Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 554, 2026 г.

А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, Е. Р. Шафеев

ГРАФЫ С МАКСИМАЛЬНЫМ ЦЕПНЫМ ИНДЕКСОМ И ИХ СВОЙСТВА

§1. Введение

Обозначение 1.1. Через $\mathbb{P}$ мы обозначаем множество всех вещественных неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов. Через $\mathbb{P}_{n\times m}$ обозначается множество $n \times m$ матриц из $\mathbb{P}$, а через $\mathbb{P}_n$ – множество $\mathbb{P}_{n\times n}$.

Определение 1.2. *Неотрицательная матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{P}$ называется* цепной, *если для каждой пары её положительных элементов a_{ij}, a_{pq} существует цепочка, имеющая концами эти элементы, то есть последовательность положительных элементов $a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}, \ldots, a_{i_mj_m}$, такая что*

(1) $(i_1, j_1) = (i, j)$;
(2) $(i_m, j_m) = (p, q)$;
(3) *для каждого $l = 1, 2, \ldots, m-1$ выполнено $i_l = i_{l+1}$ или $j_l = j_{l+1}$.*

Если представить, что элементы матрицы – это клетки шахматной доски и ладье разрешено ходить только по положительным элементам, то определение можно переформулировать следующим образом. Матрица является цепной, если ладья может добраться от каждой из положительных клеток до любой другой.

Цепные матрицы были впервые рассмотрены в работах [8] и [10]. В настоящей работе, говоря о квадратных матрицах порядка n, мы всегда будем предполагать, что $n \geqslant 2$.

Определение 1.3. *Матрица $A \in \mathbb{P}_n$ называется* потенциально цепной, *если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ матрица A^k цепная. Наименьшее такое k называется цепным индексом. Цепной индекс матрицы A*

Ключевые слова: цепные матрицы, цепной индекс, неотрицательные матрицы.
Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению No. 075-15-2025-345.

обозначается через $\mathrm{CI}(A)$. *Если* A *не является потенциально цепной, то мы полагаем* $\mathrm{CI}(A) = 0$.

Понятия потенциально цепной матрицы и цепного индекса были введены и исследованы Альпиным и Башкиным в работе [1]. Их изучение было продолжено, в частности, в работах [2,4,5].

Теорема 1.4 ([2, теорема 3.8]). *Пусть* $A \in \mathbb{P}_n$. *Тогда* $\mathrm{CI}(A) \leqslant n-1$.

Теорема 1.5 ([2, следствие 4.8]). *На множестве* $\mathbb{P}_n$ *реализуются все значения цепного индекса от* 0 *до* $n-1$.

Цепной индекс связан с примитивной экспонентой – другим важным инвариантом неотрицательных матриц.

Определение 1.6. *Неотрицательная матрица* $A \in \mathbb{P}_n$ *называется* примитивной, *если для некоторого* $k \in \mathbb{N}$ *матрица* A^k *положительна (поэлементно). Наименьшее такое* k *называется* экспонентой (примитивной экспонентой) *этой матрицы и обозначается через* $\exp(A)$. *Если* A *не является примитивной, то мы полагаем* $\exp(A) = 0$.

Определение 1.7. *Две неотрицательные матрицы* $A = (a_{ij})$ *и* $B = (b_{ij})$ *одинаковых размеров называются* комбинаторно эквивалентными *(обозначение:* $A \sim B$*), если* $a_{ij} > 0$ *тогда и только тогда, когда* $b_{ij} > 0$.

Из определений ясно, что экспоненты комбинаторно эквивалентных матриц равны. То же самое верно для цепного индекса.

Определение 1.8. Матрица Виландта W_n, $n \geqslant 2$, *определяется по формуле*

$$W_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.9 ([13]). *Пусть* A – *неотрицательная* $n \times n$ *матрица. Тогда*

(1) $\exp(A) \leqslant (n-1)^2 + 1$;
(2) $\exp(A) = (n-1)^2 + 1$ *тогда и только тогда, когда существует такая матрица-перестановка* P, *что* $PAP^T \sim W_n$.

Теорема 1.10 ([1, стр. 23]). $\mathrm{CI}(W_n) = n-1$.

Таким образом, матрица W_n имеет максимально возможный (далее – максимальный) цепной индекс. Теорема 1.9 дает полное описание множества матриц с максимальной экспонентой. В то же время, как показывает следующий пример, множество матриц с максимальным цепным индексом не ограничивается матрицами с максимальной экспонентой.

Пример 1.11. Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^k \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для всех $k \geqslant 3$. Матрица M^3 является цепной, а M^2 цепной не является, так как ее первая строка не пересекается ни с какой другой. Поэтому $\mathrm{CI}(M) = 3$. При этом матрица M не является примитивной, а W_4 примитивна. Следовательно, не существует такой матрицы-перестановки P, что $PMP^T \sim W_4$. Таким образом, существуют матрицы с максимальным цепным индексом, которые не являются комбинаторно эквивалентными матрице W_n ни для какой перестановки строк и столбцов.

Определение 1.12. *Квадратная неотрицательная матрица A называется* неразложимой, *если для любых i, j существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $(A^k)_{ij} > 0$.*

Из определения сразу вытекает, что любая примитивная матрица является неразложимой.

Предложение 1.13 ([3, гл. 13, лемма 1])**.** *Неразложимость матрицы A эквивалентна выполнению любого из следующих условий:*

(1) $(I + A)^{n-1} > 0$, *где n – размер матрицы;*

(2) *не существует такой матрицы-перестановки P, что*

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

где A_1, A_3 – квадратные блоки.

Нетрудно убедиться, что всякая примитивная матрица является потенциально цепной, однако, согласно примеру 1.11, обратное неверно. Тем не менее, как показывает следующая теорема, в случае неразложимых матриц эти два понятия оказываются равносильными. Это

означает, что класс потенциально цепных матриц является естественным расширением класса примитивных матриц.

Теорема 1.14 ([1, предложение 6.1]). *Неразложимая матрица A является потенциально цепной тогда и только тогда, когда она примитивна.*

При анализе комбинаторных свойств неотрицательных матриц часто прибегают к графовой интерпретации. В настоящей работе мы будем рассматривать ориентированные графы без кратных дуг, но, возможно, с петлями. Кроме того, мы будем подразумевать, что граф содержит конечное число вершин, не меньшее двух.

Для неотрицательной $n \times n$ матрицы A построим ориентированный граф $D = D(A)$ с множеством вершин $V(D) = \{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством дуг $E(D) = \{(i, j) \mid a_{ij} > 0\}$. Матрица A, таким образом, комбинаторно эквивалентна матрице смежности графа D.

В качестве примера рассмотрим граф матрицы Виландта при $n \geqslant 3$, изображённый на рис. 1. Мы будем использовать обозначение W_n и для матрицы Виландта, и для соответствующего ей графа.

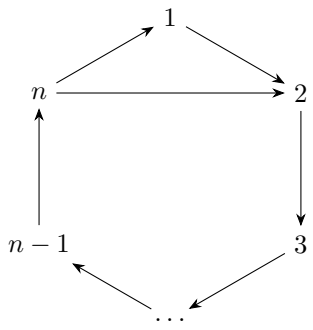


Рис. 1. Граф Виландта W_n, $n \geqslant 3$.

Обозначение 1.15. Запись $u \xrightarrow{t} v$ означает, что существует ориентированный путь из u в v, длина которого в точности равна t. Будем писать $u \to v$, когда $u \xrightarrow{1} v$. Для удобства будем считать, что $u \xrightarrow{0} u$ для любой вершины u.

Определение 1.16. *Ориентированный граф называется* сильно связным*, если для любой пары вершин u, v при некотором $t \geqslant 0$ справедливо $u \xrightarrow{t} v$. Ориентированный граф называется* (слабо) связным*, если, игнорируя направления дуг, можно добраться из любой вершины u в любую вершину v. Таким образом, любой сильно связный граф является связным.*

Например, граф W_n является сильно связным, но становится лишь связным при удалении любой дуги, кроме $(n, 2)$.

Следующие факты о соответствии матриц и графов широко известны и следуют из определения графа $D(A)$.

Предложение 1.17. *Пусть A – неотрицательная матрица.*

(1) *Граф $D^T = D(A^T)$ получается из $D(A)$ сменой направлений всех дуг.*
(2) *$u \to v$ в графе $D(A^k)$ тогда и только тогда, когда $u \xrightarrow{k} v$ в $D(A)$.*
(3) *Граф $D(A)$ является сильно связным тогда и только тогда, когда матрица A неразложима.*

Всякое свойство или числовой инвариант, определенный для матрицы $A \in \mathbb{P}_n$, мы переносим на граф $D(A)$. В частности, цепной индекс графа – это цепной индекс его матрицы смежности. Аналогично для графов определяются экспонента, а также понятия примитивного и потенциально цепного графа.

Например, граф D является примитивным, если найдется такое $t \in \mathbb{N}$, что для любых $i, j \in V(D)$ выполняется $i \xrightarrow{t} j$. Наименьшее такое t – это экспонента графа D.

Всюду далее мы будем рассматривать только те матрицы, которые принадлежат множеству $\mathbb{P}$. Соответственно, среди ориентированных графов на n вершинах мы рассматриваем только те, матрицы смежности которых принадлежат $\mathbb{P}_n$. Таким образом, цепной индекс таких графов корректно определён.

Данная работа посвящена описанию множества графов с максимальным цепным индексом и изучению их свойств. Установлено, что в графе с максимальным цепным индексом не более четырёх вершин имеют более двух инцидентных дуг. Остальным вершинам инцидентны ровно две различные дуги: одна входящая и одна исходящая.

Эти жесткие ограничения на степени вершин позволяют явно описать структуру всех графов с максимальным цепным индексом.

Графы с максимальным цепным индексом, имеющие n вершин, могут иметь либо $n+1$, либо $n+2$ дуги. Эти два типа графов рассмотрены по отдельности. Первый тип разбивается на три семейства графов. Только одно из них состоит из графов, не являющихся сильно связными; такой вид графов известен как граф-гантель (dumbbell graph). Несмотря на это отличие, для графа-гантели критерий максимальности цепного индекса такой же, как и для остальных семейств: НОД множества длин всех простых ориентированных циклов должен быть равен единице. Другие два семейства – это известные бициклические графы Θ и ∞. Граф Виландта W_n, экспонента которого максимальна, является частным случаем графа Θ. Второй тип содержит два семейства графов, оба они являются сильно связными. Первое состоит из одного графа W'_n, отличающегося от графа W_n добавлением петли $1 \to 1$; второе семейство $\overline{\infty}$ структурно схоже с семейством ∞. Все максимальные графы обладают достаточно простой структурой, чтобы их экспоненты явно выражались через длины их независимых циклов.

Работа построена следующим образом. В §2 вводится понятие цепного ранга и описываются необходимые свойства графов с максимальным цепным индексом. В частности, лемма 2.16 показывает, что они удовлетворяют особым ограничениям на степени вершин и разбиваются на два типа в зависимости от общего числа дуг. В §3 получена характеризация графов первого типа, а в §4 – второго, см. теоремы 3.13 и 4.6 соответственно. В результате полностью описано множество графов с максимальным цепным индексом, см. теорему 4.7. Пятый параграф посвящен подсчету экспонент этих графов, а в шестом вычислено их количество при фиксированном количестве вершин.

§2. Свойства графов с максимальным цепным индексом

Для более детального анализа потенциально цепных матриц и графов необходимы следующие понятия.

Определение 2.1. *Пусть $A = (a_{il}) \in \mathbb{P}_{n\times m}$. Запись $i \wedge j$ означает, что строки i и j матрицы A пересекаются, то есть существует такое $k \in \{1, \dots, m\}$, что $a_{ik} > 0$ и $a_{jk} > 0$.*

Определение 2.2. *Пусть $A \in \mathbb{P}_{n\times m}$. Будем говорить, что строки i и j* связаны цепочкой, *если существует такая последовательность строк $k_1, \dots, k_t$, что*

$$(i = k_1) \wedge k_2 \wedge \dots \wedge (k_t = j),$$

то есть k_l пересекается с k_{l+1} при $l = 1, \dots, t-1$.

Предложение 2.3 ([1, лемма 2.1])**.** *Для матрицы $A \in \mathbb{P}_{n\times m}$ отношение связанности цепочкой является отношением эквивалентности на множестве её строк.*

Определение 2.4 ([1, определение 3.1])**.** *Для матрицы $A \in \mathbb{P}_{n\times m}$ количество классов эквивалентности по отношению связанности цепочкой называется* цепным рангом *и обозначается через* $\operatorname{crk}(A)$.

Цепной ранг матрицы $A \in \mathbb{P}_{n\times m}$ принимает значения от 1 до $\min\{n, m\}$.

Замечание 2.5. Матрица $A \in \mathbb{P}_{n\times m}$ является цепной тогда и только тогда, когда $\operatorname{crk}(A) = 1$.

Цепной ранг обладает многими свойствами обычного ранга матрицы, см. работы [1, 2, 4]. Мы будем использовать следующий факт.

Теорема 2.6 ([1, теорема 3.1])**.** *Если для матриц $A, B \in \mathbb{P}$ определено произведение AB, то*

$$\operatorname{crk}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{crk}(A), \operatorname{crk}(B)\}.$$

Цепной ранг графа – это цепной ранг его матрицы смежности. Следующее определение является графовым аналогом определения 2.1.

Определение 2.7. *Вершины u, v графа D* пересекаются в степени $k \in \mathbb{N}$ *по вершине w, если $u \xrightarrow{k} w$, $v \xrightarrow{k} w$. В этом случае мы будем писать $u \wedge^k v$, при этом вместо $u \wedge^1 v$ будем писать $u \wedge v$.*

Лемма 2.8. *Граф D является потенциально цепным тогда и только тогда, когда при некотором натуральном k для любой пары вершин $u, v \in V(D)$ найдется цепочка вершин*

$$(u = x_1) \wedge^k x_2 \wedge^k \dots \wedge^k (x_t = v), \tag{2.1}$$

то есть $x_l \wedge^k x_{l+1}$ при $l = 1, \dots, t-1$. Наименьшее такое k является цепным индексом этого графа.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{P}_n$ и $D = D(A)$. По предложению 1.17, для вершин $u, v \in V(D)$ верно $u \wedge^k v$ тогда и только тогда, когда для некоторого w верно $(A^k)_{u,w} > 0$ и $(A^k)_{v,w} > 0$. Следовательно, условие (2.1) эквивалентно тому, что матрица A^k цепная, и наименьшее такое k совпадает с $\mathrm{CI}(A)$. □

В частности, граф D является цепным, если для цепочки (2.1) верно $x_l \wedge x_{l+1}$ для всех $l = 1, \ldots, t-1$.

Предложение 2.9. *Потенциально цепной граф является связным.*

Доказательство. Для любой пары вершин u, v в потенциально цепном графе существует цепочка (2.1), то есть найдутся такие вершины $w_1, \ldots, w_{t-1}$, что

$$(u = x_1) \xrightarrow{k} w_1, \quad x_2 \xrightarrow{k} w_1, \quad \ldots, \quad x_{t-1} \xrightarrow{k} w_{t-1}, \quad (v = x_t) \xrightarrow{k} w_{t-1}.$$

Конкатенация этих путей, если обратить все пути с чётными номерами, образует неориентированный путь, соединяющий u и v. □

Лемма 2.10. *Пусть D – потенциально цепной граф на n вершинах. Тогда равенство* $\mathrm{crk}(D) = n-1$ *эквивалентно равенству* $\mathrm{CI}(D) = n-1$.

Доказательство. Согласно [5, следствие 2.13], цепной ранг графа с максимальным цепным индексом равен $n-1$. Осталось доказать, что любой потенциально цепной граф с цепным рангом $n-1$ имеет максимальный цепной индекс. Используем неравенство

$$\mathrm{crk}\big(D^k\big) - \mathrm{crk}\big(D^{k+1}\big) \leqslant \mathrm{crk}\big(D^{k-1}\big) - \mathrm{crk}\big(D^k\big), \quad k \in \mathbb{N},$$

полученное в [4, следствие 4.14]. По теореме 2.6, цепной ранг A^t не увеличивается с ростом t. Если $\mathrm{crk}(D) = n-1$, то, так как $\mathrm{crk}(D^0) = n$, получаем, что $\mathrm{crk}(D^{k-1}) - \mathrm{crk}(D^k) \leqslant 1$ для любого k. Если для некоторого $k < n$ выполнено $\mathrm{crk}(D^{k-1}) - \mathrm{crk}(D^k) = 0$, то для всех $m \geqslant k$ имеем $\mathrm{crk}(D^{m-1}) - \mathrm{crk}(D^m) = 0$, откуда

$$\begin{aligned}\mathrm{crk}(D^m) = \mathrm{crk}(D^{k-1}) = \mathrm{crk}(D^0) &- (\mathrm{crk}(D^0) - \mathrm{crk}(D^1)) - \ldots \\ &- (\mathrm{crk}(D^{k-2}) - \mathrm{crk}(D^{k-1})) \\ &\geqslant n - (k-1) \geqslant 2,\end{aligned}$$

то есть граф D^m не является цепным. Получаем противоречие с тем, что D – потенциально цепной граф. Значит, для каждого $k = 1, \ldots, n-1$ выполнено $\mathrm{crk}(D^{k-1}) - \mathrm{crk}(D^k) = 1$ и, следовательно, $\mathrm{crk}(D^k) = n-k$. В частности, $\mathrm{crk}(D^{n-2}) = 2$ и $\mathrm{crk}(D^{n-1}) = 1$, то есть $\mathrm{CI}(D) = n-1$. □

Следствие 2.11 ([5, лемма 2.14 и следствие 2.15]). *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом, то есть $|V(D)| = n$ и $\mathrm{CI}(D) = n-1$. Тогда*

(1) *существует ровно одна такая пара различных вершин $u, v \in V(D)$, что $u \wedge v$;*
(2) *существует ровно одна пара различных вершин $u', v' \in V(D)$, для которой найдется такая вершина w, что $w \to u'$, $w \to v'$.*

Определение 2.12. Полустепень захода $d^-(v)$ *вершины $v \in V(D)$ – это число дуг, входящих в вершину.* Полустепень исхода $d^+(v)$ *– это число дуг, исходящих из вершины.*

Например, в графе W_n на рис. 1 имеем $d^+(n) = 2$, $d^+(i) = 1$ при $i \neq n$ и $d^-(2) = 2$, $d^-(j) = 1$ при $j \neq 2$.

Замечание 2.13. Матрица A принадлежит множеству $\mathbb{P}_n$ тогда и только тогда, когда в её графе $D(A)$ для любой вершины v верно $d^+(v) \geqslant 1$ и $d^-(v) \geqslant 1$.

Предложение 2.14. *Если $u \wedge^k v$ в графе $D(A)$, где $A \in \mathbb{P}_n$, то $u \wedge^{k+1} v$.*

Доказательство. Пусть $u \xrightarrow{k} w$ и $v \xrightarrow{k} w$. Так как $A \in \mathbb{P}_n$, в графе $D(A)$ имеем $d^+(w) \geqslant 1$, то есть найдется такая вершина w', что $w \to w'$. Отсюда $u \xrightarrow{k+1} w'$ и $v \xrightarrow{k+1} w'$. □

Определение 2.15. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом.*

(1) D *называется* максимальным графом первого типа, *если в нем существует ровно одна вершина z, для которой $d^-(z) = 2$, а все остальные вершины имеют $d^- = 1$, и существует ровно одна вершина w, для которой $d^+(w) = 2$, а все остальные вершины имеют $d^+ = 1$. При этом z и w могут совпадать; в этом случае, у общей вершины $d^+ = d^- = 2$.*
(2) D *называется* максимальным графом второго типа, *если в нем существуют ровно две вершины z_1, z_2, для которых $d^-(z_1) = d^-(z_2) = 2$, а все остальные вершины имеют $d^- = 1$, и существуют ровно две вершины w_1, w_2, для которых $d^+(w_1) = d^+(w_2) = 2$, а все остальные вершины имеют $d^+ = 1$, при этом z_i может совпадать с w_j.*

Лемма 2.16 ([5, лемма 2.19]). *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом. Тогда D – это максимальный граф либо первого, либо второго типа.*

Сильные ограничения на степени вершин позволяют напрямую описать вид максимальных графов обоих типов.

§3. Максимальные графы первого типа

Определение 3.1. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{N}$. Граф $K(a, b, c)$, изображённый на рис. 2, определяется следующим образом:*

$$1 \to 2 \to \ldots \to a \to 1,$$
$$1 \to a+1 \to \ldots \to a+b,$$
$$a+b \to a+b+1 \to \ldots \to a+b+c-1 \to a+b.$$

Таким образом, граф $K(a, b, c)$ состоит из двух непересекающихся простых циклов $\{1, \ldots, a\}$ и $\{a+b, \ldots, a+b+c-1\}$ длин a и c соответственно, а также простого пути длины b, соединяющего эти циклы. При $a = 1$ или $c = 1$ соответствующие циклы являются петлями.



Рис. 2. Граф $K(a, b, c)$.

Матрица M из примера 1.11 является матрицей смежности графа $K(1, 3, 1)$.

Определение 3.2. *Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b > 2$. Граф $\infty(a, b)$, изображённый на рис. 3, определяется следующим образом:*

$$1 \to 2 \to \ldots \to a \to 1,$$
$$1 \to a+1 \to \ldots \to a+b-1 \to 1.$$

Таким образом, граф $\infty(a, b)$ состоит из двух простых циклов длин a и b, пересекающихся ровно в одной вершине. При $a = 1$ или $b = 1$ один из циклов является петлей.

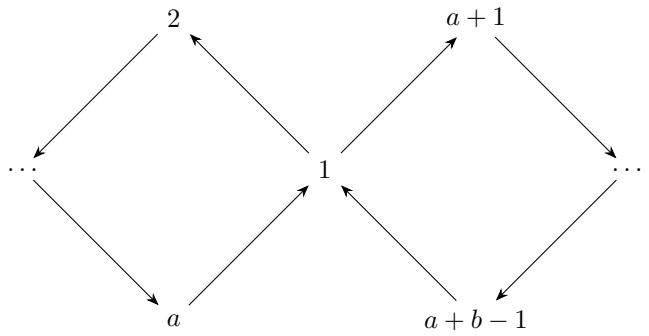


Рис. 3. Граф $\infty(a, b)$.

Определение 3.3. *Пусть* $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a + b > 2$. *Граф* $\Theta(a, b, c)$, *изображённый на рис.* 4, *определяется следующим образом:*

$$1 \to 2 \to \ldots \to a + 1,$$
$$1 \to a + 2 \to \ldots \to a + b \to a + 1,$$
$$a + 1 \to a + b + 1 \to \ldots \to a + b + c - 1 \to 1.$$

Если $b = 1$, *то второй путь имеет вид* $1 \to a + 1$. *Если* $c = 1$, *то третий путь имеет вид* $a + 1 \to 1$. *Граф* $\Theta(a, b, c)$ *имеет два цикла длин* $a + c$ *и* $b + c$, *которые пересекаются по простому пути длины* c.

Частным случаем $\Theta(a, b, c)$ является граф Виландта W_n, который изоморфен $\Theta(1, 2, n - 2)$.

Определение 3.4. *Пусть* D – *ориентированный граф.* Подграф D' *графа* D – *это пара* $V(D') \subseteq V(D)$ *и* $E(D') \subseteq E(D)$, *образующая граф. Это означает, что дуги в* $E(D')$ *имеют началом и концом только вершины из* $V(D')$.

Лемма 3.5. *Пусть* D – *максимальный граф первого типа и существует подграф* $D' \subseteq D$, *изоморфный одному из графов* $K(a, b, c)$, $\Theta(a, b, c)$ *или* $\infty(a, b)$. *Тогда* $D' = D$.

Доказательство. По определению, все три вида графов K, Θ, ∞ имеют одну вершину w с $d^+(w) = 2$, одну вершину z с $d^-(z) = 2$, а все остальные вершины имеют $d^+ = d^- = 1$. В силу определения 2.15, это означает, что вершины из множества $V(D')$ не имеют в графе D

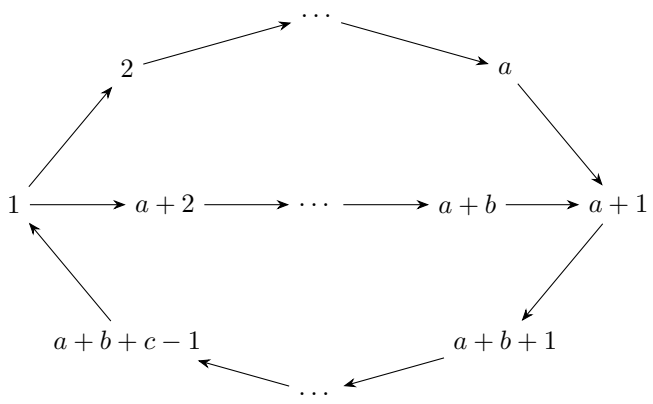


Рис. 4. Граф $\Theta(a, b, c)$.

других инцидентных дуг, кроме дуг из $E(D')$. Но, согласно предложению 2.9, граф D связен, поэтому $V(D') = V(D)$. Из определений графов K, Θ и ∞ вытекает, что для графа D', изоморфного одному из них, выполнено $|E(D')| = |V(D')| + 1$. По определению графа первого типа, получаем $|E(D)| = |V(D)| + 1$. Поэтому $E(D') = E(D)$ и $D' = D$. □

Лемма 3.6. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом первого типа и $d^+(w) = 2$, $d^-(z) = 2$. Тогда для любой вершины $x \in V(D)$ существуют пути $w \xrightarrow{t_1} x$ и $x \xrightarrow{t_2} z$ для некоторых $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть x – произвольная вершина. Граф D потенциально цепной, поэтому, по лемме 2.8, для некоторых вершин y и c, $y \neq x$, и некоторого $t \in \mathbb{N}$ выполняется $x \xrightarrow{t} c$, $y \xrightarrow{t} c$. Пусть t_2 – наименьшее такое число, что $x \xrightarrow{t_2} c_0$ и $y \xrightarrow{t_2} c_0$ для некоторой вершины c_0. Тогда $d^-(c_0) \geqslant 2$. Но z – единственная вершина в D с $d^- \geqslant 2$. Значит, $c_0 = z$ и $x \xrightarrow{t_2} z$.

Граф $D(A^T)$ тоже является потенциально цепным, причём в нём, по предложению 1.17, верно $d^-(w) = 2$. Применяя доказанное в предыдущем абзаце к графу $D(A^T)$, получаем, что в $D(A^T)$ существует путь $x \xrightarrow{t_1} w$. Значит, в графе $D(A)$ существует путь $w \xrightarrow{t_1} x$. □

Теорема 3.7. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом первого типа. Тогда D изоморфен одному из графов $K(a,b,c)$, $\infty(a,b)$ или $\Theta(a,b,c)$.*

Доказательство. Пусть D – граф с максимальным цепным индексом первого типа. Имеем единственную вершину z с $d^- = 2$ и единственную вершину w с $d^+ = 2$. Ввиду леммы 3.5, для доказательства теоремы достаточно найти подграф, изоморфный одному из графов $K(a,b,c)$, $\infty(a,b)$ или $\Theta(a,b,c)$.

Сперва покажем, что если $w = z$, то $D = \infty(a,b)$. Имеем $d^+(w) = d^-(w) = 2$. Если существует петля $w \to w$, то найдется ровно одна вершина $v \neq w$, такая что $w \to v$. Для нее справедлива лемма 3.6, то есть $w \to v \xrightarrow{t} w$ при некотором $t \in \mathbb{N}$. Пусть $w \to v \xrightarrow{b-1} w$ – кратчайший путь такого вида. Тогда все его внутренние вершины имеют $d^+ = d^- = 1$. Получили подграф $\infty(1,b)$, далее применяем лемму 3.5. Если петли $w \to w$ нет, то найдутся две различные вершины v_1, v_2, отличные от w, для которых $w \to v_1$, $w \to v_2$. Пусть кратчайшие пути из v_i в w, $i \in \{1,2\}$, которые существуют по лемме 3.6, имеют вид $v_1 \xrightarrow{a-1} w$, $v_2 \xrightarrow{b-1} w$, где $a, b \geqslant 2$. Тогда, так как w – это единственная вершина с $d^- > 1$, эти пути пересекаются только по вершине w. Получили подграф $\infty(a,b)$. По лемме 3.5, $D = \infty(a,b)$.

Пусть теперь $w \neq z$. По лемме 3.6, существует путь из w в z. Пусть $w \xrightarrow{b} z$ – кратчайший такой путь.

Если не существует пути из z в w, то граф не является сильно связным. По лемме 3.6, существует путь из w в w, а также путь из z в z. Пусть кратчайшие такие пути имеют вид $w \xrightarrow{a} w$ и $z \xrightarrow{c} z$ соответственно. Тогда, по условию на степени вершин в графе первого типа, все три описанных пути могут пересекаться только по вершинам z или w. Однако пути $w \xrightarrow{a} w$ и $z \xrightarrow{c} z$ не могут пересекаться, так как иначе существовал бы путь $z \xrightarrow{t} w$. А в пути $w \xrightarrow{b} z$ все внутренние вершины отличны от w и z. Получили подграф $K(a,b,c)$, где $w = 1$, $z = a + b$. Тогда, по лемме 3.5, $D = K(a,b,c)$.

Пусть теперь существует путь из z в w и пусть самый короткий из них имеет вид $z \xrightarrow{c} w$. Так как $d^+(w) = 2$, вершина w имеет еще одну исходящую дугу $w \to u$, помимо содержащейся в $w \xrightarrow{b} z$, причём из $d^-(w) = 1$ следует $u \neq w$. По лемме 3.6, существует путь из u в z, и пусть $u \xrightarrow{a-1} z$ – кратчайший из таких путей. Мы получили ещё

один путь $w \to u \xrightarrow{a-1} z$, в котором все внутренние вершины имеют $d^- = 1$. Поэтому пути $w \to u \xrightarrow{a-1} z$ и $w \xrightarrow{b} z$ не могут пересекаться по внутренним вершинам. Получили подграф $\Theta(a, b, c)$, где $w = 1$, $z = a + 1$. По лемме 3.5, $D = \Theta(a, b, c)$. □

Лемма 3.8. *Пусть $A, B \in \mathbb{P}_n$ и для любых i, j выполнено $a_{ij} \leqslant b_{ij}$. Тогда, если матрица B не является потенциально цепной, то и A не является потенциально цепной.*

Доказательство. Если $a_{ij} \leqslant b_{ij}$, то и $(A^k)_{ij} \leqslant (B^k)_{ij}$ для любых i, j и любого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, по определению цепной матрицы, получаем утверждение леммы. □

Определение 3.9. Индексом цикличности $\sigma(D)$ *сильно связного ориентированного графа D называется НОД длин всех его простых ориентированных циклов (если ориентированных циклов нет, то полагаем $\sigma(D) = 1$). Если D не является сильно связным, то $\sigma(D)$ определяется как НОК индексов цикличности его сильно связных компонент.*

Теорема 3.10 ([6, теорема 3.4.4])**.** *Сильно связный граф D является примитивным тогда и только тогда, когда $\sigma(D) = 1$.*

Определение 3.11. *Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – набор натуральных чисел, взаимно простых в совокупности, то есть* $\gcd(a_1, \ldots, a_k) = 1$. Числом Фробениуса $F(a_1, \ldots, a_k)$ *называется наибольшее такое h, что уравнение*

$$x_1 a_1 + \ldots + x_k a_k = h$$

не имеет решений при целых $x_i \geqslant 0$.

Числа Фробениуса актуальны для целого ряда прикладных задач. Например, число $F(a_1, \ldots, a_k)$ – это наибольшая сумма, которую нельзя получить, используя только монеты с номиналами $a_1, \ldots, a_k$. Так, с помощью двух- и пятирублёвых монет можно получить любое натуральное число рублей, кроме одного и трёх. Таким образом, $F(2, 5) = 3$. Широко известен следующий факт.

Предложение 3.12. *Если* $\gcd(a, b) = 1$, *то $F(a, b) = ab - a - b$.*

Теорема 3.13. *Граф D с n вершинами и $n + 1$ дугами является графом с максимальным цепным индексом тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:*

(1) $D \cong K(a,b,c)$, *где* $\gcd(a,c)=1$.
(2) $D \cong \infty(a,b)$, *где* $\gcd(a,b)=1$.
(3) $D \cong \Theta(a,b,c)$, *где* $\gcd(a+c,b+c)=1$.

Доказательство. Теорема 3.7 показывает, что граф с максимальным цепным индексом первого типа обязан быть графом вида K, ∞ или Θ. Цепной ранг всех трех графов при любых значениях параметров a,b,c равен $n-1$. В силу леммы 2.10, достаточно доказать, что графы с описанными условиями, и только они, являются потенциально цепными.

Если граф сильно связен, то, по предложению 1.17(3), его матрица смежности неразложима. Поэтому, согласно теоремам 1.14 и 3.10, сильно связный граф является потенциально цепным тогда и только тогда, когда он примитивен, что эквивалентно выполнению равенства $\sigma(D)=1$. Из этих рассуждений сразу вытекает доказательство для случаев (2) и (3): графы ∞ и Θ сильно связны, $\sigma(\infty(a,b))=\gcd(a,b)$ и $\sigma(\Theta(a,b,c))=\gcd(a+c,b+c)$.

Теперь рассмотрим случай (1). Имеем граф $K(a,b,c)$, $\gcd(a,c)=d$, который не является сильно связным. Положим $k=(a+b+1) \pmod d$ и построим граф K' добавлением к графу K дуги $(a+b,k+1)$. Это возможно, поскольку $0 \leqslant k < d \leqslant a$. В этом графе появляется дополнительный цикл

$$1 \xrightarrow{b} a+b \xrightarrow{1} 1$$

длины

$$b+1 \equiv 0 \pmod d,$$

если $k=0$, и цикл

$$k+1 \xrightarrow{a-(k+1)} a \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{b} a+b \xrightarrow{1} k+1$$

длины

$$a-k+b+1 \equiv 0 \pmod d,$$

если $k \neq 0$. Совместно с циклами

$$1 \to 2 \to \ldots \to a \to 1,$$
$$a+b \to a+b+1 \to \ldots \to a+b+c-1 \to a+b$$

длин a и c он составляет множество всех простых ориентированных циклов графа K'. Значит, $\sigma(K')=d$. Полученный граф сильно связен, поэтому он потенциально цепной тогда и только тогда, когда $d=1$. Так как граф K' получается из K добавлением дуги, из леммы 3.8

следует, что если K' не является потенциально цепным, то и K не является потенциально цепным.

Мы доказали, что граф $K(a,b,c)$ не является потенциально цепным при $\gcd(a,c) > 1$. Теперь докажем, что любой граф $K(a,b,c)$ при $\gcd(a,c) = 1$ является потенциально цепным. Положим $l = b$, если $a = c = 1$ и $l = b + F(a,c) + 1$ в противном случае. В обоих случаях, $l = b + ac - a - c + 1$. Тогда, по предложению 3.12, для любого $t \geqslant l$ верно $1 \xrightarrow{t} a+b$. В то же время, для любой вершины i графа $K(a,b,c)$ существует путь $i \xrightarrow{t(i)} a+b$ длины $0 \leqslant t(i) \leqslant t_0 = \max\{a+b-1, c-1\}$. Так как $a+b \xrightarrow{c} a+b$, заключаем, что существует путь $i \xrightarrow{t(i)+mc} a+b$ для любого $m \geqslant 0$. Следовательно, при $m_0 = \lceil l/c \rceil$ получаем

$$i \xrightarrow{t(i)+m_0 c} a+b, \quad 1 \xrightarrow{t(i)+m_0 c} a+b.$$

Таким образом, $1 \wedge^{t(i)+m_0 c} i$, откуда, по предложению 2.14, для любой вершины i при любом $k \geqslant t(i) + m_0 c$ выполнено $1 \wedge^k i$. Тогда $1 \wedge^{t_0+m_0 c} i$ для любой вершины $i \in V(D)$. Это по определению означает, что граф $K(a,b,c)$ потенциально цепной. □

Замечание 3.14. Теорема 3.13 справедлива для графов с 2 вершинами. Однако в этом случае из трех семейств реализуются только $D \cong K(1,1,1)$ и $D \cong \infty(1,2)$, так как граф $\Theta(a,b,c)$ имеет не менее трех вершин. Оба графа являются цепными, то есть имеют цепной индекс $1 = n - 1$.

Определение 3.15 ([11, стр. 3]). *Граф (ориентированный или неориентированный) D называется бициклическим, если он содержит только два независимых цикла.*

Предложение 3.16 ([11, стр. 3]). *Если неориентированный граф D связен, то он бициклический тогда и только тогда, когда $|E(D)| = |V(D)| + 1$.*

Графы K, ∞ и Θ являются бициклическими. Но не все связные бициклические ориентированные графы имеют такой вид. Вообще говоря, вершины таких графов могут иметь нулевую полустепень захода или исхода. Тем не менее, примитивные бициклические ориентированные графы всегда имеют вид $\Theta(a,b,c)$ или $\infty(a,b)$, причём их параметры удовлетворяют ограничениям из теоремы 3.13. Следовательно, такие графы имеют максимальный цепной индекс. Однако граф

$K(a,b,c)$ показывает, что из бициклических графов с максимальным цепным индексом не все являются сильно связными. Три семейства бициклических графов K, ∞, Θ являются экстремальными для множества инвариантов и активно изучаются, см., например, [9,11,12].

Описание максимальных графов с $n+2$ дугами показывает, что не все графы с максимальным цепным индексом являются бициклическими.

§4. Максимальные графы второго типа

Напомним, что максимальные графы второго типа имеют ровно две вершины w_1, w_2, для которых $d^+ = 2$, и ровно две вершины z_1, z_2, для которых $d^- = 2$, см. определение 2.15.

Определение 4.1. *Граф W'_n с $n \geqslant 3$ вершинами и $n+2$ дугами определяется как граф Виландта W_n с добавленной петлей $1 \to 1$, см. рис. 5.*

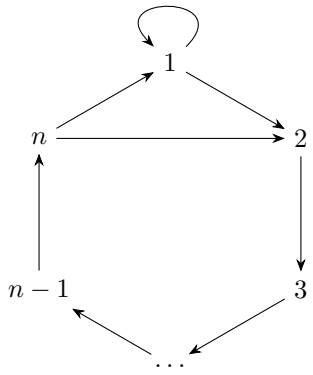


Рис. 5. Граф W'_n.

Определение 4.2. *Граф $\overline{\infty}(a,b)$, где $a, b \geqslant 2$, определяется как граф $K(a,1,b)$ с добавленной дугой $(a+b, 2)$, см. рис. 6.*

Лемма 4.3. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом второго типа и пусть существует подграф D', изоморфный W'_m или $\overline{\infty}$. Тогда $D' = D$.*

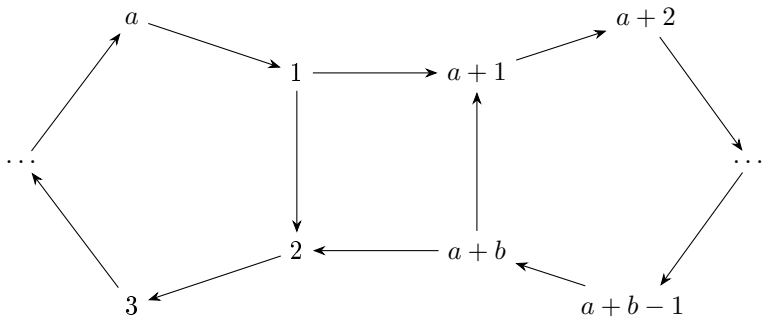


Рис. 6. Граф $\overline{\infty}(a,b)$.

Доказательство. Рассуждение полностью аналогично доказательству леммы 3.5. Графы W'_m и $\overline{\infty}$ имеют две вершины с $d^+ = 2$ и две вершины с $d^- = 2$, для остальных вершин верно $d^+ = d^- = 1$. Поэтому никакая вершина подграфа D' не соединена дугой с вершиной, не лежащей в D'. Согласно предложению 2.9, граф D связен, поэтому $V(D') = V(D)$. По определению графов W'_n и $\overline{\infty}$, $|E(D')| = |V(D')| + 2 = |V(D)| + 2 = |E(D)|$, откуда $D' = D$. □

Лемма 4.4. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом второго типа и пусть $d^+(w_i) = d^-(z_j) = 2$, $i,j \in \{1,2\}$. Тогда для любых $i,j \in \{1,2\}$ имеем $w_i \to z_j$.*

Доказательство. Согласно следствию 2.11, есть всего одна пара различных вершин u, v, такая что $u \wedge v$. Поэтому для этих u, v имеем

$$u \to z_1, \quad u \to z_2, \quad v \to z_1, \quad v \to z_2,$$

откуда получаем, что $u = w_1$, $v = w_2$. □

Следовательно, если $u \to z_i$, то $u = w_1$ или $u = w_2$, и если $w_j \to v$, то $v = z_1$ или $v = z_2$.

Следствие 4.5. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом второго типа и пусть $d^+(w_i) = d^-(z_j) = 2$, $i,j \in \{1,2\}$. Тогда для любой вершины x найдутся такие $i,j \in \{1,2\}$ и $t,r \in \mathbb{N}_0$, что $z_j \xrightarrow{t} x$ и $x \xrightarrow{r} w_i$, а для всех промежуточных вершин этих путей выполнено $d^+ = d^- = 1$.*

Доказательство. Выберем любую вершину x. Так как D – потенциально цепной граф, для некоторого $l \in \mathbb{N}$ и некоторой вершины $y \neq x$ верно $x \wedge^l y$, то есть найдётся такая вершина c, что $x \xrightarrow{l} c$ и $y \xrightarrow{l} c$. Пусть l_0 – наименьшее такое число, что $x \xrightarrow{l_0} c_0$ и $y \xrightarrow{l_0} c_0$ для некоторой вершины c_0. Тогда $d^-(c_0) > 1$. Поскольку z_1, z_2 – единственные вершины, для которых $d^- > 1$, получаем $x \xrightarrow{l_0} z_j$. Без ограничения общности можно считать, что это кратчайший путь из x в z_1 или z_2. Из леммы 4.4 следует, что тогда $x \xrightarrow{l_0-1} w_i$, причём внутренние вершины этого пути отличны от $z_{1,2}$. Кроме того, если одна из внутренних вершин пути $x \xrightarrow{l_0-1} w_i$ равна w_1 или w_2, то, по лемме 4.4, следующей за ней в этом пути будет z_1 или z_2, что противоречит минимальности пути $x \xrightarrow{l_0} z_j$. Таким образом, все внутренние вершины этого пути отличны от $w_{1,2}$ и $z_{1,2}$, то есть для них справедливо $d^+ = d^- = 1$.

Поскольку $d^-(z_j)=2$ в графе D, в графе D^T выполняется $d^+(z_j)=2$. Граф D^T является максимальным графом второго типа, и для него справедливы рассуждения предыдущего абзаца. Поэтому в этом графе существует путь $x \xrightarrow{t} z_j$. А значит, в исходном графе D выполняется $z_j \xrightarrow{t} x$. □

Теорема 4.6. *Граф D с $n \geqslant 3$ вершинами и $n+2$ дугами является графом с максимальным цепным индексом тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:*

(1) $D \cong W'_n$;
(2) $D \cong \overline{\infty}(a,b)$, *где* $\gcd(a,b) = 1$.

Доказательство. Пусть D – граф с максимальным цепным индексом, а вершины $w_1, w_2, z_1, z_2 \in V(D)$ таковы, что $d^+(w_i) = d^-(z_j) = 2$. По лемме 4.4, $w_i \to z_j$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Пусть существует пара i, j, такая что $z_i = w_j$. Используя подходящую перенумерацию вершин $z_{1,2}$ и $w_{1,2}$, можно считать, что $z_1 = w_1$, и тогда

$$z_1 \to z_1, \quad w_2 \to z_1, \quad z_1 \to z_2, \quad w_2 \to z_2.$$

Так как $d^+(z_1) = d^-(z_1) = 2$, вершина z_1 не может иметь других инцидентных дуг, кроме описанных трех. Если при этом $w_2 = z_2$, то и вершина $w_2 = z_2$ не может иметь других инцидентных дуг, кроме описанных выше. Учитывая, что $n \geqslant 3$, а D связен по предложению 2.9, приходим к противоречию. Поэтому вершины w_2 и z_2 не совпадают, и,

кроме указанных выше, должны иметь еще по одной входящей и исходящей дуге соответственно. Значит, для некоторой вершины $u \neq z_{1,2}$ имеем $z_2 \to u$. По следствию 4.5, для некоторого i существует путь $u \xrightarrow{t} w_i$, в котором все промежуточные вершины имеют $d^+ = d^- = 1$. Так как $w_1 = z_1$, $d^-(w_1) = 2$, и существуют ровно две различные входящие дуги $z_1 \to z_1$ и $w_2 \to z_1$, то случай $i = 1$ возможен только при $u = w_2$. Пусть длина кратчайшего такого пути равна $t_0 \in \mathbb{N}_0$. Получили подграф W'_{t_0+3}, где $w_1 = z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $w_2 = t_0{+}3$ и $t_0{+}3 = |V(D')|$. По лемме 4.3, $D = W'_{t_0+3} = W'_n$.

Граф W'_n имеет петлю $1 \to 1$. Как сильно связный граф с $\sigma(W'_n) = 1$, он является примитивным, а значит, и потенциально цепным. В W'_n пересекаются ровно две вершины – 1 и n, то есть $\mathrm{crk}(W'_n) = n - 1$ и, по лемме 2.10, $\mathrm{CI}(W'_n) = n - 1$.

Если $z_i \neq w_j$ для всех $i, j \in \{1, 2\}$, то $z_1 \to u_1$, $z_2 \to u_2$, где среди $u_{1,2}, z_{1,2}$ нет совпадающих вершин. Действительно, если $u_i = z_j$ для некоторых $i, j \in \{1, 2\}$, то $z_i \to z_j$, что невозможно, так как $w_1 \to z_j$, $w_2 \to z_j$ и $d^-(z_j) = 2$. Если же $u_1 = u_2$, то $d^-(u_1) = 2$, откуда следовало бы, что $u_1 = z_j$. По следствию 4.5, для $i \in \{1, 2\}$ существует путь $u_i \xrightarrow{t_i} w_{j(i)}$ длины $t_i \in \mathbb{N}_0$, все промежуточные вершины которого имеют $d^+ = d^- = 1$. Будем считать, что эти пути – кратчайшие из возможных, и покажем, что подходящей перенумерацией вершин $w_{1,2}$ можно добиться равенства $j(i) = i$ для $i \in \{1, 2\}$. Предположим, что $j(1) = j(2) = 1$. Все вершины путей $u_i \xrightarrow{t_i} w_1$ имеют $d^- = 1$. Поэтому равенство $t_1 = t_2$ противоречило бы условию $u_1 \neq u_2$, а из $t_2 > t_1$ следует, что либо $u_1 = w_1$, либо u_1 является промежуточной вершиной для $u_2 \xrightarrow{t_2} w_1$. Но $z_1 \to u_1$ и $d^-(u_1) = 1$, поэтому либо $u_2 = z_1$, либо вершина z_1 является промежуточной для этого пути – противоречие.

Рассмотрим пути $z_1 \to u_1 \xrightarrow{t_1} w_1$ и $z_2 \to u_2 \xrightarrow{t_2} w_2$. Они имеют длину $a{-}1$ и $b{-}1$, где $a = t_1{+}2$, $b = t_2{+}2$. Эти пути не пересекаются: их концы $z_{1,2}, w_{1,2}$ попарно различны, общая вершина была бы внутренней, но для внутренних вершин справедливо $d^+ = d^- = 1$. Получаем подграф $\overline{\infty}(a, b)$, где $w_1 = 1$, $w_2 = a{+}b$, $z_1 = 2$, $z_2 = a{+}1$ и $a, b \geqslant 2$. По лемме 4.3, $D = \overline{\infty}(a, b)$.

По теореме 1.14, сильно связный граф $\overline{\infty}(a, b)$ является потенциально цепным тогда и только тогда, когда он примитивен, что, по теореме 3.10, эквивалентно условию $\sigma(\overline{\infty}(a, b)) = 1$. То есть $\overline{\infty}(a, b)$ является

потенциально цепным тогда и только тогда, когда $\gcd(a,b)=1$. В графе $\overline{\infty}(a,b)$ тоже пересекаются ровно две вершины – это 1 и $n=a+b$, то есть $\mathrm{crk}(\overline{\infty}(a,b)) = n-1$. Аналогично случаю с W'_n, с помощью леммы 2.10 получаем, что $\mathrm{CI}(\overline{\infty}(a,b)) = n-1$. □

Для удобства читателя и ясности изложения сформулируем отдельно итоговую полную классификацию графов с максимальным цепным индексом.

Теорема 4.7. I. *Ориентированный граф D на 2 вершинах имеет максимальный цепной индекс тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:*

(1) $D \cong K(1,1,1)$;
(2) $D \cong \infty(1,2)$;
(3) D *– полный ориентированный граф на* 2 *вершинах, то есть*

$$D = D\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

II. *Ориентированный граф D на $n \geqslant 3$ вершинах имеет максимальный цепной индекс тогда и только тогда, когда выполняется одно из пяти условий:*

(1) $D \cong K(a,b,c)$, *где* $a,b,c \geqslant 1$ *и* $\gcd(a,c)=1$;
(2) $D \cong \infty(a,b)$, *где* $a,b \geqslant 1$, $a+b>2$ *и* $\gcd(a,b)=1$;
(3) $D \cong \Theta(a,b,c)$, *где* $a,b,c \geqslant 1$, $a+b>2$ *и* $\gcd(a+c,b+c)=1$;
(4) $D \cong W'_n$;
(5) $D \cong \overline{\infty}(a,b)$, *где* $a,b \geqslant 2$ *и* $\gcd(a,b)=1$.

Доказательство. Сперва рассмотрим случай графа на двух вершинах. По лемме 2.16, граф с максимальным цепным индексом на двух вершинах имеет либо $n+1=3$, либо $n+2=4$ дуги. Согласно замечанию 3.14, граф D на двух вершинах с тремя дугами является максимальным тогда и только тогда, когда либо $D \cong K(1,1,1)$, либо $D \cong \infty(1,2)$. Если же D имеет 4 различные дуги, то он является полным ориентированным графом. Все элементы его матрицы смежности положительны. Такой граф имеет цепной индекс $1 = n-1$, поэтому первая часть теоремы установлена.

Вторая часть теоремы для графов на $n \geqslant 3$ вершинах получается комбинированием теорем 3.13 и 4.6. □

Предложение 4.8. *Если графы принадлежат различным семействам из перечисленных в теореме* 4.7*, то они не изоморфны между собой.*

Доказательство. Случай $n = 2$ проверяется непосредственно. Пусть $n \geqslant 3$. Графы из семейств (1)–(3) имеют $n+1$ дугу, а графы из семейств (4)–(5) имеют $n+2$ дуги. Граф $K(a, b, c)$ не является сильно связным, в отличие от графов остальных семейств. В графе $\infty(a, b)$ только два простых цикла имеют одну общую вершину, а в графе $\Theta(a, b, c)$ они имеют хотя бы одну общую дугу. Граф W'_n содержит петлю, а в графе $\overline{\infty}(a, b)$ петель нет. □

Определение 4.9. Минимальное множество разрезающих дуг *ориентированного графа – это минимальный по размеру набор дуг, после удаления которых в графе не остается ориентированных циклов.*

Эта характеристика является аналогом цикломатического числа неориентированного графа, однако в общем случае её вычисление представляет более трудную задачу.

Следствие 4.10. *Граф с максимальным цепным индексом на $n \geqslant 3$ вершинах имеет минимальное множество разрезающих дуг мощности не больше* 2.

Доказательство. В графе $K(a, b, c)$ достаточно удалить дуги $(a, 1)$ и $(a + b + c - 1, a + b)$. В графе $\infty(a, b)$, если $a = 1$ или $b = 1$, достаточно удалить петлю и любую другую дугу. В противном случае достаточно удалить дуги $(1, 2)$ и $(1, a + 1)$. В графе Θ достаточно удалить дугу $(a + 1, a + b + 1)$, если $c \geqslant 2$, и дугу $(a + 1, 1)$, если $c = 1$. В графе W'_n достаточно удалить дуги $(1, 1)$ и $(2, 3)$. В графе $\overline{\infty}$ достаточно удалить $(a, 1)$ и $(a + 1, a + 2)$. □

§5. Значение экспоненты максимальных графов

Полученное описание максимальных графов позволяет непосредственно вычислить их экспоненту.

Лемма 5.1.

(1) *В графе $\infty(a, b)$ множество длин путей $1 \xrightarrow{t} 1$ имеет вид*

$$\{xa + yb \mid x, y \geqslant 0\}.$$

(2) *В графе* $\Theta(a,b,c)$ *множество длин путей* $1 \xrightarrow{t} 1$ *имеет вид*

$$\{x(a+c)+y(b+c) \mid x,y \geqslant 0\}.$$

(3) *В графе* $\overline{\infty}(a,b)$ *множества длин путей* $1 \xrightarrow{t} a+1$, $1 \xrightarrow{t} 2$, $a+b \xrightarrow{t} a+1$, $a+b \xrightarrow{t} 2$ *совпадают и имеют вид*

$$\{1+xa+yb \mid x,y \geqslant 0\}.$$

Доказательство. (1) В графе $\infty(a,b)$ любой путь $1 \xrightarrow{t} 1$ раскладывается в композицию путей вида $1 \xrightarrow{a} 1$ и $1 \xrightarrow{b} 1$.

(2) В графе $\Theta(a,b,c)$ любой путь $1 \xrightarrow{t} 1$ раскладывается в композицию путей вида $1 \xrightarrow{a+c} 1$ и $1 \xrightarrow{b+c} 1$.

(3) Рассмотрим граф $\overline{\infty}(a,b)$. Путь $1 \xrightarrow{t} a+1$ при $t>1$ имеет либо вид $1 \xrightarrow{t-1} 1 \to a+1$, либо вид $1 \xrightarrow{t-1} a+b \to a+1$. Оба пути $1 \xrightarrow{t-1} 1$ и $1 \xrightarrow{t-1} a+b$ являются композициями путей вида $1 \xrightarrow{a} 1$, $1 \xrightarrow{b} a+b$, $a+b \xrightarrow{b} a+b$ и $a+b \xrightarrow{a} 1$. Нетрудно убедиться, что любое значение вида $xa+yb$ получается некоторой композицией таких путей. Аналогично доказывается утверждение для множеств длин остальных трех путей $1 \xrightarrow{t} 2$, $a+b \xrightarrow{t} a+1$ и $a+b \xrightarrow{t} 2$. □

Теорема 5.2.

(1) $\exp(K(a,b,c)) = 0$.

(2) *Если* $\gcd(a,b)=1$ *и* $a<b$, *то* $\exp(\infty(a,b)) = (a+1)(b-1)$.

(3) *Если* $\gcd(a+c,b+c)=1$ *и* $a<b$, *то*

$$\exp(\Theta(a,b,c)) = (a+c+1)(b+c-1)-c.$$

(4) $\exp(W'_n) = 2n-3$.

(5) *Если* $\gcd(a,b)=1$ *и* $a<b$, *то* $\exp(\overline{\infty}(a,b)) = (a+1)(b-1)+1$.

Доказательство. (1) Граф K не является сильно связным, поэтому он не является примитивным.

(2) В графе $\infty(a,b)$ для любых вершин i,j имеем $i \xrightarrow{t_1} 1 \xrightarrow{t_2} j$, где $0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant b-1$. Согласно предложению 3.12 и лемме 5.1, для всех $h \geqslant F(a,b)+1 = (a-1)(b-1)$ верно $1 \xrightarrow{h} 1$. Следовательно,

$$\exp(\infty(a,b)) \leqslant 2(b-1)+(a-1)(b-1) = (a+1)(b-1).$$

Докажем, что экспонента не меньше этого же значения. Рассмотрим вершины $a+1$ и $a+b-1$. Любой путь из $a+1$ в $a+b-1$ длины больше $b-2$ имеет вид

$$a+1 \xrightarrow{b-1} 1 \xrightarrow{m} 1 \xrightarrow{b-1} a+b-1,$$

где $m = xa + yb$, $x, y \geqslant 0$. Существование пути такого вида, имеющего длину $(a+1)(b-1)-1 = ab+b-a-2$, означает, что

$$a+1 \xrightarrow{b-1} 1 \xrightarrow{ab-b-a} 1 \xrightarrow{b-1} a+b-1,$$

а это противоречит предложению 3.12 в силу леммы 5.1.

(3) В графе $\Theta(a,b,c)$ для любой вершины i справедливо $i \xrightarrow{t_1} 1$, где $0 \leqslant t_1 \leqslant b+c-1$. В силу леммы 5.1, для любых $x, y \geqslant 0$ имеем

$$1 \xrightarrow{x(a+c)+y(b+c)} 1.$$

Следовательно, для любого $h \geqslant F(a+c, b+c)+1$ существует путь $i \xrightarrow{t_1} 1 \xrightarrow{h} 1$. Заметим, что любой путь $1 \xrightarrow{h} 1$ заканчивается отрезком

$$a+1,\ a+b+1,\ \ldots,\ a+b+c-1.$$

Если вершина j ему принадлежит, то $1 \xrightarrow{h-l} j$ для некоторого $1 \leqslant l \leqslant c$. Следовательно, для таких j существует путь $i \xrightarrow{t_1} 1 \xrightarrow{h-l} j$. Тогда для любого $r \geqslant 0$ существует путь из i в j длины $b+c-1+F(a+c, b+c)+r$.

Если же j не лежит в множестве $\{a+1, a+b+1, \ldots, a+b+c-1\}$, то $1 \xrightarrow{t_2} j$, где $t_2 \leqslant b-1$. Тогда для любого $h \geqslant F(a+c, b+c)+1$ существует путь $i \xrightarrow{t_1} 1 \xrightarrow{h} 1 \xrightarrow{t_2} j$, то есть для любого $r \geqslant 0$ существует путь из i в j длины $b+c-1+F(a+c, b+c)+b+r$. В обоих случаях получаем, что для любого $r \geqslant 0$ существует путь длины

$$\begin{aligned} b+c-1+(a+c-1)(b+c-1)-1+b+r \\ = (a+c+1)(b+c-1)-c+r, \end{aligned}$$

то есть $\exp(\Theta(a,b,c)) \leqslant (a+c+1)(b+c-1)-c$.

Чтобы убедиться, что последнее неравенство обращается в равенство, достаточно рассмотреть путь из $a+2$ в $a+b$:

$$a+2 \xrightarrow{b+c-1} 1 \xrightarrow{h} 1 \xrightarrow{b-1} a+b.$$

Если $b+c-1+h+b-1 = (a+c+1)(b+c-1)-c-1$, то $h = (a+c)(b+c)-(a+c)-(b+c)$. Это противоречит предложению 3.12, ведь, по лемме 5.1, длина пути из 1 в 1 может быть равна только $h = x(a+c)+y(b+c)$.

(4) В графе W'_n для любых вершин i, j и любого $h \geqslant 0$ существует путь

$$i \xrightarrow{n-i+1} 1 \xrightarrow{h} 1 \xrightarrow{j-1} j,$$

то есть $i \xrightarrow{n-i+j+h} j$. Выражение $n-i+j$ принимает значение, большее чем $2n-3$, только на парах $(i,j) \in \{(1,n),(1,n-1),(2,n)\}$. Нетрудно видеть, что $1 \xrightarrow{j-1+h} j$ для любой вершины j и любого h. Кроме того, существует путь из 2 в n длины $2n-3$, так как $2 \xrightarrow{n-2} n$ и $n \xrightarrow{n-1} n$. Тем самым мы доказали, что для любых i, j и любого $h \geqslant 0$ существует путь $i \xrightarrow{2n-3+h} j$, откуда $\exp(W'_n) \leqslant 2n-3$.

Пути длины $2n-4$ из 2 в n не существует, поэтому $\exp(W'_n) = 2n-3$.

(5) В графе $\overline{\infty}(a,b)$ для любой вершины i имеем либо $i \xrightarrow{t_1} 1$, $0 \leqslant t_1 \leqslant a-1$, либо $i \xrightarrow{t_1} a+b$, $0 \leqslant t_1 \leqslant b-1$. Для любой вершины j имеем либо $2 \xrightarrow{t_2} j$, $0 \leqslant t_2 \leqslant a-1$, либо $a+1 \xrightarrow{t_2} j$, $0 \leqslant t_2 \leqslant b-1$. Используя лемму 5.1(3), получаем, что для любых вершин i, j и любого числа $h \geqslant F(a,b)+1 = (a-1)(b-1)$ существует путь

$$i \xrightarrow{t_1+t_2+h+1} j, \qquad 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant b-1,$$

откуда

$$\exp(\overline{\infty}(a,b)) \leqslant 2(b-1)+(a-1)(b-1)+1 = (a+1)(b-1)+1.$$

Покажем, что это неравенство обращается в равенство. Любой путь из $a+1$ в $a+b$ может иметь длину $xb+b-1$, $x \geqslant 0$, или $(x+1)a+(y+1)b+b-1$, где $x, y \geqslant 0$. Существование пути

$$a+1 \xrightarrow{(a+1)(b-1)} a+b$$

возможно, таким образом, в одном из двух случаев:

(i) либо $xb+b-1 = (a+1)(b-1)$, но тогда $xb = a(b-1)$, что невозможно, так как $b > 1$, $x \in \mathbb{Z}$ и

$$\gcd(a,b) = \gcd(b-1,b) = 1,$$

(ii) либо $(x+1)a+(y+1)b+b-1=(a+1)(b-1)$, но тогда

$$(x+1)a+yb=ab-a-b,$$

что противоречит предложению 3.12. □

§6. Число максимальных графов на n вершинах

В этом параграфе мы получим формулы для числа неизоморфных друг другу графов с $n \geqslant 3$ вершинами, имеющих максимальный цепной индекс.

Следующий факт широко известен и проверяется непосредственно.

Лемма 6.1. *Число пар натуральных чисел a, b, для которых $a < b$, $\gcd(a,b) = 1$ и $a+b=n$, где $n \geqslant 3$, равно $\varphi(n)/2$, где φ – функция Эйлера.*

В силу предложения 4.8, графы, принадлежащие различным семействам из теоремы 4.7, не изоморфны между собой. Посчитаем отдельно число графов каждого из пяти видов и вычислим асимптотику полученных значений. Для этого достаточно посчитать число наборов параметров a, b, c, удовлетворяющих условиям теоремы 4.7.

$K(a,b,c)$: Условие: $2 \leqslant a+c \leqslant n$, $\gcd(a,c)=1$. Заметим, что дополнительное ограничение $a < c$ не требуется: при $a \neq c$ граф $K(a,b,c)$ не изоморфен $K(c,b,a)$. Таким образом, для каждого $2 \leqslant m \leqslant n$ число пар с условием $a+c=m$ равно $\varphi(m)$, откуда

$$|K| = \sum_{i=2}^{n} \varphi(i).$$

Пользуясь известной оценкой суммы первых n значений функции Эйлера, см. [7, теорема 330], получаем

$$|K| = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) - 1 = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \log n) - 1 = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \log n).$$

$\infty(a,b)$: Условие: $a+b=n+1$, $\gcd(a,b)=1$. При этом $\infty(a,b)$ изоморфен $\infty(b,a)$. Тогда

$$|\infty| = \frac{\varphi(n+1)}{2}.$$

Так как $\varphi(n) < n$, то $|\infty| = O(n)$.

$\overline{\infty}(a,b)$: Условие: $a,b>1$, $a+b=n$, $\gcd(a,b)=1$. При этом $\overline{\infty}(a,b)$ изоморфен $\overline{\infty}(b,a)$. Тогда

$$|\overline{\infty}| = \frac{\varphi(n)}{2} - 1,$$

откуда $|\overline{\infty}| = O(n)$.

W'_n: Имеем один граф с точностью до изоморфизма.

$\Theta(a,b,c)$: Условие: $a+b+c=n+1$, $a<b$, $\gcd(a+c,b+c)=1$.

Положив $x=a+c$, $y=b+c$, получим условия

$$0<x<y<n+1, \quad x+y>n+1, \quad \gcd(x,y)=1.$$

Для функции Мёбиуса μ выполнено равенство

$$\sum_{d|\gcd(x,y)} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \gcd(x,y)=1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому число искомых пар x,y будет равно

$$|\Theta| = \sum_{\substack{0<x<y<n+1,\\ x+y>n+1}} \left(\sum_{d|x,d|y} \mu(d) \right) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) N_d,$$

где

$$M_d = \{(x,y) \mid 0<x<y<n+1,\ x+y>n+1,\ d|x,\ d|y\},$$
$$N_d = |M_d|.$$

Для $x,y \in M_d$ имеем $x=ud$ и $y=vd$, тогда

$$N_d = \left|\left\{(u,v) \mid 0<u<v<\tfrac{n+1}{d},\ u+v>\tfrac{n+1}{d}\right\}\right|.$$

При фиксированном u получаем, что

$$\max\left(\tfrac{n+1}{d}-u, u\right) < v < \tfrac{n+1}{d},$$

поэтому число пар (u,v) равно

$$\begin{cases} u+\varepsilon, & u < \frac{n+1}{2d}, \\ \frac{n+1}{d}-u+\varepsilon, & u \geqslant \frac{n+1}{2d}, \end{cases}$$

где $|\varepsilon| \leqslant 2$. Таким образом,

$$\left| N_d - \tfrac{n^2}{4d^2} \right| \leqslant C\tfrac{n}{d},$$

где $C>0$ – некоторая фиксированная константа. Тогда, так как $|\mu(d)| \leqslant 1$, имеем

$$\left||\Theta| - \frac{n^2}{4}\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}\right| = \left|\sum_{d=1}^{n}\mu(d)N_d - \sum_{d=1}^{n}\mu(d)\frac{n^2}{4d^2}\right|$$
$$\leqslant \sum_{d=1}^{n}|\mu(d)|\left|N_d - \frac{n^2}{4d^2}\right| \leqslant \sum_{d=1}^{n} C\frac{n}{d} = Cn\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d} = O(n\log n),$$

где последнее равенство получено по формуле Эйлера–Маклорена.

Используем равенство $\sum\limits_{d\leqslant n}\mu(d)/d^2 = 6/\pi^2 + O(1/n)$, которое следует из выражения для ряда Дирихле $\sum\limits_{d=1}^{\infty}\mu(d)/d^s = 1/\zeta(s)$, тогда

$$|\Theta| = \frac{n^2}{4}\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(n\log n) = \frac{3n^2}{2\pi^2} + O(n\log n).$$

Из вычислений следует, что основной вклад в число максимальных графов вносится графами вида K и Θ. Подводя итоги, получаем, что число максимальных графов равно

$$|K|+|\Theta|+|\infty|+|\overline{\infty}|+|W_n'| = \frac{3n^2}{\pi^2}+\frac{3n^2}{2\pi^2}+O(n\log n)+O(n) = \frac{9n^2}{2\pi^2}+O(n\log n).$$

Список литературы

1. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 5–25.
2. Ю. А. Альпин, А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев, *Верхняя граница цепного индекса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2023), 5–17.
3. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, Москва, 1966.
4. А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев, *Неравенства Фробениуса и Сильвестра для цепного ранга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **534** (2024), 35–56.
5. Е. Р. Шафеев, *Линейные биективные отображения, сохраняющие цепной индекс.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **542** (2025), 190–213.
6. R. A. Brualdi, H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
7. G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers.* 4th edn. Oxford University Press, Oxford, 1960.
8. D. J. Hartfiel, C. J. Maxson, *The chainable matrix, a special combinatorial matrix.* — Discrete Math. **12** (1975), 245–256.
9. H. Lin, J. Shu, *A note on the spectral characterization of strongly connected bicyclic digraphs.* — Linear Algebra Appl. **436**, No. 7 (2012), 2524–2530.

10. R. Sinkhorn, P. Knopp, *Problems involving diagonal products in nonnegative matrices.* — Trans. Amer. Math. Soc. **136** (1969), 67–75.
11. J. Wang, F. Belardo, Q. Huang, E. M. Li Marzi, *On the spectral characterization of theta graphs.* — MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **62** (2009), 581–598.
12. J. Wang, F. Belardo, Q. Huang, E. M. Li Marzi, *Spectral characterizations of dumbbell graphs.* — Electron. J. Combin. **17**, No. 1 (2010), R42.
13. H. Wielandt, *Unzerlegbare, nicht negative Matrizen.* — Math. Z. **52** (1950), 642–648.

Guterman A. E., Zhilina S. A., Shafeev E. R. Graphs with the largest chainable index and their properties.

This paper provides a complete characterization of the set of graphs with the largest chainable index. In particular, it is shown that the number of arcs and vertex degrees of such a graph are strictly determined. Moreover, graphs with the largest chainable index form five parametric families, and exactly one of them consists of graphs that are not strongly connected. As a result, the number of graphs on n vertices with the largest chainable index is computed, and the values of the primitive exponents for these graphs are determined.

Поступило 21 сентября 2026 г.

Университет Бар-Илан,
Рамат-Ган, 5290002, Израиль
E-mail: alexander.guterman@biu.ac.il

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики, Москва, 119991, Россия
E-mail: s.a.zhilina@gmail.com

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики, Москва, 119991, Россия
E-mail: shafeev.ev@yandex.ru