Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

В. А. Слоущ, И. М. Чупров

УСРЕДНЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ПРИ УЧЕТЕ КОРРЕКТОРОВ

§1. Введение

1.1. Усреднение в пределе малого периода. Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Это актуальная и активно развивающаяся область современной теоретической и прикладной науки. Обширная литература посвящена задачам теории усреднения; в первую очередь укажем книги [1–3].

Пусть Γ – решетка в $\mathbb{R}^d$ и Ω – элементарная ячейка решетки Γ. Для всякой Γ-периодической функции $f(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$.

Обсудим типичную задачу теории усреднения. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим эллиптический оператор A_ε, заданный выражением

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} := -i\nabla. \tag{1.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ – симметричная матрица-функция размера $d \times d$ с вещественными элементами; предполагается, что $g(\mathbf{x})$ положительно определена, ограничена и периодична относительно решетки Γ. Пусть $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ – обобщенное решение эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Базовый результат теории усреднения: при $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится к решению u_0 "усредненного" уравнения

$$-\operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{1.3}$$

Здесь g^0 – постоянная положительная матрица, называемая *эффективной*. Оператор $A^0 = -\operatorname{div} g^0\nabla = \mathbf{D}^* g^0\mathbf{D}$ называется *эффективным оператором* для A_ε. В теории усреднения применительно к уравнению

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, усреднение, операторные оценки погрешности.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 22-11-00092-П).

(1.2) изучаются различные вопросы: нахождение эффективной матрицы g^0, характер сходимости u_ε к u_0, оценка погрешности $u_\varepsilon - u_0$, построение дальнейших членов асимптотического разложения решения u_ε по степеням ε. Поскольку $u_\varepsilon = (A_\varepsilon + I)^{-1} f$, то в операторных терминах вопрос состоит в нахождении аппроксимаций резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε.

Процедура нахождения эффективной матрицы хорошо известна (см., например, [2]). Для описания g^0 нужно рассмотреть вспомогательную краевую задачу на ячейке Ω. Пусть $\Phi_j(\mathbf{x})$ есть Γ-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int\limits_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Тогда g^0 – это $(d \times d)$-матрица со столбцами

$$\mathbf{g}_j^0 = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega g(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)\, d\mathbf{x}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Выясняется, что эффективная матрица положительно определена.

1.2. Операторные оценки погрешности. В работах Бирмана и Суслиной [4–6] был предложен и развит *теоретико-операторный подход* к задачам теории усреднения (вариант спектрального метода). В рамках этого подхода в [4] была установлена оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.5}$$

где u_ε – решение уравнения (1.2), а u_0 – решение усредненного уравнения (1.3). Оценка (1.5) точна по порядку. В операторных терминах (1.5) означает, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте эффективного оператора A^0, причем

$$\big\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{1.6}$$

В [5] была получена более точная аппроксимация резольвенты оператора A_ε с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$:

$$\big\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2,$$

а в [6] была найдена аппроксимация резольвенты по "энергетической" норме (т.е. по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$) с погрешностью $O(\varepsilon)$:

$$\left\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{1.7}$$

В этих аппроксимациях учитываются корректоры, заданные соотношениями

$$K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) + K_1(\varepsilon)^*, \quad K_1(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{d} [\Phi_j^\varepsilon]\partial_j (A^0 + I)^{-1},$$

где $\Phi_j(\mathbf{x})$ есть Γ-периодическое решение задачи (1.4).

В [4–6] изучались также более общие операторы вида

$$\widetilde{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* \widetilde{g}^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} + \varepsilon^{-2} V^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{1.8}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ – положительно определенная и ограниченная матрица-функция с вещественными элементами, а $V(\mathbf{x})$ – вещественная функция. Предполагалось, что $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и $V(\mathbf{x})$ Γ-периодичны и $V(\mathbf{x})$ принадлежит классу $L_q(\Omega)$ с подходящим q. Будем считать, что край спектра оператора $\widetilde{A} = \mathbf{D}^*\widetilde{g}(\mathbf{x})\mathbf{D} + V(\mathbf{x})$ есть точка $\lambda_0 = 0$. Тогда оператор $\widetilde{A}$ допускает удобную факторизацию

$$\widetilde{A} = \omega(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x})^{-1}, \quad g(\mathbf{x}) = \widetilde{g}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}).$$

Здесь $\omega(\mathbf{x})$ – положительное Γ-периодическое решение уравнения

$$\mathbf{D}^*\widetilde{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0,$$

подчиненное условию нормировки $\|\omega\|^2_{L_2(\Omega)} = |\Omega|$. Тогда оператор (1.8) запишется в факторизованном виде

$$\widetilde{A}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D}(\omega^\varepsilon)^{-1} = (\omega^\varepsilon)^{-1} A_\varepsilon (\omega^\varepsilon)^{-1}, \tag{1.9}$$

где A_ε – оператор (1.1). Для оператора (1.9) уже не удается найти такой оператор с постоянными коэффициентами, к резольвенте которого сходилась бы резольвента $(\widetilde{A}_\varepsilon + I)^{-1}$. В [4] было показано, что

$$\left\|(\widetilde{A}_\varepsilon + I)^{-1} - [\omega^\varepsilon](A^0 + I)^{-1}[\omega^\varepsilon]\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{1.10}$$

Здесь A^0 – эффективный оператор для оператора (1.1) при $g = \widetilde{g}\omega^2$, а $[\omega^\varepsilon]$ – оператор умножения на функцию $\omega^\varepsilon(\mathbf{x})$. Аппроксимация теперь содержит быстро осциллирующие множители по краям от резольвенты оператора A^0.

Отметим, что в работах [4–6] аппроксимации для резольвенты были найдены не только для операторов вида (1.1), (1.8), но для широкого класса матричных дифференциальных операторов второго порядка вида $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Здесь $g(\mathbf{x})$ – Γ-периодическая ограниченная и положительно определенная $(m \times m)$-матрица-функция, а $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$ – $(m \times n)$-матричный ДО первого порядка. Предполагалось, что $m \geqslant n$, а символ $b(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$, – матрица максимального ранга. Подчеркнем, что факторизация изучаемого оператора имеет принципиальное значение для получения описанных результатов.

С помощью теоретико-операторного подхода были также получены операторные оценки при усреднении параболических уравнений второго порядка; см. [7–10].

Поясним метод на примере более простого оператора (1.1). *Масштабным преобразованием* изучение оператора $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε сводится к изучению поведения резольвенты $(A + \varepsilon^2 I)^{-1}$. Здесь $A = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}$. Далее, с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор A раскладывается в прямой интеграл по операторам $A(\mathbf{k})$. Оператор $A(\mathbf{k})$ действует в $L_2(\Omega)$ и задается дифференциальным выражением $(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. Параметр $\mathbf{k}$ называют *квазиимпульсом*. Спектр оператора $A(\mathbf{k})$ дискретен. Пусть $E_1(\mathbf{k})$ – первое собственное значение и $\varphi_1(\mathbf{k}; \mathbf{x})$ – первая собственная функция оператора $A(\mathbf{k})$. Край спектра оператора A – это минимум первой зонной функции $E_1(\mathbf{k})$, который достигается при $\mathbf{k} = 0$: $E_1(0) = 0$. Выясняется, что поведение резольвенты $(A + \varepsilon^2 I)^{-1}$ можно описать в терминах "пороговых" характеристик, то есть, спектральных характеристик оператора A на краю спектра (имеются в виду асимптотики для $E_1(\mathbf{k})$ и $\varphi_1(\mathbf{k}; \mathbf{x})$ при $|\mathbf{k}| \to 0$). В частности, эффективная матрица g^0 получается из асимптотики первой зонной функции $E_1(\mathbf{k})$ при $|\mathbf{k}| \to 0$: $E_1(\mathbf{k}) \sim \langle g^0 \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle$. Таким образом, эффект усреднения можно трактовать как *пороговый эффект* на краю спектра периодического оператора A.

Отметим, что другой подход к операторным оценкам погрешности при усреднении эллиптических и параболических уравнений в $\mathbb{R}^d$ (так называемый метод сдвига) был развит Жиковым и Пастуховой [11–13]; см. также обзор [14] и цитированную там литературу.

К усреднению эллиптических операторов высокого четного порядка теоретико-операторный подход применялся в работах [15–19], а метод

сдвига – в работах [20–23]. В [16–19] изучались матричные ДО порядка $2p$, заданные в факторизованном виде $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Здесь $g(\mathbf{x})$ – Γ-периодическая ограниченная и положительно определенная $(m\times m)$-матрица-функция, а $b(\mathbf{D}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha$ – $(m\times n)$-матричный ДО порядка p. Предполагалось, что $m \geqslant n$, а символ $b(\boldsymbol{\xi})$ – матрица максимального ранга. В [16] для таких операторов установлен аналог оценки (1.6), а также найдено приближение по $(L_2 \to H^p)$-норме при учете корректора (аналог оценки (1.7)). Эффективный оператор имеет вид $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. В работах [18, 19] найдена уточненная аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ при учете корректоров различных порядков с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^{2p})$. В [18, 19] и [22, 23] был обнаружен интересный эффект, характерный для операторов высокого порядка $2p$, $p \geqslant 2$: для скалярных операторов с вещественными коэффициентами первый корректор обращается в нуль и имеет место оценка

$$\left\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{1.11}$$

В частности, это верно для одномерного оператора $A_\varepsilon = \frac{d^2}{dx^2} g^\varepsilon(x) \frac{d^2}{dx^2} = D^2 g^\varepsilon(x) D^2$ (так называемого *оператора Эйлера–Бернулли*). Также можно показать, что корректор третьего порядка для оператора A_ε в нуль не обращается.

Отметим также работы [24–30] по операторным оценкам при усреднении эллиптических и параболических задач вблизи края внутренней спектральной лакуны; в этих задачах проявляется пороговый эффект на краю лакуны.

Более подробный обзор результатов по операторным оценкам погрешности можно найти во введении к работе [31].

1.3. Постановка задачи. Результат. Работа посвящена построению аппроксимации резольвенты одномерного эллиптического ДО четвертого порядка с сингулярным периодическим потенциалом при учете корректоров.

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ изучается ДО четвертого порядка вида

$$B_\varepsilon := \frac{d^4}{dx^4} + \varepsilon^{-4} V^\varepsilon(x) = D^4 + \varepsilon^{-4} V^\varepsilon(x), \quad D = -i\frac{d}{dx}.$$

Предполагается, что $V(x)$ – вещественная 1-периодическая функция класса $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Добавляя к $V(x)$ постоянную, можно считать, что нижним краем спектра оператора $B = D^4 + V(x)$ является точка

$\lambda_0 = 0$. *Наша цель* – построить приближение к резольвенте $(B_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R})$ при малом ε. В отличие от оператора (1.8) второго порядка с сингулярным потенциалом, оператор B_ε не допускает факторизации, подобной (1.9). Как выяснилось в работе [32], это обстоятельство меняет характер результата кардинальным образом.

Следуя теоретико-операторному подходу, мы применяем масштабное преобразование и сводим дело к изучению оператора $(B + \varepsilon^4 I)^{-1}$. Затем с помощью преобразования Гельфанда раскладываем оператор B по операторам $B(k)$, действующим в $L_2(0,1)$. Оператор $B(k)$ задается выражением $(D + k)^4 + V(x)$ при периодических граничных условиях. Пусть $E_1(k)$ – первое собственное значение оператора $B(k)$. Как известно, $E_1(k)$ – непрерывная четная (2π)-периодическая функция. *Предполагается, что* $E_1(k)$ *достигает минимума на периоде* $k \in [-\pi, \pi)$ *ровно в двух точках* $\pm k_0$, $0 < k_0 < \pi$, *причем минимум невырожден*; см. условие **A** в §2. Тогда в окрестности этих точек функция $E_1(k)$ аналитична и $E_1(k) \sim g^{(1)}(k \mp k_0)^2$, где $g^{(1)} > 0$. Пусть $\varphi_0(x)$ – периодическое решение уравнения $B(k_0)\varphi_0(x) = 0$, нормированное в $L_2(0,1)$. Положим $\psi_0(x) := e^{ik_0 x}\varphi_0(x)$. Из результатов работы [33] Баданина и Коротяева следует, что условие **A** выполнено в случае "не слишком больших" потенциалов V.

В работе [32] была получена аппроксимация резольвенты $(B_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R})$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$; см. теорему 4.1. Выяснено, что каждая точка минимума функции $E_1(k)$ дает вклад в аппроксимацию: резольвента $(B_\varepsilon + I)^{-1}$ приближается суммой $R_\varepsilon^+ + R_\varepsilon^-$, где $R_\varepsilon^{(+)} = [\psi_0^\varepsilon](\varepsilon^{-2} g^{(1)} D^2 + I)^{-1}[\overline{\psi_0^\varepsilon}]$ и $R_\varepsilon^{(-)} = [\overline{\psi_0^\varepsilon}](\varepsilon^{-2} g^{(1)} D^2 + I)^{-1}[\psi_0^\varepsilon]$.

Наш *основной результат* – приближение резольвенты $(B_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R})$ с погрешностью $O(\varepsilon^4)$; см. теорему 4.2. Снова каждая точка минимума функции $E_1(k)$ дает вклад в аппроксимацию: резольвента $(B_\varepsilon + I)^{-1}$ приближается суммой

$$R_\varepsilon^{(+)} + R_\varepsilon^{(-)} + \varepsilon^2 K^{(+)}(\varepsilon) + \varepsilon^2 K^{(-)}(\varepsilon),$$

где $K^{(\pm)}(\varepsilon)$ – некоторые корректоры, $\|K^{(\pm)}(\varepsilon)\|_{L_2 \to L_2} \leqslant \mathrm{Const}$. Отметим, что члены третьего порядка в этом разложении оказываются равными нулю.

Таким образом, поведение резольвенты оператора B_ε принципиально отличается от поведения резольвенты факторизованного оператора Эйлера–Бернулли $A_\varepsilon = D^2 g^\varepsilon(x) D^2$. Резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ имеет предел, равный резольвенте эффективного оператора $A^0 = g^0 D^4$; см. (1.11). Резольвента $(B_\varepsilon + I)^{-1}$ предела не имеет и приближается суммой двух резольвент сингулярного оператора $\varepsilon^{-2} g^{(1)} D^2$ второго порядка (с большим множителем ε^{-2}), окаймленных подходящими быстро осциллирующими множителями. Аппроксимация резольвенты оператора A_ε с погрешностью $O(\varepsilon^4)$ содержит корректоры второго и третьего порядка, в то время как приближение резольвенты оператора B_ε с погрешностью $O(\varepsilon^4)$ содержит только корректоры второго порядка. Эти результаты также принципиально отличаются от случая оператора второго порядка (1.8) с сингулярным потенциалом, допускающего факторизацию (1.9); см. оценку (1.10).

1.4. Обозначения. Через $L_q(\mathbb{R})$, $L_q(a,b)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, обозначим стандартные L_q–классы на оси и на промежутке (a,b). Для измеримой функции f через $[f]$ или $[f(x)]$ обозначим оператор умножения на функцию f в пространстве L_2. Через $C_0^\infty(\mathbb{R})$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на оси; через $H^s(\mathbb{R})$, $H^s(0,1)$, $s \geqslant 0$, – стандартные классы Соболева; $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ – класс функций $f(x)$ на оси, для которых произведение $f\varphi$ принадлежит $H^s(\mathbb{R})$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; $\widetilde{H}^s(0,1)$ – подпространство тех функций из $H^s(0,1)$, периодическое продолжение которых принадлежит классу $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Используем обозначение $D := -i\frac{d}{dx}$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ обозначим класс Шварца.

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ – комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Скалярное произведение и норма в $\mathfrak{H}$ обозначаются через $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ соответственно; для линейного ограниченного оператора $T : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ через $\|T\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ обозначим операторную норму. Иногда мы опускаем индексы. Для замкнутого оператора T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ через $\operatorname{Dom} T$ обозначается его область определения, а через T^* – сопряженный оператор. Пусть A – самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве. В этом случае $\sigma(A)$ обозначает спектр оператора A. Если δ – произвольное борелевское множество на $\mathbb{R}$, то $E_A(\delta)$ – спектральный проектор оператора A, отвечающий множеству δ.

Для всякой 1-периодической функции $f(x)$ на оси положим $f^\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)$. Преобразование Фурье Φ вводится на классе Шварца по правилу

$$(\Phi v)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} v(x)\, dx, \quad v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

и продолжается по непрерывности до унитарного оператора $\Phi : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

Авторы признательны проф. Т. А. Суслиной за полезную дискуссию и постоянное внимание к работе.

§2. Спектральные свойства оператора B. Пороговые аппроксимации

2.1. Оператор B. Разложение в прямой интеграл. Пусть $V(x)$ – вещественная 1-периодическая функция класса $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. В $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор

$$B = D^4 + V(x), \quad \operatorname{Dom} B = H^4(\mathbb{R}).$$

Оператор B самосопряжен и полуограничен снизу.

Определим преобразование Гельфанда $\mathcal{G}$ (см., например, [34] или [4, гл. 2]). Первоначально $\mathcal{G}$ задается на классе Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ равенством

$$\mathcal{G}u(k,x) = \widetilde{u}(k,x) := (2\pi)^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(x+n) e^{-ik(x+n)}, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Затем $\mathcal{G}$ распространяется по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{G} : L_2(\mathbb{R}) \to \int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus L_2(0,1)\, dk = L_2((-\pi,\pi)\times(0,1)).$$

В $L_2(0,1)$ рассмотрим семейство самосопряженных операторов

$$B(k) = (D+k)^4 + V(x), \quad \operatorname{Dom} B(k) = \widetilde{H}^4(0,1), \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

С помощью преобразования Гельфанда оператор B раскладывается в прямой интеграл по операторам $B(k)$ (то есть, частично диагонализуется):

$$B = \mathcal{G}^{-1} \left(\int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus B(k)\, dk \right) \mathcal{G}. \tag{2.2}$$

Это означает, что справедливы соотношения

$$u \in \operatorname{Dom} B = H^4(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \widetilde{u} \in L_2((-\pi,\pi);\widetilde{H}^4(0,1)),$$
$$\mathcal{G}(Bu)(k,x) = B(k)\widetilde{u}(k,x), \quad u \in H^4(\mathbb{R}), \quad k \in [-\pi,\pi), \quad x \in (0,1).$$

Спектр оператора $B(k)$ дискретен и состоит из собственных значений $\{E_j(k)\}_{j=1}^{\infty}$, занумерованных (с учетом кратностей) в порядке неубывания; функции $E_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$, непрерывны, четны и 2π-периодичны; будем называть $E_j(k)$ *зонными функциями*. Собственным значениям $E_j(k)$ отвечают собственные функции $\widehat{\varphi}_j(k,x)$; их можно выбрать так, что набор $\{\widehat{\varphi}_j(k,\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L_2(0,1)$ и, кроме того, функции $\widehat{\varphi}_j(\cdot,\cdot)$ измеримы по паре переменных. Если в данной точке k_* число $E_j(k_*)$ – простое собственное значение оператора $B(k_*)$, то в некоторой окрестности точки k_* функция $E_j(k)$ и функция $\widehat{\varphi}_j(k,\cdot)$ со значениями в $\widetilde{H}^4(0,1)$ являются вещественно аналитическими.

2.2. Условие A. Свойства зонных функций. Ниже предполагается, что семейство операторов $B(k)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие A. *Справедливы соотношения*

$$0 = \min E_1 < \min E_2;$$

на интервале $[0,\pi]$ *минимум функции* $E_1(k)$ *достигается в единственной точке* $k_0 \in (0,\pi)$ *и точка* k_0 *является точкой невырожденного минимума для* $E_1(k)$.

Ввиду четности, функция $E_1(k)$ на периоде $[-\pi,\pi)$ достигает минимума ровно в двух симметричных точках k_0 и $-k_0$. В работе [33] доказано, что условие **A** выполнено для "не слишком больших" потенциалов V, а именно, для любой вещественной 1-периодической функции $W \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, отличной от константы, найдется число $\gamma_0 > 0$ такое, что при каждом $\gamma \in (0,\gamma_0]$ можно выбрать число $\alpha_\gamma \in \mathbb{R}$ таким образом, что семейство операторов

$$B(k,\gamma) := (D+k)^4 + V_\gamma(x), \quad \operatorname{Dom} B(k,\gamma) = \widetilde{H}^4(0,1),$$

где $V_\gamma(x) = \gamma W(x) + \alpha_\gamma$, удовлетворяет условию **A**.

Для всякого $0 < \sigma < \min\{k_0, \pi - k_0\}$ введем обозначения

$$U_\sigma^{(+)} := [k_0-\sigma, k_0+\sigma], \quad U_\sigma^{(-)} := [-k_0-\sigma, -k_0+\sigma], \quad U_\sigma := U_\sigma^{(-)} \cup U_\sigma^{(+)}.$$

Определим величину

$$d_0 := \operatorname{dist}\{\sigma(B(k_0)) \setminus \{0\}, 0\} = \operatorname{dist}\{\sigma(B(-k_0)) \setminus \{0\}, 0\}.$$

Ясно, что $d_0 = E_2(k_0) = E_2(-k_0)$. *Фиксируем настолько малое число* $\sigma > 0$, *чтобы были выполнены соотношения*

$$\operatorname{rank} E_{B(k)}[0, d_0/3] = 1, \quad \sigma(B(k)) \cap (d_0/3, 2d_0/3) = \varnothing, \quad k \in U_\sigma.$$

Введем обозначения

$$E_{B(k)}[0, d_0/3] =: F(k), \quad I - F(k) = F(k)^\perp, \quad k \in U_\sigma.$$

Таким образом, $E_1(k)$ является однократным собственным значением оператора $B(k)$ при $k \in U_\sigma$; функция $E_1(k)$ вещественно аналитична, а $\varphi_1(k, \cdot)$ является вещественно аналитической функцией со значениями в $\widetilde{H}^4(0,1)$ при $k \in U_\sigma$. Кроме того, из условия **A** вытекают оценки

$$c_0(k \mp k_0)^2 \leqslant E_1(k) \leqslant c_1(k \mp k_0)^2, \quad k \in U_\sigma^{(\pm)}, \quad 0 < c_0 \leqslant c_1 < \infty, \tag{2.3}$$

$$E_1(k) \geqslant c_2 > 0, \quad k \in [-\pi, \pi) \setminus U_\sigma, \tag{2.4}$$

$$E_2(k) \geqslant c_3 > 0, \quad k \in [-\pi, \pi). \tag{2.5}$$

Собственное значение $E_1(k)$ и собственная функция $\widehat{\varphi}_1(k, x)$ оператора $B(k)$ допускают разложения в окрестности точки k_0:

$$E_1(k) = \lambda_0 + \lambda_1(k - k_0) + \lambda_2(k - k_0)^2 + \lambda_3(k - k_0)^3 + O(|k - k_0|^4), \quad k \to k_0, \tag{2.6}$$

$$\widehat{\varphi}_1(k, x) = \varphi_0(x) + \widetilde{\varphi}_1(x)(k - k_0) + \widetilde{\varphi}_2(x)(k - k_0)^2 + \widetilde{\varphi}_3(x)(k - k_0)^3 + O(|k - k_0|^4), \quad k \to k_0. \tag{2.7}$$

В (2.7) разложение понимается в смысле пространства $\widetilde{H}^4(0,1)$. В силу (2.3) имеют место равенства $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 > 0$. Подставляя (2.6), (2.7) в уравнение

$$B(k)\widehat{\varphi}_1(k, \cdot) = E_1(k)\widehat{\varphi}_1(k, \cdot)$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях величины $k - k_0$, получаем уравнения на функции $\varphi_0(x)$, $\widetilde{\varphi}_1(x)$, $\widetilde{\varphi}_2(x)$ и $\widetilde{\varphi}_3(x)$:

$$(D + k_0)^4\varphi_0(x) + V(x)\varphi_0(x) = 0, \tag{2.8}$$

$$(D + k_0)^4\widetilde{\varphi}_1(x) + 4(D + k_0)^3\varphi_0(x) + V(x)\widetilde{\varphi}_1(x) = 0.$$

$$(D+k_0)^4\widetilde{\varphi}_2(x) + 4(D+k_0)^3\widetilde{\varphi}_1(x) + 6(D+k_0)^2\varphi_0(x) + V(x)\widetilde{\varphi}_2(x) = \lambda_2\varphi_0(x). \tag{2.9}$$

$$(D+k_0)^4\widetilde{\varphi}_3(x)+4(D+k_0)^3\widetilde{\varphi}_2(x)+6(D+k_0)^2\widetilde{\varphi}_1(x)$$
$$+4(D+k_0)\varphi_0(x)+V(x)\widetilde{\varphi}_3(x)=\lambda_3\varphi_0(x)+\lambda_2\widetilde{\varphi}_1(x). \quad (2.10)$$

Из условия нормировки $\int\limits_0^1 |\widehat{\varphi}_1(k,x)|^2\,dx=1$, и разложения (2.7) вытекают равенства

$$\int\limits_0^1 |\varphi_0(x)|^2\,dx=1, \quad \int\limits_0^1 \mathrm{Re}(\varphi_0(x)\overline{\widetilde{\varphi}_1(x)})\,dx=0. \quad (2.11)$$

Таким образом, функция $\varphi_0\in\widetilde{H}^4(0,1)$ является решением задачи

$$\begin{cases}(D+k_0)^4\varphi_0(x)+V(x)\varphi_0(x)=0,\\ \int\limits_0^1 |\varphi_0(x)|^2\,dx=1.\end{cases} \quad (2.12)$$

Коэффициент $\widetilde{\varphi}_1(x)$ разложения (2.7) удовлетворяет уравнению

$$(D+k_0)^4\widetilde{\varphi}_1(x)+V(x)\widetilde{\varphi}_1(x)=-4(D+k_0)^3\varphi_0(x). \quad (2.13)$$

Следовательно, выполнено условие разрешимости

$$\int\limits_0^1 \left((D+k_0)^3\varphi_0(x)\right)\overline{\varphi_0(x)}\,dx=0. \quad (2.14)$$

По существу, выполнение условия (2.14) обеспечено условием **A**: из условия **A** следует справедливость разложений (2.6), (2.7), при $\lambda_0=\lambda_1=0$, $\lambda_2>0$, а тогда и разрешимость уравнения (2.13) для $\widetilde{\varphi}_1$. Через $\varphi_1(x)$ обозначим единственное периодическое решение задачи

$$\begin{aligned}&(D+k_0)^4\varphi_1(x)+V(x)\varphi_1(x)=-4(D+k_0)^3\varphi_0(x),\\ &\int\limits_0^1 \varphi_1(x)\overline{\varphi_0(x)}\,dx=0.\end{aligned} \quad (2.15)$$

Тогда

$$\widetilde{\varphi}_1(x)=\varphi_1(x)+\alpha\varphi_0(x) \quad (2.16)$$

с некоторой постоянной α. Из второго равенства в (2.11) следует $\mathrm{Re}\,\alpha=0$.

Далее, домножим уравнение (2.9) на $\overline{\varphi_0(x)}$ и проинтегрируем по интервалу $(0,1)$. Учитывая (2.8), (2.14) и (2.16), приходим к равенству

$$g^{(1)} := \lambda_2 = 6\int\limits_0^1 |(D+k_0)\,\varphi_0(x)|^2\,dx + 4\int\limits_0^1 \varphi_1(x)\overline{(D+k_0)^3\,\varphi_0(x)}\,dx. \quad (2.17)$$

При условии **A** величина $g^{(1)}$ положительна:

$$g^{(1)} \geqslant c_0 > 0, \quad (2.18)$$

где c_0 – постоянная из нижнего неравенства (2.3).

Коэффициент $\widetilde{\varphi}_2(x)$ разложения (2.7) удовлетворяет уравнению

$$(D+k_0)^4\widetilde{\varphi}_2(x) + V(x)\widetilde{\varphi}_2(x) = -4(D+k_0)^3\widetilde{\varphi}_1(x) \\ -6(D+k_0)^2\varphi_0(x) + \lambda_2\varphi_0(x).$$

Следовательно, выполнено условие разрешимости

$$\int\limits_0^1 \left(-4(D+k_0)^3\widetilde{\varphi}_1(x) - 6(D+k_0)^2\varphi_0(x) + \lambda_2\varphi_0(x)\right)\overline{\varphi_0(x)}\,dx = 0. \quad (2.19)$$

Через $\widehat{\varphi}_2(x)$ обозначим единственное периодическое решение задачи

$$\begin{cases} (D+k_0)^4\widehat{\varphi}_2(x) + V(x)\widehat{\varphi}_2(x) = -4(D+k_0)^3\widetilde{\varphi}_1(x) \\ \qquad\qquad - 6(D+k_0)^2\varphi_0(x) + \lambda_2\varphi_0(x), \\ \displaystyle\int\limits_0^1 \widehat{\varphi}_2(x)\overline{\varphi_0(x)}\,dx = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Тогда

$$\widetilde{\varphi}_2(x) = \widehat{\varphi}_2(x) + \beta\varphi_0(x)$$

с некоторой постоянной β.

Учитывая (2.14) и (2.16), равенство (2.19) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^1 \left(-4(D+k_0)^3\varphi_1(x) - 6(D+k_0)^2\varphi_0(x) + \lambda_2\varphi_0(x)\right)\overline{\varphi_0(x)}\,dx = 0. \quad (2.21)$$

Через $\varphi_2(x)$ обозначим единственное периодическое решение задачи

$$\begin{cases} (D+k_0)^4\varphi_2(x)+V(x)\varphi_2(x)=-4(D+k_0)^3\varphi_1(x) \\ \qquad -6(D+k_0)^2\varphi_0(x)+\lambda_2\varphi_0(x), \\ \displaystyle\int_0^1 \varphi_2(x)\overline{\varphi_0(x)}\,dx=0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Сравнивая (2.15), (2.20) и (2.22) убеждаемся в справедливости равенства $\widehat{\varphi}_2(x)=\varphi_2(x)+\alpha\varphi_1(x)$, где α – постоянная из (2.16). Таким образом,

$$\widetilde{\varphi}_2(x)=\varphi_2(x)+\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_0(x). \tag{2.23}$$

Далее, домножим уравнение (2.10) на $\overline{\varphi_0(x)}$ и проинтегрируем по интервалу $(0,1)$. Учитывая (2.8), (2.14), (2.16), (2.21), (2.23) и равенство $\operatorname{Re}\alpha=0$, приходим к соотношению

$$g^{(2)}:=\lambda_3=4\int_0^1\left((D+k_0)^3\varphi_2(x)\right)\overline{\varphi_0(x)}\,dx$$

$$+6\int_0^1\left((D+k_0)^2\varphi_1(x)\right)\overline{\varphi_0(x)}\,dx+4\int_0^1\left((D+k_0)\varphi_0(x)\right)\overline{\varphi_0(x)}\,dx. \tag{2.24}$$

Поскольку $E_1(-k)=E_1(k)$ и $\widehat{\varphi}_1(-k,x)=\overline{\widehat{\varphi}_1(k,x)}$, из (2.6), (2.7) вытекают следующие разложения в окрестности точки $-k_0$:

$$E_1(k)=\lambda_2(k+k_0)^2-\lambda_3(k+k_0)^3+O(|k+k_0|^4),\quad k\to -k_0, \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_1(k,x)=\overline{\varphi_0(x)}-\overline{\widetilde{\varphi}_1(x)}(k+k_0)+\overline{\widetilde{\varphi}_2(x)}(k+k_0)^2 \\ -\overline{\widetilde{\varphi}_3(x)}(k+k_0)^3+O(|k+k_0|^4),\quad k\to -k_0.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Из разложений (2.6), (2.7), (2.16), (2.25), (2.26) и равенства $\operatorname{Re}\alpha=0$ следует, что при $k\to k_0$ справедливо приближение

$$F(k)=P^{(+)}+Q^{(+)}(k-k_0)+O(|k-k_0|^2),\quad k\to k_0, \tag{2.27}$$

где

$$\begin{aligned}P^{(+)}&:=F(k_0)=(\cdot,\varphi_0)_{L_2(0,1)}\varphi_0, \\ Q^{(+)}&:=(\cdot,\varphi_1)_{L_2(0,1)}\varphi_0+(\cdot,\varphi_0)_{L_2(0,1)}\varphi_1,\end{aligned} \tag{2.28}$$

а при $k\to -k_0$ справедливо приближение

$$F(k)=P^{(-)}-Q^{(-)}(k+k_0)+O(|k+k_0|^2),\quad k\to -k_0,$$

где

$$\begin{aligned} P^{(-)} &:= F(-k_0) = (\cdot, \overline{\varphi_0})_{L_2(0,1)}\overline{\varphi_0}, \\ Q^{(-)} &:= (\cdot, \overline{\varphi_1})_{L_2(0,1)}\overline{\varphi_0} + (\cdot, \overline{\varphi_0})_{L_2(0,1)}\overline{\varphi_1}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Оба приближения понимаются в смысле операторной нормы в $L_2(0,1)$. Также справедливы приближения

$$B(k)F(k) = g^{(1)}P^{(+)}(k-k_0)^2 + C^{(+)}(k-k_0)^3 + O(|k-k_0|^4), \quad k \to k_0,$$

$$B(k)F(k) = g^{(1)}P^{(-)}(k+k_0)^2 - C^{(-)}(k+k_0)^3 + O(|k+k_0|^4), \quad k \to -k_0.$$

Здесь

$$C^{(+)} := g^{(1)}Q^{(+)} + g^{(2)}P^{(+)}, \quad C^{(-)} := g^{(1)}Q^{(-)} + g^{(2)}P^{(-)}. \tag{2.30}$$

Оба приближения также понимаются в смысле операторной нормы в $L_2(0,1)$. В следующем пункте мы явно оценим погрешности этих приближений по операторной норме в $L_2(0,1)$.

2.3. Пороговые аппроксимации. Введем контур $\Gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = d_0/2\}$ с направлением обхода против часовой стрелки. При $k \in U_\sigma$ справедливы равенства

$$F(k) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (B(k) - \zeta I)^{-1}\, d\zeta, \tag{2.31}$$

$$B(k)F(k) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (B(k) - \zeta I)^{-1}\zeta\, d\zeta. \tag{2.32}$$

Лемма 2.1. *Пусть операторы $P^{(+)}$, $Q^{(+)}$ и $P^{(-)}$, $Q^{(-)}$ определены в* (2.28) *и* (2.29)*, соответственно.*

1°. *При $k \in U_\sigma^{(+)}$ справедливы соотношения*

$$F(k) = P^{(+)} + \Phi^{(+)}(k), \quad \big\|\Phi^{(+)}(k)\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_1|k-k_0|.$$

2°. *При $k \in U_\sigma^{(-)}$ справедливы соотношения*

$$F(k) = P^{(-)} + \Phi^{(-)}(k), \quad \big\|\Phi^{(-)}(k)\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_1|k-k_0|.$$

Постоянная C_1 зависит от k_0, d_0 и V.

3°. *При $k \in U_\sigma^{(+)}$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} &F(k) = P^{(+)} + Q^{(+)}(k-k_0) + \widehat{\Phi}^{(+)}(k), \\ &\big\|\widehat{\Phi}^{(+)}(k)\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widehat{C}_1|k-k_0|^2. \end{aligned}$$

4°. *При* $k \in U_\sigma^{(-)}$ *справедливы соотношения*

$$F(k) = P^{(-)} - Q^{(-)}(k + k_0) + \widehat{\Phi}^{(-)}(k),$$
$$\big\|\widehat{\Phi}^{(-)}(k)\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widehat{C}_1 |k - k_0|^2.$$

Постоянная $\widehat{C}_1$ *зависит от* k_0, d_0 *и* V.

Доказательство. Утверждения 1° и 2° были доказаны в работе [32]. Проверим утверждение 3°; утверждение 4° устанавливается аналогично.

Введем обозначения

$$(B(k)-\zeta I)^{-1} =: R(k,\zeta), \quad (B(k_0)-\zeta I)^{-1} =: R_0(\zeta), \quad |\zeta| = d_0/2, \quad k \in U_\sigma^{(+)};$$
$$\Delta B(k) := B(k) - B(k_0) = 4D_{k_0}^3 (k - k_0) + 6D_{k_0}^2 (k - k_0)^2 + 4D_{k_0}(k - k_0)^3 + I(k - k_0)^4,$$

где $D_{k_0} := D + k_0$.

Поскольку $\sigma(B(k)) \subset [0, d_0/3] \cup [2d_0/3, \infty)$ при $k \in U_\sigma^{(+)}$, а $\sigma(B(k_0)) \subset \{0\} \cup [d_0, \infty)$, выполнены оценки

$$\|R(k,\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{6}{d_0}, \quad \|R_0(\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{2}{d_0}, \qquad \zeta \in \Gamma,\ k \in U_\sigma^{(+)}. \tag{2.33}$$

Оператор $R_0(\zeta)$ непрерывно переводит $L_2(0,1)$ в $\widetilde{H}^4(0,1)$. Оценим его норму:

$$\|R_0(\zeta)\|_{L_2(0,1)\to H^4(0,1)} \leqslant \|R_0(-1)\|_{L_2(0,1)\to H^4(0,1)} \times \big\|(B(k_0) + I)(B(k_0) - \zeta I)^{-1}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}.$$

В силу спектральной теоремы имеем

$$\big\|(B(k_0) + I)(B(k_0) - \zeta I)^{-1}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \sup_{x\in\sigma(B(k_0))} \frac{x+1}{|x-\zeta|} \leqslant 2 + \frac{2}{d_0}.$$

Следовательно,

$$\|R_0(\zeta)\|_{L_2(0,1)\to H^4(0,1)} \leqslant \left(2 + \frac{2}{d_0}\right) \|R_0(-1)\|_{L_2(0,1)\to H^4(0,1)} =: \mathfrak{C}_1(k_0, d_0, V), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{2.34}$$

Отсюда и из выражения для оператора $\Delta B(k)$ вытекает оценка

$$\|\Delta B(k)R_0(\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \mathfrak{C}_2(k_0,d_0,V)|k-k_0|, \quad \zeta\in\Gamma,\ k\in U_\sigma^{(+)}. \tag{2.35}$$

Воспользуемся резольвентным тождеством

$$R(k,\zeta) = R_0(\zeta) - R(k,\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta). \tag{2.36}$$

Проитерируем (2.36) один раз:

$$R(k,\zeta) = R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta) + \widehat{J}_1(k,\zeta), \quad \widehat{J}_1(k,\zeta) := R(k,\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta). \tag{2.37}$$

Из (2.33), (2.35) вытекает оценка

$$\|\widehat{J}_1(k,\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{6}{d_0}\mathfrak{C}_2^2(k_0,d_0,V)|k-k_0|^2, \quad \zeta\in\Gamma,\quad k\in U_\sigma^{(+)}. \tag{2.38}$$

Далее, подставляя выражение для $\Delta B(k)$ в (2.37), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} &R(k,\zeta) = R_0(\zeta) - R_0(\zeta)4D_{k_0}^3R_0(\zeta)(k-k_0) + \widehat{J}_1(k,\zeta) + \widehat{J}_2(k,\zeta),\\ &\widehat{J}_2(k,\zeta) := -R_0(\zeta)(6D_{k_0}^2(k-k_0)^2 + 4D_{k_0}(k-k_0)^3 + I(k-k_0)^4)R_0(\zeta),\\ &D_{k_0} := D + k_0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

С учетом (2.34) нормы операторов $D_{k_0}^jR_0(\zeta)$, $j=1,2,3$, в $L_2(0,1)$ равномерно ограничены константами, зависящими от k_0, d_0 и V. Вместе с (2.33) это влечет оценку

$$\|\widehat{J}_2(k,\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_3(k_0,d_0,V)|k-k_0|^2,\quad \zeta\in\Gamma,\quad k\in U_\sigma^{(+)}. \tag{2.40}$$

Применяя (2.31) и учитывая (2.39) и равенство $F(k_0) = P^{(+)}$, получаем

$$F(k) = P^{(+)} + \widehat{Q}^{(+)}(k-k_0) + \widehat{\Phi}^{(+)}(k), \tag{2.41}$$

где

$$\widehat{Q}^{(+)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)4D_{k_0}^3R_0(\zeta)\,d\zeta, \tag{2.42}$$

$$\widehat{\Phi}^{(+)}(k) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma(\widehat{J}_1(k,\zeta)+\widehat{J}_2(k,\zeta))\,d\zeta. \tag{2.43}$$

Из (2.38), (2.40) и (2.43) получаем оценку

$$\|\widehat{\Phi}^{(+)}(k)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{d_0}{2}\left(\frac{6}{d_0}\mathfrak{C}_2^2(k_0,d_0,V)+\widehat{\mathfrak{C}}_3(k_0,d_0,V)\right)|k-k_0|^2. \tag{2.44}$$

Сопоставляя (2.41), (2.44) и (2.27), приходим к соотношению $\widehat{Q}^{(+)} = Q^{(+)}$. □

Замечание 2.2. Коэффициент $\widehat{Q}^{(+)}$ в разложении (2.41) можно вычислить непосредственно, не прибегая к рассмотрениям пункта *2.2*. Для этого следует представить $R_0(\zeta)$ в виде

$$\begin{aligned} &R_0(\zeta) = R_0(\zeta)P^{(+)} + R_0^{\perp}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}P^{(+)} + R_0^{\perp}(\zeta),\\ &\text{где}\quad R_0^{\perp}(\zeta) := R_0(\zeta)(I-P^{(+)}),\quad \zeta\in\Gamma, \end{aligned} \tag{2.45}$$

и учесть, что оператор-функция $R_0^{\perp}(\zeta)$ голоморфна внутри контура Γ. Подставляя (2.45) в (2.42), получаем

$$\widehat{Q}^{(+)} = -P^{(+)}4D_{k_0}^3R_0^{\perp}(0) - R_0^{\perp}(0)4D_{k_0}^3P^{(+)}.$$

Это приводит к прежнему результату $\widehat{Q}^{(+)} = Q^{(+)}$.

Лемма 2.3. *Пусть операторы $P^{(+)}$, $Q^{(+)}$, $P^{(-)}$, $Q^{(-)}$ и $C^{(+)}$, $C^{(-)}$ определены в* (2.28), (2.29) *и* (2.30), *соответственно.*
1°. *При $k\in U_\sigma^{(+)}$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} &B(k)F(k) = g^{(1)}(k-k_0)^2P^{(+)} + \Psi^{(+)}(k),\\ &\big\|\Psi^{(+)}(k)\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_2|k-k_0|^3. \end{aligned}$$

2°. *При $k\in U_\sigma^{(-)}$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} &B(k)F(k) = g^{(1)}(k+k_0)^2P^{(-)} + \Psi^{(-)}(k),\\ &\big\|\Psi^{(-)}(k)\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_2|k+k_0|^3. \end{aligned}$$

Постоянная C_2 зависит от k_0, d_0 и V.
3°. *При $k\in U_\sigma^{(+)}$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} &B(k)F(k) = g^{(1)}(k-k_0)^2P^{(+)} + C^{(+)}(k-k_0)^3 + \widehat{\Psi}^{(+)}(k),\\ &\big\|\widehat{\Psi}^{(+)}(k)\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widehat{C}_2|k-k_0|^4. \end{aligned}$$

4°. *При* $k \in U_\sigma^{(-)}$ *справедливы соотношения*

$$B(k)F(k) = g^{(1)}(k+k_0)^2 P^{(-)} - C^{(-)}(k+k_0)^3 + \widehat{\Psi}^{(-)}(k),$$
$$\big\|\widehat{\Psi}^{(-)}(k)\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widehat{C}_2 |k+k_0|^4.$$

Постоянная $\widehat{C}_2$ *зависит от* k_0, d_0 *и* V.

Доказательство. Утверждения 1° и 2° доказаны в [32]. Проверим утверждение 3°; утверждение 4° устанавливается аналогично.

Итерируя резольвентное тождество (2.36) четыре раза, получаем

$$\begin{aligned} R(k,\zeta) =& R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta) \\ & - R_0(\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta) + Z_1(k,\zeta), \quad (2.46) \\ Z_1(k,\zeta) :=& R(k,\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta). \end{aligned}$$

Из (2.33), (2.35) вытекает оценка

$$\|Z_1(k,\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{6}{d_0}\mathfrak{C}_2^4(k_0,d_0,V)|k-k_0|^4, \qquad \zeta\in\Gamma,\ k\in U_\sigma^{(+)}. \tag{2.47}$$

Далее, подставляя выражение для $\Delta B(k)$ в (2.46), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} R(k,\zeta) =& R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\big(4D_{k_0}^3(k-k_0) + 6D_{k_0}^2(k-k_0)^2 + 4D_{k_0}(k-k_0)^3\big) R_0(\zeta) \\ & + R_0(\zeta)\left(4D_{k_0}^3(k-k_0)\right) R_0(\zeta)\left(4D_{k_0}^3(k-k_0)\right) R_0(\zeta) \\ & + R_0(\zeta)\left(6D_{k_0}^2(k-k_0)^2\right) R_0(\zeta)\left(4D_{k_0}^3(k-k_0)\right) R_0(\zeta) \\ & + R_0(\zeta)\left(4D_{k_0}^3(k-k_0)\right) R_0(\zeta)\left(6D_{k_0}^2(k-k_0)^2\right) R_0(\zeta) \\ & - R_0(\zeta)\left(4D_{k_0}^3(k-k_0)\right) R_0(\zeta)\left(4D_{k_0}^3(k-k_0)\right) R_0(\zeta)\left(4D_{k_0}^3(k-k_0)\right) R_0(\zeta) \\ & + Z_1(k,\zeta) + Z_2(k,\zeta). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Как и при доказательстве леммы 2.1, из выражения для $\Delta B(k)$, оценок (2.33), (2.34) и соотношения (2.48) следует оценка

$$\|Z_2(k,\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \mathfrak{C}_3(k_0,d_0,V)|k-k_0|^4, \quad \zeta\in\Gamma,\ k\in U_\sigma^{(+)}. \tag{2.49}$$

Применяя (2.32) в точках k и k_0 с учетом (2.48) и равенства $B(k_0)F(k_0)=0$, получаем

$$B(k)F(k) = I_1(k-k_0) + I_2(k-k_0)^2 + I_3(k-k_0)^3 + \widehat{\Psi}^{(+)}(k), \tag{2.50}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)4D_{k_0}^3 R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta, \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned} I_2 = {} & \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)6D_{k_0}^2 R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta \\ & - \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)4D_{k_0}^3 R_0(\zeta)4D_{k_0}^3 R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta, \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} I_3 = {} & \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)4D_{k_0} R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta \\ & - \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)4D_{k_0}^3 R_0(\zeta)6D_{k_0}^2 R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta \\ & - \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)6D_{k_0}^2 R_0(\zeta)4D_{k_0}^3 R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)4D_{k_0}^3 R_0(\zeta)4D_{k_0}^3 R_0(\zeta)4D_{k_0}^3 R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta, \tag{2.54}$$

$$\widehat{\Psi}^{(+)}(k) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left(Z_1(k,\zeta) + Z_2(k,\zeta)\right)\zeta\,d\zeta. \tag{2.55}$$

Из (2.47), (2.49) и (2.55) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left\|\widehat{\Psi}^{(+)}(k)\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \\ & \quad \leqslant \frac{d_0^2}{4}\left(\frac{6}{d_0}\mathfrak{C}_2^4(k_0,d_0,V) + \mathfrak{C}_3(k_0,d_0,V)\right)|k-k_0|^4, \quad k\in U_\sigma^{(+)}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Сопоставляя (2.50), (2.56) с результатом пункта 2.2 об асимптотике оператора $B(k)F(k)$ при $k \to k_0$, приходим к соотношениям $I_1 = 0$, $I_2 = g^{(1)}P^{(+)}$ и $I_3 = C^{(+)}$. □

Замечание 2.4. Коэффициенты I_1, I_2 и I_3 в разложении (2.50) можно вычислить непосредственно, не прибегая к рассмотрениям пункта *2.2*. Для этого следует представить $R_0(\zeta)$ в виде (2.45) и учесть, что оператор-функция $R_0^\perp(\zeta)$ голоморфна внутри контура Γ. Подставляя (2.45) в (2.51), получаем $I_1 = 4P^{(+)}D_{k_0}^3P^{(+)}$. Поскольку $B(k)F(k) \geqslant 0$, отсюда и из (2.50) следует, что

$$P^{(+)}D_{k_0}^3P^{(+)} = 0. \tag{2.57}$$

Подставляя теперь (2.45) в (2.52) и учитывая (2.57), приходим к равенству

$$I_2 = 6P^{(+)}D_{k_0}^2P^{(+)} - 16P^{(+)}D_{k_0}^3R_0^{\perp}(0)D_{k_0}^3P^{(+)}.$$

Это приводит к прежнему результату $I_2 = g^{(1)}P^{(+)}$, где $g^{(1)}$ определено выражением (2.17).

Наконец, подставляя (2.45) в (2.54) и учитывая (2.57), приходим (после некоторых вычислений) к равенству $I_3 = C^{(+)}$.

§3. Аппроксимация оператора $(B+\varepsilon^4 I)^{-1}$

3.1. Аппроксимация оператора $(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}$. Введем обозначения

$$h(k,\varepsilon) := (g^{(1)}k^2+\varepsilon^4)^{-1},$$

$$\mathcal{K}^{(+)}(k,\varepsilon) := (k-k_0)h(k-k_0,\varepsilon)Q^{(+)} - g^{(2)}(k-k_0)^3h^2(k-k_0,\varepsilon)P^{(+)},$$

$$\mathcal{K}^{(-)}(k,\varepsilon) := -(k+k_0)h(k+k_0,\varepsilon)Q^{(-)} + g^{(2)}(k+k_0)^3h^2(k+k_0,\varepsilon)P^{(+)}.$$

Лемма 3.1. 1°. *При $\varepsilon>0$ и $k\in U_\sigma^{(+)}$ справедлива оценка*

$$\bigl\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}F(k) - (h(k-k_0,\varepsilon)P^{(+)}+\mathcal{K}^{(+)}(k,\varepsilon))\bigr\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widehat{C}_3. \tag{3.1}$$

2°. *При $\varepsilon>0$ и $k\in U_\sigma^{(-)}$ справедлива оценка*

$$\bigl\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}F(k) - (h(k+k_0,\varepsilon)P^{(-)}+\mathcal{K}^{(-)}(k,\varepsilon))\bigr\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widehat{C}_3. \tag{3.2}$$

Постоянная $\widehat{C}_3$ зависит от k_0, d_0, V и постоянной c_0 из (2.3).

Доказательство. Проверим утверждение 1°; утверждение 2° устанавливается аналогично.

Пусть $k\in U_\sigma^{(+)}$. Обозначим для краткости

$$(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}F(k) =: \widehat{R}(k,\varepsilon),\quad (g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(+)} =: \widehat{R}_0^{(+)}(k,\varepsilon).$$

Воспользуемся подходящим вариантом резольвентного тождества:

$$\begin{aligned}\widehat{R}(k,\varepsilon) - \widehat{R}_0^{(+)}(k,\varepsilon) &= \widehat{R}(k,\varepsilon)(F(k)-P^{(+)}) - (P^{(+)}-F(k))\widehat{R}_0^{(+)}(k,\varepsilon)\\ &\quad - \widehat{R}(k,\varepsilon)(B(k)F(k) - g^{(1)}(k-k_0)^2P^{(+)})\widehat{R}_0^{(+)}(k,\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Перепишем (3.3) в следующем виде

$$\widehat{R}(k,\varepsilon) = F(k)\widehat{R}_0^{(+)}(k,\varepsilon) + \widehat{R}(k,\varepsilon)S^{(+)}(k,\varepsilon),$$
$$S^{(+)}(k,\varepsilon) := F(k) - P^{(+)} - (B(k)F(k) - g^{(1)}(k-k_0)^2 P^{(+)})\widehat{R}_0^{(+)}(k,\varepsilon). \quad (3.4)$$

Проитерировав равенство (3.4), получаем

$$\widehat{R}(k,\varepsilon) = F(k)\widehat{R}_0^{(+)}(k,\varepsilon) + F(k)\widehat{R}_0^{(+)}(k,\varepsilon)S^{(+)}(k,\varepsilon) + \widehat{R}(k,\varepsilon)(S^{(+)}(k,\varepsilon))^2. \quad (3.5)$$

Применяя леммы 2.1, 2.3, представим соотношение (3.5) в виде

$$\begin{aligned}\widehat{R} = \widehat{R}_0^{(+)} &+ (Q^{(+)}\widehat{R}_0^{(+)} + \widehat{R}_0^{(+)}Q^{(+)})(k-k_0) \\ &- \widehat{R}_0^{(+)}C^{(+)}\widehat{R}_0^{(+)}(k-k_0)^3 + \widehat{R}_0^{(+)}\widehat{\Phi}^{(+)} - \widehat{R}_0^{(+)}\widehat{\Psi}^{(+)}\widehat{R}_0^{(+)} \\ &+ \widehat{\Phi}^{(+)}\widehat{R}_0^{(+)} + \Phi^{(+)}\widehat{R}_0^{(+)}S^{(+)} + \widehat{R}(S^{(+)})^2. \quad (3.6)\end{aligned}$$

В силу (2.3) и (2.18) справедливы неравенства

$$\begin{gathered}\left\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}F(k)\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant (c_0(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}, \quad k\in U_\sigma^{(+)}, \\ \left|(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}\right| \leqslant (c_0(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}. \end{gathered} \quad (3.7)$$

Из лемм 2.1(1°), 2.3(1°) и (3.7) вытекает оценка

$$\begin{aligned}\|S^{(+)}(k,\varepsilon)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} &\leqslant C_1|k-k_0| + C_2|k-k_0|^3(c_0(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1} \\ &\leqslant \Big(C_1 + \frac{C_2}{c_0}\Big)|k-k_0|, \quad k\in U_\sigma^{(+)}. \quad (3.8)\end{aligned}$$

Аналогичным образом из лемм 2.1, 2.3 и (3.7), (3.8), получаем

$$\begin{aligned}\Big\|\widehat{R}_0^{(+)}\widehat{\Phi}^{(+)} - \widehat{R}_0^{(+)}\widehat{\Psi}^{(+)}\widehat{R}_0^{(+)} + \widehat{\Phi}^{(+)}\widehat{R}_0^{(+)} + \Phi^{(+)}\widehat{R}_0^{(+)}S^{(+)} \\ + \widehat{R}(S^{(+)})^2\Big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widehat{C}_3.\end{aligned}$$

Теперь утверждение 1° вытекает из соотношения (3.6); здесь мы учли равенства $P^{(+)}Q^{(+)} + Q^{(+)}P^{(+)} = Q^{(+)}$, $P^{(+)}Q^{(+)}P^{(+)} = 0$. □

Лемма 3.2. *При $\varepsilon > 0$ и $k \in [-\pi,\pi)$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\Big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1} - (h(k-k_0,\varepsilon)P^{(+)} + h(k+k_0,\varepsilon)P^{(-)} \\ + \mathcal{K}^{(+)}(k,\varepsilon) + \mathcal{K}^{(-)}(k,\varepsilon))\Big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widehat{C}_4. \quad (3.9)\end{aligned}$$

Постоянная $\widehat{C}_4$ *зависит от* k_0, d_0, σ, V, c_0, c_2, c_3, $g^{(2)}$, $\|\varphi_1\|_{L_2(0,1)}$.

Доказательство. Очевидно,

$$\bigl\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}F(k)^{\perp}\bigr\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{3}{2d_0}, \quad k\in U_\sigma.$$

Вместе с (3.1) и (3.2) это влечет

$$\bigl\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1} - (h(k-k_0,\varepsilon)P^{(+)} + \mathcal{K}^{(+)}(k,\varepsilon))\bigr\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widetilde{C}_4, \ \ \varepsilon>0, \ k\in U_\sigma^{(+)}, \tag{3.10}$$

$$\bigl\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1} - (h(k+k_0,\varepsilon)P^{(-)} + \mathcal{K}^{(-)}(k,\varepsilon))\bigr\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \widetilde{C}_4, \ \ \varepsilon>0, \ k\in U_\sigma^{(-)}, \tag{3.11}$$

где $\widetilde{C}_4 = \widehat{C}_3 + 3/(2d_0)$.

Далее, в силу (2.4) и (2.5)

$$\bigl\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}\bigr\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \max\{c_2^{-1}, c_3^{-1}\}, \quad k\in[-\pi,\pi)\setminus U_\sigma.$$

С учетом (2.18) справедливы очевидные неравенства

$$h(k-k_0,\varepsilon) \leqslant c_0^{-1}\sigma^{-2}, \quad k\in[-\pi,\pi)\setminus U_\sigma^{(+)}, \tag{3.12}$$

$$h(k+k_0,\varepsilon) \leqslant c_0^{-1}\sigma^{-2}, \quad k\in[-\pi,\pi)\setminus U_\sigma^{(-)}. \tag{3.13}$$

Из определений $h(k,\varepsilon)$ и $\mathcal{K}^{(\pm)}(k,\varepsilon)$ нетрудно вывести оценки

$$\|\mathcal{K}^{(\pm)}(k,\varepsilon)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant (2\|\varphi_1\|_{L_2(0,1)} + c_0^{-1}|g^{(2)}|)c_0^{-1}\sigma^{-1}, \quad k\in[-\pi,\pi)\setminus U_\sigma^{(\pm)}. \tag{3.14}$$

В итоге, из (3.10)–(3.14) вытекает неравенство (3.9) с постоянной

$$\widehat{C}_4 = \max\{\widetilde{C}_4 + c_0^{-1}\sigma^{-2} + (2\|\varphi_1\|_{L_2(0,1)} + c_0^{-1}|g^{(2)}|)c_0^{-1}\sigma^{-1}, \max\{c_2^{-1},c_3^{-1}\} + 2c_0^{-1}\sigma^{-2} + 2(2\|\varphi_1\|_{L_2(0,1)} + c_0^{-1}|g^{(2)}|)c_0^{-1}\sigma^{-1}\}.$$

□

В $L_2(0,1)$ рассмотрим операторы, зависящие от параметра $k\in[-\pi,\pi)$:

$$A^{(+)}(k) := g^{(1)}(D+k-k_0)^2, \quad \operatorname{Dom} A^{(+)}(k) = \widetilde{H}^2(0,1), \tag{3.15}$$

$$A^{(-)}(k) := g^{(1)}(D+k+k_0)^2, \quad \operatorname{Dom} A^{(-)}(k) = \widetilde{H}^2(0,1). \tag{3.16}$$

Определим ограниченные операторы в $L_2(0,1)$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{K}}^{(+)}(k,\varepsilon) = \quad & [\varphi_0](D+k-k_0)(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_1}] \\ & + [\varphi_1](D+k-k_0)(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}] \\ & - g^{(2)}[\varphi_0](D+k-k_0)^3(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-2}[\overline{\varphi_0}], \\ & \qquad k\in[-\pi,\pi), \quad \varepsilon>0, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{K}}^{(-)}(k,\varepsilon) = & -[\overline{\varphi_0}](D+k+k_0)(A^{(-)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_1] \\ & - [\overline{\varphi_1}](D+k+k_0)(A^{(-)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0] \\ & + g^{(2)}[\overline{\varphi_0}](D+k+k_0)^3(A^{(-)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-2}[\varphi_0], \\ & \qquad k\in[-\pi,\pi), \quad \varepsilon>0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Лемма 3.3. *Пусть операторы $A^{(\pm)}(k)$ определены в* (3.15), (3.16)*; операторы $\widehat{\mathcal{K}}^{(\pm)}(k,\varepsilon)$ определены в* (3.17), (3.18)*. При $\varepsilon>0$ и $k\in[-\pi,\pi)$ справедливы оценки*

$$\left\|(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(+)}-[\varphi_0](A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}]\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\leqslant C_5, \tag{3.19}$$

$$\left\|(g^{(1)}(k+k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(-)}-[\overline{\varphi_0}](A^{(-)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0]\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\leqslant C_5, \tag{3.20}$$

$$\left\|\mathcal{K}^{(+)}(k,\varepsilon)-\widehat{\mathcal{K}}^{(+)}(k,\varepsilon)\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\leqslant \widehat{C}_5, \tag{3.21}$$

$$\left\|\mathcal{K}^{(-)}(k,\varepsilon)-\widehat{\mathcal{K}}^{(-)}(k,\varepsilon)\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\leqslant \widehat{C}_5. \tag{3.22}$$

Постоянная C_5 зависит от k_0, c_0 и $\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}$. Постоянная $\widehat{C}_5$ зависит от k_0, c_0 и $\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}$, $\|\varphi_1\|_{L_\infty(0,1)}$ и $g^{(2)}$.

Доказательство. Проверим (3.19) и (3.21); оценки (3.20) и (3.22) устанавливаются аналогично. Представим оператор $P^{(+)}$ в виде

$$P^{(+)}=(\cdot,\varphi_0)_{L_2(0,1)}\varphi_0=[\varphi_0]P_0[\overline{\varphi_0}],$$

где $P_0=(\cdot,\mathbf{1})_{L_2(0,1)}\mathbf{1}$ – оператор усреднения по ячейке $(0,1)$. Очевидно,

$$(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P_0=(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}P_0.$$

Таким образом,

$$(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(+)}=[\varphi_0](A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}P_0[\overline{\varphi_0}],$$

а потому оператор под знаком нормы в (3.19) представляется в виде

$$\begin{aligned}(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(+)}-[\varphi_0](A^{(+}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}]\\ =-[\varphi_0](A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}P_0^{\perp}[\overline{\varphi_0}].\end{aligned} \tag{3.23}$$

С помощью дискретного преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned}&\big\|(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}P_0^{\perp}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\\ &\qquad=\sup_{0\neq m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{g^{(1)}(2\pi m+k-k_0)^2+\varepsilon^4}\leqslant c_0^{-1}(\pi-k_0)^{-2}.\end{aligned}$$

Мы учли (2.18) и неравенство $|2\pi m+k-k_0|\geqslant \pi-k_0>0$ при $0\neq m\in\mathbb{Z}$, $k\in[-\pi,\pi)$. Отсюда и из (3.23) вытекает искомое неравенство (3.19) с постоянной $C_5=c_0^{-1}(\pi-k_0)^{-2}\|\varphi_0\|^2_{L_\infty(0,1)}$.

Аналогично, оператор $Q^{(+)}$ представляется в виде

$$Q^{(+)}=(\cdot,\varphi_1)_{L_2(0,1)}\varphi_0+(\cdot,\varphi_0)_{L_2(0,1)}\varphi_1=[\varphi_0]P_0[\overline{\varphi_1}]+[\varphi_1]P_0[\overline{\varphi_0}].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{(+)}(k,\varepsilon)=\quad&[\varphi_0](D+k-k_0)(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}P_0[\overline{\varphi_1}]\\ &+[\varphi_1](D+k-k_0)(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}P_0[\overline{\varphi_0}]\\ &-g^{(2)}[\varphi_0](D+k-k_0)^3(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-2}P_0[\overline{\varphi_0}],\\ &\qquad k\in[-\pi,\pi),\quad \varepsilon>0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{K}}^{(+)}(k,\varepsilon)-\mathcal{K}^{(+)}(k,\varepsilon)=&[\varphi_0](D+k-k_0)(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}P_0^{\perp}[\overline{\varphi_1}]\\ &+[\varphi_1](D+k-k_0)(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}P_0^{\perp}[\overline{\varphi_0}]\\ &-g^{(2)}[\varphi_0](D+k-k_0)^3(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-2}P_0^{\perp}[\overline{\varphi_0}],\\ &\qquad k\in[-\pi,\pi),\quad \varepsilon>0.\end{aligned} \tag{3.24}$$

С помощью дискретного преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned}&\big\|(D+k-k_0)(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}P_0^{\perp}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\\ &\qquad=\sup_{0\neq m\in\mathbb{Z}}\frac{|2\pi m+k-k_0|}{g^{(1)}(2\pi m+k-k_0)^2+\varepsilon^4}\leqslant c_0^{-1}(\pi-k_0)^{-1},\end{aligned}$$

$$\big\|(D+k-k_0)^3(A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-2}P_0^{\perp}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}$$
$$= \sup_{0\neq m\in\mathbb{Z}} \frac{|2\pi m+k-k_0|^3}{(g^{(1)}(2\pi m+k-k_0)^2+\varepsilon^4)^2} \leqslant c_0^{-2}(\pi-k_0)^{-1},$$

Как и выше, мы учли (2.18) и неравенство $|2\pi m+k-k_0|\geqslant \pi-k_0>0$ при $0\neq m\in\mathbb{Z}$, $k\in[-\pi,\pi)$. Отсюда и из (3.24) вытекает искомое неравенство (3.21) с постоянной

$$\widehat{C}_5=2c_0^{-1}(\pi-k_0)^{-1}\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}\|\varphi_1\|_{L_\infty(0,1)}+c_0^{-2}(\pi-k_0)^{-1}\|\varphi_0\|^2_{L_\infty(0,1)}|g^{(2)}|.$$
□

Сопоставляя леммы 3.2 и 3.3, приходим к следующему результату.

Теорема 3.4. *При $\varepsilon>0$ и $k\in[-\pi,\pi)$ справедлива оценка*

$$\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}-[\varphi_0](A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}]-[\overline{\varphi_0}](A^{(-)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0]$$
$$-\widehat{\mathcal{K}}^{(+)}(k,\varepsilon)-\widehat{\mathcal{K}}^{(-)}(k,\varepsilon)\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\leqslant C_6.$$

Постоянная $C_6=\widehat{C}_4+2C_5+2\widehat{C}_5$ зависит от k_0, d_0, σ, V, c_0, c_2, c_3, $g^{(2)}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}$ и $\|\varphi_1\|_{L_\infty(0,1)}$.

3.2. Аппроксимация оператора $(B+\varepsilon^4 I)^{-1}$. В силу (2.2) резольвента $(B+\varepsilon^4 I)^{-1}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}$:

$$(B+\varepsilon^4 I)^{-1}=\mathcal{G}^{-1}\left(\int\limits_{(-\pi,\pi)}\oplus(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}\,dk\right)\mathcal{G}. \tag{3.25}$$

В $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим пару операторов второго порядка

$$A^{(+)}=g^{(1)}(D-k_0)^2,\quad A^{(-)}=g^{(1)}(D+k_0)^2,$$
$$\mathrm{Dom}(A^{(+)})=\mathrm{Dom}(A^{(-)})=H^2(\mathbb{R}).$$

Введем также операторы в $L_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\widehat{K}^{(+)}(\varepsilon)=\ & [\varphi_0](D-k_0)(A^{(+)}+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_1}]\\ &+[\varphi_1](D-k_0)(A^{(+)}+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}]\\ &-g^{(2)}[\varphi_0](D-k_0)^3(A^{(+)}+\varepsilon^4 I)^{-2}[\overline{\varphi_0}],\quad \varepsilon>0,\\ \widehat{K}^{(-)}(\varepsilon)=&-[\overline{\varphi_0}](D+k_0)(A^{(-)}+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_1]\\ &-[\overline{\varphi_1}](D+k_0)(A^{(-)}+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0]\end{aligned}$$

$$+ g^{(2)}[\overline{\varphi_0}](D+k_0)^3(A^{(-)}+\varepsilon^4 I)^{-2}[\varphi_0], \quad \varepsilon > 0.$$

С помощью преобразования Гельфанда оператор $A^{(\pm)}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $A^{(\pm)}(k)$. Учитывая, что при преобразовании Гельфанда оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R})$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях $L_2(0,1)$, получаем

$$[\varphi_0](A^{(+)}+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}] = \mathcal{G}^{-1}\left(\int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus [\varphi_0](A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}]\,dk\right)\mathcal{G}, \tag{3.26}$$

$$[\overline{\varphi_0}](A^{(-)}+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0] = \mathcal{G}^{-1}\left(\int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus [\overline{\varphi_0}](A^{(-)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0]\,dk\right)\mathcal{G}, \tag{3.27}$$

$$\widehat{K}^{(+)}(\varepsilon) = \mathcal{G}^{-1}\left(\int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus \widehat{\mathcal{K}}^{(+)}(k,\varepsilon)\,dk\right)\mathcal{G}, \tag{3.28}$$

$$\widehat{K}^{(-)}(\varepsilon) = \mathcal{G}^{-1}\left(\int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus \widehat{\mathcal{K}}^{(-)}(k,\varepsilon)\,dk\right)\mathcal{G}. \tag{3.29}$$

Теперь из теоремы 3.4 и разложений (3.25), (3.26)–(3.29) с учетом унитарности преобразования $\mathcal{G}$ вытекает оценка

$$\|(B+\varepsilon^4 I)^{-1} - [\varphi_0](A^{(+)}+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}] - [\overline{\varphi_0}](A^{(-)}+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0] - \widehat{K}^{(+)}(\varepsilon) - \widehat{K}^{(-)}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_6.$$

Наконец, учтем очевидные соотношения

$$A^{(+)} = [e^{ik_0x}]g^{(1)}D^2[e^{-ik_0x}], \quad A^{(-)} = [e^{-ik_0x}]g^{(1)}D^2[e^{ik_0x}],$$

и положим

$$\psi_0(x) := e^{ik_0x}\varphi_0(x), \quad \psi_1(x) := e^{ik_0x}\varphi_1(x). \quad x \in \mathbb{R}.$$

Операторы $\widehat{K}^{(\pm)}(\varepsilon)$ приобретают вид

$$\begin{aligned}\widehat{K}^{(+)}(\varepsilon) = {} & [\psi_0]D(g^{(1)}D^2+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\psi_1}] \\ & + [\psi_1]D(g^{(1)}D^2+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\psi_0}] \\ & - g^{(2)}[\psi_0]D^3(g^{(1)}D^2+\varepsilon^4 I)^{-2}[\overline{\psi_0}], \quad \varepsilon>0, \\ \widehat{K}^{(-)}(\varepsilon) = {} & -[\overline{\psi_0}]D(g^{(1)}D^2+\varepsilon^4 I)^{-1}[\psi_1] \\ & - [\overline{\psi_1}]D(g^{(1)}D^2+\varepsilon^4 I)^{-1}[\psi_0] \\ & + g^{(2)}[\overline{\psi_0}]D^3(g^{(1)}D^2+\varepsilon^4 I)^{-2}[\psi_0], \quad \varepsilon>0.\end{aligned}$$

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 3.5. *При $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\big\|(B+\varepsilon^4 I)^{-1} - [\psi_0](g^{(1)}D^2+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\psi_0}] - [\overline{\psi_0}](g^{(1)}D^2+\varepsilon^4 I)^{-1}[\psi_0] \\ - \widehat{K}^{(+)}(\varepsilon) - \widehat{K}^{(-)}(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_6. \quad (3.30)\end{aligned}$$

Постоянная C_6 зависит от k_0, d_0, σ, V, c_0, c_2, c_3, $g^{(2)}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}$ и $\|\varphi_1\|_{L_\infty(0,1)}$.

§4. Усреднение оператора B_ε

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор B_ε, $\varepsilon>0$, заданный соотношениями

$$B_\varepsilon = D^4 + \varepsilon^{-4}V^\varepsilon(x), \quad \mathrm{Dom}(B_\varepsilon) = H^4(\mathbb{R}).$$

Предположим, что функция $V \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ вещественна и 1-периодична; пусть также семейство операторов $B(k)$ в $L_2(0,1)$, определенное в (2.1), удовлетворяет условию **A**. Пусть $\varphi_0(x)$ – периодическое решение задачи (2.12), $\varphi_1(x)$ – периодическое решение задачи (2.15), φ_2 – периодическое решение задачи (2.22). Пусть $\psi_0(x)=e^{ik_0x}\varphi_0(x)$, $\psi_1(x)=e^{ik_0x}\varphi_1(x)$. Пусть константа $g^{(1)}>0$ определена равенством (2.17), константа $g^{(2)}$ – равенством (2.24).

В статье [32] был получен следующий результат.

Теорема 4.1. *При сделанных предположениях при $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\Big\|(B_\varepsilon + I)^{-1} - [\psi_0^\varepsilon]\big(\varepsilon^{-2} g^{(1)} D^2 + I\big)^{-1}[\overline{\psi_0^\varepsilon}] - [\overline{\psi_0^\varepsilon}]\big(\varepsilon^{-2} g^{(1)} D^2 + I\big)^{-1}[\psi_0^\varepsilon]\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon^2.$$

Здесь константа C зависит от k_0, d_0, σ, V, c_0, c_2, c_3 и $\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}$.

Определим следующие *корректоры*

$$\begin{aligned} K^{(+)}(\varepsilon) = {} & [\psi_0^\varepsilon]\varepsilon^{-1} D(g^{(1)}\varepsilon^{-2}D^2 + I)^{-1}[\overline{\psi_1^\varepsilon}] \\ & + [\psi_1^\varepsilon]\varepsilon^{-1} D(g^{(1)}\varepsilon^{-2}D^2 + I)^{-1}[\overline{\psi_0^\varepsilon}] \\ & - g^{(2)}[\psi_0^\varepsilon]\varepsilon^{-3} D^3(g^{(1)}\varepsilon^{-2}D^2 + I)^{-2}[\overline{\psi_0^\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0, \\ K^{(-)}(\varepsilon) = {} & - [\overline{\psi_0^\varepsilon}]\varepsilon^{-1} D(g^{(1)}\varepsilon^{-2}D^2 + I)^{-1}[\psi_1^\varepsilon] \\ & - [\overline{\psi_1^\varepsilon}]\varepsilon^{-1} D(g^{(1)}\varepsilon^{-2}D^2 + I)^{-1}[\psi_0^\varepsilon] \\ & + g^{(2)}[\overline{\psi_0^\varepsilon}]\varepsilon^{-3} D^3(g^{(1)}\varepsilon^{-2}D^2 + I)^{-2}[\psi_0^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Операторы $K^{(\pm)}(\varepsilon)$ ограничены в $L_2(\mathbb{R})$ и справедлива оценка

$$\|K^{(\pm)}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_7;$$

константа C_7 зависит от c_0, c_2, c_3, $g^{(2)}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}$ и $\|\varphi_1\|_{L_\infty(0,1)}$.

Следующее утверждение – основной результат настоящей работы.

Теорема 4.2. *При сделанных предположениях при $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\Big\|(B_\varepsilon + I)^{-1} - [\psi_0^\varepsilon]\big(\varepsilon^{-2} g^{(1)} D^2 + I\big)^{-1}[\overline{\psi_0^\varepsilon}] - [\overline{\psi_0^\varepsilon}]\big(\varepsilon^{-2} g^{(1)} D^2 + I\big)^{-1}[\psi_0^\varepsilon] - \varepsilon^2 K^{(+)}(\varepsilon) - \varepsilon^2 K^{(-)}(\varepsilon)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon^4. \quad (4.1)$$

Здесь константа C зависит от k_0, d_0, σ, V, c_0, c_2, c_3, $g^{(2)}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}$ и $\|\varphi_1\|_{L_\infty(0,1)}$.

Доказательство. Введем семейство унитарных операторов T_ε в $L_2(\mathbb{R})$ равенством $T_\varepsilon u(x) = \varepsilon^{1/2} u(\varepsilon x)$. Легко проверить следующие соотношения:

$$B_\varepsilon = \varepsilon^{-4} T_\varepsilon^* B T_\varepsilon, \quad D^2 = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* D^2 T_\varepsilon, \quad [\psi_0^\varepsilon] = T_\varepsilon^* [\psi_0] T_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$(B_\varepsilon + I)^{-1} = \varepsilon^4 T_\varepsilon^* (B + \varepsilon^4 I)^{-1} T_\varepsilon,$$
$$[\psi_0^\varepsilon]\big(\varepsilon^{-2} g^{(1)} D^2 + I\big)^{-1} [\overline{\psi_0^\varepsilon}] = \varepsilon^4 T_\varepsilon^* [\psi_0]\big(g^{(1)} D^2 + \varepsilon^4 I\big)^{-1} [\overline{\psi_0}] T_\varepsilon,$$
$$[\overline{\psi_0^\varepsilon}]\big(\varepsilon^{-2} g^{(1)} D^2 + I\big)^{-1} [\psi_0^\varepsilon] = \varepsilon^4 T_\varepsilon^* [\overline{\psi_0}]\big(g^{(1)} D^2 + \varepsilon^4 I\big)^{-1} [\psi_0] T_\varepsilon,$$
$$\varepsilon^2 K^{(\pm)}(\varepsilon) = \varepsilon^4 T_\varepsilon^* \widehat{K}^{(\pm)}(\varepsilon) T_\varepsilon.$$

Отсюда и из оценки (3.30) с учетом унитарности оператора T_ε вытекает искомая оценка (4.1). □

В работе [32] было показано, что характер поведения резольвенты ДО четвертого порядка с периодическими коэффициентами в пределе малого периода качественно зависит от формы оператора. Для оператора Эйлера–Бернулли A_ε, заданного в факторизованном виде $A_\varepsilon = D^2 g^\varepsilon(x) D^2$, резольвента имеет предел, равный резольвенте некоторого эффективного оператора $A^0 = g^0 D^4$ (см. (1.11)). А для оператора B_ε с сингулярным быстро осциллирующим потенциалом $\varepsilon^{-4} V^\varepsilon(x)$ резольвента предела не имеет и приближается суммой двух резольвент сингулярного оператора второго порядка $\varepsilon^{-2} g^{(1)} D^2$ (с большим множителем ε^{-2}), окаймленных некоторыми быстро осциллирующими множителями. Такого "патологического" поведения резольвенты при усреднении эллиптических операторов второго порядка неизвестно. По-видимому, этот эффект характерен именно для операторов высокого порядка.

Можно показать, что при приближении резольвенты оператора A_ε с погрешностью $O(\varepsilon^4)$ (ср. [19]) возникают нетривиальные поправочные члены как второго порядка, так и третьего порядка; при приближении резольвенты оператора B_ε с погрешностью $O(\varepsilon^4)$ члены третьего порядка оказываются равны нулю.

Замечание 4.3. Результаты работы сохраняют силу, если заменить условие $V \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ на более слабое ограничение $V \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. В этом случае оператор B_ε, действующий в $L_2(\mathbb{R})$, определяется через замкнутую полуограниченную квадратичную форму

$$b_\varepsilon[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(|D^2 u(x)|^2 + \varepsilon^{-4} V^\varepsilon(x) |u(x)|^2\right) dx, \quad u \in H^2(\mathbb{R}).$$

Операторы $B(k)$, действующие в $L_2(0,1)$, определяются через квадратичные формы

$$b(k)[u,u] = \int_0^1 \left(|(D+k)^2 u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2\right) dx, \quad u \in \widetilde{H}^2(0,1).$$

При доказательстве пороговых аппроксимаций *(*см. п. *2.3)* следует использовать другой вариант резольвентного тождества – тождество для операторов, заданных через квадратичные формы с одинаковой областью определения форм. Ради простоты изложения мы ограничились рассмотрением более простого случая, когда $V \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Список литературы

1. A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*. Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., 1978.
2. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
3. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.
4. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения.* — Алгебра и анализ **15**, No. 5 (2003), 1–108.
5. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора.* — Алгебра и анализ **17**, No. 6 (2005), 1–104.
6. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$.* — Алгебра и анализ **18**, No. 6 (2006), 1–130.
7. Т. А. Суслина, *Об усреднении периодических параболических систем.* — Функц. анализ и его прил. **38**, No. 4 (2004), 86–90.
8. T. A. Suslina, *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem.* — Amer. Math. Soc. Transl. (2), **220** (2007), 201–233.
9. Е. С. Василевская, *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$.* — Алгебра и анализ **18**, No. 6 (2006), 1–130.
10. T. A. Suslina, *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$.* — Math. Model. Nat. Phenom. **5**, No. 4 (2010), 390–447.
11. В. В. Жиков, *Об операторных оценках в теории усреднения.* — Докл. РАН **403**, No. 3 (2005), 305–308.
12. V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *On operator estimates for some problems in homogenization theory.* — Russ. J. Math. Phys. **12**, No. 4 (2005), 515–524.

13. V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients.* — Russ. J. Math. Phys. **13**, No. 2 (2006), 224–237.
14. В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, *Об операторных оценках в теории усреднения.* — Успехи матем. наук. **71**, No. 3 (2016), 27–122.
15. Н. А. Вениаминов, *Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка.* — Алгебра и анализ **22**, No. 5 (2010), 69–103.
16. А. А. Кукушкин, Т. А. Суслина, *Усреднение эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами.* — Алгебра и анализ **28**, No. 1 (2016), 89–149.
17. А. А. Милослова, Т. А. Суслина, *Усреднение параболических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами.* — Соврем. мат. Фундам. направл. **67**, No. 1 (2021), 130–191.
18. В. А. Слоущ, Т. А. Суслина, *Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами при учете корректоров.* — Функц. анализ и его прил. **54**, No. 3 (2020), 94–99.
19. В. А. Слоущ, Т. А. Суслина, *Операторные оценки при усреднении эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами.* — Алгебра и анализ **35**, No. 2 (2023), 107–173.
20. С. Е. Пастухова, *Операторные оценки усреднения для эллиптических уравнений четвертого порядка.* — Алгебра и анализ **28**, No. 2 (2016), 204–226.
21. S. E. Pastukhova, *Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators.* — App. Anal. **95**, No. 7 (2016), 1449–1466.
22. С. Е. Пастухова, *L^2-аппроксимация резольвенты в усреднении эллиптических операторов высокого порядка.* — Пробл. мат. анал. **107** (2020), 113–132.
23. С. Е. Пастухова, *Улучшенные L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении операторов четвертого порядка.* — Алгебра и анализ **34**, No. 4 (2022), 74–106.
24. М. Ш. Бирман, *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны.* — Алгебра и анализ **15**, No. 4 (2003), 61–71.
25. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **318** (2004), 60–74.
26. Т. А. Суслина, А. А. Харин, *Усреднение с учетом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны.* — Проблемы матем. анализа **41** (2009), 127–141.
27. Т. А. Суслина, А. А. Харин, *Усреднение с учетом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны.* — Проблемы матема. анализа **59** (2011), 177–193.
28. A. R. Akhmatova, E. S. Aksenova, V. A. Sloushch, T. A. Suslina, *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap.* — Complex Variables and Elliptic Equations **67**, No. 3 (2022), 523–555.
29. А. А. Мишулович, *Усреднение многомерных периодических уравнений с периодическими коэффициентами на краю внутренней лакуны.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **516** (2022), 135–175.

30. А. А. Мишулович, В. А. Слоущ, Т. А. Суслина, *Усреднение одномерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **519** (2022), 114–151.
31. Т. А. Суслина, *Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами.* — Успехи матем. наук **78**, No. 6 (2023).
32. А. А. Раев, В. А. Слоущ, Т. А. Суслина, *Усреднение одномерного периодического оператора четвертого порядка с сингулярным потенциалом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **521** (2023), 212–239.
33. A. Badanin, E. Korotyaev, *Spectral asymptotics for periodic fourth-order operators.* — Inter. Math. Research Notices **45** (2005), 2775–2814.
34. М. М. Скриганов, *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов.* — Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3–122.

Sloushch V. A., Chuprov I. M. Homogenization of a one-dimensional periodic fourth-order operator with a singular potential, taking correctors into account.

In $L_2(\mathbb{R})$, we consider a fourth-order differential operator B_ε of the form $B_\varepsilon = \frac{d^4}{dx^4} + \varepsilon^{-4}V(x/\varepsilon)$, where $V(x)$ is a real-valued 1-periodic function of class $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, and $\varepsilon > 0$ is a small parameter. It is assumed that the point $\lambda_0 = 0$ is the bottom of the spectrum of the operator $B = \frac{d^4}{dx^4} + V(x)$. Moreover, on the period $k \in [-\pi, \pi)$, the first band function $E_1(k)$ of the operator B attains its minimum at exactly two points $\pm k_0$, $0 < k_0 < \pi$, and behaves like $g^{(1)}(k \mp k_0)^2$, $g^{(1)} > 0$, near these points. We study the behavior of the resolvent $(B_\varepsilon + I)^{-1}$ for small ε. We obtain an approximation of this resolvent in the operator norm with error $O(\varepsilon^4)$. The approximation is described in terms of the spectral characteristics of the operator B at the edge of the spectrum.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034
E-mail: v.slouzh@spbu.ru
E-mail: st107572@student.spbu.ru

Поступило 29 сентября 2026 г.