Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 554, 2026 г.

С. А. Жилина

ВЛОЖЕНИЕ РЕШЕТОК БАРНСА–УОЛЛА В АЛГЕБРЫ КЭЛИ–ДИКСОНА

§1. Введение

Решение задачи о плотной упаковке равных сфер берёт начало еще с Лагранжа в двумерном случае и с Гаусса в трёхмерном. Согласно результату Вязовской [23], решётка E_8 реализует плотнейшую упаковку сфер в пространстве размерности 8. Позднее Вязовская с соавторами [5] доказали аналогичное утверждение для решётки Лича Λ_{24} размерности 24. В случае других размерностей больше трёх эта задача до сих пор остаётся нерешённой, несмотря на активную работу многих ведущих учёных в этом направлении.

Доказано, что решётка D_4 даёт наиболее плотную упаковку равных сфер в пространстве размерности 4 среди тех упаковок, при которых центры сфер образуют решётку [7, глава 1, стр. 10]. Однако, по текущим данным, в произвольной размерности наиболее плотная упаковка не обязана быть решётчатой: к примеру, в размерностях 10, 11 и 13 упаковки P_{10c}, P_{11a} и P_{13a} оказываются более эффективными, чем все известные решётчатые упаковки [7, глава 5, стр. 140]. В размерности 16 наилучший из известных результатов даёт 16-мерная решётка Барнса–Уолла. Из [7, глава 1, стр. 14, рисунок 1.5] видно, что на ней достигается локальный пик плотности упаковки сфер, приближающий её к верхней границе Роджерса.

В общем случае, решётки Барнса–Уолла образуют семейство 2^n-мерных решёток, $n \geqslant 0$, которое было впервые введено в работе [2]. Для каждого n в этом семействе содержатся две геометрически эквивалентные вложенные друг в друга решётки, причём первые члены этой последовательности включают в себя $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$, D_4 и E_8 при $n = 0$, 1, 2 и 3 соответственно. Таким образом, решётки Барнса–Уолла дают наилучшие из известных оценки в размерностях 4, 8 и 16. Однако, начиная с размерности 32, известны более плотные упаковки, например,

Ключевые слова: алгебры Кэли–Диксона, целочисленные октонионы, седенионы, решетки Барнса–Уолла.

Q_{32} [21] и Ne_{64} [18,19]. Подробную информацию об имеющихся результатах в различных размерностях можно найти в монографии Конвея и Слоуна [7, введение, стр. xviii–xx, таблица I.1; глава 1, стр. 12–17, таблицы 1.1–1.3].

Одно из наиболее изящных определений решёток Барнса–Уолла было дано в работе Небе, Рейнса и Слоуна [20]. Оно использует так называемые сбалансированные решётки Барнса–Уолла над кольцом $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, порождающие матрицы которых строятся индуктивно с помощью тензорного произведения матриц. Похожая конструкция, но над гауссовыми целыми числами $\mathbb{Z}[i]$, была введена в работе Миччианчо и Николоси [14], где было описано семейство алгоритмов декодирования с ограниченным расстоянием для комплексных решёток Барнса–Уолла. Определение, данное в лекциях Форни [12, глава 14], получается овеществлением предыдущей конструкции и становится равносильным классическому определению (а именно, $2L_n$ в обозначениях статьи [20]) после применения поворота $R = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ к каждому подблоку размера 2 порождающей матрицы.

В статье Форни [11] рассматривается построение решёток Барнса–Уолла и их главных подрешёток с помощью удвоения разбиений. Такая конструкция позволяет записать явную формулу для их элементов через коды Рида–Маллера, а также проясняет, почему в их порождающих матрицах естественным образом возникают тензорные произведения матриц. Отметим, что в этой статье изучаются как вещественные, так и комплексные решётки Барнса–Уолла, причём в комплексном случае формула с кодами Рида–Маллера имеет более простой вид. Здесь рассматривается также кубическая конструкция, дающая одно из многих известных на данный момент построений для кода Голея и решётки Лича, см. также [6].

Построение решёток Барнса–Уолла с помощью процедуры последовательного удвоения наводит на мысль об их связи с алгебрами Кэли–Диксона. До конца введения под алгебрами Кэли–Диксона мы будем понимать так называемые вещественные алгебры Кэли–Диксона главной последовательности CD_n, $n \geqslant 0$. Они представляют собой последовательность 2^n-мерных алгебр, определяемых индуктивно: $\mathrm{CD}_0 = \mathbb{R}$, и на каждом шаге алгебра CD_{n+1} получается из алгебры CD_n с помощью процедуры удвоения Кэли–Диксона с параметром -1. Уже при $n = 3$ алгебра CD_n неассоциативна, а при $n \geqslant 4$ не является даже альтернативной, то есть в ней не выполняются тождества $a(ab) = (aa)b$ и

$(ba)a = b(aa)$. Наиболее широко известны первые члены этой последовательности: при $n = 1$, 2, 3 и 4 это комплексные числа, кватернионы, октонионы и седенионы соответственно.

Для вложенных в алгебры Кэли–Диксона решёток одним из наиболее интересных и естественных является вопрос их замкнутости относительно умножения. Нетрудно показать, что в любой алгебре Кэли–Диксона решётка всех элементов с целочисленными координатами является замкнутой, то есть образует подкольцо. В случае кватернионов такие элементы называются кватернионами Липшица. Однако это не самая плотная решётка с таким свойством: целочисленные кватернионы Гурвица, у которых все координаты являются либо целыми, либо полуцелыми одновременно, также замкнуты относительно умножения. Образованная ими решётка геометрически эквивалентна решётке D_4.

В случае октонионов ситуация оказывается немного сложнее. Октонионы Кирмсе, конструкция которых очень близка к кватернионам Гурвица, оказываются незамкнутыми относительно умножения, но это можно исправить, если у всех элементов поменять местами координату при 1 и любую другую координату [8, раздел 9.2]. Это даёт 7 копий замкнутых относительно умножения решёток, каждая из которых геометрически эквивалентна E_8 и называется целочисленными октонионами Кокстера–Диксона.

Среди других наиболее значимых результатов, посвящённых связи алгебр Кэли–Диксона с различными решётками, стоит отметить построение решётки Лича с помощью октонионов Кокстера–Диксона, полученное Уилсоном [25]. Кроме того, представление решётки Лича с помощью X-произведений на алгебре октонионов, а также приложения этой темы в физике изучались в работах Диксона [9, 10]. Тем не менее, связь решёток с алгебрами Кэли–Диксона размерности 16 и выше практически не изучалась. Так, в статье Краусcхара [13] было дано общее определение решёток с умножением Кэли–Диксона, однако все основные результаты были получены для алгебры октонионов.

Целью настоящей работы является решение вопроса о замкнутости решёток Барнса–Уолла, вложенных в алгебры Кэли–Диксона соответствующей размерности, а также изучение решёток, образованных попарными произведениями их элементов.

Работа построена следующим образом. В §2 описана процедура Кэли–Диксона и приведены некоторые свойства вещественных алгебр Кэли–Диксона главной последовательности. §3 содержит известные и

базовые факты о решётках Барнса–Уолла: их построение, примеры в малых размерностях, а также доказательство основных свойств. За основу взято определение из работы [20] с тем лишь отличием, что в формулах для порождающих матриц мы используем дополнительный нормировочный коэффициент $1/2$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ сперва строится сбалансированная решётка Барнса–Уолла M_n размерности 2^n над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, а её рациональная и чисто иррациональная части соответствуют классическим решёткам Барнса–Уолла L_n и L'_n над $\mathbb{Z}$, которые удовлетворяют цепочке вложений $2L'_n \subset L_n \subset L'_n$.

В теоремах 4.5 и 4.6 §4 мы показываем, что при $n \geqslant 2$ сбалансированная решётка Барнса–Уолла M_n замкнута относительно умножения в CD_n и все попарные произведения элементов из M_n порождают M_n.

В §5 мы рассматриваем решётки, порождённые множествами попарных произведений элементов классических решёток Барнса–Уолла L_n и L'_n. Основными результатами этого параграфа являются теоремы 5.2, 5.7 и 5.8, согласно которым при всех $n \geqslant 2$ выполнены соотношения

$$L_n \cdot L_n = L_n, \qquad L_n \cdot L'_n = L'_n, \qquad L'_n \cdot L_n \subseteq L'_n, \qquad L'_n \cdot L'_n \subseteq L_n/2.$$

В частности, это означает, что L_n замкнута относительно умножения в CD_n и все попарные произведения элементов из L_n порождают L_n. Замечания 5.3 и 5.9 показывают, что, хотя при $n = 2$ оба включения выше обращаются в равенства, при $n \geqslant 3$ они могут быть строгими. Ещё одним интересным результатом §5 является предложение 5.11, в котором доказано, что L_n и L'_n связаны между собой умножением на ненулевой элемент из CD_n.

§2. Алгебры Кэли–Диксона

В этом параграфе мы дадим определение и приведём основные свойства так называемых вещественных алгебр Кэли–Диксона главной последовательности. Это наиболее известная последовательность алгебр Кэли–Диксона, первыми членами которой являются вещественные и комплексные числа, кватернионы и октонионы. Отметим однако, что алгебры Кэли–Диксона можно определить над любым полем, используя произвольные ненулевые параметры при каждом удвоении, см.

классическую работу Шафера [22]. Среди авторов, изучавших вещественные алгебры Кэли–Диксона главной последовательности, в частности, их делители нуля и альтернативные элементы, стоит выделить Морено [15–17], а также Бисса, Даггера и Исаксена [3, 4].

Определение 2.1. *Определим вещественные алгебры главной последовательности* CD_n, $n \geqslant 0$, *индуктивно:*

(1) $\mathrm{CD}_0 = \mathbb{R}$ – *вещественные числа с тождественной инволюцией* $\bar{a} = a$ *и единственным базисным элементом* $e_0^{(0)} = 1$;

(2) CD_{n+1} – *множество упорядоченных пар элементов из* CD_n *с операциями*

$$\begin{aligned} \alpha(a,b) &= (\alpha a, \alpha b), \\ (a,b) + (c,d) &= (a+c, b+d), \\ (a,b)(c,d) &= (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}) \end{aligned}$$

и инволюцией

$$\overline{(a,b)} = (\bar{a}, -b), \qquad a,b,c,d \in \mathrm{CD}_n,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Стандартные базисные элементы $e_0^{(n+1)}, \ldots, e_{2^{n+1}-1}^{(n+1)}$ *алгебры* CD_{n+1} *имеют вид*

$$e_m^{(n+1)} = \begin{cases} (e_m^{(n)}, 0), & 0 \leqslant m \leqslant 2^n - 1, \\ (0, e_{m-2^n}^{(n)}), & 2^n \leqslant m \leqslant 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

Замечание 2.2 ([22, стр. 435])**.** CD_n – это 2^n-мерная алгебра над $\mathbb{R}$ с единицей $1 = e_0^{(n)}$. Кроме того, инволюция на CD_n регулярна, то есть $a + \bar{a} \in \mathbb{R}1$ и $a\bar{a} = \bar{a}a \in \mathbb{R}1$ для любого $a \in \mathrm{CD}_n$.

Определение 2.3. Следом *элемента* $a \in \mathrm{CD}_n$ *называется* $\mathrm{t}(a) = a + \bar{a} \in \mathbb{R}$, *а его* нормой $-\ \mathrm{n}(a) = a\bar{a} = \bar{a}a \in \mathbb{R}$. *Определим также симметрическую билинейную форму, соответствующую квадратичной форме* $\mathrm{n}(\cdot)$, *по формуле:*

$$\mathrm{n}(a,b) = \mathrm{n}(a+b) - \mathrm{n}(a) - \mathrm{n}(b), \quad a,b \in \mathrm{CD}_n.$$

Предложение 2.4 ([22, стр. 435])**.** *След и норма элемента* $(a,b) \in \mathrm{CD}_{n+1}$ *могут быть вычислены индуктивно с использованием следующих соотношений:*

$$\begin{aligned} \mathrm{t}((a,b)) &= \mathrm{t}(a), \\ \mathrm{n}((a,b)) &= \mathrm{n}(a) + \mathrm{n}(b). \end{aligned}$$

Следствие 2.5 ([4, предложение 3.2]). *Норма* $\mathrm{n}(\cdot)$ *на* CD_n *равна квадрату евклидовой нормы в стандартном базисе, а билинейная форма* $\mathrm{n}(\cdot,\cdot)$ *равна удвоенному евклидовому скалярному произведению.*

Замечание 2.6. Норма вещественных алгебр главной последовательности часто определяется как $\sqrt{a\bar{a}}$, в отличие от определения $\mathrm{n}(a) = a\bar{a}$, используемого в данной работе. Кроме того, вместо следа $\mathrm{t}(a)$ и билинейной формы $\mathrm{n}(a,b)$ часто рассматриваются вещественная часть $\mathrm{Re}\,(a) = \mathrm{t}(a)/2$ и евклидово скалярное произведение $\mathrm{n}(a,b)/2$.

Одним из достоинств обозначений $\mathrm{n}(a)$ и $\mathrm{n}(a,b)$ является их универсальность, поскольку они применимы к алгебрам Кэли–Диксона над произвольными полями, включая поля характеристики 2. Они также являются стандартными в теории композиционных алгебр. Кроме того, использование именно таких обозначений существенно сократит выкладки в доказательствах основных результатов настоящей работы.

Предложение 2.7 ([22, стр. 440]). *Для любых* $a, b \in \mathrm{CD}_n$ *выполнены соотношения*

(1) $\mathrm{n}(a,a) = 2\mathrm{n}(a)$,
(2) $\mathrm{n}(a,1) = \mathrm{t}(a)$,
(3) $\mathrm{n}(a,b) = a\bar{b} + b\bar{a} = \bar{a}b + \bar{b}a = \mathrm{t}(a\bar{b})$,
(4) $\mathrm{n}(a,b) = \mathrm{n}(\bar{a},\bar{b})$.

Хорошо известно, что алгебры Кэли–Диксона коммутативны только при $n \leqslant 1$, ассоциативны при $n \leqslant 2$, альтернативны и композиционны при $n \leqslant 3$, а при $n \geqslant 4$ не являются ни коммутативными, ни альтернативными, ни композиционными, см. [1, стр. 10]. Из-за потери альтернативности и композиционности, начиная с размерности 16, в алгебрах Кэли–Диксона появляются делители нуля. Тем не менее, все алгебры Кэли–Диксона эластичны, то есть в них выполнено тождество $(ab)a = a(ba)$, см. [22, стр. 437, теорема 1].

Пример 2.8. Алгебры комплексных чисел ($\mathbb{C}$), кватернионов ($\mathbb{H}$), октонионов ($\mathbb{O}$) и седенионов ($\mathbb{S}$) являются вещественными алгебрами главной последовательности при $n = 1, 2, 3$ и 4, соответственно, см. [1].

Алгебра октонионов $\mathbb{O} = \mathrm{CD}_3$ – восьмимерная алгебра над $\mathbb{R}$ со стандартным базисом $1, e_1, \ldots, e_7$. Инволюция на $\mathbb{O}$ задаётся формулой

$$\overline{a_0 + a_1e_1 + \cdots + a_7e_7} = a_0 - a_1e_1 - \cdots - a_7e_7,$$

а умножение задаётся таблицей 1.

$\times$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Таблица 1. Таблица умножения базисных октонионов.

Так как $n = 3$, то $\mathbb{O}$ – некоммутативная, неассоциативная, но альтернативная алгебра без делителей нуля. Базис $1, e_1, \ldots, e_7$ является ортонормированным относительно евклидова скалярного произведения $\mathrm{n}(\cdot,\cdot)/2$.

§3. Решётки Барнса–Уолла

В геометрии *решёткой* называют дискретную аддитивную подгруппу в $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Она изоморфна свободной абелевой группе ранга $n \leqslant m$; в этом случае число n называется *размерностью* решётки. *Базисом* решётки называется её базис как свободной абелевой группы, при этом все элементы базиса линейно независимы над $\mathbb{R}$. Решётка называется *полной*, если $n = m$, то есть базис решётки является базисом для $\mathbb{R}^m$. *Порождающей матрицей* решётки называется матрица, строки которой образуют её базис. Другие основные понятия, связанные с решётками, можно найти в [7, глава 1, стр. 4–5].

Стандартное определение позволяет задать решётки над $\mathbb{Z}$, однако его можно обобщить на случай произвольной области целостности R, см., например, [24, глава 9]. А именно, рассмотрим её поле частных F и конечномерное линейное пространство V над F. Тогда решёткой M над R называется конечно порождённый R-подмодуль $M \subset V$. Решётка M называется полной, если выполнено $V = FM$.

Основу конструкции решёток Барнса–Уолла мы возьмём из работы [20]. Положим

$$G = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_n = \frac{1}{2} G^{\otimes n}, \quad n \geqslant 0,$$

где $\otimes$ – тензорное произведение матриц (произведение Кронекера). При этом мы полагаем $G^{\otimes 0} = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$. Важно отметить, что мы используем дополнительный нормировочный коэффициент $1/2$ в формуле для G_n, чтобы упростить формулировки основных результатов настоящей статьи.

Определение 3.1. Сбалансированная решётка Барнса–Уолла M_n – *это решётка размерности* 2^n *над* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$, *порождающей матрицей которой является* G_n. *Рациональная часть* M_n – *это решётка* L_n, *а чисто иррациональная часть – решётка* $\sqrt{2}L'_n$. *Решётки* L_n *и* L'_n – *это* решётки Барнса–Уолла *размерности* 2^n *над* $\mathbb{Z}$.

Из определения 3.1 следует, что

$$L_n + \sqrt{2}L'_n = M_n \supset \sqrt{2}M_n = 2L'_n + \sqrt{2}L_n.$$

Отсюда сразу вытекает известная цепочка вложений:

$$2L'_n \subset L_n \subset L'_n. \tag{3.1}$$

Из предложения 3.8 ниже нетрудно увидеть, что L_n – это подрешётка индекса $2^{2^{n-1}}$ в L'_n, а $2L'_n$ – подрешётка индекса $2^{2^{n-1}}$ в L_n. Продолжая цепочку (3.1) влево, мы получаем:

$$\ldots \subset 2^k L_n \subset 2^k L'_n \subset \ldots \subset 2L_n \subset 2L'_n \subset L_n \subset L'_n.$$

Аналогичная цепочка, но с заменой решётки $2L'_n$ на решётку RL_n, полученную из L_n применением поворота $R = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$ к каждому подблоку размера 2 порождающей матрицы в подходящем базисе, была получена в работе Форни [11, стр. 1167–1169] с помощью конструкции удвоения разбиений.

Обозначение 3.2. Порождающие матрицы решёток L_n и L'_n, строки которых отличаются от соответствующих строк матрицы G_n умножением на положительные числа, обозначаются как H_n и H'_n.

Следующий пример позволяет увидеть структуру матриц H_n и H'_n при $n \leqslant 3$, а предложения 3.8 и 3.10 дают их строгое описание в произвольной размерности.

Пример 3.3. При $n = 0$ решётки M_0, L_0 и L'_0 имеют общую порождающую матрицу

$$G_0 = H_0 = H'_0 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

При $n = 1$ порождающими матрицами M_1, L_1 и L'_1 являются

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad H'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

соответственно. При $n = 2$ порождающими матрицами будут

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad H'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что L_2 и L'_2 геометрически эквивалентны решётке D_4, см. [7, глава 4, равенства (86) и (90)]. Запишем также порождающие матрицы при $n = 3$ и нижнетреугольные эрмитовы нормальные формы для H_3 и H'_3 (вычисленные по строкам):

$$G_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \widetilde{H}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$H_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \widetilde{H}_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Благодаря дополнительному коэффициенту $1/2$, матрица $\widetilde{H}_3$ является порождающей для решётки E_8 в стандартной записи через систему чётных координат: все координаты произвольного элемента являются либо целыми, либо полуцелыми одновременно, и их сумма чётна.

Опираясь на предыдущий пример, нетрудно описать свойства рассматриваемых порождающих матриц в произвольной размерности.

Предложение 3.4. *Перечислим основные свойства матрицы G_n:*

(1) *G_n – нижнетреугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали;*
(2) *в каждой строке G_n все элементы одновременно принадлежат либо $\mathbb{Z}/2$, либо $\sqrt{2}\mathbb{Z}/2$;*
(3) *последняя строка G_n равна $(1/2, \dots, 1/2)$;*
(4) *первая строка G_n равна $((\sqrt{2})^{n-2}, 0, \dots, 0)$.*

Доказательство. Свойства (1)–(4) несложно получить с помощью индукции по n. □

Замечание 3.5. Из определения 3.1 следует, что $L_n, \sqrt{2}L_n' \subset M_n$. Координаты произвольного элемента решётки M_n лежат в $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/2$, поэтому координаты любых элементов L_n и L_n' лежат в $\mathbb{Z}/2$. Рациональная и чисто иррациональная части решётки M_n задаются отображениями

$$a + \sqrt{2}b \mapsto a + 2b \quad \text{и} \quad a + \sqrt{2}b \mapsto \sqrt{2}(a + b), \quad a, b \in \mathbb{Z}/2,$$

соответственно, применёнными покоординатно.

Определение 3.6. *Будем говорить, что строка G_n имеет* тип I, *если все её координаты принадлежат $\mathbb{Z}/2$, и* тип II, *если все её координаты принадлежат $\sqrt{2}\mathbb{Z}/2$. Тип произвольной строки H_n или H_n' совпадает с типом соответствующей строки G_n.*

Предложение 3.7.

(1) *Строка* (a, a) *имеет тот же тип, что и* a.
(2) *Строки* a *и* $(\sqrt{2}a, 0)$ *имеют разный тип.*
(3) *Последняя строка всегда имеет тип I.*
(4) *Первая строка имеет тип II тогда и только тогда, когда* n *нечётно.*

Доказательство. Пункты (1)–(2) сразу следуют их определения типов; пункты (3)–(4) вытекают из предложения 3.4 (3)–(4). □

Предложение 3.8. *Строки типа I являются общими для порождающих матриц* G_n, H_n *и* H'_n. *Строки типа II в* H_n *в* $\sqrt{2}$ *раз превосходят соответствующие строки* G_n *и в два раза превосходят соответствующие строки* H'_n.

Доказательство. Если строка a матрицы G_n имеет тип I, то есть $a \in (\mathbb{Z}/2)^{2^n}$, то в рациональной и чисто иррациональной частях M_n ей соответствуют a и $\sqrt{2}a$, поэтому в матрицах H_n и H'_n строка a остаётся в неизменном виде. Если же a имеет тип II, то $a = \sqrt{2}b$, где $b \in (\mathbb{Z}/2)^{2^n}$, и тогда в рациональной и чисто иррациональной частях M_n ей соответствуют $2b$ и $\sqrt{2}b$. Следовательно, строками H_n и H'_n будут $2b$ и b соответственно. □

Для построения элементов решёток размерности 2^{n+1} по элементам решёток размерности 2^n мы будем активно использовать следующие утверждения.

Предложение 3.9. *Если* $x \in M_n$, *то* $(\sqrt{2}x, 0)$, $(0, \sqrt{2}x)$, (x, x) *и* $(x, -x)$ *принадлежат* M_{n+1}.

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение в том случае, когда x – строка матрицы G_n. Согласно определению,

$$G_{n+1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_n & 0 \\ G_n & G_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произвольная строка G_{n+1} имеет вид $(\sqrt{2}a, 0)$ или (a, a), где a – некоторая строка G_n. Отсюда $(\sqrt{2}x, 0), (x, x) \in M_{n+1}$. Кроме того,

$$(0, \sqrt{2}x) = \sqrt{2}(x, x) - (\sqrt{2}x, 0) \in M_{n+1},$$
$$(x, -x) = (x, x) - \sqrt{2}(0, \sqrt{2}x) \in M_{n+1}.$$ □

Предложение 3.10. *Строки порождающей матрицы H_{n+1} решётки L_{n+1} имеют вид (x,x) и $(2x',0)$, а строки порождающей матрицы H'_{n+1} решётки L'_{n+1} имеют вид (x',x') и $(x,0)$, где x – произвольная строка H_n, x' – произвольная строка H'_n.*

Доказательство. Произвольной строке a матрицы G_n соответствуют строки (a,a) и $(\sqrt{2}a,0)$ матрицы G_{n+1}. Предположим сперва, что a имеет тип I, тогда (a,a) тоже имеет тип I, а $(\sqrt{2}a,0)$ имеет тип II. По предложению 3.8, строка a является общей для H_n и H'_n, строка (a,a) – общая для H_{n+1} и H'_{n+1}, строке $(\sqrt{2}a,0)$ соответствуют строки $(2a,0)$ в H_{n+1} и $(a,0)$ в H'_{n+1}.

Пусть теперь a имеет тип II. Тогда (a,a) имеет тип II, а $(\sqrt{2}a,0)$ имеет тип I. Строке a соответствуют $\sqrt{2}a$ в H_n и $a/\sqrt{2}$ в H'_n, строке (a,a) соответствуют $\sqrt{2}(a,a)$ в H_{n+1} и $(a,a)/\sqrt{2}$ в H'_{n+1}, строка $(\sqrt{2}a,0)$ является общей для H_{n+1} и H'_{n+1}.

Объединяя эти два случая, получаем требуемое утверждение. □

Следствие 3.11. *Пусть $x \in L_n$, $x' \in L'_n$ – произвольные элементы. Тогда*

$$(x,x),(x,-x),(2x',0),(0,2x') \in L_{n+1},$$
$$(x',x'),(x',-x'),(x,0),(0,x) \in L'_{n+1}.$$

Доказательство. Из цепочки включений (3.1) следует, что $2x' \in 2L'_n \subset L_n$ и $x \in L_n \subset L'_n$. В силу предложения 3.10, достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}(0,2x') &= (2x',2x') - (2x',0) \in L_{n+1},\\ (x,-x) &= (x,x) - (0,2x) \in L_{n+1},\\ (0,x) &= (x,x) - (x,0) \in L'_{n+1},\\ (x',-x') &= (x',x') - (0,2x') \in L'_{n+1}.\end{aligned}$$ □

Следствие 3.12. *Если $x \in L_n$, то $(2x,0),(0,2x) \in L_{n+1}$.*

Доказательство. Утверждение немедленно вытекает из следствия 3.11 и вложения $L_n \subset L'_n$. □

Следствие 3.13. *Каждая строка a порождающей матрицы H_n соответствует двум строкам матрицы H_{n+1}: это (a,a) и либо $(a,0)$, либо $(2a,0)$. В первом случае a имеет тип II, во втором – тип I.*

Доказательство. Эти утверждения непосредственно вытекают из предложений 3.8 и 3.10. □

§4. Замкнутость сбалансированной решётки Барнса–Уолла относительно умножения

Рассмотрим вложение решётки M_n в алгебру Кэли–Диксона главной последовательности CD_n, при котором элементы решётки соответствуют координатам элементов алгебры в стандартном базисе $1 = e_0, e_1, \ldots, e_{2^n-1}$. В этом параграфе мы покажем, что при $n \geqslant 2$ решётка M_n замкнута относительно умножения, и, кроме того, все попарные произведения элементов из M_n порождают M_n над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Замечание 4.1. Решётки M_1 и L_1 не являются замкнутыми относительно умножения, так как для элемента $z = (1+i)/2$, соответствующего последней строке матрицы G_1, выполнено $z^2 = i/2 \notin M_1$. Решётка L_1' также не является замкнутой относительно умножения, так как для элемента $y = 1/2$, соответствующего первой строке матрицы H_1', выполнено $y^2 = 1/4 \notin L_1'$.

Замечание 4.2. Замкнутость решётки M_2 можно проверить непосредственно, записав таблицу умножения строк её порождающей матрицы G_2, см. таблицу 2. При этом $1 \in M_2$, откуда сразу следует, что

$\times$	1	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+j}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+i+j+k}{2}$
1	1	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+j}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+i+j+k}{2}$
$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	i	$\frac{1+i+j+k}{2}$	$\frac{i+k}{\sqrt{2}}$
$\frac{1+j}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+j}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+i+j-k}{2}$	j	$\frac{i+j}{\sqrt{2}}$
$\frac{1+i+j+k}{2}$	$\frac{1+i+j+k}{2}$	$\frac{i+j}{\sqrt{2}}$	$\frac{j+k}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1+i+j+k}{2}$

Таблица 2. Таблица умножения строк G_2.

все попарные произведения элементов из M_2 порождают M_2.

Предложение 4.3. *Пусть x и y – строки порождающей матрицы G_n решётки M_n, $n \geqslant 0$. Тогда* $\mathrm{n}(x,y) = (\sqrt{2})^m$ *для некоторого целого $m \geqslant n-2$, причём $m = n-2$ в том и только в том случае, когда сумма номеров этих строк равна 2^n+1, то есть строки x и y расположены симметрично относительно горизонтальной оси матрицы G_n.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. Если $n = 0$, то $x = y = (1/2)$, откуда $\mathrm{n}(x,y) = 1/2 = (\sqrt{2})^{-2}$, так как $\mathrm{n}(x,y)$ – это удвоенное скалярное произведение x и y.

Теперь предположим, что утверждение выполнено для некоторого $n \geqslant 0$. Тогда из равенств

$$\begin{aligned} \mathrm{n}((\sqrt{2}x,0),(\sqrt{2}y,0)) &= 2\mathrm{n}(x,y),\\ \mathrm{n}((\sqrt{2}x,0),(y,y)) &= \sqrt{2}\mathrm{n}(x,y),\\ \mathrm{n}((x,x),(y,y)) &= 2\mathrm{n}(x,y) \end{aligned}$$

следует, что значение $\mathrm{n}(\cdot,\cdot)$ на парах строк G_{n+1} равно $(\sqrt{2})^{m'}$, где $m' \geqslant m+1 \geqslant (n+1)-2$. Равенство $m' = (n+1)-2$ достигается только во втором из этих трёх случаев при условии, что $\mathrm{n}(x,y) = (\sqrt{2})^{n-2}$. Номер строки $(\sqrt{2}x,0)$ в G_{n+1} совпадает с номером строки x в G_n, а номер строки (y,y) в G_{n+1} превосходит номер y в G_n на 2^n. Таким образом, равенство достигается тогда и только тогда, когда сумма номеров строк равна $(2^n+1)+2^n = 2^{n+1}+1$. □

Предложение 4.4. *Для любых $x, y \in M_n$, $n \geqslant 0$, выполнено*

(1) $\mathrm{t}(x) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;
(2) $\mathrm{n}(x,y)$ *делится на* $(\sqrt{2})^{n-2}$, *то есть найдётся такое* $k \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, *что* $\mathrm{n}(x,y) = k(\sqrt{2})^{n-2}$.

Доказательство. (1) След $\mathrm{t}(x)$ равен удвоенной координате x при $1 = e_0$, которая принадлежит $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/2$ по замечанию 3.5.

(2) следует из предложения 4.3 и билинейности формы $\mathrm{n}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$. □

Теорема 4.5. *При $n \geqslant 2$ решётка M_n замкнута относительно умножения в* CD_n.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. Мультипликативная замкнутость решётки M_2 была доказана в замечании 4.2. Теперь предположим, что утверждение выполнено для M_n, и докажем его для M_{n+1}. Достаточно показать, что все попарные произведения строк

G_{n+1} принадлежат M_{n+1}. Рассмотрим четыре типа попарных произведений, полагая, что a и b – произвольные строки G_n:

- $(\sqrt{2}a,0)(\sqrt{2}b,0)=(2ab,0)$. По предположению индукции, $ab\in M_n$, поэтому $(\sqrt{2}ab,0)\in M_{n+1}$, значит, рассматриваемое произведение лежит в $\sqrt{2}M_{n+1}$.
- $(b,b)(\sqrt{2}a,0)=\sqrt{2}(ba,b\bar{a})=\sqrt{2}(ba,\mathrm{t}(a)b-ba)=\mathrm{t}(a)(0,\sqrt{2}b)+\sqrt{2}(ba,-ba)$. По предположению индукции, $ba\in M_n$, поэтому из предложения 3.9 вытекает, что $(0,\sqrt{2}b),(ba,-ba)\in M_{n+1}$. Так как $\mathrm{t}(a)\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ по предложению 4.4(1), рассматриваемое произведение лежит в M_{n+1}.
- $(a,a)(b,b)=(ab-\bar{b}a,ba+a\bar{b})=(ab-\mathrm{t}(b)a+ba,ba+\mathrm{t}(b)a-ab)=(ba,ba)+(ab,-ab)-\mathrm{t}(b)(a,-a)$. Снова применяя предположение индукции и предложения 3.9 и 4.4(1), получаем требуемое утверждение.
- $(\sqrt{2}a,0)(b,b)=\sqrt{2}(ab,ba)$. Далее, выражая ab из равенства

  $$\mathrm{n}(a,b)=a\bar{b}+b\bar{a}=\mathrm{t}(b)a+\mathrm{t}(a)b-ab-ba,$$

  мы получаем, что

  $$\begin{aligned}(\sqrt{2}a,0)(b,b)&=\mathrm{t}(b)(\sqrt{2}a,0)+\mathrm{t}(a)(\sqrt{2}b,0)\\&\quad-\sqrt{2}(ba,-ba)-\sqrt{2}\mathrm{n}(a,b)(1,0).\end{aligned}$$

  Согласно предложению 4.4(2), $\mathrm{n}(a,b)$ делится на $(\sqrt{2})^{n-2}$. Так как, по предложению 3.4(4), первая строка G_{n+1} равна $((\sqrt{2})^{n-1},0,\dots,0)$, то $\sqrt{2}\mathrm{n}(a,b)(1,0)\in M_{n+1}$. Оставшиеся слагаемые рассматриваются аналогично предыдущим случаям.

□

Теорема 4.6. *При $n\geqslant 2$ все попарные произведения элементов из M_n порождают M_n над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.*

Доказательство. Для удобства обозначений будем доказывать утверждение для M_{n+1}, $n\in\mathbb{N}$. Обозначим через V_{n+1} подрешётку M_{n+1} над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, порождённую всеми попарными произведениями элементов из M_{n+1}. Достаточно показать, что все строки порождающей матрицы G_{n+1} лежат в V_{n+1}. Для $a,b\in M_n$ рассмотрим равенство

$$\begin{aligned}V_{n+1}\ni(b,b)(0,\sqrt{2}a)+(a,a)(\sqrt{2}b,0)&=\sqrt{2}((-\bar{a}b,ab)+(ab,a\bar{b}))\\&=\sqrt{2}(\mathrm{t}(b)(0,a)-\mathrm{t}(a)(b,0)+(2ab,0)).\end{aligned}$$

Так как $(2ab,0)=(\sqrt{2}a,0)(\sqrt{2}b,0)\in V_{n+1}$, получаем, что

$$\mathrm{t}(b)(0,\sqrt{2}a)-\mathrm{t}(a)(\sqrt{2}b,0)\in V_{n+1}. \tag{4.1}$$

Пусть $z=(1/2,\dots,1/2)$ – последняя строка G_n, см. предложение 3.4(3). Тогда $\mathrm{t}(z)=1$ и выполнено равенство

$$\begin{aligned} V_{n+1}\ni(\sqrt{2}z,0)(z,z)-(z,z)(0,\sqrt{2}z)&=\sqrt{2}((z^2,z^2)-(-\bar{z}z,z^2))\\ &=\mathrm{t}(z)(\sqrt{2}z,0)=(\sqrt{2}z,0).\end{aligned}$$

Полагая $a=b=z$ в выражении (4.1), получаем, что $(0,\sqrt{2}z)\in V_{n+1}$.

Далее, если $b=z$ и $a\in M_n$ – произвольный элемент, то $\mathrm{t}(b)=1$, и из выражения (4.1) следует, что $(0,\sqrt{2}a)\in V_{n+1}$. Аналогично, если $a=z$ и $b\in M_n$ – произвольный элемент, то $(\sqrt{2}b,0)\in V_{n+1}$.

Осталось доказать, что в V_{n+1} лежат те строки G_{n+1}, которые имеют вид (c,c). Для этого для произвольных $a,b\in M_n$ рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} V_{n+1}\ni(a,a)(b,b)&=(ab-\bar{b}a,ba+a\bar{b})\\ &=(\mathrm{t}(a)b-(\bar{a}b+\bar{b}a),-\mathrm{t}(a)b+2ba+(b\bar{a}+a\bar{b}))\\ &=(\mathrm{t}(a)b-\mathrm{n}(a,b),-\mathrm{t}(a)b+2ba+\mathrm{n}(a,b))\\ &=\mathrm{t}(a)(b,b)+\mathrm{n}(a,b)(1,1)-2\mathrm{t}(a)(0,b)+2(0,ba)\\ &\quad-2(\mathrm{n}(a,b),0).\end{aligned}$$

Согласно предложению 4.4(2), $\mathrm{n}(a,b)$ делится на $(\sqrt{2})^{n-2}$, при этом, по предложению 3.4(4), первая строка G_n равна $((\sqrt{2})^{n-2},0,\dots,0)$. По теореме 4.5, $ba\in M_n$. Таким образом, из доказанного выше следует, что

$$(0,\sqrt{2}b),(0,\sqrt{2}ba),(\sqrt{2}\mathrm{n}(a,b),0)\in V_{n+1}.$$

Кроме того, $\mathrm{t}(a)\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ по предложению 4.4(1), поэтому

$$\mathrm{t}(a)(b,b)+\mathrm{n}(a,b)(1,1)\in V_{n+1}.$$

Сперва положим $a=(0,\dots,0,(\sqrt{2})^{n-2})$ и $b=z$. Принадлежность $a\in M_n$ можно доказать по индукции с помощью предложения 3.9. Тогда $\mathrm{t}(a)=0$ и $\mathrm{n}(a,b)=(\sqrt{2})^{n-2}$, откуда $(\sqrt{2})^{n-2}(1,1)\in V_{n+1}$.

Отсюда следует, что $\mathrm{t}(a)(b,b)\in V_{n+1}$ для всех $a,b\in M_n$. Полагая $a=z$, получаем, что $(b,b)\in M_{n+1}$ для произвольного $b\in M_n$. □

§5. Произведения классических решёток Барнса–Уолла

В этом параграфе мы рассмотрим вложение решёток L_n и L'_n в алгебру Кэли–Диксона CD_n и изучим множества попарных произведений их элементов. В частности, нас интересует, являются ли L_n и L'_n замкнутыми относительно умножения.

Обозначение 5.1. Пусть $X, Y \subset \mathrm{CD}_n$ – некоторые решётки (над $\mathbb{Z}$). Тогда $X \cdot Y$ – множество целочисленных линейных комбинаций элементов вида xy, $x \in X$, $y \in Y$. Другими словами, $X \cdot Y \subset \mathrm{CD}_n$ – решётка, порождённая всеми произведениями, в которых первый множитель принадлежит X, а второй принадлежит Y.

Теорема 5.2. *При $n \geqslant 2$ имеют место следующие включения:*

$$L_n \cdot L_n \subseteq L_n, \qquad L_n \cdot L'_n \subseteq L'_n, \qquad L'_n \cdot L_n \subseteq L'_n, \qquad L'_n \cdot L'_n \subseteq L_n/2.$$

Доказательство. По определению, $M_n = L_n + \sqrt{2}L'_n$, причём все элементы L_n и L'_n имеют рациональные координаты. В силу определения произведения в алгебре Кэли–Диксона, произведение элементов с рациональными координатами также имеет рациональные координаты. Так как, по теореме 4.5, M_n замкнуто относительно умножения, получаем

$$M_n \supseteq M_n \cdot M_n = (L_n \cdot L_n + 2L'_n \cdot L'_n) + \sqrt{2}(L_n \cdot L'_n + L'_n \cdot L_n),$$

откуда следует, что

$$L_n \supseteq L_n \cdot L_n + 2L'_n \cdot L'_n,$$
$$L'_n \supseteq L_n \cdot L'_n + L'_n \cdot L_n.$$

Из этих включений сразу вытекает требуемое утверждение. □

Замечание 5.3. При $n = 2$ все включения в теореме 5.2 обращаются в равенства. Действительно, во всех случаях, кроме последнего, это следует из того, что $1 \in L_2$ – первая строка H_2. Равенство $L'_2 \cdot L'_2 = L_2/2$ можно проверить непосредственно, поделив на $\sqrt{2}$ те строки и столбцы таблицы умножения 2, которые соответствуют элементам $(1+i)/\sqrt{2}$ и $(1+j)/\sqrt{2}$.

Предложение 5.4. *Первые строки матриц H_n и H'_n равны $(2^k, 0, \ldots, 0)$ и $(2^{k'}, 0, \ldots, 0)$ соответственно, где $k = \lceil n/2 \rceil - 1$ и $k' =$*

$\lfloor n/2 \rfloor - 1$. *При этом, если целое число делится на* $(\sqrt{2})^{n-2}$, *то оно делится и на* 2^k.

Доказательство. По предложению 3.4(4), первая строка матрицы G_n равна $y = ((\sqrt{2})^{n-2}, 0, \ldots, 0)$. Если n чётно, то $k = k' = n/2 - 1$, строка y имеет тип I, и первые строки H_n и H'_n совпадают с ней, см. предложение 3.8. Если n нечётно, то y имеет тип II. Тогда первая строка H_n равна $((\sqrt{2})^{n-1}, 0, \ldots, 0) = (2^k, 0, \ldots, 0)$, а первая строка H'_n равна $((\sqrt{2})^{n-3}, 0, \ldots, 0) = (2^{k'}, 0, \ldots, 0)$.

Заметим, что 2^k – наименьшая рациональная степень $\sqrt{2}$, которая делится на $(\sqrt{2})^{n-2}$, а $2^{k'}$ – наибольшая рациональная степень $\sqrt{2}$, на которую делится $(\sqrt{2})^{n-2}$. Отсюда сразу следует вторая часть утверждения. □

Предложение 5.5. *Для любых* $x, y \in L_n$, $x', y' \in L'_n$, $n \geqslant 1$, *выполнено*

$$\mathrm{t}(x), \mathrm{t}(x'), \mathrm{n}(x, y) \in \mathbb{Z},$$

а также

$$\mathrm{n}(x', y) \in \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & n = 1, \\ \mathbb{Z}, & n \geqslant 2; \end{cases} \qquad \mathrm{n}(x', y') \in \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & 1 \leqslant n \leqslant 2, \\ \mathbb{Z}, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Доказательство. Напомним, что $L_n, \sqrt{2}L'_n \subset M_n$. По предложению 4.4, для любых $z, w \in M_n$ имеем $\mathrm{t}(z) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, и $\mathrm{n}(z, w)$ делится на $(\sqrt{2})^{n-2}$. Следовательно, $\mathrm{t}(x) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathrm{t}(x') \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]/\sqrt{2}$, а также $\mathrm{n}(x, y)$, $\mathrm{n}(x', y)$ и $\mathrm{n}(x', y')$ делятся на $(\sqrt{2})^{n-2}$, $(\sqrt{2})^{n-3}$ и $(\sqrt{2})^{n-4}$ соответственно. Значения следа и нормы на элементах с рациональными координатами являются рациональными, откуда сразу вытекает требуемое утверждение. □

Обозначение 5.6. В доказательствах теорем 5.7 и 5.8 мы иногда будем использовать обозначение $(a, b)_n = (a, b) \in \mathrm{CD}_n$, $a, b \in \mathrm{CD}_{n-1}$, чтобы явно указать номер текущего этапа процедуры удвоения Кэли–Диксона.

Первая половина доказательства следующей теоремы аналогична доказательству теоремы 4.6 с небольшими изменениями.

Теорема 5.7. *При* $n \geqslant 2$ *все попарные произведения элементов из* L_n *порождают* L_n *(над* $\mathbb{Z}$*), то есть* $L_n \cdot L_n = L_n$.

Доказательство. Случай $n = 2$ следует из замечания 5.3. Далее для удобства обозначений будем доказывать утверждение для L_{n+1}, $n \geqslant 2$. Обозначим $V_{n+1} = L_{n+1} \cdot L_{n+1}$. Достаточно показать, что все строки порождающей матрицы H_{n+1} лежат в V_{n+1}.

Пусть $a, b \in L_n$ – произвольные элементы. В силу следствий 3.11 и 3.12, имеем $(a, a), (b, b), (0, 2a), (2b, 0) \in L_{n+1}$. Рассмотрим равенство

$$V_{n+1} \ni (b, b)(0, 2a) + (a, a)(2b, 0) = \mathrm{t}(b)(0, 2a) - \mathrm{t}(a)(2b, 0) + (4ab, 0).$$

Так как $(4ab, 0) = (2a, 0)(2b, 0) \in V_{n+1}$, то

$$\mathrm{t}(b)(0, 2a) - \mathrm{t}(a)(2b, 0) \in V_{n+1}. \tag{5.1}$$

Пусть $z = (1/2, \ldots, 1/2)$ – последняя строка H_n. Тогда z имеет тип I, $\mathrm{t}(z) = 1$ и выполнено равенство

$$V_{n+1} \ni (2z, 0)(z, z) - (z, z)(0, 2z) = \mathrm{t}(z)(2z, 0) = (2z, 0).$$

Полагая $a = b = z$ в выражении (5.1), получаем, что $(0, 2z) \in V_{n+1}$.

Далее, если $b = z$ и $a \in L_n$ – произвольный элемент, то $\mathrm{t}(b) = 1$, и из выражения (5.1) следует $(0, 2a) \in V_{n+1}$. Аналогично, если $a = z$ и $b \in L_n$ – произвольный элемент, то $(2b, 0) \in V_{n+1}$.

Для произвольных $a, b \in L_n$ рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} V_{n+1} \ni (a, a)(b, b) = \mathrm{t}(a)(b, b) + \mathrm{n}(a, b)(1, 1) \\ - \mathrm{t}(a)(0, 2b) + (0, 2ba) - (2\mathrm{n}(a, b), 0). \end{aligned}$$

Согласно предложению 5.4, первая строка H_n равна $(2^k, 0, \ldots, 0)$, где $k = \lceil n/2 \rceil - 1$. По теореме 5.2, $ba \in L_n$. Из доказанного выше следует, что

$$(0, 2b), (0, 2ba), (2 \cdot 2^k, 0) \in V_{n+1}.$$

Согласно предложениям 4.4(2) и 5.5, величина $\mathrm{n}(a, b)$ – целое число, которое делится на $(\sqrt{2})^{n-2}$ в $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Применяя предложение 5.4, получаем, что $\mathrm{n}(a, b)$ делится на 2^k, поэтому $(2\mathrm{n}(a, b), 0) \in V_{n+1}$. Отсюда

$$\mathrm{t}(a)(b, b) + \mathrm{n}(a, b)(1, 1) \in V_{n+1}.$$

Сперва положим $a = (0, \ldots, 0, 2^k)$ и $b = z$. Тогда $\mathrm{t}(a) = 0$ и $\mathrm{n}(a, b) = 2^k$, поэтому $2^k(1, 1) \in V_{n+1}$. Значит, $\mathrm{t}(a)(b, b) \in V_{n+1}$ для всех $a, b \in L_n$. Полагая $a = z$, получаем, что $(b, b) \in L_{n+1}$ для произвольного $b \in L_n$.

Таким образом, в силу следствия 3.13, осталось показать, что V_{n+1} содержит элементы вида $(a, 0)$, где a – строка H_n типа II. Для произвольного $b \in L_n$ рассмотрим равенства

$$V_{n+1} \ni (a, 0)(b, b) = (ab, ba) = (\mathrm{t}(b)a + \mathrm{t}(a)b - \mathrm{n}(a, b) - ba, ba)$$

$$= \mathrm{t}(b)(a,0) + \mathrm{t}(a)(b,0) - (\mathrm{n}(a,b),0) + (ba,ba) - (2ba,0).$$

По доказанному выше, $(2b,0),(ba,ba),(2ba,0) \in V_{n+1}$. Строка a имеет тип II, поэтому она не является последней, а значит $\mathrm{t}(a)$ делится на 2. Следовательно,

$$\mathrm{t}(b)(a,0) - (\mathrm{n}(a,b),0) \in V_{n+1}. \tag{5.2}$$

Так как строка a имеет тип II, то она в $\sqrt{2}$ раз превосходит соответствующую строку a' матрицы G_n. Согласно предложению 4.3, $\mathrm{n}(a',z)$ делится на $(\sqrt{2})^{n-2}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда a' – первая строка G_n, а иначе $\mathrm{n}(a',z)$ превосходит $(\sqrt{2})^{n-2}$ не менее чем в $\sqrt{2}$ раз.

Во втором случае, $\mathrm{n}(a,z)$ – целое число, превосходящее $(\sqrt{2})^{n-2}$ не менее чем в 2 раза, а значит, $\mathrm{n}(a,z)$ делится на $2\cdot 2^k$. Тогда, как было доказано выше, $(\mathrm{n}(a,z),0) \in V_{n+1}$. Полагая $b = z$ в выражении (5.2), получаем, что $(a,0) \in V_{n+1}$.

Остаётся показать, что если первая строка y матрицы H_n имеет тип II, то $(y,0) \in V_{n+1}$. Тогда $y = (2^k,0,\ldots,0) = (2\widetilde{y},0)_n$ и $z = (\widetilde{z},\widetilde{z})_n$, где $\widetilde{y}$ и $\widetilde{z}$ – это первая и последняя строки матрицы H_{n-1} соответственно, причём обе они имеют тип I. Положим $a = (2\widetilde{z},0)_n$ и $b = (\widetilde{y},\widetilde{y})_n$. Тогда $\mathrm{t}(b) = \mathrm{t}(\widetilde{y})$ делится на 2, поскольку $n \geqslant 2$ нечётно и

$$\mathrm{n}(a,b) = \mathrm{n}((2\widetilde{z},0)_n,(\widetilde{y},\widetilde{y})_n) = 2\mathrm{n}(\widetilde{z},\widetilde{y}) = \mathrm{n}((2\widetilde{y},0)_n,(\widetilde{z},\widetilde{z})_n) = \mathrm{n}(y,z) = 2^k.$$

Так как a имеет тип II и $(2a,0) \in V_{n+1}$ по доказанному выше, то из выражения (5.2) получаем, что $(y,0) = (2^k,0) \in V_{n+1}$. □

Теорема 5.8. *При $n \geqslant 2$ выполнено $L_n \cdot L'_n = L'_n$.*

Доказательство. Случай $n = 2$ следует из замечания 5.3. Обозначим $V_{n+1} = L_{n+1} \cdot L'_{n+1}$. Достаточно показать, что при $n \geqslant 2$ все строки порождающей матрицы H'_{n+1} лежат в V_{n+1}. По предложению 3.10, они имеют вид $(a,0)$ и (b',b'), где a и b' – произвольные строки матриц H_n и H'_n соответственно.

Так как $L_{n+1} \subset L'_{n+1}$ в силу формулы (3.1), то, с учётом теоремы 5.7, имеем:

$$L_{n+1} = L_{n+1} \cdot L_{n+1} \subset L_{n+1} \cdot L'_{n+1} = V_{n+1}.$$

Пусть $z = (1/2,\ldots,1/2)$ – последняя строка H_n и H'_n. Тогда $\mathrm{t}(z) = 1$, и, по следствию 3.11, имеем $(z,z) \in L_{n+1}$ и $(0,z) \in L'_{n+1}$, откуда

$$V_{n+1} \ni (z,z)(0,z) = (-\bar{z}z,z^2) = (-\mathrm{t}(z)z + z^2,z^2) = -(z,0) + (z^2,z^2).$$

В силу теоремы 5.2, $z^2 \in L_n$, поэтому $(z^2, z^2) \in L_{n+1} \subset V_{n+1}$. Следовательно, $(z, 0) \in V_{n+1}$.

Пусть $a, b \in L_n$ – произвольные элементы. Всюду далее мы будем использовать следствие 3.11 без дополнительных пояснений. Рассмотрим равенство

$$V_{n+1} \ni (b, b)(0, a) + (a, a)(b, 0) = \mathrm{t}(b)(0, a) - \mathrm{t}(a)(b, 0) + (2ab, 0).$$

Так как $(2ab, 0) = (2a, 0)(b, 0) \in V_{n+1}$, то

$$\mathrm{t}(b)(0, a) - \mathrm{t}(a)(b, 0) \in V_{n+1}.$$

Если $b = z$ и $a \in L_n$ – произвольный элемент, то $\mathrm{t}(b) = 1$ и $(0, a) \in V_{n+1}$. Аналогично, если $a = z$ и $b \in L_n$ – произвольный элемент, то $(b, 0) \in V_{n+1}$.

Далее, для произвольных $a \in L_n$ и $b' \in L'_n$ рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} V_{n+1} \ni (a, a)(b', b') &= \mathrm{t}(a)(b', b') + \mathrm{n}(a, b')(1, 1) \\ &\quad - (2\mathrm{n}(a, b'), 0) - \mathrm{t}(a)(0, 2b') + (0, 2b'a). \end{aligned}$$

По теореме 5.2, $b'a \in L'_n$, поэтому $(0, 2b'), (0, 2b'a) \in L_{n+1} \subset V_{n+1}$. Таким образом,

$$\mathrm{t}(a)(b', b') + \mathrm{n}(a, b')(1, 1) - (2\mathrm{n}(a, b'), 0) \in V_{n+1}. \tag{5.3}$$

Нам осталось показать, что $(b', b') \in V_{n+1}$, где b' – произвольная строка матрицы H'_n. Если b' имеет тип I, то, по предложению 3.8, она совпадает с соответствующей строкой H_n, и тогда требуемый факт следует из $(b', b') \in L_{n+1} \subset V_{n+1}$. В противном случае, строка b' имеет тип II, и она в $\sqrt{2}$ раз меньше соответствующей строки b матрицы G_n. Согласно предложению 4.3, $\mathrm{n}(z, b)$ делится на $(\sqrt{2})^{n-2}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда b – первая строка H_n; в противном случае, $\mathrm{n}(z, b)$ превосходит $(\sqrt{2})^{n-2}$ не менее чем в $\sqrt{2}$ раз.

Во втором случае, по предложению 5.5, $\mathrm{n}(z, b')$ – целое число, делящееся на $(\sqrt{2})^{n-2}$, а значит $\mathrm{n}(z, b')$ делится на 2^k, где $k = \lceil n/2 \rceil - 1$, см. предложение 5.4. Первая строка H_n равна $(2^k, 0, \ldots, 0)$, поэтому $(\mathrm{n}(z, b'), 0, \ldots, 0) \in L_n$. Следовательно,

$$\mathrm{n}(z, b')(1, 1), (2\mathrm{n}(z, b'), 0) \in L_{n+1} \subset V_{n+1}.$$

Полагая $a = z$ в выражении (5.3), получаем, что $(b', b') \in V_{n+1}$.

Остаётся показать, что если первая строка y матрицы H'_n имеет тип II, то $(y, y) \in V_{n+1}$. В этом случае из предложений 3.8, 3.10 и 5.4 следует, что $y = (2^{k-1}, 0, \ldots, 0) = (\widetilde{y}, 0)_n$ и $z = (\widetilde{z}, \widetilde{z})_n$, где $\widetilde{y}$ и $\widetilde{z}$ – это

первая и последняя строки матрицы H_{n-1} соответственно. Положим $a = (\widetilde{y}, \widetilde{y})_n \in L_n$ и $b' = (\widetilde{z}, 0)_n \in L'_n$. Тогда $\mathrm{t}(a) = \mathrm{t}(\widetilde{y})$ делится на 2, поскольку $n \geqslant 2$ нечётно и

$$\mathrm{n}(a, b') = \mathrm{n}((\widetilde{y}, \widetilde{y})_n, (\widetilde{z}, 0)_n) = \mathrm{n}(\widetilde{z}, \widetilde{y}) = \mathrm{n}((\widetilde{z}, \widetilde{z})_n, (\widetilde{y}, 0)_n) = \mathrm{n}(z, y) = 2^{k-1}.$$

Так как $2b' \in 2L'_n \subset L_n$, то $2(b', b') \in L_{n+1} \subset V_{n+1}$. Кроме того, по доказанному выше, из $(2^k, 0, \ldots, 0) \in L_n$ следует, что $(2\mathrm{n}(a, b'), 0) = (2^k, 0) \in V_{n+1}$. Поэтому из выражения (5.3) получаем $(y, y) = 2^{k-1}(1, 1) \in V_{n+1}$. □

Замечание 5.9. При $n \geqslant 3$ включения $L'_n \cdot L_n \subset L'_n$ и $L'_n \cdot L'_n \subset L_n/2$ из теоремы 5.2 могут быть строгими. Обозначим порождающие матрицы решёток $L'_n \cdot L_n$ и $L'_n \cdot L'_n$ через C_n и C'_n, соответственно. Тогда при $n = 3$ нижнетреугольные эрмитовы нормальные формы порождающих матриц имеют следующий вид:

$$C_3 \to \widetilde{C}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$C'_3 \to \widetilde{C}'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрицы $\widetilde{H}_3$ и $\widetilde{H}'_3$ были вычислены в примере 3.3. Запишем также эрмитовы нормальные формы при $n = 4$:

$$H_4 \to \widetilde{H}_4 = \begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{pmatrix},$$

$$H'_4 \to \widetilde{H}'_4 = \begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix},$$

$$C_4 \to \widetilde{C}_4 = \begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{pmatrix},$$

$$C'_4 \to \widetilde{C}'_4 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}.$$

В обоих случаях $\widetilde{C}_n \neq \widetilde{H}'_n$ и $\widetilde{C}'_n \neq \widetilde{H}_n/2$, поэтому $L'_n \cdot L_n \subsetneq L'_n$ и $L'_n \cdot L'_n \subsetneq L_n/2$.

Следствие 5.10. *Из замечаний* 4.1, 5.3 *и* 5.9 *вытекает, что при* $1 \leqslant n \leqslant 4$ *решётка* L'_n *не является замкнутой относительно умножения.*

Следующее предложение показывает, как связаны между собой решётки L_n и L'_n в алгебре Кэли–Диксона.

Предложение 5.11. *Для всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$L_n = L'_n(1 + e_{2^{n-1}}) \qquad \text{и} \qquad L'_n = L_n(1 + e_{2^{n-1}})/2.$$

Доказательство. Согласно предложению 3.10, строки H_n имеют вид (x, x) и $(2x', 0)$, а строки H'_n имеют вид (x', x') и $(x, 0)$, где x – произвольная строка H_{n-1}, x' – произвольная строка H'_{n-1}. При этом $1 + e_{2^{n-1}} = (1, 1) \in \mathrm{CD}_n$. Тогда

$$(x, x)(1, 1) = (0, 2x), \qquad (2x', 0)(1, 1) = (2x', 2x'),$$
$$(x', x')(1, 1) = (0, 2x'), \qquad (x, 0)(1, 1) = (x, x).$$

Таким образом, порождающая матрица решётки $L'_n(1+e_{2^{n-1}})$ состоит из строк вида (x, x) и $(0, 2x')$, а порождающая матрица $L_n(1+e_{2^{n-1}})/2$ состоит из строк вида (x', x') и $(0, x)$. С учётом цепочки вложений (3.1) и следствия 3.11, получаем требуемые равенства решёток. □

Замечание 5.12. В работе [25] Уилсон использовал другой базис алгебры октонионов $\mathbb{O}$, состоящий из таких элементов $1, i_0, \ldots, i_6$, что

$i_0 i_1 = -i_1 i_0 = i_3$, и это равенство сохраняется при перестановках индексов $t \mapsto t+1 \pmod 7$ и $t \mapsto 2t \pmod 7$. Он рассмотрел решётку B, порождённую элементами этого базиса и октонионами вида

$$(\pm 1 \pm i_t \pm i_{t+1} \pm i_{t+3})/2,$$

а также их "дополнениями"

$$(\pm i_{t+2} \pm i_{t+4} \pm i_{t+5} \pm i_{t+6})/2.$$

Элементами этой решётки являются в точности октонионы Кирмсе, которые, как известно, не являются замкнутыми относительно умножения. Далее Уилсон положил

$$A = (1+i_0)B(1+i_0)/2, \quad R = (1+i_0)B, \quad L = B(1+i_0),$$

где A – одна из копий замкнутых относительно умножения целочисленных октонионов Кокстера–Диксона, R соответствует решётке E_8 в стандартной записи через систему чётных координат, а L отличается от R сменой знака у одной координаты (например, последней). Используя тождества Муфанг, выполненные в любой альтернативной алгебре, Уилсон показал, что $B \cdot L = L$ и $R \cdot B = R$.

В терминах используемого нами стандартного базиса, в качестве $1, i_0, \ldots, i_6$ можно взять элементы $1, e_6, e_1, e_4, e_7, e_5, e_3, -e_2$. Тогда решётка B совпадает с L_3' и, в силу смены знака координаты при i_6, решётка L совпадает с L_3, то есть $L_3 = L_3'(1+e_6)$. Аналогичная связь между L_n и L_n' имеет место при произвольных значениях n, см. предложение 5.11. Таким образом, первую формулу Уилсона можно переписать в виде $L_3' \cdot L_3 = L_3$. Из замечания 5.9 видно, что $\widetilde{C}_3 = \widetilde{H}_3$, то есть требуемое равенство действительно выполнено. Однако при $n = 4$ включение $L_4' \cdot L_4 \subset L_4$ уже неверно. Это объясняется тем, что при $n \geqslant 4$ алгебры CD_n не являются альтернативными, и поэтому тождества Муфанг в них не выполняются.

Автор выражает благодарность академику РАН Д. О. Орлову за привлечение внимания к настоящей задаче и своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за внимание к работе и ценные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, No. 26-11-00001.

Список литературы

1. J. C. Baez, *The octonions*. — Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 145–205.

2. E. S. Barnes, G. E. Wall, *Some extreme forms defined in terms of abelian groups.* — J. Australian Math. Soc. **1** (1959), 47–63.
3. D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen, *Large annihilators in Cayley–Dickson algebras* II. — Bol. Soc. Mat. Mex. **13**, No. 2 (2007), 269–292.
4. D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen, *Large annihilators in Cayley–Dickson algebras.* — Commun. Algebra **36**, No. 2 (2008), 632–664.
5. H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko, M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension* 24. — Ann. Math. **185**, No. 3 (2017), 1017–1033.
6. J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Twenty-three constructions for the Leech lattice.* — Proc. R. Soc. London, Ser. A **381** (1982), 275–283.
7. J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, New York, 1999.
8. J. H. Conway, D. A. Smith, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry.* A K Peters, Natick, Massachusetts, 2003.
9. G. M. Dixon, *Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics, Mathematics and Its Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
10. G. M. Dixon, *Division Algebras, Lattices, Physics, Windmill Tilting.* CreateSpace Independent Publishing Platform, Charleston, SC, 2011.
11. G. D. Forney, Jr., *Coset codes – Part* II. *Binary lattices and related codes.* — IEEE Trans. Inform. Theory **34**, No. 5 (1988), 1152–1187.
12. G. D. Forney, Jr., *Principles of Digital Communication* II *Course Notes.* Massachusetts Institute of Technology, 2005.
13. S. A. Kraußhar, *Function theories in Cayley–Dickson algebras and number theory.* — Milan J. Math. **89** (2021), 19–44.
14. D. Micciancio, A. Nicolosi, *Efficient bounded distance decoders for Barnes–Wall lattices.* — 2008 *IEEE International Symposium on Information Theory*, 2008, 2484-2488.
15. G. Moreno, *The zero divisors of the Cayley–Dickson algebras over the real numbers.* — Bol. Soc. Mat. Mex. **4**, No. 1 (1998), 13–28.
16. G. Moreno, *Constructing zero divisors in the higher dimensional Cayley–Dickson algebras.* `arXiv:math/0512517` (2005).
17. G. Moreno, *Alternative elements in the Cayley–Dickson algebras.* — Topics in Mathematical Physics, General Relativity and Cosmology in Honor of Jerzy Plebañski, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, 333–346.
18. G. Nebe, *Some cyclo-quaternionic lattices.* — J. Algebra **199**, No. 2 (1998), 472–498.
19. G. Nebe, "Construction and investigation of lattices with matrix groups," *Contemp. Math.* **249**, 205–220 (1999).
20. G. Nebe, E. M. Rains, N. J. A. Sloane, *A simple construction for the Barnes–Wall lattices.* — Codes, Graphs, and Systems: A Celebration of the Life and Career of G. David Forney, Jr. on the Occasion of His Sixtieth Birthday, edited by R. E. Blahut, R. Koetter, Springer US, Boston, MA, 2002, 333–342.
21. H.-G Quebbemann, *Lattices with theta functions for* $G(\sqrt{2})$ *and linear codes.* — J. Algebra **105**, No. 2 (1987), 443–450.
22. R. D. Schafer, *On the algebras formed by the Cayley–Dickson process.* — Amer. J. Math. **76**, No. 2 (1954), 435–446.

23. M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension* 8. — Ann. Math. **185**, No. 3 (2017), 991–1015.
24. J. Voight, *Quaternion Algebras*, Springer Nature 2021.
25. R. A. Wilson, *Octonions and the Leech lattice*. — J. Algebra **322**, No. 6 (2009), 2186–2190.

Zhilina S. A. Embedding of Barnes–Wall lattices into Cayley–Dickson algebras.

The family of Barnes–Wall lattices includes the balanced Barnes–Wall lattice M_n over $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ and two ordinary Barnes–Wall lattices L_n and L'_n over $\mathbb{Z}$, which are geometrically equivalent to each other. Embedding of these lattices into the Cayley–Dickson algebras of an appropriate dimension is considered. It is shown that for all $n \geqslant 2$, the lattices M_n and L_n are closed under multiplication and are generated by the sets of pairwise products of their elements. The lattices $L_n \cdot L'_n$, $L'_n \cdot L_n$, and $L'_n \cdot L'_n$, generated by pairwise products of elements of the lattices L_n and L'_n, also are studied.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия

E-mail: s.a.zhilina@gmail.com

Поступило 17 сентября 2026 г.