Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 554, 2026 г.

**А. В. Власов, А. Э. Гутерман, С. А. Жилина**

# АДДИТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НЕВЗВЕШЕННЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ, СОХРАНЯЮЩИЕ ОТДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛИНЫ ЦИКЛОВ

## §1. Введение

Множество $\mathcal{S}$ с двумя бинарными операциями – сложением и умножением – называется *полукольцом*, если

(1) $\mathcal{S}$ является коммутативным моноидом с нейтральным элементом 0 относительно сложения;
(2) $\mathcal{S}$ является полугруппой относительно умножения;
(3) умножение дистрибутивно относительно сложения;
(4) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ для любого $a \in \mathcal{S}$.

Особую роль в алгебре играет *тропическое полукольцо* $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями тропического сложения $\oplus$ и тропического умножения $\otimes$, определёнными следующим образом:

$$\begin{aligned} &a \oplus b = \max\{a, b\}, && \\ &a \otimes b = a + b && \text{для всех } a, b \in \mathbb{R}, \\ &a \oplus (-\infty) = (-\infty) \oplus a = a, && \\ &a \otimes (-\infty) = (-\infty) \otimes a = -\infty && \text{для любого } a \in \mathbb{R}_{\max}. \end{aligned}$$

Элемент $-\infty$ является нейтральным относительно тропического сложения, а 0 – относительно тропического умножения.

Если $\mathcal{S}$ – полукольцо, то множество $M_n(\mathcal{S})$ квадратных матриц порядка $n$ над $\mathcal{S}$ также является полукольцом. Множество матриц над тропическим полукольцом будем для краткости обозначать $M_n$. Далее всюду будем считать, что $n \geqslant 2$.

---

*Ключевые слова*: тропическая линейная алгебра, индекс цикличности, длина цикла, линейные сохраняющие отображения, аддитивные отображения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению No. 075-15-2025-345.

При изучении тропических матриц удобно рассматривать взвешенные ориентированные графы. А именно, каждой матрице $A \in M_n$ сопоставим граф $G(A)$ на вершинах $1, \ldots, n$, в котором дуга из вершины $i$ в вершину $j$ имеет вес $A_{ij}$, если $A_{ij} \neq -\infty$, и отсутствует в противном случае. Кроме того, матрице $A \in M_n$ можно также сопоставить невзвешенный ориентированный граф $\widehat{G}(A)$, полученный из $G(A)$ удалением весов всех дуг. Все рассматриваемые графы не имеют кратных дуг, но могут содержать петли. Матрица $A$ называется *неразложимой*, если граф $G(A)$ сильно связен. Под *циклом* мы всегда будем понимать простой ориентированный цикл, то есть замкнутый путь без повторения вершин, за исключением совпадающих начальной и конечной вершин. Петля является циклом длины 1.

Реализация тропических матриц в виде графов находит применения во многих теоретических и практических задачах. Так, тропические матрицы играют важную роль в алгоритмах на графах, теории расписаний, а также анализе производственных и логистических систем. Они также применяются в анализе данных и машинном обучении: например, факторизация тропических матриц используется для восстановления пропущенных значений в разреженных данных.

Одним из ключевых инвариантов тропических матриц является *индекс цикличности*. Он определяется сначала для ориентированных графов, а затем для тропических матриц.

**Определение 1.1.** *Пусть $G$ – ориентированный граф. Его индекс цикличности $\sigma_G$ определяется следующим образом:*

- *если $G$ сильно связен и не содержит циклов, то $\sigma_G = 1$;*
- *если $G$ сильно связен и содержит хотя бы один цикл, то $\sigma_G$ равен наибольшему общему делителю длин всех циклов в $G$;*
- *если $G$ не является сильно связным, то $\sigma_G$ равен наименьшему общему кратному индексов цикличности всех его сильно связных компонент.*

Индексом цикличности тропической матрицы $A$ называется индекс цикличности критического подграфа $G_c(A)$ графа $G(A)$, то есть объединения всех циклов с максимальным средним весом в $G(A)$. Как показывает следующая теорема, индекс цикличности играет важную роль при исследовании поведения степеней тропических матриц.

**Теорема 1.2** ([10, теорема 3.9])**.** *Пусть $A \in M_n$ – неразложимая тропическая матрица с конечным собственным значением $\lambda$ и индексом*

*цикличности $\sigma$. Тогда существует такое натуральное число $N$, что для любого натурального $t \geqslant N$ выполнено*

$$A^{\otimes(t+\sigma)} = \lambda^{\otimes\sigma} \otimes A^{\otimes t}.$$

После определения инварианта естественным образом возникает вопрос о том, какие преобразования его сохраняют. Одним из первых подобной задачей занимался Фробениус [5], охарактеризовавший биективные линейные отображения комплексных матриц, сохраняющие определитель. Позже этот результат был существенно усилен Шуром [12] и Дьёдонне [4]. В дальнейшем многие авторы исследовали отображения, сохраняющие различные инварианты матриц над различными алгебраическими структурами, см. [2, 3, 8, 11] и их библиографию.

Будем говорить, что отображение $T : M_n \to M_n$ *сохраняет индекс цикличности*, если $\sigma(T(A)) = \sigma(A)$ для любой матрицы $A \in M_n$, и что отображение $T$ *сохраняет значение $k$ индекса цикличности*, если для любой матрицы $A \in M_n$ из равенства $\sigma(A) = k$ следует $\sigma(T(A)) = k$. Отображение $T$ называется *линейным*, если

$$T(\alpha \otimes A \oplus \beta \otimes B) = \alpha \otimes T(A) \oplus \beta \otimes T(B)$$

для любых $A, B \in M_n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$.

Линейные отображения тропических матриц, сохраняющие индекс цикличности, ранее рассматривались в [1, 6, 7]. В работе [6] получено описание биективных линейных отображений, сохраняющих индекс цикличности, а в [7] дана полная характеризация таких отображений без требования биективности. В [1] показано, что сохранение всех значений индекса цикличности равносильно одновременному сохранению его значений 1 и 2. В следующей работе [9] мы рассмотрим биективные линейные отображения тропических матриц, сохраняющие отдельные значения индекса цикличности. В частности, мы получим характеризацию отображений, сохраняющих значение 1, и исследуем случай сохранения одного фиксированного значения $k \geqslant 3$ при $n \geqslant \max(k, 4)$.

Пусть $\widehat{M}_n$ – множество невзвешенных ориентированных графов без кратных дуг на фиксированном множестве вершин $\{1, \ldots, n\}$. Операцию объединения графов определим как объединение их множеств дуг. Отображение $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ назовём *аддитивным*, если

$$S(\widehat{G}_1 \cup \widehat{G}_2) = S(\widehat{G}_1) \cup S(\widehat{G}_2)$$

для любых $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2 \in \widehat{M}_n$. Ясно, что для любых матриц $A, B \in M_n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $\widehat{G}(A \oplus B) = \widehat{G}(A) \cup \widehat{G}(B)$ и $\widehat{G}(\alpha \otimes A) = \widehat{G}(A)$. Следовательно, каждое линейное отображение матриц $T : M_n \to M_n$ индуцирует аддитивное отображение графов $\widehat{T} : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$, заданное формулой $\widehat{T}(\widehat{G}(A)) = \widehat{G}(T(A))$ для всех $A \in M_n$. Для этого достаточно задать значения $\widehat{T}$ на графах, содержащих только одну дугу, а затем продолжить $\widehat{T}$ по аддитивности. При этом, если $T$ биективно, то и $\widehat{T}$ тоже биективно.

**Определение 1.3.** *Будем говорить, что отображение $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ сохраняет значение $k$ длины циклов, если всякий граф, дугами которого являются в точности дуги одного цикла длины $k$, оно переводит в граф того же вида. Отображение $S$ сохраняет длину циклов, если оно сохраняет все её значения.*

В работе [9] мы покажем, что:

(1) если биективное линейное отображение $T : M_n \to M_n$ сохраняет значение 1 индекса цикличности, то индуцированное отображение $\widehat{T} : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ сохраняет длину циклов;
(2) если биективное линейное отображение $T : M_n \to M_n$ сохраняет значение $k$ индекса цикличности, $k \leqslant n$, то индуцированное отображение $\widehat{T}$ сохраняет значение $k$ длины циклов.

Таким образом, для описания линейных отображений тропических матриц, сохраняющих отдельные значения индекса цикличности, необходимо охарактеризовать аддитивные отображения невзвешенных ориентированных графов, сохраняющие отдельные значения длины циклов. Этой задаче и посвящена настоящая работа.

Отметим, что эта тема представляет и независимый интерес. Так, Томассен [13] доказал, что если существует такое биективное отображение дуг двух сильно связных турниров с конечным множеством вершин, что оно само и обратное к нему сохраняют значение 4 длины циклов, то эти турниры либо изоморфны, либо антиизоморфны. Кроме того, в работе Вудалла [14] было показано, что если $G$ и $H$ – неориентированные графы без мостов, то изоморфизм между целочисленными группами циклов графов $G$ и $H$, сохраняющий длины циклов, существует тогда и только тогда, когда $G$ и $H$ имеют изоморфные матроиды циклов.

Наша работа организована следующим образом. В §2 рассматриваются аддитивные отображения невзвешенных ориентированных графов на $n$ вершинах, сохраняющие значения 2 и 3 длины циклов. В лемме 2.3 показано, что если множество непетлевых дуг является инвариантным относительно такого отображения, то при любом $n \geqslant 2$ оно биективно действует на этом множестве и имеет так называемый канонический вид. А именно, такое отображение соответствует перенумерованию вершин графа и, возможно, изменению ориентации всех его дуг. В §§3 и 4 изучены аддитивные отображения, сохраняющие одно значение $k \geqslant 3$ длины циклов, для которых множество непетлевых дуг также является инвариантным. Основным результатом работы является теорема 4.5, согласно которой при $n \geqslant \max(k+1, 5)$ сужение такого отображения на множество непетлевых дуг биективно, а при любом $n \geqslant \max(k, 4)$ из биективности этого сужения вытекает канонический вид отображения. Примеры 3.3–3.5, 4.3 и 4.6 показывают, что все ограничения этой теоремы являются существенными.

## §2. Аддитивные отображения графов, сохраняющие значения 2 и 3 длины циклов

Для удобства изложения введём следующие обозначения. Через $\widehat{\mathcal{E}}_n$ обозначим множество графов из $\widehat{M}_n$ с единственной дугой, через $\widehat{\mathcal{D}}_n$ – его подмножество, состоящее из графов с единственной петлёй, а через $\widehat{\mathcal{N}}_n$ – подмножество графов с единственной непетлевой дугой. Граф с единственной дугой из вершины $i$ в вершину $j$ будем отождествлять с этой дугой и обозначать через $e_{ij}$.

Для непетлевой дуги $e = e_{ij}$ положим $\overline{e} = e_{ji}$, тогда дуги $e$ и $\overline{e}$ называются *взаимно обратными*. Дуги $e_1, e_2 \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ назовём *последовательными*, если конец одной из них совпадает с началом другой и $e_1, e_2$ не являются взаимно обратными. Различные дуги $e_1, e_2 \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ назовём *смежными*, если они инцидентны хотя бы одной общей вершине.

Доказательства предложения 2.1 и леммы 2.3 основаны на доказательствах предложения 2.8 и леммы 2.10 в [1], но перенесены на более общий случай.

**Предложение 2.1.** *Пусть $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ – аддитивное отображение невзвешенных графов, сохраняющее значения 2 и 3 длины циклов, и множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ является инвариантным относительно отображения $S$. Тогда преобразование $S$ отображает любые две смежные непетлевые дуги в смежные непетлевые дуги, причём*

(1) *взаимно обратные дуги отображаются во взаимно обратные,*
(2) *последовательные дуги отображаются в последовательные,*
(3) *смежные непоследовательные не взаимно обратные дуги отображаются в смежные непоследовательные не взаимно обратные дуги.*

**Доказательство.** (1) Так как $S$ отображает цикл длины 2 в цикл длины 2, для любой дуги $e \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ выполнено $S(\overline{e}) = \overline{S(e)}$.

(2) Пусть теперь дуги $e_1, e_2 \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ являются последовательными. Тогда существует цикл длины 3 вида $e_1 \cup e_2 \cup e_3$. Поскольку $S$ отображает цикл длины 3 в цикл длины 3, то $S(e_1 \cup e_2 \cup e_3) = S(e_1) \cup S(e_2) \cup S(e_3)$ – тоже цикл длины 3. Следовательно, $S(e_1)$ и $S(e_2)$ – последовательные дуги.

(3) Наконец, пусть $e_1, e_2 \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ – смежные непоследовательные дуги, не образующие цикл длины 2. Тогда дуги $e_1$ и $\overline{e_2}$ являются последовательными, поэтому, по доказанному, их образы $S(e_1)$ и $S(\overline{e_2}) = \overline{S(e_2)}$ тоже последовательные. Значит, $S(e_1)$ и $S(e_2)$ – смежные непоследовательные дуги, не образующие цикл длины 2. □

**Предложение 2.2.** *Пусть $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ – аддитивное отображение невзвешенных графов, сохраняющее значения 2 и 3 длины циклов, и множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ является инвариантным относительно отображения $S$. Тогда $S$ сохраняет значение 4 длины циклов.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный цикл длины 4, состоящий из дуг $e_{ij}, e_{jk}, e_{kl}, e_{li}$, где $i, j, k, l$ попарно различны. В силу того, что $S$ сохраняет значение 3 длины циклов, дуги $S(e_{ij}), S(e_{jk}), S(e_{ki})$ образуют цикл длины 3. Далее возможны два случая:

(1) $S(e_{ij}) = e_{i'j'}$, $S(e_{jk}) = e_{j'k'}$, $S(e_{ki}) = e_{k'i'}$,
(2) $S(e_{ij}) = e_{j'i'}$, $S(e_{jk}) = e_{k'j'}$, $S(e_{ki}) = e_{i'k'}$,

где $i', j', k'$ попарно различны. Докажем утверждение для случая (1), случай (2) разбирается аналогично.

Поскольку $S$ отображает циклы длины 2 в циклы длины 2, то $S(e_{ik}) = e_{i'k'}$. Кроме того, дуги $S(e_{ik}), S(e_{kl}), S(e_{li})$ образуют цикл длины 3. Тогда можно обозначить либо $S(e_{kl}) = e_{k'l'}$, $S(e_{li}) = e_{l'i'}$, либо $S(e_{kl}) = e_{l'i'}$, $S(e_{li}) = e_{k'l'}$, где $i', k', l'$ попарно различны. Второй вариант невозможен, так как в этом случае дуги $S(e_{ij}) = e_{i'j'}$ и $S(e_{li}) = e_{k'l'}$ не являются последовательными, что противоречит предложению 2.1. Таким образом, дуги $e_{ij}, e_{jk}$, $e_{kl}, e_{li}$ соответственно отображаются в $e_{i'j'}, e_{j'k'}, e_{k'l'}, e_{l'i'}$. Дуги $e_{jk}$ и $e_{kl}$ являются последовательными, поэтому $e_{j'k'}$ и $e_{k'l'}$ тоже последовательные, в частности, $j' \neq l'$. Следовательно, отображение $S$ сохраняет значение 4 длины циклов. □

**Лемма 2.3.** *Пусть $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ – аддитивное отображение невзвешенных графов, сохраняющее значения 2 и 3 длины циклов, и пусть множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ является инвариантным относительно отображения $S$. Тогда сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ биективно, и существует такая перестановка $\tau \in S_n$, что для всех $i \neq j$ одновременно выполнено ровно одно из двух условий:*

$$S(e_{ij}) = e_{\tau(i)\tau(j)} \quad \textit{или} \quad S(e_{ij}) = e_{\tau(j)\tau(i)}.$$

*Иными словами, если граф $\widehat{G}$ не содержит петель, то $S(\widehat{G})$ получается из $\widehat{G}$ перенумерованием вершин и, возможно, изменением ориентации всех дуг.*

**Доказательство.** Поскольку множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ инвариантно относительно отображения $S$, то корректно определено сужение отображения $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$. Так как множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ конечно, для доказательства биективности $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ достаточно доказать его инъективность.

Если две дуги смежны, то, по предложению 2.1, их образы тоже смежны и потому различны. Осталось рассмотреть дуги $e_{ij}$ и $e_{kl}$, где $i, j, k, l$ попарно различны. По предложению 2.2, $S$ сохраняет значение 4 длины циклов, поэтому образ цикла $e_{ij} \cup e_{jk} \cup e_{kl} \cup e_{li}$ тоже является циклом длины 4. Следовательно, $S(e_{ij}) \neq S(e_{kl})$, и биективность $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ доказана.

В силу аддитивности отображения $S$, для доказательства второй части леммы достаточно рассмотреть только графы, состоящие из одной непетлевой дуги. Таким образом, с учетом предложения 2.1, требуется показать, что выполнено одно из двух следующих утверждений.

(1) Для любых дуг $e_1, e_2 \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ верны утверждения:

(a) если конец дуги $e_1$ совпадает с началом дуги $e_2$, то конец дуги $S(e_1)$ совпадает с началом дуги $S(e_2)$;
(b) если $e_1$ и $e_2$ выходят из одной вершины, то $S(e_1)$ и $S(e_2)$ тоже выходят из одной вершины;
(c) если $e_1$ и $e_2$ входят в одну вершину, то $S(e_1)$ и $S(e_2)$ тоже входят в одну вершину.

(2) Для любых дуг $e_1, e_2 \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ верны утверждения:
(a) если конец дуги $e_1$ совпадает с началом дуги $e_2$, то начало дуги $S(e_1)$ совпадает с концом дуги $S(e_2)$;
(b) если $e_1$ и $e_2$ выходят из одной вершины, то $S(e_1)$ и $S(e_2)$ входят в одну вершину;
(c) если $e_1$ и $e_2$ входят в одну вершину, то $S(e_1)$ и $S(e_2)$ выходят из одной вершины.

При $n = 2$ существуют лишь две непетлевые дуги – $e_{12}$ и $e_{21}$, поэтому (1) и (2) следуют из того, что отображение $S$ сохраняет циклы длины 2. Далее будем считать, что $n \geqslant 3$.

Рассмотрим набор попарно различных индексов $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$. Тогда для пары последовательных дуг $e_{ij}, e_{jk}$ выполнено (1a) или (2a), так как образ цикла длины 3, содержащего эти две дуги, есть цикл длины 3. Без ограничения общности будем считать, что выполнено (1a). Для начала покажем, что для каждого индекса $1 \leqslant t \leqslant n$ такого, что $j, k, t$ попарно различны, дуги $e_{jk}$ и $e_{kt}$ тоже удовлетворяют условию (1a). Возможны два случая.

(i) Если $t = i$, то рассмотрим цикл, состоящий из дуг $e_{ij}, e_{jk}, e_{kt}$. Поскольку отображение $S$ сохраняет циклы длины 3, а дуги $e_{ij}$ и $e_{jk}$ удовлетворяют условию (1a), то любые две дуги в этом цикле удовлетворяют условию (1a).
(ii) Если $t \notin \{i, j, k\}$, то рассмотрим цикл, состоящий из дуг $e_{ij}, e_{jk}$, $e_{kt}, e_{ti}$. По предложению 2.2, отображение $S$ сохраняет циклы длины 4, а, в силу предложения 2.1, $S$ переводит последовательные дуги в последовательные. При этом дуги $e_{ij}$ и $e_{jk}$ удовлетворяют условию (1a), следовательно, любые две последовательные дуги в этом цикле удовлетворяют условию (1a). В частности, это справедливо для пары дуг $e_{jk}$ и $e_{kt}$.

Аналогично, для любого индекса $1 \leqslant s \leqslant n$ такого, что $i, j, s$ попарно различны, дуги $e_{si}$ и $e_{ij}$ тоже удовлетворяют условию (1a).

Теперь докажем, что для любых индексов $1 \leqslant p, q, r \leqslant n$, $q \notin \{p, r\}$, дуги $e_{pq}$ и $e_{qr}$ также удовлетворяют условию (1a). Если $p = r$, то утверждение следует из того факта, что отображение $S$ сохраняет циклы длины 2. Далее будем считать, что $p, q, r$ попарно различны. Возможны следующие варианты.

(i) Если $p = j$, $q = i$, то, по доказанному выше, $e_{ri}$ и $e_{ij}$ удовлетворяют условию (1a). Так как $S$ сохраняет циклы длины 2, дуги $e_{ji} = e_{pq}$ и $e_{ir} = e_{qr}$ также удовлетворяют условию (1a).

(ii) Если $p = j$, $q \neq i$, то условию (1a) удовлетворяют следующие пары дуг:

$$e_{ij} \text{ и } e_{jk} \quad \Rightarrow \quad e_{ki} \text{ и } e_{ip} \quad \Rightarrow \quad e_{ip} \text{ и } e_{pq} \quad \Rightarrow \quad e_{pq} \text{ и } e_{qr}.$$

(iii) Пусть $p = k$, $q = j$. Так как $e_{ij} = e_{iq}$ и $e_{jk} = e_{qp}$ удовлетворяют условию (1a) и $S$ сохраняет циклы длины 2, то условию (1a) удовлетворяют

$$e_{pq} \text{ и } e_{qi} \quad \Rightarrow \quad e_{ip} \text{ и } e_{pq} \quad \Rightarrow \quad e_{pq} \text{ и } e_{qr}.$$

(iv) Если $p = k$, $q \neq j$, то условию (1a) удовлетворяют

$$e_{ij} \text{ и } e_{jk} \quad \Rightarrow \quad e_{jk} \text{ и } e_{pq} \quad \Rightarrow \quad e_{pq} \text{ и } e_{qr}.$$

(v) Если $p \neq j$ и $q = k$, то, по доказанному выше, $e_{jk} = e_{jq}$ и $e_{kp} = e_{qp}$ удовлетворяют условию (1a). Так как $S$ сохраняет циклы длины 2, получаем, что условию (1a) удовлетворяют

$$e_{pq} \text{ и } e_{qj} \quad \Rightarrow \quad e_{jp} \text{ и } e_{pq} \quad \Rightarrow \quad e_{pq} \text{ и } e_{qr}.$$

(vi) Если $p \notin \{j, k\}$ и $q \neq k$, то условию (1a) удовлетворяют

$$e_{ij} \text{ и } e_{jk} \quad \Rightarrow \quad e_{jk} \text{ и } e_{kp} \quad \Rightarrow \quad e_{kp} \text{ и } e_{pq} \quad \Rightarrow \quad e_{pq} \text{ и } e_{qr}.$$

В силу того, что $S$ сохраняет циклы длины 2, пункты (b) и (c) вытекают из пункта (a). Значит, для любой пары различных дуг из $\widehat{\mathcal{N}}_n$ выполняется пункт (1). Доказательство для случая, когда дуги $e_{ij}$ и $e_{jk}$ удовлетворяют условию (2a), полностью аналогично. Лемма доказана. □

**Следствие 2.4.** *Пусть $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ – аддитивное отображение невзвешенных графов, сохраняющее значения 2 и 3 длины циклов, и пусть множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ является инвариантным относительно отображения $S$. Тогда отображение $S$ сохраняет все значения $k \geqslant 2$ длины циклов.*

## §3. Аддитивные отображения графов, сохраняющие значение 3 длины циклов

**Предложение 3.1.** *Пусть $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ – аддитивное отображение невзвешенных графов, сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ биективно и $2 \leqslant k \leqslant n$. Отображение $S$ сохраняет значение $k$ длины циклов тогда и только тогда, когда оно биективно отображает множество циклов длины $k$ в себя.*

**Доказательство.** Если $S$ сохраняет значение $k$ длины циклов, то оно инъективно отображает множество циклов длины $k$ в себя. Заметим, что это множество конечно. Следовательно, его отображение в себя биективно.

Утверждение в обратную сторону очевидно в силу определения 1.3. □

**Лемма 3.2.** *Пусть $n \geqslant 4$, $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ – аддитивное отображение невзвешенных графов, сохраняющее значение 3 длины циклов, множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ является инвариантным относительно отображения $S$ и сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ биективно. Тогда $S$ сохраняет значение 2 длины циклов.*

**Доказательство.** Пусть $e_1, e_2 \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ – две произвольные различные непетлевые дуги. Обозначим за $R_3(e_1, e_2)$ количество таких дуг $w \notin \{e_1, e_2\}$, что $e_1, w$ принадлежат некоторому циклу длины 3 и $e_2, w$ также принадлежат некоторому циклу длины 3.

Поскольку $S$ сохраняет значение 3 длины циклов, то, если $e_1, w$ принадлежат циклу длины 3, дуги $S(e_1), S(w)$ также принадлежат циклу длины 3. Следовательно,

$$R_3(e_1, e_2) \leqslant R_3(S(e_1), S(e_2)).$$

Так как сужение $S$ на множество непетлевых дуг биективно, то, по предложению 3.1, $S$ переставляет множество циклов длины 3. Значит, обратное отображение также сохраняет циклы длины 3, откуда получаем обратное неравенство. Таким образом,

$$R_3(e_1, e_2) = R_3(S(e_1), S(e_2)),$$

то есть $S$ сохраняет $R_3(e_1, e_2)$ для любой пары дуг $e_1, e_2$.

Рассмотрим варианты значений $R_3(e_1, e_2)$ в зависимости от взаимного расположения дуг $e_1 \neq e_2$. Пусть $e_1 = e_{ij}$, $e_2 = e_{pq}$ для некоторых $i \neq j$, $p \neq q$, $1 \leqslant i, j, p, q \leqslant n$, и $w$ – такая дуга, что $e_1, w$ принадлежат одному циклу длины 3 и $e_2, w$ принадлежат одному циклу длины 3.

Поскольку дуги $e_1, w$ принадлежат одному циклу длины 3, то $w = e_{jt}$ или $w = e_{ti}$ для некоторого индекса $t \notin \{i, j\}$, $1 \leqslant t \leqslant n$. Далее возможны следующие случаи.

(1) $p = j$, $q = i$, то есть $e_1 = \overline{e_2}$. Без ограничения общности будем считать, что $w = e_{jt}$. Поскольку $e_2, w$ принадлежат одному циклу длины 3, то $w = e_{rj}$ или $w = e_{ir}$ для некоторого $r \notin \{i, j\}$, $1 \leqslant r \leqslant n$. Но вариант $w = e_{rj}$ невозможен, так как тогда $t = j$, а вариант $w = e_{ir}$ невозможен, так как в этом случае $i = j$. Следовательно, таких дуг $w$ не существует, и $R_3(e_1, e_2) = 0$.

(2) $p = j$, $q \neq i$. Тогда в качестве $w$ подходит только дуга $w = e_{qi}$, и $R_3(e_1, e_2) = 1$.

(3) $p \neq j$, $q = i$. Аналогично случаю (2), получаем $R_3(e_1, e_2) = 1$.

(4) $p = i$, $q \neq j$. Тогда в качестве $w$ подходят только дуги вида $w = e_{ti}$, $t \notin \{i, j, q\}$, и $R_3(e_1, e_2) = n - 3$.

(5) $p \neq i$, $q = j$. Тогда в качестве $w$ подходят только дуги вида $w = e_{jt}$, $t \notin \{i, j, p\}$, и $R_3(e_1, e_2) = n - 3$.

(6) Индексы $i, j, p, q$ попарно различны. Тогда подходят только $w = e_{jp}$ и $w = e_{qi}$, следовательно, $R_3(e_1, e_2) = 2$.

Заметим, что при $n \geqslant 4$ равенство $e_1 = \overline{e_2}$ эквивалентно $R_3(e_1, e_2) = 0$. Поскольку $S$ сохраняет инвариант $R_3$, это условие можно переписать как $R_3(S(e_1), S(e_2)) = 0$, что равносильно $S(e_1) = \overline{S(e_2)}$. Следовательно, отображение $S$ сохраняет значение 2 длины циклов. □

Следующие примеры показывают, что в лемме 3.2 ограничение $n \geqslant 4$ и условие биективности $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ являются существенными.

**Пример 3.3.** Пусть $S : \widehat{M}_3 \to \widehat{M}_3$ задано равенствами

$$S(e_{12}) = e_{23}, \quad S(e_{23}) = e_{31}, \quad S(e_{31}) = e_{12},$$
$$S(e_{ij}) = e_{ij}, \quad (i, j) \notin \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\},$$

и продолжается на все множество $\widehat{M}_3$ по аддитивности, см. рис. 3.1. Тогда сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_3}$ биективно, $S$ сохраняет значение 3 длины циклов, но $S(e_{12} \cup e_{21}) = e_{23} \cup e_{21}$, и $S$ не сохраняет значение 2 длины циклов.

**Пример 3.4.** Пусть $S : \widehat{M}_3 \to \widehat{M}_3$ задано равенствами

$$S(e_{21}) = e_{12}, \quad S(e_{13}) = e_{31}, \quad S(e_{32}) = e_{23},$$
$$S(e_{ij}) = e_{ij}, \quad (i, j) \notin \{(2, 1), (1, 3), (3, 2)\},$$

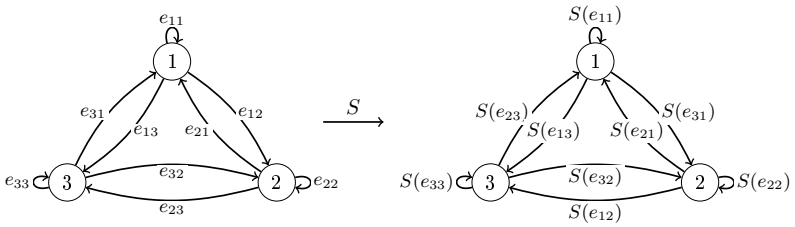



Рис. 3.1. Биективное отображение, сохраняющее значение 3 длины циклов, но не сохраняющее значение 2.

и продолжается на все множество $\widehat{M}_3$ по аддитивности, см. рис. 3.2. Тогда $S$ сохраняет значение 3 длины циклов, множество $\widehat{\mathcal{N}}_3$ инвариантно относительно $S$, но сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_3}$ не является биективным, и $S$ не сохраняет значение 2 длины циклов.

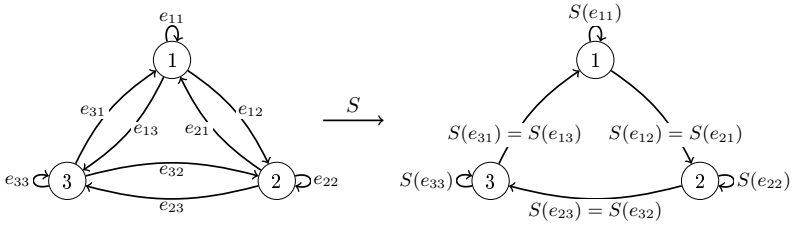



Рис. 3.2. Небиективное отображение, сохраняющее значение 3 длины циклов.

**Пример 3.5.** Пусть $S : \widehat{M}_4 \to \widehat{M}_4$ задано равенствами

$$S(e_{12}) = S(e_{21}) = S(e_{34}) = S(e_{43}) = e_{12},$$
$$S(e_{23}) = S(e_{32}) = S(e_{14}) = S(e_{41}) = e_{23},$$
$$S(e_{13}) = S(e_{31}) = S(e_{24}) = S(e_{42}) = e_{31},$$
$$S(e_{ii}) = e_{ii}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4,$$

и продолжается на все множество $\widehat{M}_4$ по аддитивности. Тогда $S$ сохраняет значение 3 длины циклов, множество $\widehat{\mathcal{N}}_4$ инвариантно относительно $S$, но сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_4}$ не является биективным, и $S$ не сохраняет значение 2 длины циклов.

**Лемма 3.6.** *Пусть $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ – аддитивное отображение невзвешенных графов, сохраняющее значение 3 длины циклов, и пусть множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ является инвариантным относительно отображения $S$. Если $n \geqslant 5$, то сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ биективно.*

**Доказательство.** Так как множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ конечно, достаточно доказать инъективность $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$. Предположим, что для некоторых дуг $e_1 \neq e_2$ выполнено $S(e_1) = S(e_2)$. Если дуги $e_1$ и $e_2$ являются последовательными, то они содержатся в некотором цикле длины 3. Его образ содержит не больше двух различных дуг, а потому не является циклом длины 3. Получили противоречие с тем, что $S$ сохраняет значение 3 длины циклов.

Следовательно, дуги $e_1 = e_{ij}$ и $e_2 = e_{pq}$ не являются последовательными, $i \neq j$, $p \neq q$. Пусть $S(e_{ij}) = S(e_{pq}) = e_{ab}$. Возможны следующие случаи.

(1) Индексы $i, j, p, q$ попарно различны. Так как $n \geqslant 5$, найдётся $t \notin \{i, j, p, q\}$. Рассматривая цикл $e_{ij} \cup e_{jt} \cup e_{ti}$, получаем, что $S(e_{jt}) \in \{e_{bc}, e_{ca}\}$, где $a, b, c$ попарно различны. Аналогично, из цикла $e_{pq} \cup e_{qt} \cup e_{tp}$ следует, что $S(e_{tp}) \in \{e_{bd}, e_{da}\}$, где $a, b, d$ попарно различны. Далее, образ цикла $e_{tp} \cup e_{pj} \cup e_{jt}$ тоже является циклом длины 3, поэтому $c = d$ и $S(e_{pj}) = e_{ab}$. Без ограничения общности будем считать, что $S(e_{jt}) = S(e_{qt}) = e_{bc}$ и $S(e_{ti}) = S(e_{tp}) = e_{ca}$.

Так как дуги $e_{ij}$ и $e_{jq}$ последовательные, то они принадлежат одному циклу длины 3, поэтому $S(e_{ij}) = e_{ab}$ и $S(e_{jq})$ тоже последовательные. Аналогично, дуги $S(e_{jq})$ и $S(e_{qt}) = e_{bc}$ последовательные. Следовательно, $S(e_{jq}) = e_{ca}$. Аналогично, рассматривая пары последовательных дуг $S(e_{pi})$ и $S(e_{ij}) = e_{ab}$, а также $S(e_{tp}) = e_{ca}$ и $S(e_{pi})$, получаем, что $S(e_{pi}) = e_{bc}$.

Образ цикла $e_{ij} \cup e_{jp} \cup e_{pi}$ является циклом длины 3 и равен $e_{ab} \cup S(e_{jp}) \cup e_{bc}$, откуда $S(e_{jp}) = e_{ca}$. Образ цикла $e_{jp} \cup e_{pq} \cup e_{qj}$ тоже является циклом длины 3 и равен $e_{ca} \cup e_{ab} \cup S(e_{qj})$, откуда $S(e_{qj}) = e_{bc}$. Получили, что для пары последовательных дуг $e_{qj}$ и $e_{jt}$ выполнено $S(e_{qj}) = S(e_{jt}) = e_{bc}$, противоречие.

(2) $p = j$, $q = i$. Найдутся такие $1 \leqslant r, t \leqslant n$, что $i, j, r, t$ попарно различны. Рассматривая цикл $e_{ij} \cup e_{jt} \cup e_{ti}$, получаем, что $S(e_{jt}) \in \{e_{bc}, e_{ca}\}$, где $a, b, c$ попарно различны. Далее, из цикла $e_{rj} \cup e_{ji} \cup e_{ir}$ следует, что $S(e_{rj}) \in \{e_{bd}, e_{da}\}$, где $a, b, d$ попарно

различны. Так как образ цикла $e_{rj} \cup e_{jt} \cup e_{tr}$ является циклом длины 3, получаем $c = d$ и $S(e_{tr}) = e_{ab}$. Значит, $S(e_{ij}) = S(e_{tr})$, что даёт противоречие в силу пункта (1).

(3) $p = i$, $q \neq j$. Пусть $t \notin \{i, j, q\}$. Рассматривая цикл $e_{ij} \cup e_{jt} \cup e_{ti}$, получаем, что $S(e_{jt}) \in \{e_{bc}, e_{ca}\}$, где $a, b, c$ попарно различны. Далее, из цикла $e_{iq} \cup e_{qj} \cup e_{ji}$ следует, что $S(e_{qj}) \in \{e_{bd}, e_{da}\}$, где $a, b, d$ попарно различны. Так как образ цикла $e_{qj} \cup e_{jt} \cup e_{tq}$ является циклом длины 3, получаем $c = d$ и $S(e_{tq}) = e_{ab}$. Значит, $S(e_{ij}) = S(e_{tq})$, что приводит к противоречию в силу пункта (1).

(4) $p \neq i$, $q = j$. Доказательство аналогично предыдущему случаю. □

## §4. Аддитивные отображения графов, сохраняющие значение $k \geqslant 4$ длины циклов

**Предложение 4.1.** *Пусть $4 \leqslant k \leqslant n$. Различные дуги $u, v \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ принадлежат некоторому циклу длины $k$ тогда и только тогда, когда выполняются три следующих условия:*

(a) *начало дуги $u$ не совпадает с началом дуги $v$;*
(b) *конец дуги $u$ не совпадает с концом дуги $v$;*
(c) *дуги $u$ и $v$ не являются взаимно обратными.*

**Доказательство.** Пусть $u = e_{ij}$ и $v = e_{pq}$. Совокупность перечисленных условий равносильна тому, что либо $u$ и $v$ не являются смежными, то есть индексы $i, j, p, q$ попарно различны, либо $u$ и $v$ – последовательные дуги, то есть $j = p$ и $i \neq q$ или $i = q$ и $j \neq p$. Нетрудно проверить, что это свойство действительно является необходимым и достаточным для существования цикла длины $k$, содержащего $u$ и $v$. □

**Лемма 4.2.** *Пусть $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ – аддитивное отображение невзвешенных графов, сохраняющее значение $k$ длины циклов, где $4 \leqslant k \leqslant n$, и пусть множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ является инвариантным относительно отображения $S$, а сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ биективно. Тогда $S$ сохраняет значение 3 длины циклов.*

**Доказательство.** Пусть $e_1, e_2 \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ – две произвольные различные непетлевые дуги. Обозначим через $R_k(e_1, e_2)$ количество дуг $w \notin \{e_1, e_2\}$ таких, что $e_1, w$ принадлежат некоторому циклу длины $k$ и $e_2, w$ также принадлежат некоторому циклу длины $k$. Поскольку $S$ сохраняет

значение $k$ длины циклов, то $S$ сохраняет $R_k(e_1, e_2)$ для любой пары дуг $e_1, e_2$. Доказательство этого факта аналогично доказательству сохранения инварианта $R_3(e_1, e_2)$ в лемме 3.2.

Рассмотрим варианты значений $R_k(e_1, e_2)$ в зависимости от взаимного расположения дуг $e_1 \neq e_2$. Пусть $e_1 = e_{ij}$, $e_2 = e_{pq}$ для некоторых $i \neq j$, $p \neq q$, $1 \leqslant i, j, p, q \leqslant n$. Возможны следующие случаи.

(1) $p = j$, $q = i$. В качестве $w$ подходят все дуги $e_{xy}$, для которых $x \neq y$ и $x, y \notin \{i, j\}$, то есть $R_k(e_1, e_2) = (n-2) \cdot (n-3) = n^2 - 5n + 6$.
(2) $p = j$, $q \neq i$. Тогда в качестве $w$ подходят все дуги $e_{xy}$, для которых $x \neq y$, $x \notin \{i, j\}$, $y \notin \{j, q\}$. Получаем $R_k(e_1, e_2) = (n-2)^2 - (n-3) = n^2 - 5n + 7$.
(3) $p \neq j$, $q = i$. Аналогично случаю (2), получаем $R_k(e_1, e_2) = n^2 - 5n + 7$.
(4) $p = i$, $q \neq j$. В этом случае в качестве $w$ подходят все дуги $e_{xy}$, для которых $x \neq y$, $x \neq i$, $y \notin \{j, q\}$, кроме $e_{ji}$ и $e_{qi}$. Тогда $R_k(e_1, e_2) = (n-1) \cdot (n-2) - (n-3) - 2 = n^2 - 4n + 3$.
(5) $p \neq i$, $q = j$. Аналогично случаю (4), получаем $R_k(e_1, e_2) = n^2 - 4n + 3$.
(6) Индексы $i, j, p, q$ попарно различны. Тогда в качестве $w$ подходят все дуги $e_{xy}$, для которых $x \neq y$, $x \notin \{i, p\}$, $y \notin \{j, q\}$, кроме $e_{ji}$ и $e_{qp}$. Следовательно, имеем $R_k(e_1, e_2) = (n-2)^2 - (n-4) - 2 = n^2 - 5n + 6$.

Для доказательства того, что отображение $S$ сохраняет значение 3 длины циклов, достаточно показать, что если дуги $e_1$ и $e_2$ – последовательные, то $S(e_1)$ и $S(e_2)$ также являются последовательными дугами.

Пусть $e_1$ и $e_2$ – последовательные дуги. Тогда из рассуждений выше имеем

$$R_k(S(e_1), S(e_2)) = R_k(e_1, e_2) = n^2 - 5n + 7.$$

При $n \geqslant 5$ сразу получаем, что $S(e_1)$ и $S(e_2)$ – последовательные дуги. При $n = 4$ имеется альтернатива. А именно, $4^2 - 5 \cdot 4 + 7 = 3 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3$, то есть $S(e_1)$ и $S(e_2)$ могут быть смежными непоследовательными дугами. Но дуги $e_1$ и $e_2$ содержатся в некотором цикле длины $k$, и отображение $S$ сохраняет значение $k$ длины циклов. Следовательно, $S(e_1)$ и $S(e_2)$ тоже содержатся в некотором цикле длины $k$. Это противоречит тому, что эти дуги смежные непоследовательные. □

Покажем, что в лемме 4.2 условие биективности $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ является существенным.

**Пример 4.3.** Пусть $n = k \geqslant 4$ и $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ задано равенствами

$$\begin{gathered} S(e_{12}) = S(e_{13}) = \ldots = S(e_{1n}) = e_{12}, \\ S(e_{21}) = S(e_{23}) = \ldots = S(e_{2n}) = e_{23}, \\ \ldots \\ S(e_{n1}) = S(e_{n2}) = \ldots = S(e_{n,n-1}) = e_{n1}, \\ S(e_{ii}) = e_{ii}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \end{gathered}$$

и продолжается на все множество $\widehat{M}_n$ по аддитивности. Тогда $S$ сохраняет значение $n$ длины циклов, множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ инвариантно относительно $S$, но сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ не является биективным, и $S$ не сохраняет значение 3 длины циклов.

**Лемма 4.4.** *Пусть $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ – аддитивное отображение невзвешенных графов, сохраняющее значение $k$ длины циклов, где $k \geqslant 4$, и пусть множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ является инвариантным относительно отображения $S$. Если $n \geqslant k+1$, то сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ биективно.*

**Доказательство.** Заметим, что если различные дуги $e_1, e_2 \in \widehat{\mathcal{N}}_n$ принадлежат одному циклу длины $k$, то его образ тоже является циклом длины $k$ и поэтому содержит $k$ различных дуг. Следовательно, $S(e_1) \neq S(e_2)$.

Кроме того, если $S$ переводит любую пару последовательных дуг в последовательные дуги, то $S$ сохраняет значение 3 длины циклов, поэтому $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ биективно в силу леммы 3.6.

Предположим теперь, что существует такая пара последовательных

непетлевых дуг $e_{ij}$ и $e_{jl}$, что дуги $S(e_{ij})$ и $S(e_{jl})$ не являются последовательными. Найдём цикл $C$ длины $k$, содержащий $e_{ij}$ и $e_{jl}$. Так как $n \geqslant k+1$, существует вершина $t$, не инцидентная ни одной дуге цикла $C$. Пусть $C'$ – цикл, полученный из $C$ заменой дуг $e_{ij}$ и $e_{jl}$ на $e_{it}$ и $e_{tl}$. Тогда $S(C)$ и $S(C')$ – циклы длины $k$, причём $S(C')$ получается из $S(C)$ заменой дуг $S(e_{ij})$ и $S(e_{jl})$ на дуги $S(e_{it})$ и $S(e_{tl})$. Это возможно только в том случае, когда $\{S(e_{ij}), S(e_{jl})\} = \{S(e_{it}), S(e_{tl})\}$. Так как дуги $e_{ij}$ и $e_{tl}$ содержатся в одном цикле длины $k$, вариант

$S(e_{ij}) = S(e_{tl})$ невозможен. Следовательно,

$$S(e_{ij}) = S(e_{it}) \quad \text{и} \quad S(e_{jl}) = S(e_{tl}). \tag{4.1}$$

В силу произвольности выбора цикла $C$ и вершины $t$, равенство (4.1) верно для всех $t \notin \{i, l\}$. Заметим, что тогда для любого $p \neq l$ дуги $S(e_{jl})$ и $S(e_{lp})$ являются последовательными. Действительно, иначе найдём $t \notin \{i, j, l, p\}$ и $s \notin \{j, l, p, t\}$, что возможно, так как $n \geqslant k+1 \geqslant 5$. Тогда $S(e_{jl}) = S(e_{tl})$, и, применяя доказанное утверждение к паре дуг $e_{tl}$ и $e_{lp}$, получаем, что $S(e_{tl}) = S(e_{ts})$. Значит, $S(e_{jl}) = S(e_{ts})$, но дуги $e_{jl}$ и $e_{ts}$ содержатся в одном цикле длины $k$, противоречие.

Аналогично, в этом случае для любого $q \neq i$ дуги $S(e_{qi})$ и $S(e_{ij})$ являются последовательными.

Вернёмся к циклу $C$. Так как его образ $S(C)$ является циклом длины $k$, он содержит две дуги, последовательные с $S(e_{ij})$. Следовательно, найдётся такая дуга $e_{rs}$ цикла $C$, непоследовательная с $e_{ij}$ (то есть $i, j, r, s$ попарно различны), что дуги $S(e_{ij})$ и $S(e_{rs})$ являются последовательными. Без ограничения общности будем считать, что $S(e_{ij}) = e_{ab}$ и $S(e_{rs}) = e_{bc}$, где $a, b, c$ попарно различны. Значит, образ хотя бы одной из двух дуг цикла $C$, последовательных с $e_{rs}$, не будет последовательным с $S(e_{rs})$. Из доказанного выше следует, что тогда либо $S(e_{sx})$ последовательна с $S(e_{rs})$ для любого $x \neq s$, либо $S(e_{yr})$ последовательна с $S(e_{rs})$ для любого $y \neq r$. Если $x \neq j$ и $y \neq i$, такая дуга не может входить в вершину $b$, поскольку $e_{ij}$ принадлежит одному циклу длины $k$ с каждой из дуг $e_{sx}$ и $e_{yr}$. Следовательно, эта дуга выходит из вершины $c$.

Рассмотрим первый случай. Так как дуга $e_{rs}$ содержится в цикле $C$ и не последовательна с $e_{ij}$, а дуга $e_{jl}$ содержится в том же цикле и последовательна с $e_{ij}$, то $s \neq l$. Значит, можно положить $t = s$ и $x = l$, поэтому, по доказанному выше, $S(e_{sl}) = S(e_{jl})$ выходит из вершины $c$. Дуга $S(e_{si})$ является последовательной с каждой из дуг $S(e_{ij}) = e_{ab}$ и $S(e_{rs}) = e_{bc}$, поэтому $S(e_{si}) = e_{ca}$. Получаем, что $S(e_{jl})$ и $S(e_{si})$ выходят из одной вершины, но, так как $i, j, l, s$ попарно различны, они должны лежать в одном цикле длины $k$, противоречие.

Перейдём ко второму случаю. В этом случае дуга, последовательная с $e_{rs}$, образ которой не последователен с $S(e_{rs})$, имеет вид $e_{sw}$, причём, так как $e_{rs} \neq e_{ij}$, получаем $e_{sw} \neq e_{jl}$ и $w \neq l$. Следовательно, $S(e_{rz}) = S(e_{rs})$ для всех $z \notin \{r, w\}$. Если $r \neq l$, то можно положить $t = r$ и

$z = l$, поэтому дуги $S(e_{ij})$ и $S(e_{jl}) = S(e_{rl}) = S(e_{rs})$ последовательные, противоречие.

Значит, $r = l$. При $y = j$ получаем, что $S(e_{jl})$ выходит из вершины $c$, то есть $S(e_{jl}) = e_{cd}$. Так как дуги $e_{ij}, e_{jl}, e_{ls}$ лежат в цикле $C$ длины $k \geqslant 4$, их образы тоже лежат в одном цикле длины $k$, поэтому $a, b, c, d$ попарно различны. Повторяя предыдущие рассуждения, найдём такую дугу $e_{uv}$ цикла $C$, непоследовательную с $e_{jl}$, что дуги $S(e_{jl})$ и $S(e_{uv})$ последовательные. Тогда $S(e_{uv})$ выходит из вершины $d$. Аналогично получаем, что это возможно только в том случае, когда $v = i$ и $S(e_{ui}) = e_{da}$. Следовательно, образ цикла $C$ содержит дуги $e_{ab}, e_{bc}, e_{cd}, e_{da}$, которые образуют цикл длины 4. Так как отображение $S$ сохраняет значение $k$ длины циклов, получаем $k = 4$, и $C = e_{ij} \cup e_{jl} \cup e_{ls} \cup e_{si}$.

Для всех $t \notin \{i, l\}$ имеем $S(e_{it}) = e_{ab}$, $S(e_{lt}) = e_{bc}$, $S(e_{tl}) = e_{cd}$ и $S(e_{ti}) = e_{da}$. По доказанному, дуга $S(e_{li})$ является последовательной с каждой из дуг $S(e_{ij})$ и $S(e_{jl})$. Значит, $S(e_{li}) \in \{e_{bc}, e_{da}\}$. Образ цикла $e_{li} \cup e_{ij} \cup e_{js} \cup e_{sl}$ равен $S(e_{li}) \cup e_{ab} \cup S(e_{js}) \cup e_{cd}$ и является циклом длины 4, поэтому $S(e_{js}) \in \{e_{da}, e_{bc}\}$. Выберем $t \notin \{i, j, l, s\}$, тогда дуга $e_{js}$ лежит в одном цикле длины 4 с каждой из дуг $e_{lt}$ и $e_{ti}$, причём либо $S(e_{js}) = S(e_{lt})$, либо $S(e_{js}) = S(e_{ti})$, противоречие. □

**Теорема 4.5.** *Пусть $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ – аддитивное отображение невзвешенных графов, сохраняющее значение $k \geqslant 3$ длины циклов, $n \geqslant \max(k, 4)$ и множество $\widehat{\mathcal{N}}_n$ является инвариантным относительно отображения $S$.*

(1) *Если $n \geqslant \max(k + 1, 5)$, то сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ биективно.*

(2) *Если сужение $S|_{\widehat{\mathcal{N}}_n}$ биективно, то существует такая перестановка $\tau \in S_n$, что для всех $i \neq j$ одновременно выполнено ровно одно из двух условий:*

$$S(e_{ij}) = e_{\tau(i)\tau(j)} \quad \text{или} \quad S(e_{ij}) = e_{\tau(j)\tau(i)}.$$

*Иными словами, если граф $\widehat{G}$ не содержит петель, то $S(\widehat{G})$ получается из $\widehat{G}$ перенумерованием вершин и, возможно, изменением ориентации всех дуг.*

**Доказательство.** Пункт (1) непосредственно вытекает из лемм 3.6 и 4.4.

Докажем пункт (2). Если $k \geqslant 4$, то, по лемме 4.2, отображение $S$ сохраняет значение 3 длины циклов. При $k = 3$ это выполнено по

условию теоремы. Таким образом, в обоих случаях можно применить лемму 3.2. Следовательно, отображение $S$ сохраняет значение 2 длины циклов. Далее, применяя лемму 2.3, получаем требуемое утверждение. □

Следующий пример показывает, что сохранения значения 2 длины циклов недостаточно.

**Пример 4.6.** Пусть $n \geqslant 3$ и пусть отображение $S : \widehat{M}_n \to \widehat{M}_n$ задано равенствами

$$S(e_{12}) = e_{21}, \quad S(e_{21}) = e_{12},$$
$$S(e_{ij}) = e_{ij}, \quad (i,j) \notin \{(1,2),(2,1)\},$$

и продолжено по аддитивности на все $\widehat{M}_n$, см. рис. 4.1. Ясно, что $S$ сохраняет значение 2 длины циклов. При этом $S(e_{12} \cup e_{23} \cup e_{31}) = e_{21} \cup e_{23} \cup e_{31}$, следовательно, отображение $S$ не сохраняет значение 3 длины циклов и не соответствует виду, описанному в лемме 2.3.

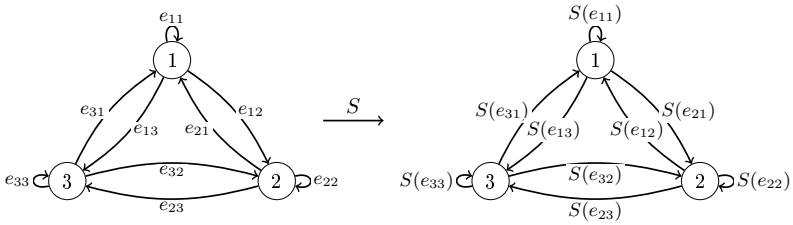



Рис. 4.1. Биективное отображение, сохраняющее значение 2 длины циклов, но не сохраняющее значение 3.

## Список литературы


1. А. В. Власов, А. Э. Гутерман, Е. М. Крейнес, *Линейные отображения, сохраняющие минимальные значения индекса цикличности тропических матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **524** (2023), 18–35.
2. L. B. Beasley, N. J. Pullman, *Term-rank, permanent, and rook-polynomial preservers.* — Linear Algebra Appl. **90** (1987), 33–46.
3. L. B. Beasley, N. J. Pullman, *Linear operators that strongly preserve primitivity.* — Linear Multilinear Algebra **25** (1989), 205–213.
4. J. Dieudonné, *Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables.* — Arch. Math. **1** (1949), 282–287.

5. G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen.* — Sitz. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.
6. A. Guterman, E. Kreines, C. Thomassen, *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index.* — Special Matrices **9** (2021), 112–118.
7. A. Guterman, E. Kreines, A. Vlasov, *Non-surjective linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index.* — Kybernetika **58**, No. 5 (2022), 691–707.
8. A. Guterman, A. Maksaev, *Maps preserving scrambling index.* — Linear Multilinear Algebra **66**, No. 4 (2018), 840–851.
9. A. Guterman, A. Vlasov, S. Zhilina, *Linear transformations of tropical matrices preserving individual values of the cyclicity index.* — `arXiv:2610.32897` (2026).
10. B. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude, *Max Plus at Work*, Princeton University Press, 2006.
11. S. Pierce, et al., *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33** (1992), 1–129.
12. I. Schur, *Einige Bemerkungen zur Determinantentheorie.* — Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1925), 454–463.
13. C. Thomassen, *Whitney's 2-switching theorem, cycle spaces, and arc mappings of directed graphs.* — J. Combin. Theory, Ser. B **46** (1989), 257–291.
14. D. R. Woodall, *Cycle lengths and circuit matroids of graphs.* — Discrete Math. **105**, No. 1–3 (1992), 269–273.

Vlasov A. V., Guterman A. E., Zhilina S. A. Additive maps of unweighted directed graphs preserving individual values of the cycle length.

On the set of unweighted directed graphs on $n$ vertices, a union of graphs is defined as the union of their arc sets. A map of graphs is said to be additive if it preserves the union operation. In this paper, a characterization of additive maps of unweighted directed graphs preserving a fixed value $k \geqslant 3$ of the cycle length is obtained.

Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
Москва, 119991, Россия

*E-mail*: `aleksandr.vlasov@math.msu.ru`

*E-mail*: `s.a.zhilina@gmail.com`

Университет Бар-Илан,
Рамат-Ган, 5290002, Израиль

*E-mail*: `alexander.guterman@biu.ac.il`

Поступило 14 октября 2026 г.