\mathcal{O}}(x) = \dim C_{M_3(\mathbb{F})}(x) - 1$.

Покажем, что ненулевая матрица $x \in P_8(\mathbb{F})$ является циклической тогда и только тогда, когда $x*x \notin \mathbb{F}x$, то есть $x \notin \mathcal{E}$. Пусть x не является циклической, то есть её минимальный многочлен имеет степень, не превосходящую 2. Ясно, что степень не может равняться единице, так как тогда из равенства нулю следа матрицы x следовало бы, что $x = 0$. Если $x^2 = \alpha x + \beta I$, то $x * x = x^2 - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(x^2)I = \alpha x + \gamma I$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{F}$. Из $\operatorname{tr}(x * x) = \operatorname{tr}(x) = 0$ следует, что $\gamma = 0$ и $x * x = \alpha x \in \mathbb{F}x$. Обратно, из $x * x = \lambda x$ следует, что $x^2 = \lambda x + \frac{1}{3}\operatorname{tr}(x^2)I$, то есть x не является циклической.

Если матрица x циклическая, то, по теореме 3.6, $C_{M_3(\mathbb{F})}(x) = \mathbb{F}[x]$, поэтому $\dim C_{M_3(\mathbb{F})}(x) = 3$. Значит, $\dim C_{\mathcal{O}}(x) = 2$.

Для нециклической ненулевой матрицы с нулевым следом возможны жордановы нормальные формы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{F}.$$

В обоих случаях $\dim C_{M_3(\mathbb{F})}(x) = 5$, то есть $\dim C_{\mathcal{O}}(x) = 4$. □

Лемма 3.8. *Пусть $(\mathcal{S}, *, \mathrm{n})$ – симметрическая композиционная алгебра над полем $\mathbb{F}$ и $x \in \mathcal{S} \setminus 0$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{alg}\langle x\rangle$ *не содержит элементов множества* $\mathcal{E}$*;*
(2) *многочлен* $\chi_x(t) = t^3 - 3\mathrm{n}(x)t - \mathrm{n}(x, x*x)$ *неприводим над* $\mathbb{F}$*.*

Доказательство. Сперва рассмотрим случай, когда $x \in \mathcal{E}$. Так как $x * x = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}$, то, по предложению 3.3, $\mathrm{n}(x) = \lambda^2$ и $\mathrm{n}(x, x*x) = \lambda\mathrm{n}(x, x) = 2\lambda\mathrm{n}(x) = 2\lambda^3$. Тогда многочлен $\chi_x(t) = (t+\lambda)^2(t-2\lambda)$ приводим, при этом $x \in \mathrm{alg}\langle x\rangle$ – элемент множества $\mathcal{E}$.

Теперь докажем утверждение для случая $\dim(\mathrm{alg}\langle x\rangle) = 2$. Многочлен χ_x имеет степень 3, следовательно, его неприводимость эквивалентна отсутствию корней $\lambda \in \mathbb{F}$.

(1) ⇒ (2). Предположим, что χ_x приводим над $\mathbb{F}$, то есть существует такое $\lambda \in \mathbb{F}$, что $\chi_x(\lambda) = 0$. Используя равенства (2.3) и (2.4), получаем, что для $y = \lambda x + x * x \in \mathrm{alg}\langle x\rangle$ выполнено

$$\begin{aligned} y * y &= (\lambda x + x*x) * (\lambda x + x*x) \\ &= \lambda^2 x*x + 2\lambda\mathrm{n}(x)x + \mathrm{n}(x, x*x)x - \mathrm{n}(x)x*x \\ &= (\lambda^3 - \lambda\mathrm{n}(x))x + (\lambda^2 - \mathrm{n}(x))x*x = (\lambda^2 - \mathrm{n}(x))y, \end{aligned}$$

то есть $y \in \mathcal{E}$.

(2) ⇒ (1). Предположим, что $0 \neq y = \alpha x + \beta x*x \in \mathcal{E} \cap \mathrm{alg}\langle x\rangle$. Если $y * y = \gamma y$ для $\gamma \in \mathbb{F}$, то мы получаем систему

$$2\alpha\beta\mathrm{n}(x) + \beta^2\mathrm{n}(x, x*x) = \gamma\alpha, \qquad \alpha^2 - \beta^2\mathrm{n}(x) = \gamma\beta.$$

Если $\beta = 0$, из второго уравнения следует $\alpha^2 = 0$, то есть $y = 0$. Значит, $\beta \neq 0$, и можем рассмотреть $\lambda = \alpha/\beta$. Запишем последнюю систему в эквивалентном виде:

$$\beta(2\lambda\mathrm{n}(x) + \mathrm{n}(x, x*x)) = \gamma\lambda, \qquad \beta(\lambda^2 - \mathrm{n}(x)) = \gamma.$$

Умножая второе уравнение на λ и сравнивая, получаем

$$\lambda^3 - 3\mathrm{n}(x)\lambda - \mathrm{n}(x, x*x) = 0,$$

то есть $\chi_x(\lambda) = 0$, и χ_x не является неприводимым над $\mathbb{F}$. □

Следующая лемма устанавливает основные свойства элементов x, для которых многочлен χ_x неприводим.

Лемма 3.9. *Пусть* $(\mathcal{S}, *, \mathrm{n})$ – *симметрическая композиционная алгебра над полем* $\mathbb{F}$, $x \in \mathcal{S}$ *и* χ_x *неприводим над* $\mathbb{F}$. *Тогда*

(1) $(\mathrm{alg}\langle x\rangle, *, \mathrm{n})$ – *двумерная композиционная подалгебра;*
(2) *для каждого* $0 \neq y \in \mathrm{alg}\langle x\rangle$ *выполнено* $\mathrm{alg}\langle x\rangle = \mathrm{alg}\langle y\rangle$;
(3) *для каждого* $0 \neq y \in \mathrm{alg}\langle x\rangle$ *выполнено* $C_{(\mathcal{S},*,\mathrm{n})}(y) = \mathrm{alg}\langle x\rangle$;
(4) *для каждого* $0 \neq y \in C_{(\mathcal{S},*,\mathrm{n})}(x)$ *многочлен* χ_y *неприводим над* $\mathbb{F}$.

Доказательство. По лемме 3.8, $\mathrm{alg}\langle x\rangle$ не содержит элементов множества $\mathcal{E}$, поэтому для всех ненулевых $y \in \mathrm{alg}\langle x\rangle$ выполнено $\dim(\mathrm{alg}\langle y\rangle) = 2$. Значит, $\mathrm{alg}\langle y\rangle = \mathrm{alg}\langle x\rangle$, что доказывает пункт (2).

Рассмотрим определитель матрицы билинейной формы $\mathrm{n}(\cdot,\cdot)$ в базисе $\{x, x*x\}$: $\delta = 4\mathrm{n}(x)^3 - \mathrm{n}(x, x*x)^2$. Предположим, что $\delta = 0$. Если $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$ или $\mathrm{n}(x) = 0$, то $\mathrm{n}(x, x*x) = 0$, и $\chi_x(t) = t(t^2 - 3\mathrm{n}(x))$ – приводимый многочлен. Значит, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$ и $\mathrm{n}(x) \neq 0$. Положим $\lambda = -\mathrm{n}(x, x*x)/(2\mathrm{n}(x))$, тогда $\chi_x(\lambda) = 0$, поэтому χ_x приводим – противоречие. Следовательно, $\delta \neq 0$ и билинейная форма $\mathrm{n}(\cdot,\cdot)$ невырождена на $\mathrm{alg}\langle x\rangle$. Это доказывает пункт (1).

Пункты (3)–(4) вытекают из пунктов (1)–(2), предложения 3.2 и леммы 3.8. □

Замечание 3.10. Несмотря на то, что леммы 3.8 и 3.9 сформулированы и доказаны для произвольных симметрических композиционных алгебр, в случае пара-гурвицевых алгебр гипотеза о неприводимости многочлена χ_x не реализуется ни для какого x.

Действительно, с помощью тождества (2.1) можно проверить, что для любого $x \in \mathcal{S} = (\mathcal{C}, *, \mathrm{n})$ выполнено $\mathrm{n}(x, x*x) = \mathrm{t}(x)^3 - 3\mathrm{n}(x)\mathrm{t}(x)$, поэтому $\chi_x(\mathrm{t}(x)) = 0$, то есть χ_x приводим.

Кроме того, либо $x \in \mathcal{E} \cap \mathrm{alg}\langle x\rangle$, либо $x \notin \mathcal{E}$, то есть $\dim(\mathrm{alg}\langle x\rangle) = 2$, и тогда из равенства $\mathrm{alg}\langle x\rangle = \mathbb{F}e + \mathbb{F}x$ получаем, что пара-единица e – ненулевой идемпотент в $\mathrm{alg}\langle x\rangle$. Таким образом, $\mathrm{alg}\langle x\rangle$ всегда содержит элемент из $\mathcal{E}$.

§4. Путь длины 2 между элементами, порождённые подалгебры которых одномерны

Рассмотрим граф коммутативности $\Gamma_C(\mathcal{O})$ алгебры Окубо $\mathcal{O}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$. В силу определения 1.2 и предложения ниже, множеством вершин $\Gamma_C(\mathcal{O})$ является $\mathbb{P}(\mathcal{O})$ – множество прямых, проходящих через ненулевые элементы $\mathcal{O}$.

Предложение 4.1 ([8, стр. 5], [4, замечание 2.6]). *Алгебра Окубо $\mathcal{O}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ имеет тривиальный коммутативный центр, а именно, $C_{\mathcal{O}} = \{0\}$.*

В этом параграфе мы покажем, что вершины $\Gamma_C(\mathcal{O})$, соответствующие элементам $\mathcal{E}$, лежат в одной компоненте связности, а расстояние между ними не превосходит двух. Прежде всего, мы напомним и уточним имеющиеся результаты о кратчайшем пути между идемпотентами в $\Gamma_C(\mathcal{O})$.

Обозначение 4.2. Чтобы показать, что вершины $[a]$ и $[b]$ графа $\Gamma_C(\mathcal{A})$ коммутируют (то есть либо совпадают, либо соединены ребром), будем использовать обозначение $[a] \leftrightarrow [b]$.

Лемма 4.3 ([4, леммы 4.1 и 4.2]). *Пусть $e, f \in \mathcal{O}$ – ненулевые идемпотенты. Рассмотрим элемент*

$$\begin{aligned} x &= e * f + f * e - e - f \\ &= (e+f) * (e+f) - 2(e+f) \\ &= -(e-f) * (e-f). \end{aligned}$$

Если $x \neq 0$, то $[e] \leftrightarrow [x] \leftrightarrow [f]$ в $\Gamma_C(\mathcal{O})$. Если $x = 0$, то $f = e + z$, где

(1) $\mathrm{n}(z) = \mathrm{n}(e, z) = 0$,
(2) $z * z = 0$,
(3) $z = e * z + z * e$.

Теорема 4.4 ([4, следствие 4.6]). *Пусть $\mathcal{O}$ – алгебра Окубо над произвольным полем $\mathbb{F}$ и пусть $e, f \in \mathcal{O}$ – ненулевые идемпотенты. Тогда $\mathrm{d}([e], [f]) \leqslant 2$ в $\Gamma_C(\mathcal{O})$.*

Следующее утверждение описывает вид элемента, который связывает пару идемпотентов в графе коммутативности алгебры Окубо.

Предложение 4.5. *Можно выбрать такой $y \in \mathcal{E}$, что $[e] \leftrightarrow [y] \leftrightarrow [f]$ в $\Gamma_C(\mathcal{O})$.*

Доказательство. Сперва рассмотрим случай, когда $x \neq 0$ в лемме 4.3. Положим $t = e - f$, тогда $x = -t * t$. Согласно определению 2.7 и предложению 3.3,

$$\begin{aligned} \mathrm{n}(t) &= \mathrm{n}(e-f) = \mathrm{n}(e) + \mathrm{n}(f) - \mathrm{n}(e,f) = 2 - \mathrm{n}(e,f), \\ \mathrm{n}(t, t*t) &= \mathrm{n}(e-f, e+f-e*f-f*e) \\ &= \mathrm{n}(e,e) + \mathrm{n}(e,f) - 2\mathrm{n}(e*e,f) \\ &\quad - \mathrm{n}(f,e) - \mathrm{n}(f,f) + 2\mathrm{n}(f*f,e) = 0. \end{aligned}$$

В силу равенства (2.5),

$$x * x = (t*t)*(t*t) = \mathrm{n}(t, t*t)t - \mathrm{n}(t)t*t = (2 - \mathrm{n}(e,f))x,$$

то есть $x \in \mathcal{E}$.

Пусть теперь $x = 0$. Если $e = f$, положим $y = e$, иначе имеем $z \neq 0$. Если $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$, то, согласно доказательству [4, следствие 4.6], можно взять $y = z + e*z$ или $y = z$. В обоих случаях выполнено $y * y = 0$, так как из равенств (2.3) и (2.4) следует, что

$$\begin{aligned} (z+e*z)*(z+e*z) &= z*z + z*(e*z) + (e*z)*z + (e*z)*(e*z) \\ &= \mathrm{n}(z)e + \mathrm{n}(e,z)z - (z*z)*e \\ &\quad + \mathrm{n}(e, e*z)z - ((e*z)*z)*e \\ &= \mathrm{n}(e*e, z)z = \mathrm{n}(e,z)z = 0. \end{aligned}$$

Если $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$, то, переходя к алгебраическому замыканию $\overline{\mathbb{F}}$ поля $\mathbb{F}$, мы получаем алгебру Окубо $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ над полем $\overline{\mathbb{F}}$, и тогда $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}} = P_8(\overline{\mathbb{F}})$ – алгебра псевдо-октонионов. Элементы $e, z \in P_8(\overline{\mathbb{F}})$ по-прежнему удовлетворяют условиям (1)–(3) из леммы 4.3. Поэтому, согласно [4, лемма 4.5], с точностью до сопряжения матрицами из $GL_3(\overline{\mathbb{F}})$, они имеют вид

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e \in \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Без ограничения общности будем рассматривать только первый вариант значения e. Из равенства (2.12) следует, что матрица $y \in P_8(\overline{\mathbb{F}})$ коммутирует с матрицами z и e в $P_8(\overline{\mathbb{F}})$ тогда и только тогда, когда она коммутирует с ними относительно стандартного матричного умножения. Записывая эти условия в явном виде и пользуясь равенством

$\mathrm{tr}(y) = 0$, получаем, что

$$y = \alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для некоторых $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{F}}$. Тогда

$$y * y = \alpha^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha y.$$

Вернёмся к исходному полю $\mathbb{F}$. Так как существование ненулевых решений системы линейных алгебраических уравнений не зависит от перехода к алгебраическому замыканию поля, из $\{0\} \neq C_{P_8(\overline{\mathbb{F}})}(e) \cap C_{P_8(\overline{\mathbb{F}})}(z) = \ker_{\overline{\mathbb{F}}}(L_e - R_e) \cap \ker_{\overline{\mathbb{F}}}(L_z - R_z)$ следует существование ненулевого элемента $y' \in \ker_{\mathbb{F}}(L_e - R_e) \cap \ker_{\mathbb{F}}(L_z - R_z) = C_{\mathcal{O}}(e) \cap C_{\mathcal{O}}(z)$. Элементы $y' * y'$ и y' линейно зависимы в $P_8(\overline{\mathbb{F}})$, а потому они линейно зависимы и в $\mathcal{O}$, а значит, $y' \in \mathcal{E}$. □

Результаты утверждений 4.3–4.5 могут быть естественным образом обобщены на более широкий класс элементов.

Лемма 4.6. *Пусть $\mathcal{S}$ – симметрическая композиционная алгебра и $x, y \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ таковы, что*

$$x * x = \lambda x, \qquad y * y = \mu y,$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, то есть $x, y \in \mathcal{E}$. Рассмотрим элемент

$$w = x * y + y * x - \mu x - \lambda y = (x + y) * (x + y) - (\lambda + \mu)(x + y).$$

Тогда w коммутирует с элементами x и y.

Доказательство. По предложению 3.3, имеем $\mathrm{n}(x) = \lambda^2$ и $\mathrm{n}(y) = \mu^2$. Используя равенства (2.3) и (2.4), нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} x * w &= x * (x * y) + x * (y * x) - \mu x * x - \lambda x * y \\ &= \mathrm{n}(x, y)x - y * (x * x) + \mathrm{n}(x)y - \lambda\mu x - \lambda x * y \\ &= (\mathrm{n}(x, y) - \lambda\mu)x + \lambda^2 y - \lambda x * y - \lambda y * x, \\ w * x &= (x * y) * x + (y * x) * x - \mu x * x - \lambda y * x \\ &= \mathrm{n}(x)y + \mathrm{n}(x, y)x - (x * x) * y - \lambda\mu x - \lambda y * x \\ &= (\mathrm{n}(x, y) - \lambda\mu)x + \lambda^2 y - \lambda x * y - \lambda y * x, \end{aligned}$$

то есть $x * w = w * x$. Аналогично, $y * w = w * y$. □

Лемма 4.7. *Если в лемме* 4.6 $w \neq 0$, *то* $w \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Положим $t = x + y$. Из предложения 3.3 получаем

$$\begin{aligned}
\mathrm{n}(t) &= \mathrm{n}(x+y) = \mathrm{n}(x) + \mathrm{n}(y) + \mathrm{n}(x,y) = \lambda^2 + \mu^2 + \mathrm{n}(x,y),\\
\mathrm{n}(t, t*t) &= \mathrm{n}(x+y, \lambda x + \mu y + x*y + y*x)\\
&= \lambda \mathrm{n}(x,x) + \mu \mathrm{n}(x,y) + 2\mathrm{n}(x*x, y)\\
&+ \lambda \mathrm{n}(y,x) + \mu \mathrm{n}(y,y) + 2\mathrm{n}(y*y, x)\\
&= 2\lambda^3 + 2\mu^3 + 3(\lambda+\mu)\mathrm{n}(x,y)\\
&= (\lambda+\mu)(2\lambda^2 - 2\lambda\mu + 2\mu^2 + 3\mathrm{n}(x,y)).
\end{aligned}$$

Тогда $w = t*t - (\lambda+\mu)t$ и, в силу равенства (2.5),

$$\begin{aligned}
w*w &= (t*t - (\lambda+\mu)t) * (t*t - (\lambda+\mu)t)\\
&= \mathrm{n}(t, t*t)t - \mathrm{n}(t)t*t - 2(\lambda+\mu)\mathrm{n}(t)t + (\lambda+\mu)^2 t*t\\
&= ((\lambda+\mu)^2 - \mathrm{n}(t))t*t + (\mathrm{n}(t, t*t) - 2(\lambda+\mu)\mathrm{n}(t))t\\
&= (2\lambda\mu - \mathrm{n}(x,y))t*t - (\lambda+\mu)(2\lambda\mu - \mathrm{n}(x,y))t\\
&= (2\lambda\mu - \mathrm{n}(x,y))w,
\end{aligned}$$

то есть $w \in \mathcal{E}$. □

Замечание 4.8. Если $\mathcal{S}$ не является алгеброй Окубо, то её центр содержит ненулевые элементы. Таким образом, даже при $w \neq 0$ возможна ситуация, когда $w \in C_{\mathcal{S}}$. Так как вершинами $\Gamma_C(\mathcal{S})$ являются элементы $\mathbb{P}(\mathcal{S}/C_{\mathcal{S}})$, в этом случае цепочка коммутирований $x \leftrightarrow w \leftrightarrow y$ не будет отвечать никакому пути в графе $\Gamma_C(\mathcal{S})$.

Теорема 4.9. *Пусть* $\mathcal{O}$ *– алгебра Окубо над произвольным полем* $\mathbb{F}$ *и* $x, y \in \mathcal{E}$. *Тогда* $\mathrm{d}([x],[y]) \leqslant 2$ *в* $\Gamma_C(\mathcal{O})$, *причём при* $\mathrm{d}([x],[y]) = 2$ *можно выбрать такой ненулевой* $z \in \mathcal{E}$, *что* $[x] \leftrightarrow [z] \leftrightarrow [y]$.

Доказательство. Пусть $x*x = \lambda x$, $y*y = \mu y$. Положим

$$w = x*y + y*x - \mu x - \lambda y = (x+y)*(x+y) - (\lambda+\mu)(x+y).$$

Если $w \neq 0$, то, по леммам 4.6 и 4.7, $w \in \mathcal{E}$ и $[x] \leftrightarrow [w] \leftrightarrow [y]$ в $\Gamma_C(\mathcal{O})$.

Далее будем считать, что $w = 0$. Рассмотрим три случая:

(1) Если $\lambda \neq 0 \neq \mu$, то $e = x/\lambda$ и $f = y/\mu$ – ненулевые идемпотенты. По теореме 4.4 и предложению 4.5, $\mathrm{d}([e],[f]) \leqslant 2$, причём в качестве промежуточного элемента можно выбрать $z \in \mathcal{E}$.

(2) Пусть $\lambda = 0$ или $\mu = 0$, но $\lambda+\mu \neq 0$. Без ограничения общности можем считать, что $\lambda = 0$. Положим $f = y/\mu$, тогда

$$\begin{aligned}(f+x)*(f+x) &= f*f + x*f + f*x + x*x \\ &= f + (x*y + y*x)/\mu = f + (w + \mu x)/\mu = f + x,\end{aligned}$$

то есть f и $f+x$ – ненулевые идемпотенты. По теореме 4.4 и предложению 4.5, найдется $0 \neq z \in C_{\mathcal{O}}(f) \cap C_{\mathcal{O}}(f+x) \cap \mathcal{E}$. Но тогда z коммутирует и с элементом x.

(3) При $\lambda = \mu = 0$ равенство $w = 0$ означает, что $x*y = -y*x$. Если $x*y = 0$, то $[x] \leftrightarrow [y]$, а иначе из

$$x*(x*y) = -x*(y*x) = -\mathrm{n}(x)y = 0 = \mathrm{n}(x)y = (x*y)*x,$$

получаем $[x] \leftrightarrow [x*y] \leftrightarrow [y]$. При этом, согласно равенствам (2.3) и (2.4),

$$\begin{aligned}(x*y)*(x*y) &= \mathrm{n}(x, x*y)y - ((x*y)*y)*x \\ &= \mathrm{n}(x*x, y)y + ((y*x)*y)*x \\ &= \mathrm{n}(y)x*x = 0.\end{aligned}$$

□

Предложение 4.10. *Пусть $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{1,\beta}$ – нерасщепляемая алгебра Окубо над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$, см. таблицу умножения 1. Тогда $\mathcal{E} \cup \{0\}$ – трёхмерная коммутативная подалгебра. В частности, для $x, y \in \mathcal{E}$ выполнено $\mathrm{d}([x],[y]) \leqslant 1$.*

Доказательство. Положим $e = z_{1,0} + z_{2,0}$, $u = z_{0,1} + z_{1,1} + z_{2,1}$, $v = z_{0,2} + z_{1,2} + z_{2,2}$ и $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{e, u, v\}$. Тогда из таблицы 1 следует, что $\mathcal{D}$ – трехмерная коммутативная подалгебра с таблицей умножения

$$e*e = e, \quad e*u = u*e = -u, \quad e*v = v*e = -v,$$
$$u*u = v*v = v*u = u*v = 0.$$

В частности, для любого $d = d_1e + d_2u + d_3v \in \mathcal{D}$ выполнено $d*d = d_1d$, то есть $d \in \mathcal{E} \cup \{0\}$. Осталось показать, что $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$.

По лемме 3.8, для каждого $x \in \mathcal{E}$ многочлен χ_x приводим над $\mathbb{F}$. Положим

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathcal{O} \mid \text{многочлен } \chi_x \text{ приводим над } \mathbb{F}\}.$$

Тогда $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}$. Так как $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$, многочлен $\chi_x(t) = t^3 - \mathrm{n}(x, x*x)$ приводим тогда и только тогда, когда $\mathrm{n}(x, x*x) \in \mathbb{F}^{\cdot 3}$.

Рассмотрим разложение $x = \sum_{i,j} x_{i,j} z_{i,j} \in \mathcal{O}$ по базисным элементам $z_{i,j}$, где $0 \leqslant i, j \leqslant 2$ и $(i,j) \neq (0,0)$. Согласно [15, стр. 1113], кубическая форма $g(x) = \mathrm{n}(x, x * x)$ аддитивна и удовлетворяет равенству $g(\alpha x) = \alpha^3 g(x)$, $\alpha \in \mathbb{F}$, поэтому $g(x) = \sum_{i,j} x_{i,j}^3 g(z_{i,j})$. Применяя соотношения (2.11) и тождество $(a+b)^3 = a^3 + b^3$, справедливое при $\operatorname{char} \mathbb{F} = 3$, мы получаем

$$\mathrm{n}(x, x * x) = s_0(x)^3 + s_1(x)^3 \beta + s_2(x)^3 \beta^2,$$

где $s_j(x) = \sum_i x_{i,j}$, $j \in \{0,1,2\}$.

Так как $\mathcal{O}$ нерасщепляемая, то $\beta \neq \gamma^3$ ни для какого $\gamma \in \mathbb{F}$. Действительно, иначе можно рассмотреть изоморфизм $\mathcal{O}_{1,\beta} \to \mathcal{O}_{1,1}$, при котором $z_{i,j} \mapsto \gamma^j z_{i,j}$ для всех $0 \leqslant i, j \leqslant 2$ и $(i,j) \neq (0,0)$. Многочлен $t^3 - \beta^3 \in \mathbb{F}^{\cdot 3}[t]$ неприводим над $\mathbb{F}^{\cdot 3}$, а значит, является минимальным для β. Поэтому 1, β, β^2 линейно независимы над $\mathbb{F}^{\cdot 3}$, и тогда условие $\mathrm{n}(x, x * x) \in \mathbb{F}^{\cdot 3}$ эквивалентно $s_1(x) = s_2(x) = 0$. В этом случае $\mathrm{n}(x, x * x) = s_0(x)^3$. Следовательно, $\mathcal{L}$ – векторное подпространство размерности 6 и

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} \oplus \operatorname{span}\{w_0, w_1, w_2\},$$

где $w_0 = z_{1,0}$, $w_1 = z_{0,1} - z_{2,1}$, $w_2 = z_{0,2} - z_{1,2}$. Действительно, все шесть векторов e, u, v, w_0, w_1, w_2 лежат в $\mathcal{L}$ и линейно независимы, так как линейно независимы пары $\{e, w_0\}$, $\{u, w_1\}$ и $\{v, w_2\}$, лежащие соответственно в подпространствах $\operatorname{span}\{z_{1,0}, z_{2,0}\}$, $\operatorname{span}\{z_{0,1}, z_{1,1}, z_{2,1}\}$ и $\operatorname{span}\{z_{0,2}, z_{1,2}, z_{2,2}\}$.

Для $x, y \in \mathcal{L}$ рассмотрим квадратичную и соответствующую ей билинейную функции:

$$\psi(x) = s_0(x)x + x * x,$$
$$\psi(x,y) = \psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y) = s_0(y)x + s_0(x)y + x * y + y * x.$$

Заметим, что для любых $x \in \mathcal{L}$ и $d \in \mathcal{D}$ выполнено $\psi(x,d) = 0$. Действительно, в силу линейности, это условие равносильно выполнению трёх равенств

$$s_0(x)e + e * x + x * e = x,$$
$$s_0(x)u + u * x + x * u = 0,$$
$$s_0(x)v + v * x + x * v = 0,$$

каждое из которых достаточно проверить на базисных векторах $\mathcal{L}$ с помощью таблицы 1. Тогда $0 = \psi(d,d) = 2\psi(d) = -\psi(d)$, откуда

$$\psi(x+d) = \psi(x) + \psi(d) + \psi(x,d) = \psi(x).$$

Поэтому, записывая произвольный $x \in \mathcal{L}$ в виде $x = \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + d$, где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ и $d \in \mathcal{D}$, получаем

$$\psi(x) = \sum_k \lambda_k^2 \psi(w_k) + \sum_{k<l} \lambda_k \lambda_l \psi(w_k, w_l).$$

Так как $s_0(w_0) = 1$, $s_0(w_1) = s_0(w_2) = 0$ и $w_1 * w_0 = w_0 * w_2 = 0$, то с помощью прямых вычислений по таблице 1 получаем, что

$$\begin{aligned}
\psi(w_0) &= z_{1,0} + z_{1,0} * z_{1,0} = e,\\
\psi(w_1) &= w_1 * w_1 = v,\\
\psi(w_2) &= w_2 * w_2 = \beta u,\\
\psi(w_0, w_1) &= w_1 + w_0 * w_1 = (z_{0,1} - z_{2,1}) + (z_{0,1} - z_{1,1}) = -u,\\
\psi(w_0, w_2) &= w_2 + w_2 * w_0 = (z_{0,2} - z_{1,2}) + (z_{2,2} - z_{1,2}) = v,\\
\psi(w_1, w_2) &= w_1 * w_2 + w_2 * w_1 = \beta z_{2,0} + \beta z_{1,0} = \beta e.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi(x) = (\lambda_0^2 + \beta\lambda_1\lambda_2)e + (\beta\lambda_2^2 - \lambda_0\lambda_1)u + (\lambda_1^2 + \lambda_0\lambda_2)v.$$

Пусть теперь $x \in \mathcal{E}$ и $x * x = \lambda x$. По предложению 3.3, $\mathrm{n}(x) = \lambda^2$, поэтому

$$\mathrm{n}(x, x*x) = \lambda \mathrm{n}(x,x) = 2\lambda \mathrm{n}(x) = -\lambda^3 \in \mathbb{F}^{\cdot 3},$$

то есть $x \in \mathcal{L}$ и $\lambda = -s_0(x)$. Следовательно, $\psi(x) = 0$, что даёт

$$\lambda_0^2 + \beta\lambda_1\lambda_2 = 0, \quad \beta\lambda_2^2 - \lambda_0\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1^2 + \lambda_0\lambda_2 = 0,$$

откуда

$$\lambda_0^3 = -\beta\lambda_0\lambda_1\lambda_2 = -\beta^2\lambda_2^3, \quad \lambda_1^3 = -\lambda_0\lambda_1\lambda_2 = -\beta\lambda_2^3.$$

Если $\lambda_2 \neq 0$, то $\beta = (-\lambda_1/\lambda_2)^3 \in \mathbb{F}^{\cdot 3}$, что противоречит нерасщепляемости алгебры $\mathcal{O}$. Значит, $\lambda_2 = 0$, а тогда $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ и $x \in \mathcal{D}$.

Итак, $\mathcal{E} \cup \{0\} = \mathcal{D}$ – трехмерная коммутативная подалгебра. В частности, любые $x, y \in \mathcal{E}$ коммутируют, поэтому $\mathrm{d}([x],[y]) \leqslant 1$. □

§5. Графы коммутативности алгебр Окубо

В этом параграфе мы опишем компоненты связности графа коммутативности $\Gamma_C(\mathcal{O})$ алгебры Окубо $\mathcal{O}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ и вычислим их диаметры. Из §3 вытекает описание компонент связности, соответствующих элементам x, для которых многочлен χ_x неприводим над $\mathbb{F}$. Они являются полными подграфами в $\Gamma_C(\mathcal{O})$, то есть кликами. Теорема 4.9 и предложение 4.10 из §4 позволяют получить верхнюю оценку диаметра компоненты связности, образованной всеми оставшимися вершинами. Таким образом, остаётся построить пример пары вершин, на которых эта оценка достигается.

Из предложения 2.17 и леммы 3.8 следует, что вершина x, для которой многочлен χ_x приводим над $\mathbb{F}$, существует в точности тогда, когда $\mathcal{O}$ содержит ненулевой идемпотент. Поэтому пример пары вершин, реализующих максимальное расстояние, достаточно предъявить для алгебр Окубо с идемпотентами, полное описание которых даёт теорема 2.18. Мы отдельно рассматриваем случаи $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$ и $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$, причём в характеристике 3 расщепляемый и нерасщепляемый случаи будут различаться.

Пример 5.1. Пусть $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$ и $\mathcal{O}$ – алгебра Окубо, содержащая ненулевые идемпотенты. Используя таблицу 2, положим

$$a = x_7, \qquad b = x_5 + x_7.$$

Тогда

$$a * a = -\beta\gamma x_1, \qquad b * b = -\gamma(x_0 + (\beta+1)x_1 + x_2 + 2x_3).$$

С помощью соотношений (2.9) получаем, что $\mathrm{n}(a, a*a) = \mathrm{n}(b, b*b) = 0$, поэтому многочлены χ_a и χ_b приводимы над $\mathbb{F}$.

Так как $a, b \notin \mathcal{E}$, то, по предложению 3.7, имеем

$$\dim C_{\mathcal{O}}(a) = \dim C_{\mathcal{O}}(b) = 2,$$

следовательно, $C_{\mathcal{O}}(a) = \operatorname{alg}\langle a\rangle$ и $C_{\mathcal{O}}(b) = \operatorname{alg}\langle b\rangle$. Так как $C_{\mathcal{O}}(a) \cap C_{\mathcal{O}}(b) = \{0\}$, то $\mathrm{d}([a],[b]) \geqslant 3$. Если $\mathrm{d}([a],[b]) = 3$, то существуют такие ненулевые элементы $u = s_1 a + s_2 a * a$ и $v = t_1 b + t_2 b * b$, где $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{F}$, что $u * v = v * u$. Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} u * v - v * u = &-\gamma(s_1 t_1 + 3\beta\gamma s_2 t_2)x_2 - 2\beta\gamma(s_1 t_2 + s_2 t_1)x_4 \\ &- \beta\gamma(s_1 t_2 + s_2 t_1)x_5 - 2\gamma s_1 t_2 x_6 - \gamma s_1 t_2 x_7. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю, получаем систему уравнений

$$s_1t_2 = 0, \quad s_2t_1 = 0, \quad s_1t_1 = -3\beta\gamma s_2t_2.$$

Если $s_1 \neq 0$, то из первого уравнения имеем $t_2 = 0$. Но тогда из третьего уравнения получаем $t_1 = 0$. Если $s_1 = 0$, то $s_2 \neq 0$, и второе уравнение даёт $t_1 = 0$. Из третьего получаем, что $t_2 = 0$. В обоих случаях $v = 0$ – противоречие. Значит, $\mathrm{d}([a],[b]) \geqslant 4$.

Пример 5.2. Пусть $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$ и $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{1,\beta}$. Сперва предположим, что $\mathcal{O}$ – расщепляемая алгебра Окубо. Используя таблицу 1 для $\alpha = \beta = 1$, определим $a = z_{1,0}$ и $b = z_{0,1}$. Используя соотношения (2.11), получаем $\mathrm{n}(a) = \mathrm{n}(b) = 0$ и $\mathrm{n}(a, a*a) = \mathrm{n}(b, b*b) = 1$. Следовательно, многочлены $\chi_a(t) = \chi_b(t) = t^3 - 1$ приводимы и

$$4\mathrm{n}(a)^3 - \mathrm{n}(a, a*a)^2 = 4\mathrm{n}(b)^3 - \mathrm{n}(b, b*b)^2 = -1,$$

то есть $\mathrm{alg}\langle a\rangle$ и $\mathrm{alg}\langle b\rangle$ – композиционные подалгебры. Согласно предложению 3.2,

$$C_{\mathcal{O}}(a) = \mathrm{alg}\langle a\rangle = \mathrm{span}\{z_{1,0}, z_{2,0}\},$$
$$C_{\mathcal{O}}(b) = \mathrm{alg}\langle b\rangle = \mathrm{span}\{z_{0,1}, z_{0,2}\},$$

поэтому $C_{\mathcal{O}}(a) \cap C_{\mathcal{O}}(b) = \{0\}$ и $\mathrm{d}([a],[b]) \geqslant 3$. Если $\mathrm{d}([a],[b]) = 3$, то существуют такие ненулевые элементы $u = s_1z_{1,0} + s_2z_{2,0}$ и $v = t_1z_{0,1} + t_2z_{0,2}$, где $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{F}$, что $u * v = v * u$. Из таблицы 1 получаем:

$$u * v = -s_1t_1z_{1,1} - s_2t_2z_{2,2}, \quad v * u = -s_2t_1z_{2,1} - s_1t_2z_{1,2}.$$

Тогда коммутативность u и v равносильна системе

$$s_1t_1 = s_2t_2 = s_2t_1 = s_1t_2 = 0,$$

поэтому либо $u = 0$, либо $v = 0$ – противоречие. Значит, $\mathrm{d}([a],[b]) \geqslant 4$.

Пусть теперь $\mathcal{O}$ не является расщепляемой, то есть $\alpha = 1$ и $\beta \neq \gamma^3$ ни для какого $\gamma \in \mathbb{F}$. Положим $a = z_{1,0}$ и $b = z_{0,1} - z_{2,1} + z_{0,2} - z_{1,2}$, тогда

$$b * b = \beta(z_{1,0} + z_{2,0} + z_{0,1} + z_{1,1} + z_{2,1}) + (z_{0,2} + z_{1,2} + z_{2,2}),$$

$\mathrm{n}(a) = 0$, $\mathrm{n}(a, a*a) = 1$, $\mathrm{n}(b) = 2\beta$ и $\mathrm{n}(b, b*b) = 0$. Следовательно, многочлены $\chi_a(t) = t^3 - 1$ и $\chi_b(t) = t^3$ приводимы над $\mathbb{F}$, и

$$4\mathrm{n}(a)^3 - \mathrm{n}(a, a*a)^2 = -1, \quad 4\mathrm{n}(b)^3 - \mathrm{n}(b, b*b)^2 = -\beta^3,$$

поэтому подалгебры $\mathrm{alg}\langle a\rangle$ и $\mathrm{alg}\langle b\rangle$ являются композиционными. Аналогично получаем, что $C_{\mathcal{O}}(a) = \mathrm{alg}\langle a\rangle = \mathrm{span}\{z_{1,0}, z_{2,0}\}$ и $C_{\mathcal{O}}(b) = \mathrm{alg}\langle b\rangle = \mathrm{span}\{b, b*b\}$. Так как $C_{\mathcal{O}}(a) \cap C_{\mathcal{O}}(b) = \{0\}$, то $\mathrm{d}([a],[b]) \geqslant 3$.

Теорема 5.3. *Пусть $\mathcal{O}$ – алгебра Окубо над полем $\mathbb{F}$. Тогда множества вершин компонент связности графа коммутативности $\Gamma_C(\mathcal{O})$ имеют следующий вид:*

(1) *если $\mathcal{O}$ содержит ненулевой идемпотент, то*

$$V = \{[x] \in \mathbb{P}(\mathcal{O}) \mid \textit{многочлен } \chi_x \textit{ приводим над } \mathbb{F}\},$$

где $\chi_x(t) = t^3 - 3\mathrm{n}(x)t - \mathrm{n}(x, x * x)$;

(2) *если $x \in \mathcal{O}$ таков, что многочлен χ_x неприводим над $\mathbb{F}$, то*

$$V_x = \mathbb{P}(\mathrm{alg}\langle x\rangle).$$

Диаметр компоненты связности, отвечающей множеству вершин V, равен 3, если $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$ и алгебра Окубо $\mathcal{O}$ не является расщепляемой, и 4 в противном случае. Множество V_x соответствует клике, то есть полному подграфу в $\Gamma_C(\mathcal{O})$, а потому имеет диаметр 1.

Доказательство. Если $x \in \mathcal{O}$ и χ_x неприводим над $\mathbb{F}$, то, согласно лемме 3.9, для любого $y \in \mathrm{alg}\langle x\rangle$ выполнено $C_{\mathcal{O}}(y) = \mathrm{alg}\langle x\rangle$. Следовательно, множество вершин $\mathbb{P}(\mathrm{alg}\langle x\rangle)$ задаёт компоненту связности $\Gamma_C(\mathcal{O})$, в которой любые две вершины соединены ребром.

Пусть $[x], [y] \in V$. По лемме 3.8, найдутся элементы $x' \in \mathcal{E} \cap \mathrm{alg}\langle x\rangle$ и $y' \in \mathcal{E} \cap \mathrm{alg}\langle y\rangle$, то есть $[x] \leftrightarrow [x']$ и $[y'] \leftrightarrow [y]$. По теореме 4.9, $\mathrm{d}([x'], [y']) \leqslant 2$, поэтому $\mathrm{d}([x], [y]) \leqslant 4$. Более того, если $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$ и $\mathcal{O}$ – нерасщепляемая алгебра Окубо, то, согласно предложению 4.10, $\mathrm{d}([x'], [y']) \leqslant 1$, откуда $\mathrm{d}([x], [y]) \leqslant 3$. С другой стороны, примеры 5.1 и 5.2 демонстрируют, что оценки на диаметры точны. Значит, V – компонента связности, диаметр которой равен 3, если $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$ и алгебра Окубо $\mathcal{O}$ не является расщепляемой, и 4 в противном случае. Остаётся заметить, что V непусто тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}$ содержит ненулевой идемпотент, см. предложение 2.17 и лемму 3.8. □

Замечание 5.4. Если $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$, то неприводимость χ_x эквивалентна тому, что $\mathrm{n}(x, x * x) \neq \gamma^3$ ни для какого $\gamma \in \mathbb{F}$. Элемент $x \in \mathcal{O}$ с таким свойством существует в точности тогда, когда $\mathcal{O}$ не является расщепляемой алгеброй Окубо, см. [6, теорема 5.1]. Таким образом, $\Gamma_C(\mathcal{O})$ связен тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}$ – расщепляемая алгебра Окубо.

Если $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$, то для наличия компонент-клик необходимым условием является существование расширений степени 3 поля $\mathbb{F}$. Действительно, согласно теореме 5.3, каждая компонента-клика задается таким элементом $x \in \mathcal{O}$, что χ_x неприводим. Из леммы 3.9 следует, что $\operatorname{alg}\langle x\rangle$ – двумерная композиционная алгебра, не являющаяся пара-гурвицевой алгеброй, поэтому она удовлетворяет условию теоремы 2.16(2). Такая алгебра однозначно задается кубической этальной алгеброй L над $\mathbb{F}$, которая является полем, см. [20, (34.28)], а значит, согласно [20, (18.3)], L является сепарабельным расширением поля $\mathbb{F}$ степени 3. Например, поле $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или любое вещественно замкнутое поле не допускает такого расширения, и, следовательно, граф $\Gamma_C(\mathcal{O})$ связен.

§6. Графы коммутативности гурвицевых и пара-гурвицевых алгебр

Для полноты изложения мы опишем компоненты связности графа коммутативности произвольной конечномерной эластичной композиционной алгебры $\mathcal{A}$, опираясь на классификацию из теорем 2.14 и 2.15. Случай, когда $\mathcal{A}$ является алгеброй Окубо, был рассмотрен в предыдущем параграфе, поэтому будем считать, что $\mathcal{A}$ – либо гурвицева алгебра, либо форма пара-гурвицевой алгебры.

Если $\dim\mathcal{A} \leqslant 2$, то, согласно теоремам 2.5 и 2.16, $\mathcal{A}$ коммутативна, а потому соответствующий ей граф $\Gamma_C(\mathcal{A})$ не содержит вершин. По теореме 2.16, при $\dim\mathcal{A} > 2$ формы пара-гурвицевых алгебр снова являются пара-гурвицевыми алгебрами, поэтому остаётся рассмотреть гурвицевы и пара-гурвицевы алгебры размерностей 4 и 8.

Замечание 6.1. Пусть $(\mathcal{C}, \cdot, \mathrm{n})$ – гурвицева алгебра над произвольным полем $\mathbb{F}$ и $(\mathcal{C}, *, \mathrm{n})$ – соответствующая пара-гурвицева алгебра. С помощью равенства (2.8) непосредственно проверяется, что коммутативность элементов $x, y \in \mathcal{C}$ относительно произведения "$\cdot$" равносильна коммутативности относительно "$*$". Следовательно, совпадают как центры алгебр $(\mathcal{C}, \cdot, \mathrm{n})$ и $(\mathcal{C}, *, \mathrm{n})$, так и соответствующие им графы коммутативности.

Таким образом, достаточно рассмотреть случай гурвицевых алгебр размерности 4 и 8. Широко известно (см., например, [2, стр. 57, глава 2, теорема 5]), что при $\dim\mathcal{C} \geqslant 4$ выполнено $C_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})} = \mathbb{F}$. Поэтому,

согласно определению 1.2, множеством вершин $\Gamma_C(\mathcal{C})$ является $\mathbb{P}(\mathcal{C}/\mathbb{F})$, то есть каждая вершина имеет вид $[x] = \mathbb{F}+\mathbb{F}x$ для некоторого $x \in \mathcal{C}\setminus\mathbb{F}$.

Покажем, что если $\dim\mathcal{C} = 4$, то есть $\mathcal{C}$ – обобщённая алгебра кватернионов, то граф $\Gamma_C(\mathcal{C})$ безрёберный.

Предложение 6.2. *Пусть* $\dim\mathcal{C} = 4$. *Тогда граф* $\Gamma_C(\mathcal{C})$ *не имеет ребер, то есть любая его компонента связности состоит из одной вершины, которая имеет вид* $[x] = \mathbb{F} + \mathbb{F}x$ *для некоторого* $x \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}$.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из хорошо известного равенства

$$C_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x) = \mathbb{F}[x] = \mathbb{F} + \mathbb{F}x,$$

выполненного для любого $x \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}$. Один из способов его доказательства заключается в следующем: рассмотрим гурвицеву алгебру $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}} = \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ над полем $\overline{\mathbb{F}}$. Она является расщепляемой, а потому изоморфна $M_2(\overline{\mathbb{F}})$ – алгебре 2×2 матриц над полем $\overline{\mathbb{F}}$, см. [2, стр. 62, глава 2, теорема 7]. Любая нескалярная матрица $x \in M_2(\overline{\mathbb{F}})$ является циклической, поэтому $C_{M_2(\overline{\mathbb{F}})}(x) = \overline{\mathbb{F}}[x]$, см. теорему 3.6. Размерность централизатора не меняется при расширении поля, и $\mathbb{F}[x] \subseteq C_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x)$, откуда и вытекает требуемое равенство. □

Осталось рассмотреть случай $\dim\mathcal{C} = 8$. Как показывает лемма 6.5 ниже, для любого элемента обобщённой алгебры октонионов также можно получить явный вид централизатора. Для его описания нам понадобится следующее определение.

Определение 6.3. Ортогонализатором *элемента* a *произвольной алгебры* $\mathcal{A}$ *называется множество элементов* $\mathcal{A}$, *ортогональных к* a:

$$O_{\mathcal{A}}(a) = \big\{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba = 0\big\}.$$

Графом ортогональности $\Gamma_O(\mathcal{A})$ *называется граф, вершины которого соответствуют элементам множества* $\mathbb{P}(Z_{LR}(\mathcal{A}))$, *где* $Z_{LR}(\mathcal{A})$ – *множество двусторонних делителей нуля в* $\mathcal{A}$, *причём две различные вершины* $\langle a\rangle = \mathbb{F}a$ *и* $\langle b\rangle = \mathbb{F}b$ *соединены ребром, если* $ab = ba = 0$.

Отметим, что если $\mathcal{A}$ – конечномерная композиционная алгебра, то, согласно предложению 2.3, множество $Z_{LR}(\mathcal{A})$ двусторонних делителей нуля совпадает со множеством $Z(\mathcal{A})$ всех делителей нуля в $\mathcal{A}$, которое в точности состоит из всех ненулевых изотропных элементов.

Обозначение 6.4. Пусть $X \subset (\mathcal{C}, \cdot, \mathrm{n})$ – некоторое подмножество. Множество элементов, ортогональных всем элементам $x \in X$ относительно симметрической билинейной формы $\mathrm{n}(\cdot,\cdot)$, обозначим через

$$X^{\perp} = \{a \in \mathcal{C} \mid \mathrm{n}(x,a) = 0 \text{ для всех } x \in X\}.$$

Лемма 6.5. *Пусть* $\dim \mathcal{C} = 8$ *и* $x \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}1$.

(1) *Если* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, *то*

$$C_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x) = \begin{cases} \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}x, & \mathrm{dis}(x) \neq 0, \\ \mathbb{F} \oplus O_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x - \overline{x}), & \mathrm{dis}(x) = 0, \end{cases}$$

где $\mathrm{dis}(x) = \mathrm{t}(x)^2 - 4\mathrm{n}(x)$, *см. обозначение* 2.4. *Размерность* $C_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x)$ *равна* 2 *в первом случае и* 4 *во втором.*

(2) *Если* $\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$, *то*

$$C_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x) = \begin{cases} \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}x, & \mathrm{t}(x) \neq 0, \\ \{1, x\}^{\perp}, & \mathrm{t}(x) = 0. \end{cases}$$

Размерность $C_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x)$ *равна* 2 *в первом случае и* 6 *во втором.*

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathrm{n}(x - \overline{x}) = \mathrm{n}(2x - \mathrm{t}(x)1) &= 4\mathrm{n}(x) + \mathrm{t}(x)^2 - 2\mathrm{t}(x)\mathrm{n}(x,1) \\ &= 4\mathrm{n}(x) - \mathrm{t}(x)^2 = -\mathrm{dis}(x). \end{aligned}$$

Поэтому требуемое утверждение немедленно вытекает из [19, лемма 3.1 и следствие 3.3] и [3, лемма 2.20]. □

В утверждениях 3.3–3.6 работы [24] были рассмотрены пути в графе ортогональности $\Gamma_O(\mathcal{O})$ произвольной алгебры Окубо $\mathcal{O}$, соединяющие вершины x и y, для которых выполнено $x*x = y*y = 0$. Доказательства этих утверждений дословно переносятся на случай произвольной симметрической композиционной алгебры $(\mathcal{S}, *, \mathrm{n})$, $\dim \mathcal{S} = 8$. Действительно, лежащее в их основе описание аннуляторов и их пересечений, см. работу Мацри и Вишне [22, теорема 3.1, предложения 3.4 и 3.8], изначально было получено именно для симметрических композиционных алгебр размерности 8.

Лемма 6.6 ([24, следствие 3.5])**.** *Пусть для* $x, y \in Z(\mathcal{S})$ *выполнено* $x * x = y * y = 0$. *Тогда* $\mathrm{d}(\langle x\rangle, \langle y\rangle) \leqslant 2$ *в* $\Gamma_O(\mathcal{S})$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{n}(x,y) = 0$.

Из равенства (2.8) вытекает, что для любого элемента $x \in \mathcal{C}$ выполнено $O_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x) = O_{(\mathcal{C},*,\mathrm{n})}(x)$, то есть его ортогонализаторы в гурвицевой и соответствующей ей пара-гурвицевой алгебрах совпадают. Так как лемму 6.6 можно применить к пара-гурвицевой алгебре $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, *, \mathrm{n})$, $\dim \mathcal{C} = 8$, её результат переносится и на гурвицеву алгебру $(\mathcal{C}, \cdot, \mathrm{n})$.

Замечание 6.7. Если $a \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ и $a \cdot a = 0$, то из равенства (2.1) получаем $\mathrm{t}(a) = \mathrm{n}(a) = 0$. Кроме того, для любого $b \in O_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(a)$ выполнено $a \cdot b = 0$ и $a \cdot \overline{b} = -\overline{a} \cdot \overline{b} = -\overline{b \cdot a} = 0$, откуда $\mathrm{t}(b) = \mathrm{n}(b) = 0$, следовательно, $b \cdot b = 0$.

Лемма 6.8. *Пусть* $\dim \mathcal{C} = 8$ *и* $x, y \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ *– такие элементы, что* $x \cdot x = y \cdot y = 0$. *Тогда в графе ортогональности* $\Gamma_O(\mathcal{C})$

$$\mathrm{d}(\langle x\rangle, \langle y\rangle) = \begin{cases} 0, & y \in \mathbb{F}x, \\ 1, & x \cdot y = 0 \text{ и } y \notin \mathbb{F}x, \\ 2, & \mathrm{n}(x, y) = 0 \text{ и } x \cdot y \neq 0, \\ 3, & \mathrm{n}(x, y) \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $d = \mathrm{d}(\langle x\rangle, \langle y\rangle)$. Случай $d = 0$ означает, что $\langle x\rangle = \langle y\rangle$, то есть $y \in \mathbb{F}x$.

Вершины $\langle x\rangle$ и $\langle y\rangle$ смежны в $\Gamma_O(\mathcal{C})$ тогда и только тогда, когда $y \notin \mathbb{F}x$ и $y \in O_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x)$. Согласно замечанию 6.7, $\mathrm{t}(x) = \mathrm{t}(y) = 0$, поэтому условия $x \cdot y = 0$ и $y \cdot x = \overline{y} \cdot \overline{x} = \overline{x \cdot y} = 0$ равносильны. Это даёт случай $d = 1$.

Равенство $\mathrm{n}(x, y) = 0$ эквивалентно $d \leqslant 2$ в силу леммы 6.6. Вместе с уже рассмотренными случаями это означает, что $d = 2$ равносильно $\mathrm{n}(x, y) = 0$, $x \cdot y \neq 0$.

Если $\mathrm{n}(x, y) \neq 0$, то $d \geqslant 3$. Покажем, что $d \leqslant 3$. Поскольку $\dim O_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(y) = 3$, существует ненулевой $z \in x^{\perp} \cap O_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(y)$. По замечанию 6.7, $z \cdot z = 0$, поэтому из леммы 6.6 следует, что $\mathrm{d}(\langle x\rangle, \langle z\rangle) \leqslant 2$. Значит, $d = 3$. □

Предложение 6.9. *Пусть* $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$, $\dim \mathcal{C} = 8$ *и* $x, y \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ *– такие элементы, что* $x \cdot x = y \cdot y = 0$. *Тогда расстояние между вершинами* $[x]$ *и* $[y]$ *в графе* $\Gamma_C(\mathcal{C})$ *совпадает с расстоянием между вершинами* $\langle x\rangle$ *и* $\langle y\rangle$ *в графе* $\Gamma_O(\mathcal{C})$, *то есть*

$$\mathrm{d}_{\Gamma_C(\mathcal{C})}([x], [y]) = \mathrm{d}_{\Gamma_O(\mathcal{C})}(\langle x\rangle, \langle y\rangle).$$

Доказательство. Если два элемента ортогональны, то они коммутируют, поэтому любой путь между $\langle x\rangle$ и $\langle y\rangle$ в $\Gamma_O(\mathcal{C})$ индуцирует путь между $[x]$ и $[y]$ в $\Gamma_C(\mathcal{C})$ той же длины. Следовательно, $\mathrm{d}_{\Gamma_C(\mathcal{C})}([x],[y]) \leqslant \mathrm{d}_{\Gamma_O(\mathcal{C})}(\langle x\rangle,\langle y\rangle)$.

Докажем обратное неравенство. Согласно замечанию 6.7, $\mathrm{t}(x) = \mathrm{n}(x) = 0$, поэтому $\mathrm{dis}(x) = 0$ и, по лемме 6.5(1), $C_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x) = \mathbb{F} \oplus O_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x-\overline{x}) = \mathbb{F}\oplus O_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x)$. Для произвольного $z \in C_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x)$, $z \notin \mathbb{F}1$, рассмотрим $z' = z - \overline{z} \neq 0$, тогда $[z'] = [z]$ и $\mathrm{t}(z') = 0$. Так как для любого $w \in O_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x)$ выполнено $\mathrm{t}(w) = 0$, получаем $z' \in O_{(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})}(x)$. По замечанию 6.7, $\mathrm{n}(z') = 0$ и $z' \cdot z' = 0$. Отсюда вытекает, что любой путь в $\Gamma_C(\mathcal{C})$ вида

$$[x] \leftrightarrow [z_1] \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow [z_k] \leftrightarrow [y]$$

индуцирует в $\Gamma_O(\mathcal{C})$ путь

$$\langle x\rangle - \langle z_1'\rangle - \ldots - \langle z_k'\rangle - \langle y\rangle. \qquad \square$$

Теорема 6.10. *Пусть $(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})$ – гурвицева алгебра размерности 8 над произвольным полем $\mathbb{F}$ и $\mathcal{S} = (\mathcal{C},*,\mathrm{n})$ – соответствующая пара-гурвицева алгебра. Тогда графы $\Gamma_C(\mathcal{C})$ и $\Gamma_C(\mathcal{S})$ совпадают и несвязны, а множества вершин их компонент связности – это*

(1) *множество*

$$V = \{[x] = \mathbb{F} + \mathbb{F}x \mid x \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}1,\ \mathrm{dis}(x) = 0\},$$

(2) *множества*

$$V_x = \{[x] = \mathbb{F} + \mathbb{F}x\}$$

для всех $x \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}1$, удовлетворяющих условию $\mathrm{dis}(x) \neq 0$.

При $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$ условие $\mathrm{dis}(x) = \mathrm{t}(x)^2 - 4\mathrm{n}(x) = 0$ равносильно $\mathrm{t}(x) = 0$. При $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$ множество V непусто в том и только в том случае, когда $(\mathcal{C},\cdot,\mathrm{n})$ – расщепляемая гурвицева алгебра. Диаметр компоненты связности, отвечающей множеству вершин V, равен 3, если $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$, и 2, если $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$. Множества V_x отвечают изолированным вершинам графа.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}1$. Если $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$, то, согласно лемме 6.5(1), при $\mathrm{dis}(x) \neq 0$ вершина $[x]$ является изолированной, а при $\mathrm{dis}(x) = 0$ имеем $[x] = [x']$, где $x' = x - \overline{x}$. Так как $\mathrm{t}(x') = \mathrm{n}(x') = 0$, из равенства (2.1) вытекает $x' \cdot x' = 0$. Применяя лемму 6.8 и предложение 6.9, получаем, что V является компонентой связности, и её

диаметр не превосходит 3. Существование ненулевого изотропного элемента означает, что гурвицева алгебра $(\mathcal{C}, \cdot, \mathrm{n})$ является расщепляемой, а поэтому она изоморфна векторно-матричной алгебре Цорна, см. пример 2.6. В качестве примера вершин, расстояние между которыми равно 3, можно взять элементы

$$x = \begin{pmatrix} 0 & (1,0,0) \\ (0,0,0) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & (0,0,0) \\ (1,0,0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $x \cdot x = y \cdot y = 0$ и $\mathrm{n}(x, y) = -1$.

Если $\operatorname{char} \mathbb{F} = 2$, то, согласно лемме 6.5(2), при $\mathrm{t}(x) \neq 0$ вершина $[x]$ является изолированной, а вершины, для которых $\mathrm{t}(x) = 0$, образуют компоненту связности, смежность в которой задается условием $\mathrm{n}(x, y) = 0$. Легко видеть, что диаметр такой компоненты равен двум. □

Авторы благодарны профессору А. Э. Гутерману за внимание к работе и ценные обсуждения.

Список литературы

1. А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, *Контр-алгебры Кэли–Диксона: дважды альтернативные делители нуля и графы отношений.* — Фундам. прикл. мат. **23**, No. 3 (2020), 95–129.
2. К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1978.
3. С. А. Жилина, *О дважды альтернативных делителях нуля в алгебрах Кэли-Диксона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 18–54.
4. С. А. Жилина, Д. А. Павлинов, *О графах коммутативности алгебр Окубо.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **542** (2025), 81–99.
5. S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja, *On the diameters of commuting graphs.* — Linear Algebra Appl. **418**, No. 1 (2006), 161–176.
6. A. Elduque, *Symmetric composition algebras.* — J. Algebra **196** (1997), 283–300.
7. A. Elduque, *Okubo algebras and twisted polynomials.* — Contemp. Math. **224** (1999), 101–109.
8. A. Elduque, *Okubo algebras: automorphisms, derivations and idempotents.* — Contemp. Math. **652** (2015), 61–73.
9. A. Elduque, *Order 3 elements in G_2 and idempotents in symmetric composition algebras.* — Canad. J. Math. **70**, No. 5 (2018), 1038–1075.
10. A. Elduque, *Composition algebras.* — In: Algebra and Applications I: Non-Associative Algebras and Categories, Sciences-Mathematics, ISTEWiley 2021, pp. 27–57.

11. A. Elduque, *Okubo algebras with isotropic norm.* — Proc. Math. Statistics **427** (2023), 287–301.
12. A. Elduque, H. Ch. Myung, *Flexible composition algebras and Okubo algebras.* — Comm. Algebra **19**, No. 4 (1991), 1197–1227.
13. A. Elduque, H. Ch. Myung, *On flexible composition algebras.* — Commun. Algebra **21**, No. 7 (1993), 2481–2505.
14. A. Elduque, H. Ch. Myung, *Composition algebras satisfying the flexible law.* — Commun. Algebra **32** No. 5 (2004), 1997–2013.
15. A. Elduque, J. M. Pérez, *Composition algebras with associative bilinear form.* — Commun. Algebra **24**, No. 3 (1996), 1091–1116.
16. J. R. Faulkner, *Finding octonion algebras in associative algebras.* — Proc. Amer. Math. Soc. **104**, No. 4 (1988), 1027–1030.
17. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd edn, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2012.
18. N. Jacobson, *Composition algebras and their automorphisms.* — Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1958), 55–80.
19. N. Knarr, M. J. Stroppel, *Subalgebras of octonion algebras.* — J. Algebra **664** (2025), 42–74.
20. M.-A. Knus, A. S. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The Book of Involutions* (*AMS Colloquium Publications*, vol. 44), American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
21. A. Lopatin, A. N. Zubkov, *Classification of G_2-orbits for pairs of octonions.* — J. Pure Appl. Algebra **229**, No. 2 (2025), 107875.
22. E. Matzri, U. Vishne, *Isotropic subspaces in symmetric composition algebras and Kummer subspaces in central simple algebras of degree* 3. — Manuscripta Math. **137** (2012), 497–523.
23. S. Okubo, *Deformation of the Lie-admissible pseudo-octonion algebra into the octonion algebra.* — Hadronic J. **1** (1978), No. 5, 1383–1431.
24. D. Pavlinov, S. Zhilina, *On orthogonality graphs of Okubo algebras*, `arXiv:2601.15501` (2026).

Zhilina S. A., Pavlinov D. A. Commuting graphs of finite-dimensional flexible composition algebras.

Commuting graphs of finite-dimensional flexible composition algebras over an arbitrary field $\mathbb{F}$ are considered, their connected components are described, and their diameters are determined. Such algebras are either Hurwitz or symmetric composition algebras, and the latter consist of Okubo algebras and forms of para-Hurwitz algebras.

The most interesting and difficult case is provided by Okubo algebras, where the main result relies upon two key assertions. First, it is shown that, given an arbitrary element x, at least one of the following two possibilities is realized: its centralizer either coincides with the two-dimensional subalgebra $\mathrm{alg}\langle x\rangle$ generated by x or contains an element y such that

$\mathrm{alg}\langle y\rangle$ is one-dimensional. Second, it is proved that if each of the two elements generates a one-dimensional subalgebra, then their centralizers have a nonzero intersection.

Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия;
Московский Центр
фундаментальной и прикладной математики,
Москва, 119991, Россия

E-mail: s.a.zhilina@gmail.com

E-mail: pavlinov.d.aa@gmail.com

Поступило 9 октября 2026 г.