УДК 517.955.8

Гауссовы волновые пучки и пакеты в Ленинграде и Санкт-Петербурге. Обзор. Бабич В. М., Киселев А. П., Перель М. В., Плаченов А. Б. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 7–69

Дан обзор теоретических исследований, посвященных описанию гауссовски локализованных линейных волновых процессов, проводившихся в Ленинграде–Санкт-Петербурге с 1960х годов по настоящее время. Разрабатывалась асимптотическая параксиальная теория гауссовых пучков с особым вниманием к плавно-неоднородным средам. Построены гауссовы пучки и пакеты в задачах теории упругости, электродинамики, для описания волн в графене и др. Рассмотрены приложения гауссовых пучков к теории резонаторов использующие как метод параболического уравнения, так и "лучевой метод в малом". Построены параксиальные гауссовы волновые пакеты – квазифотоны. Найдены гауссовски локализованные точные решения, основанные на теории Бейтмена и на теории "комплексного источника", как пучкообразные так и пакетообразные. Введены новые классы высших мод, прежде всего, Лапласа–Гаусса и Гельмгольца–Гаусса. Построены гауссовы пучки поверхностных волн, решения типа волновой пленки и др. Разработан метод суммирования пучков для описания волновых полей при наличии каустик, дано его обобщение в рамках вейвлетного анализа.

Библ. – 186 назв.

УДК 517.984

Подчиненные решения для одномерного оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом. Андронов Н. И. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 70–105.

В работе доказывается, что спектр оператора Шрёдингера на полуоси с потенциалом, равным сумме δ-функций, расстояния между точками-носителями которых линейно растут с ростом номера слагаемого, не содержит абсолютно непрерывной компоненты. Для этого обобщаются результаты Д. Дж. Гилберт и Д. Б. Пирсона из теории

подчиненных решений на случай оператора Шрёдингера с потенциалом, равным сумме δ-функции, сосредоточенных на счетном множестве точек.

Библ. – 20 назв.

УДК 517.984.54:517.956

Акустическая задача рассеяния со знаконеопределенной весовой функцией. Белишев М. И. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 106–123.

Акустическая задача рассеяния наклонных плоских волн в неоднородной слоистой среде в соответствующих переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} &pu_{tt} - u_{xx} = 0, && x > 0,\ \ \infty < t < \infty; \\ &u = \delta(c_0 t - x) + r(c_0 t + x), && x < 0; \end{aligned}$$

$p = p(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{\sin^2 \alpha}{c_0^2(x)},\ \ x \geqslant 0$, где $c_0 = \mathrm{const} > 0$ и $c(\cdot)$ есть скорость звука в однородном и неоднородном полупространствах $x < 0$ и $x > 0$ соответственно, а α — угол падения в исходных переменных. *Весовая функция* $p \in L_1^{\mathrm{loc}}(0, \infty)$ может менять знак, что соответствует полному внутреннему отражению от высокоскоростных слоев в полупространстве $x > 0$. Мы предлагаем строгую постановку этой задачи, которая не требует никаких ограничений на p, ее знак и/или обращение в 0 при $x > 0$, и поведение при $x \to \infty$.

Библ. – 13 назв.

УДК 517.983

О сходимости модулей и фаз операторов и регуляризации проектирования на образ оператора. Белишев М. И., Вакуленко А. Ф. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 124–131.

Пусть $A_j, A : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ суть ограниченные операторы, $A_j = \Phi_j |A_j|$, $A = \Phi |A|$ - их полярные разложения. Пусть $A_j \to A$ в одной из операторных топологий. Мы прводим несколько лемм о сходимости $|A_j| \to |A|$ и $\Phi_j \to \Phi$ и доказываем теорему о регуляризации проектирования на образ оператора в случае, когда оператор не является изоморфизмом. Эти темы связаны с вопросами, возникающими в связи с проблемой треугольной факторизации операторов. Мы надеемся, что наши результаты представляют определенный самостоятельный

интерес и будут полезны для дальнейшего изучения устойчивости треугольной факторизации.

Библ. – 6 назв.

УДК 517.956.27

N-преобразование и факторизация DN-оператора. Белишев М. И., Кориков Д. В. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 132–147.

Пусть (Ω, g) есть гладкое компактное трехмерное риманово многообразие с гладким краем Γ, $\tau(x) := \operatorname{dist}(x, \Gamma)$, $x \in \Omega$; $\Omega^\tau := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \tau\}$, $\Gamma^\tau := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \Gamma) = \tau\}$, $\tau \geqslant 0$. Упрощая техническую сторону задачи, мы предполагаем, что Ω гомеоморфно шару в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $\mathscr{P} := \{\nabla p \mid p \in H^1(\Omega)\}$ есть пространство потенциальных векторных полей и пусть $\mathscr{L}_\lambda := \{\varkappa \nabla\tau \mid \varkappa \in L_2(\Omega)\}$ суть поля, параллельные $\nabla\tau$. N-преобразование это отображение из $\mathscr{P}$ в $\mathscr{L}_\lambda$, которое определяется послойно (в соответствии с представлением $\Omega = \cup_{\tau\geqslant 0}\Gamma^\tau$) по правилу

$$Nh\,\big|_{\Gamma^\tau} := (P^\tau h)\big|_{\Gamma^{\tau-0}}, \qquad \tau > 0,$$

где P^τ суть проекторы в $\mathscr{P}$ на подпространства $\mathscr{P}^\tau := \{h \in \mathscr{P} \mid \operatorname{supp} h \subset \overline{\Omega^\tau}\}$. Мы показываем, что N есть унитарный оператор.

Пусть $p = p^f(x)$ есть решение задачи Дирихле: $\Delta_g p = 0$ в $\Omega \setminus \Gamma$, $p = f$ на Γ. DN-оператор Λ действует по правилу $\Lambda f := -\langle \nabla p^f, \nabla\tau\rangle$ на Γ. Мы показываем, что с N-преобразованием связана некоторая факторизация $\Lambda^{-1} = V^*V$ и обсуждаем ее возможное использование для восстановления (Ω, g) по Λ.

Библ. – 8 назв.

УДК 517.984.5:517.984.48

Свойство автомодельности минимальных матричных операторов Шрёдингера и Дирака на полуоси. Белишев М. И., Симонов С. А. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 148–162.

Пусть $\mathscr{E}$ – гильбертово пространство, $\mathscr{H} = L_2(X, \mu; \mathscr{E})$ – гильбертово пространство $\mathscr{E}$-значных функций на X. Каждый унитарный оператор $\theta : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ определяет унитарный оператор $\widehat{\theta} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ по правилу $(\widehat{\theta}y)(x) = \theta[y(x)]$, $y \in \mathscr{H}$. Будем говорить, что операторы L и L' в $\mathscr{H}$ являются *эквивалентными по форме*, если существует

такой θ, что выполняется $L' = \widehat{\theta} L \widehat{\theta}^*$. В приложениях эквивалентность по форме сохраняет структуру класса матричных дифференциальных операторов.

Назовём оператор $\dot{L}$, действующий в (абстрактном) гильбертовом пространстве $\dot{\mathscr{H}}$ и унитарно эквивалентный L, (унитарной) *копией* L и будем говорить, что L является моделью $\dot{L}$. Скажем, что L является *автомодельным*, если он определяется любой своей копией $\dot{L}$ с точностью до эквивалентности по форме. Основной результат статьи состоит в том, что минимальные операторы Шрёдингера и Дирака на полуоси являются автомодельными. Мотивация исходит из обратных задач математической физики.

Библ. – 8 назв.

УДК 517.984.46

О самосопряжённости некоторых блочных якобиевых матриц и связанных с ними операторов Шрёдингера с точечными взаимодействиями. Будыка В. С., Маламуд М. М., Покровский И. Л. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 163–177.

В статье получены новые условия самосопряжённости некоторых блочных якобиевых операторов, а также условия максимальности их индексов дефекта. Полученные результаты применены к исследованию аналогичных свойств операторов Шрёдингера с точечными взаимодействиями. Получены также условия дискретности их спектра.

Библ. – 36 назв.

УДК 517.951

Корректность характеристической задачи для ультрагиперболического уравнения с векторным потенциалом. Демченко М. Н. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 178–187.

Рассматривается задача для одного ультрагиперболического уравнения, возмущенного векторным потенциалом, с данными на характеристической гиперплоскости. Доказывается корректность такой задачи в естественном классе функций.

Библ. – 15 назв.

УДК 517.958.532

Асимптотическое поведение и аттрактор для систем, описывающих трехмерные вякоупругие течения с трением Фойгта. Каразеева Н. А. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 188–210.

В работе изучается начально-краевая задача с условием прилипания для системы уравнений, описывающих движение вязкоупругой жидкости типа Кельвина-Фойгта с бесконечным количеством времен релаксации. Получена теорема существования и единственности решения для такой начально-краевой задачи. Доказано, что полугруппа разрешающих операторов асимптотически компактна и для нее существует минимальный глобальный B-аттрактор.

Библ. – 23 назв.

УДК 517.958, 517.984.5

О негомеоморфных поверхностях с близкими ДН-операторами. Кориков Д. В. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 211–227.

Пусть (M, g) – поверхность рода m с краем Γ и ДН-оператором Λ. Введем дубль $2M$ поверхности (M, g) и обозначим через $\mathrm{Sys}(2M)$ длину кратчайшей замкнутой геодезической в гиперболической метрике на $2M$. Доказывается, что $\mathrm{Sys}(2M)$ мало если Λ близок по операторной норме к ДН-оператору Λ_* некоторой поверхности (M_*, g_*) меньшего рода $m_* < m$ с тем же краем Γ:

$$\|\Lambda - \Lambda_*\|_{B(H^{1/2}(\Gamma);H^{-1/2}(\Gamma))} \to 0 \implies \mathrm{Sys}(2M) \to 0.$$

Библ. – 18 назв.

УДК 517.9

О задаче рассеяния трёх одномерных квантовых частиц с быстро убывающими парными потенциалами и одним дополнительным парным потенциалом отталкивания, убывающим на бесконечности кулоновским образом. Левин С. Б., Торопов В. О. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 228–253.

Рассматривается задача рассеяния трёх одномерных квантовых частиц, попарно взаимодействующих посредством быстро убывающих потенциалов отталкивания, причём две из них дополнительно взаимодействуют посредством регулярного в нуле потенциала отталкивания,

убывающего на бесконечности кулоновским образом. Строится композиция кулоновского и стандартного преобразований Фурье, переводящая гамильтониан в новое координатное представление. Доказано, что это преобразование унитарно и действует нетривиально лишь по координате заряженной пары, а образы всех трёх быстро убывающих парных потенциалов выражаются через одно одномерное ядро. Показано, что это ядро отличается от дельта-функции на поправку, сосредоточенную в окрестности диагонали ширины $O(T^{-1})$, где T - большой параметр, так что в новом представлении парные взаимодействия описываются нелокальными операторами, но с быстроубывающими на бесконечности по обеим переменным ядрами, а носители их главных членов образуют ту же систему трёх пересекающихся экранов, что и в задаче с быстро убывающими потенциалами. Для полученной задачи реализуется альтернирующий метод Шварца: парные резольвенты строятся с помощью определителей Фредгольма, изучаются итерации операторов отражения до третьего порядка включительно и обосновывается предельный переход спектрального параметра к предельным значениям абсолютно непрерывного спектра. Выписана координатная асимптотика ядра резольвенты в новых координатах и показано, как при обратном преобразовании возникает кулоновская логарифмическая фаза.

Библ. – 16 назв.

УДК 517.958:534.21

Существование локализованной клиновой моды в топографических волноводах с треугольным выступом, имеющим прямой угол при вершине. Мацковский А. А., Заворохин Г. Л. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 254–265.

Доказано существование локализованной клиновой моды в однородном изотропном упругом топографическом волноводе, представляющем собой упругое полупространство с присоединённым треугольным выступом, внутренний угол которого равен $\frac{\pi}{2}$. Используя вариационный метод, мы строим подходящую пробную функцию и показываем, что в коротковолновом режиме для всех допустимых ненулевых значений коэффициента Пуассона отношение Рэлея на этой функции оказывается строго ниже порога существенного спектра оператора теории упругости. Библ. – 27 назв.

УДК 517.9

О комплексной проблеме моментов. Михайлов В. С. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 266–281.

Для комплексной проблемы моментов, то есть для задачи о построении положительной борелевской меры на $\mathbb{C}$ по заданной последовательности комплексных чисел (моментов), мы описываем процедуру построения такой меры при некоторых условиях на последовательность. Мы показываем, что построенная мера фактически является реализацией обобщенной спектральной функции, введенной Г. Гусейновым в 1978 году. Мы также показываем, что достаточные условия на последовательность чисел, из которых следует разрешимость комплексной проблемы моментов, не являются необходимыми.

Библ. – 14 назв.

УДК 517.9

О специальном представлении решения Йоста и функции Вейля для системы Дирака на полуоси. Михайлов В. С. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 282–296.

Мы получаем формулы представления решения Йоста и функции Вейля для оператора Дирака на полуоси для случая непрерывных ограниченных потенциалов. Наш подход основан на связях с начально-краевой задачей с граничным управнеием для одномерной динамической системы Дирака с тем же потенциалом на полуоси.

Библ. – 11 назв.

УДК 517.956:539.3(6):517.956.223

Пластина Кирхгофа с шарнирно фиксированной кромкой и густым периодическим семейством точечных креплений. Назаров С. А. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 297–325.

Исследована однородная изотропная плоская пластина Кирхгофа с двояким закреплением около края: шарнирной фиксацией кромки (угол изгиба произволен, но изгибающий момент равен нулю) и постановкой точечных условий Соболева на густом периодическом семействе (имитируются крепления вдоль малых множеств, например, мелкие пятна сварки или заклёпки). Путём построения пограничных

слоёв нескольких типов установлено, что в зависимости от соотношения между двум малыми геометрическими параметрами – расстоянием между соседними точками крепления и их удалением от края пластины – в пределе пластина приобретает жёстко защемлённый край (двойное условие Дирихле для бигармонического уравнения) или остаётся шарнирно опёртой (точечные условия Соболева исчезают). Кроме того, при вполне определённом соотношении между указанными параметрами в качестве предельного возникает одиночное условие Дирихле и условие упругой фиксации кромки (угол изгиба пропорционален изгибающему моменту на краю). Обоснование построенных асимптотик проводится при использовании разнообразных весовых неравенств.

Библ. – 49 назв.

УДК 517.928

Усреднение одномерного периодического оператора четвертого порядка с сингулярным потенциалом при учете корректоров. Слоущ В. А., Чупров И. М. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 56 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 553) СПб., 2026, с. 326–357.

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается дифференциальный оператор B_ε четвертого порядка вида $B_\varepsilon = \frac{d^4}{dx^4} + \varepsilon^{-4} V(x/\varepsilon)$, где $V(x)$ – вещественная 1-периодическая функция класса $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, а $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ является нижним краем спектра оператора $B = \frac{d^4}{dx^4} + V(x)$, причем первая зонная функция $E_1(k)$ оператора B на периоде $k \in [-\pi, \pi)$ достигает минимума ровно в двух точках $\pm k_0$, $0 < k_0 < \pi$, и ведет себя как $g^{(1)}(k \mp k_0)^2$, $g^{(1)} > 0$, вблизи этих точек. Изучается поведение при малом ε резольвенты $(B_\varepsilon + I)^{-1}$. Получена аппроксимация рассматриваемой резольвенты по операторной норме с погрешностью $O(\varepsilon^4)$. Аппроксимация описывается в терминах спектральных характеристик оператора B на краю спектра.

Библ. – 34 назв.