Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

С. А. Назаров

ПЛАСТИНА КИРХГОФА С ШАРНИРНО ФИКСИРОВАННОЙ КРОМКОЙ И ГУСТЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ СЕМЕЙСТВОМ ТОЧЕЧНЫХ КРЕПЛЕНИЙ

§1. Постановка задачи

Пусть Ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная простым замкнутым гладким (класса C^∞ для простоты) контуром $\Gamma = \partial\Omega$ (рис. 1, а), в окрестности $\mathcal{V}$ которого введем систему локальных криволинейных координат (n, s), где n – ориентированное расстояние до Γ, $n < 0$ внутри Ω, а s – длина дуги, измеренная от точки $\mathcal{O} \in \Gamma$ против часовой стрелки. Масштабированием сведем к единице длину контура и тем самым сделаем безразмерными все геометрические параметры и декартову систему координат $x = (x_1, x_2)$ с началом $\mathcal{O}$. При большом $N \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ отметим на контуре Γ точки $P_1^0, \dots, P_N^0$ с координатами $s_j^\varepsilon = \varepsilon j$, расположенные на расстоянии $\varepsilon = 1/N$ одна от другой, причём $P_0^0 := P_N^0 = \mathcal{O}$, а нумерация проводится против часовой стрелки. Восстановим из этих точек перпендикуляры $\upsilon_1^0, \dots, \upsilon_N^0 = \upsilon_0^0$ вовнутрь области Ω, на которых выделим точки $P_j^{\ell_j}$ на расстояниях $\ell_j > 0$ от границы. Далее величины $\ell_j = \ell_j^\varepsilon$ разными способами свяжем с малым параметром ε и номером $j = 1, \dots, N$ точки P_j^0 на краю пластины Γ, считая, что $P_j^{\ell_j^\varepsilon} \mapsto P_j^0$ при $\varepsilon \to +0$ (или $N \to +\infty$).

Область Ω интерпретируем как двумерную модель Кирхгофа [1] тонкой изотропной однородной цилиндрической упругой пластины, которая зафиксирована в точках $P_1^{\ell_1^\varepsilon}, \dots, P_N^{\ell_N^\varepsilon}$, имитирующих крепление при помощи мелких пятен сварки или заклёпок, гвоздей или шурупов (см., например, [2, 3] и др.), а на её кромке Γ реализованы краевые

Ключевые слова: пластина Кирхгофа, свободно опёртый край, точечные условия Соболева, асимптотический анализ, условия жёсткого защемления и упругой заделки, пограничные слои, весовые оценки.

условия свободного опирания (шарнирная фиксация). Прогиб u^ε находится из бигармонического уравнения Софи Жермен [4, § 30]

$$\Delta_x^2 u^\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in \Omega \setminus \mathcal{P}^\varepsilon, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u^\varepsilon(x) = 0, \ M(x, \nabla_x) u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

и точечными условиями Соболева

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \mathcal{P}^\varepsilon = \{P_1^{\ell_1}, \dots, P_N^{\ell_N}\}. \tag{3}$$

Здесь Df – поперечная нагрузка пластины, нормированная её цилиндрической жесткостью $D > 0$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ – оператор Лапласа, $\nabla_x = \mathrm{grad}$ и

$$M(x, \nabla_x) = \Delta_x - (1 - \nu)\varkappa(s)\partial_n. \tag{4}$$

Кроме того, $\partial_n = \partial/\partial n$, $\nu \in [0, 1/2)$ – коэффициент Пуассона упругого материала, а $\varkappa$ – кривизна контура Γ, знакопеременная, т.е отрицательная на вогнутых участках дуги. При этом условия (2) означают фиксацию края пластины и обращение в нуль изгибающего момента на нём, однако оставляют произвольным угол поворота на краю.

На разных уровнях строгости выводы двумерной модели пластины со свободно опёртым краем можно найти в любой из монографий по технической или математической теории тонких упругих тел (см., например, [5–8] и [9–12] соответственно). Укажем информативный источник [4, § 30] с наиболее компактным изложением материала, где, в частности, приведена и вариационная постановка задачи (1), (2). Так, обслуживающее задачу (1)–(3) интегральное тождество [13, 14]

$$E(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon; \Omega) = (f, \psi^\varepsilon)_\Omega \qquad \forall \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon \tag{5}$$

осуществляется на следующем подпространстве, замкнутом в силу теоремы Соболева [15] о вложении $H^2 \subset C$ на плоскости:

$$\mathcal{H}^\varepsilon = \{u^\varepsilon \in H^2(\Omega) : \ u^\varepsilon(x) = 0, \ x \in \Gamma \cup \mathcal{P}^\varepsilon\}.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_\Omega$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, а $H^k(\Omega)$ – пространство Соболева порядка $k \in \mathbb{N}$. Кроме

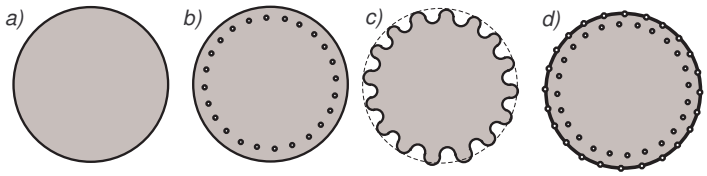


Рис. 1. Пластина (a) и её закрепление (b) в точках, отмеченных символом ∘. Пластина с быстроосциллирующей границей (*c*). Крепление пластины со свободной кромкой двумя шеренгами точек на кромке и около неё (*d*).

того, $E(u^\varepsilon, u^\varepsilon; \Omega)$ – функционал удвоенной упругой энергии, запасённой пластиной под действием поперечной нагрузки Df,

$$E(u^\varepsilon, v^\varepsilon; \Omega) = \int\limits_\Omega \Big(\Delta_x u^\varepsilon \, \Delta_x v^\varepsilon + (1-\nu) \times \Big(2 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_1^2} \Big) \Big) \, dx. \quad (6)$$

Наконец, выполнено очевидное (алгебраическое) соотношение

$$E(u^\varepsilon, u^\varepsilon; \Omega) \geqslant (1-\nu) \| \nabla_x^2 u^\varepsilon; L^2(\Omega) \|^2 \qquad \forall \; u \in H^2(\Omega), \quad (7)$$

а варианты одномерного неравенства Харди [16] (см. далее замечание 1) дают весовую оценку

$$E(u^\varepsilon, u^\varepsilon; \Omega) \geqslant c_\Omega (1-\nu) \big(\| \varrho^{-1/2} (1 + \ln(1+\varrho))^{-1} \nabla_x u^\varepsilon; L^2(\Omega) \|^2 + \| \varrho^{-3/2} (1 + \ln(1+\varrho))^{-1} u^\varepsilon; L^2(\Omega) \|^2 \big) \quad \forall \; u^\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (8)$$

При этом $\nabla_x^k u^\varepsilon$ – набор производных функции u^ε порядка k, $H_0^1(\Omega)$ – пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$, и $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma)$ – расстояние до контура Γ, совпадающее с $|n|$ внутри окрестности $\mathcal{V}$.

Функционал упругой энергии пластины вырождается лишь на линейных функциях. Поскольку только нулевая из них удовлетворяет первому условию (2), по лемме об эквивалентных нормировках справедливо неравенство

$$\| u^\varepsilon; H^1(\Omega) \|^2 \leqslant c_\Omega \| \nabla_x^2 u^\varepsilon; L^2(\Omega) \|^2 \qquad \forall \; u^\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (9)$$

Таким образом, задача (1)–(3) имеет единственное обобщённое решение [4, 13, 14].

Лемма 1. *При любой правой части $f \in L^2(\Omega)$ у задачи (5) есть решение $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon \subset H^2(\Omega)$ и верна оценка $\|u^\varepsilon; H^2(\Omega)\| \leqslant C_\Omega \|f; L^2(\Omega)\|$.*

Все постоянные в приведенных и последующих неравенствах не зависят от малого параметра ε и тестируемых функций.

§2. Известные результаты и цель работы

В статьях [17] Иво Бабушки представлен "парадокс" предельного перехода при приближении пластин с гладкими краями многоугольными пластинами Ω_N с шарнирно закреплёнными кромками $\Gamma_N := \partial\Omega_N$. Пусть, например, Ω – круг $\mathbb{B}_R = \{x : r := (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < R\}$ с радиусом $R > 0$, а Ω_N – вписанный в него правильный многоугольник с большим числом N сторон (рис. 2, a). В [17] установлено, что предел u_∞ при $N \to +\infty$ решений u_N задачи, например, с гладкой правой частью $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\Delta_x^2 u_N(x) = f(x), \quad x \in \Omega_N, \tag{10}$$

$$u_N(x) = 0, \ \Delta_x u_N(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_N, \tag{11}$$

является решением вполне аналогичной задачи для круговой пластины

$$\Delta_x^2 u_\infty(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

$$u_\infty(x) = 0, \ \Delta_x u_\infty(x) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\mathbb{B}_R. \tag{13}$$

Кривизны сторон многоугольника равны нулю, но $\varkappa = 1/R$ – кривизна окружности $\partial\mathbb{B}_R$. Отличие условий (13) от истинных условий шарнирного опирания [18], [4, § 30] на границе круга

$$u_\infty(x) = 0, \ \Delta_x u_\infty(x) - (1-\nu)R^{-1}\partial_r u_\infty(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{14}$$

и объявляется в механической литературе парадоксом, которому было найдено множество "объяснений" той или иной степени достоверности (см. [19–23] и др.).

Ещё один курьёзный предельный переход указан в статье [22]. Пусть теперь $\Omega = \square \setminus \overline{\mathbb{B}_R}$ – квадрат $\square$ с внутренним круговым отверстием $\mathbb{B}_R$, а $\Omega_N \supset \Omega$ – тот же квадрат, из которого вырезан прежний правильный N-угольник (рис. 2, b). Тогда пределом u_∞ решений $u_N \in H^2(\Omega_N) \cap H_0^1(\Omega_N)$ задач (10), (11) об изгибе невыпуклой многоугольной

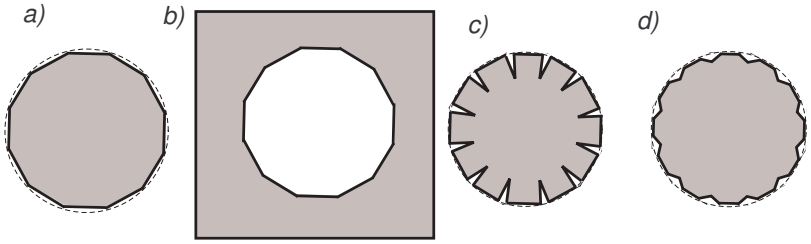


Рис. 2. Многоугольная пластина (a) и квадратная пластина с многоугольным отверстием (b). Пластины с изломанными краями (c) и (d), приводящими в пределе к условиям жёсткого защемления.

пластины служит решение уравнения (12) с иными краевыми условиями на внутреннем контуре

$$u_\infty(x) = 0,\ \Delta_x u_\infty(x) = 0, \quad x \in \partial\square,$$

$$u_\infty(x) = 0,\ \Delta_x u_\infty(x) + 4R^{-1}\partial_r u_\infty(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{15}$$

Вместе с тем в истинных условиях шарнирного опирания (14) вместо четвёртки должен стоять множитель $\nu - 1$, так как ∂_r – производная вдоль внутренней нормали.

Проверить полученный в статье [17] предельный переход при $N \to +\infty$ в задаче (10), (11) для (выпуклого) N-угольника Ω_N (рис. 2, a) нетрудно при помощи простого наблюдения, которое имеет отношение к ещё одному "парадоксу" для многоугольных шарнирно опёртых пластин, связанному с именем Оксана Сапонджяна [24, 25]. Именно, номинально задачу (10), (11) можно переформулировать как совокупность задач Дирихле для оператора Лапласа, у которых нахождение пределов при $N \to +\infty$, совершенно очевидно (обоснование примитивной замены $N \mapsto \infty$ в этих задачх не составит труда):

$$\begin{gathered}\Delta_x v_N(x) = f(x),\ x \in \Omega_N,\\ v_N(x) = 0,\ x \in \partial\Omega_N,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\Delta_x w_N(x) = v_N(x),\ x \in \Omega_N,\\ w_N(x) = 0,\ x \in \partial\Omega_N.\end{gathered} \tag{17}$$

Поскольку все углы выпуклого многоугольника "выходящие" (с растворами, меньшими π), выполнены включения $v_N \in H^2(\Omega_N) \cap H^1_0(\Omega_N)$ и $w_N \in H^2(\Omega_N) \cap H^1_0(\Omega_N)$ (см. доказательство для выпуклых областей в учебнике [13]), а значит, решения задач (10), (11) и (16), (17) совпадают, т.е. $u_N = w_N$.

Как известно (см. [26, 27] и, например, [28, гл. 2]), в случае наличия "входящего" угла с раствором, большим π, решения задач (16) и (17) из пространства $H^1_0(\Omega_N)$ могут не попасть в пространство $H^2(\Omega_N)$ из-за их сингулярностей в угловых точках, а решения u_N и w_N, принадлежащие разным классам Соболева, вообще говоря, не совпадают. Именно появлением упомянутых сингулярностей и объясняется [22] разница в предельных краевых условиях (14) и (15).

Вывод [24, 25] о невозможности решить задачу (10), (11) в невыпуклом многоугольнике при помощи методов конформных отображений, порождающих задачи Дирихле (16) и (17), не связан с какой-либо загадкой, а обусловлен некорректным переходом к совокупности задач (16), (17). "Правильный" способ решения итерированных задач Дирихле для оператора Лапласа для нахождения решения $w_N \in H^2(\Omega_N) \cap H^1_0(\Omega_N)$ в невыпуклых многоугольниках разработан в публикации [29] (см. также [28, гл. 6, § 6] и [30]). Подобные казусы обнаружены и в других задачах теории упругости (см. статьи [23, 31–34] и др.).

В работе [22] также изучены два способа приближения пластины Ω с гладкой кромкой $\partial\Omega$ многоугольными пластинами Ω_N с шарнирно опертыми краями. При этом найдены два типа изображенных на рис. 2, c и d, ломаных, обеспечивающих в пределе при $N \to \infty$ переход к условиям жесткого защемления (зафиксированы прогиб края пластины и нулевой угол поворота)

$$u_\infty(x) = 0, \ \partial_n u_\infty(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{18}$$

В первом случае (рис. 2, c) у ломаной $\partial\Omega_N$ звенья длиной $O(\varepsilon)$ (одинаковые для простоты) чередуются с острыми мелкими входящими вовнутрь зубцами высотой $\ell(\varepsilon)$. В теореме 7 [22] установлено, что предельные краевые условия (18) возникают в случае

$$\varepsilon |\ln \ell(\varepsilon)| = o(1) \text{ при } \varepsilon = 1/N \to +0. \tag{19}$$

Во второй ситуации (рис. 2, d) ломаная $\partial\Omega_N$ представляет собой пологое, глубиной $O(\varepsilon^{1+\alpha})$, невыпуклое возмущение гладкой кривой $\partial\Omega$ и при $\alpha \in [0, 1/2)$ предельные краевые условия принимают вид двойного

условия Дирихле (18). Подчеркнём, что в частном случае вписанного в круг правильного многоугольника с N сторонами (рис. 2, a) глубина составляет $O(N^{-2}) = O(\varepsilon^2)$, т.е. $\alpha = 1$ в оригинальной работе [17].

В статье [35] изучен предельный переход при $\varepsilon \to +0$ в пластине Кирхгофа со свободно опёртой быстроосциллирующей кромкой (рис. 1, c)

$$\Gamma^\varepsilon = \{x \in \mathcal{V} : \, n = \varepsilon^{1+\alpha} H(\varepsilon^{-1} s), \; s \in \Gamma\}, \tag{20}$$

где H – кусочно-гладкая 1-периодическая функция растянутой координаты $\zeta = \varepsilon^{-1} s$. Изломанная кромка пластины на рис. 1, d, подпадает под определение (20), и упомянутый результат [35] согласуется с описанным в предыдущем абзаце: при $\alpha \in [0, 1/2)$ предельными ($\varepsilon \to +0$) краевыми условиями служат условия жёсткого защемления (18). Кроме того, обнаружено [35], что при $\alpha = 1/2$ в качестве предельных выступают отличающиеся от (13) и (15) краевые условия

$$u^0(x) = 0, \; M(x, \nabla_x) u^0(x) + A(s) \partial_n u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{21}$$

где A – положительная функция на контуре Γ, определяемая по профильной функции H. Соотношения (21) следует интерпретировать как упругое защемление кромки пластины: её край зафиксирован, но угол изгиба пропорционален изгибающему моменту. Отметим, что угол поворота на краю равен $-\partial_n u^0$, так как нормаль n внешняя.

В работе [36] показано, что предельный переход [22] к задаче Дирихле (12), (18) в области Ω можно обеспечить постановкой в пластине Ω со свободной кромкой двух густых периодических семейств точечных условий Соболева (рис. 1, d), распределённых в шахматном порядке (рис. 1, d) вдоль контуров $\Gamma = \partial\Omega$ и

$$\Gamma^\varepsilon = \{x \in \mathcal{V} : \, n = \varepsilon^{1+\alpha} H(s), \; s \in \Gamma\} \subset \Omega,$$

где H – гладкая положительная профильная функция на контуре, а α – показатель из полуинтервала $[0, 1/2)$. Эти результаты, в частности, теорема 2.2 [36], применимы и рассматриваемой задаче (1)–(3) в ситуации

$$\ell_j^\varepsilon = \varepsilon^{1+\alpha} H(s_j^\varepsilon), \quad j = 1, \dots, N, \tag{22}$$

при $\alpha \in [0, 1/2)$, так как первое из условий (2) гарантирует выполнение условий Соболева в срединных точках $P_j^\bullet$ дуг с концами P_{j-1}^0 и P_j^0, а именно

$$u^\varepsilon(P_j^\bullet) = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Иными словами, "достаточное удаление" точек $P_j^{\ell_j^\varepsilon}$ от шарнирно опёртого края Γ пластины Ω приводит в пределе к двойному условию Дирихле (18).

Далее в данной работе показано, что, как и в статье [22] при иной постановке, "достаточное удаление" в задаче (1)–(3) означает именно соотношение (19), однако основное внимание уделяется построению асимптотики решения $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ в случае

$$\ell_j^\varepsilon = \varepsilon e^{-\beta(\varepsilon j)\varepsilon^{-1-\alpha}}, \quad j = 1, \dots, N, \tag{23}$$

где β – гладкая положительная функция на контуре Γ. Далее будет проверено, что в случае $\alpha = 0$ пределом u^ε при $\varepsilon \to +0$ служит решение бигармонического уравнения

$$\Delta_x^2 u^0(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{24}$$

с краевыми условиями (21) упругой заделки, в которых коэффициент $A(s) > 0$ вычисляется по показателю $\beta \in C^1(\Gamma)$ из представления (23). Кроме того, для $\alpha < 0$ в качестве предельного возникает двойное условие Дирихле (жёсткое защемление), но для $\alpha > 0$ – условие шарнирного крепления края пластины – эти, более простые, результаты будут установлены попутно.

Дополнительный множитель ε в связи (23) играет важную роль при асимптотическом анализе (разд. 4) в критическом случае $\alpha = 0$, но для $\alpha \neq 0$ этот множитель не имеет принципиального значения (разд. 6) и может быть заменен множителем $\varepsilon^0 = 1$ или $\varepsilon^{\pm m}$. Подчеркнём, что именно экспоненциальная близость точек $P_j^{\ell_j^\varepsilon}$ к границе $\Gamma = \partial\Omega$ совершенно отличает конструкции пограничных слоёв от использованных ранее в работах [22, 35].

В следующем разделе изучены решения двух задач, служащих для описания явления пограничных слоёв, периодического около контура Γ и несравнимо более мелких вблизи точек $P_j^{\ell_j^\varepsilon}$. Собственно асимптотический анализ в случаях $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$ представлен в разд. 4 и 6 соответственно, а обоснование найденных асимптотических формул – в разд. 5.

§3. Вспомогательные краевые задачи

Как обычно в задачах пограничного осреднения (см. публикации [37–43] и многие другие), около контура Γ возникает явление пограничного слоя. Поскольку точки $P_j^0 \in \Gamma$, из которых были восстановлены

перпендикуляры $\upsilon_j^0 \ni P_j^{\ell_j^\varepsilon}$, расположены на малом расстоянии $\varepsilon = 1/N$ одна от другой, естественным оказывается растяжение координат

$$\mathcal{V} \ni x \ \mapsto \ \eta = (\eta_1, \eta_2) = (\varepsilon^{-1} n, \varepsilon^{-1} s), \tag{25}$$

в результате которого возникает краевая задача для бигармонического уравнения в полубесконечной единичной полосе (далее полуполосе; см. рис. 3, a)

$$\Pi = \{\eta : \ \eta_1 < 0, |\eta_2| < 1/2\}. \tag{26}$$

На боковых сторонах $\varpi_\pm = (-\infty, 0) \times \{\pm 1/2\}$ полуполосы приходится поставить условия периодичности, а на торце $\varpi_0 = \{0\} \times (-1/2, 1/2)$ – только условия шарнирного опирания, так как в пределе точки $P_j^{\ell_j^\varepsilon}$ попадают на границу Γ.

Для того чтобы полностью сформулировать задачу в полуполосе (26), требуется изучить феномен "более мелкого" пограничного слоя около точек $P_j^{\ell_j^\varepsilon}$ с локальными координатами $s_j^\varepsilon = \varepsilon j$ и $n_j^\varepsilon = -\ell^\varepsilon(s_j^\varepsilon)$, где в согласии с формулой (23)

$$\ell^\varepsilon(s) = \varepsilon e^{-\beta(s)/\varepsilon^{1+\alpha}}. \tag{27}$$

Соответствующее растяжение координат принимает вид

$$x \ \mapsto \ \xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j) = \big(\ell^\varepsilon(s_j^\varepsilon)^{-1} n, \ \ell^\varepsilon(s_j^\varepsilon)^{-1}(s - s_j^\varepsilon)\big), \tag{28}$$

а его применение приводит к следующей задаче в проколотой полуплоскости $\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \ \xi_1 < 0\} \setminus \{(-1, 0)\}$ (рис. 3, b):

$$\Delta_\xi^2 U(\xi) = F(\xi), \quad \xi \in \Xi, \tag{29}$$

$$U(0, \xi_2) = 0, \ \Delta_\xi U(0, \xi_2) = 0, \quad \xi_2 \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

$$U(-1, 0) = 0. \tag{31}$$

Здесь и далее индекс $j = 1, \dots, N$ по возможности не пишем.

Вариационная постановка задачи (29)–(31)

$$E(U, \Psi; \Xi) = (F, \Psi)_\Xi \qquad \forall \ \Psi \in \mathcal{E}(\Xi) \tag{32}$$

осуществляется на "энергетическом" пространстве $\mathcal{E}(\Xi) \subset H^2_{loc}(\mathbb{R}^2_-)$, полученном замыканием линейного множества

$$\Big\{\Psi \in C^\infty\Big(\overline{\mathbb{R}^2_-}\Big) : \ \Psi(-1, 0) = 0 \text{ и } \Psi(0, \xi_2) = 0 \text{ при } \xi_2 \in \mathbb{R}\Big\} \tag{33}$$

по норме $E(\Psi, \Psi; \Xi)^{1/2}$ – введённые ограничения на пробную функцию Ψ сохраняются. При этом среди линейных функций, на которых

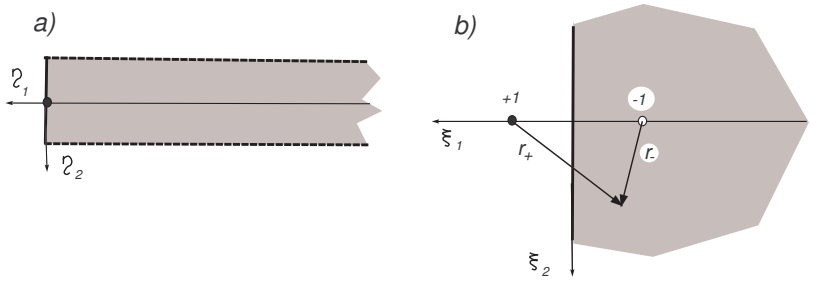


Рис. 3. Полуполоса (a) и полуплоскость (b) для описания явления пограничных слоёв (условия периодичности (a) отмечены штрих-пунктирной линией).

вырождается функционал энергии (6), только нулевая попадает в множество (33). Кроме того, соотношение (7) и обеспеченная последним наблюдением оценка

$$\|\Psi; H^1(\mathbb{R}^2_- \cap \mathbb{B}_2)\|^2 \leqslant c\|\nabla^2_\xi \Psi; L^2(\mathbb{R}^2_- \cap \mathbb{B}_2)\|^2 \qquad \forall\ \Psi \in \mathcal{E}(\Xi),$$

а также одномерное неравенство Харди "с логарифмом" по радиальной переменной $r = |\xi|$

$$\begin{aligned} &\int\limits_1^{+\infty} \big|\partial_r \phi(r)\big|^2 r dr \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_1^{+\infty} \big|\phi(r)\big|^2 \frac{dr}{r|\ln r|^2} \\ &\forall \phi \in H^1(1,+\infty),\ \ \phi(1) = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

и одномерное неравенство Фридрихса по угловой переменной $\theta \in (0,\pi)$

$$\int\limits_0^{\pi} \big|\partial_\theta \psi(\theta)\big|^2 d\theta \geqslant \pi^2 \int\limits_0^{\pi} \big|\psi(\theta)\big|^2 d\theta \qquad \forall \phi \in H^1_0(0,\pi)$$

приводят к весовой оценке

$$\begin{aligned} &\big\|(1+r)^{-1}(1+|\ln r|)^{-1}\nabla_\xi \Psi; L^2(\Xi)\big\|^2 \\ &\quad + \big\|(1+r)^{-2}(1+|\ln r|)^{-1}\Psi; L^2(\Xi)\big\|^2 \\ &\quad \leqslant CE(\Psi,\Psi;\Xi) \qquad \forall\ \Psi \in \mathcal{W}(\Xi). \end{aligned}$$

При этом в одномерных неравенствах нужно учесть переход от декартовой $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ к полярной (r, θ) системе координат, взять производные и саму функцию Ψ в качестве пробных функций ϕ и ψ соответственно, приписать подходящие весовые множители и провести дополнительные интегрирования.

В итоге приходим к следующему утверждению, основанному на теореме Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Лемма 2. *Если для правой части $F \in L^2_{loc}(\overline{\Xi})$ конечна весовая норма $\mathbf{n} := \|(1+r)^2(1+|\ln r|)F; L^2_{loc}(\Xi)\|$, то задача (32) имеет единственное решение $U \in \mathcal{E}(\Xi)$ и верна оценка $\|U; \mathcal{E}(\Xi)\| \leqslant c_\Xi \mathbf{n}$.*

Замечание 1. Для проверки весовой оценки (8) в области Ω помимо очевидных соображений требуются подстановка $r \mapsto |n|/d$ в неравенстве Харди (34) и формула $|n| \leqslant d$ в левой части полученного соотношения

$$\int\limits_0^d \left|\partial_n \phi(n)\right|^2 |n| d|n| \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_0^d \left|\phi(n)\right|^2 \frac{d|n|}{|n| \left(\ln |n/d|\right)^2}$$
$$\forall \phi \in H^1(0,d),\ \phi(d) = 0,\ d > 0.$$

Кроме того, применяется оценка (9) и ещё один легко проверяемый вариант неравенства Харди

$$\int\limits_0^d \frac{\left|\partial_n \psi(n)\right|^2 d|n|}{|n| \left(1 + \ln |n/d|\right)^2} \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_0^d \frac{\left|\psi(n)\right|^2 d|n|}{|n|^3 \left(1 + \ln |n/d|\right)^2}$$
$$\forall \psi \in H^1(0,d),\ \psi(0) = 0,$$

а размер $d > 0$ выбран так, что $\{x\ |n| < d\} \subset \mathcal{V}$. $\boxtimes$

Далее в асимптотическом анализе понадобится следующее "неэнергетическое" решение однородной ($F = 0$) задачи (29)–(31), обладающее ростом $O(r(1 + \ln r|))$ на бесконечности и потому не попадающее в пространство $\mathcal{E}(\Xi)$:

$$U_1(\xi) = \frac{1}{8\pi} \left(r_-^2 \ln \frac{1}{r_-} - r_+^2 \ln \frac{1}{r_+} \right) + \frac{\xi_1}{2\pi} \ln 2. \tag{35}$$

Здесь фигурирует фундаментальное решение Φ оператора Δ^2_ξ на плоскости с особенностью в точке $\xi = 0$ и радиусы $r_\pm$ полярных координат

с центрами $(\pm 1, 0)$ (рис. 3, b)

$$\Phi(\xi) = \frac{|\xi|^2}{8\pi} \ln \frac{1}{|\xi|} \quad \text{и} \quad r_\pm = \sqrt{(\xi_1 \mp 1)^2 + \xi_2^2}.$$

Формулы (30) и (31) для бигармонической функции (35) сомнений не вызывают. Кроме того, при $r = |\xi| \to +\infty$ выполнено легко проверяемое соотношение

$$U_1(\xi) = \Phi_1(\xi) + B_1\xi_1 + O(1 + |\ln r|), \tag{36}$$

где

$$\Phi_1(\xi) = \frac{\xi_1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\xi|} \quad \text{и} \quad B_1 = \frac{1}{4\pi}(2\ln 2 - 1) > 0. \tag{37}$$

Вернёмся к рассмотрению задачи в полуполосе (26). В следующем разделе будет востребована функция, удовлетворяющая бигармоническому уравнению в полуполосе

$$\Delta_\eta^2 W(\eta) = 0, \quad \eta \in \Pi, \tag{38}$$

краевым условиям на проколотом торце $\varpi_0 \setminus \{0\}$

$$W(0, \eta_2) = 0, \ \Delta_\eta W(0, \eta_2) = b, \quad \eta_2 \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2), \tag{39}$$

условиям периодичности на боковых сторонах $\varpi_\pm$

$$\tfrac{\partial^i W}{\partial \eta_2^i}\Big(\eta_1, +\tfrac{1}{2}\Big) = \tfrac{\partial^i W}{\partial \eta_2^i}\Big(\eta_1, -\tfrac{1}{2}\Big), \ i = 0, 1, 2, 3, \quad \eta_1 \in (-\infty, 0), \tag{40}$$

и такому асимптотическому условию в начале координат $\eta = 0$:

$$W(\eta) = a\big(\Phi_1(\eta) + B_1\eta_1\big) + O(|\eta|^2) \ \ \rho = |\eta| \to +0. \tag{41}$$

При этом a и b – некоторые (пока произвольные) постоянные. К тому же функцию W заранее можно считать чётной относительно переменной η_2 и поэтому отсутствие слагаемого $B_2\eta_2$ в соотношении (41) понятно. Кроме того, моном η_1 – решение однородной задачи, т.е. коэффициент B_1 произволен – возьмём его из формул (36) и (37).

Как и в случае задачи в проколотой полуплоскости Ξ, вариационная постановка аналогичной задачи в полуполосе Π с подходящими правыми частями осуществляется на “энергетическом” пространстве $\mathcal{E}(\Pi)$,

полученном сохраняющим ограничения на пробные функции замыканием по норме $\big(E(\Psi,\Psi;\Xi)+\|\Psi;L^2(\mathcal{Q}_1\|^2\big)^{1/2}$ линейного множества

$$\begin{aligned}&\{\Psi\in C^\infty\big(\overline{\Pi}\big):\ \Psi(0,\eta_2)=0,\ |\eta_2|<1/2,\\ &\text{и}\\ &\partial^i_{\eta_2}\Psi(\eta_1,1/2)=\partial^i_{\eta_2}\Psi(\eta_1,-1/2),\ \eta_1<0,\ i=0,1\}.\end{aligned}\tag{42}$$

При этом квадрат $\mathcal{Q}_1=(-1,0)\times(-1/2,1/2)$ введён в энергетическую норму потому, что моном η_1 аннулирует функционал энергии (6) и удовлетворяет первым условиям (39) и (40), введённым в формулу (42).

Лемма 3. *Интегральное тождество* [13, 14]

$$E(W,\Psi;\Pi)=\mathcal{F}(\Psi)\qquad\forall\Psi\in\mathcal{E}(\Pi)$$

с линейным непрерывным функционалом $\mathcal{F}\in\mathcal{E}(\Pi)^*$ в правой части имеет решение $W\in\mathcal{E}(\Pi)$ в том и только в том случае, если выполнено условие разрешимости $\mathcal{F}(\eta_1)=0$, а само решение определено с точностью до слагаемого $\mathrm{const}\,\eta_1$, но будучи подчинено условию ортогональности $(W,\eta_1)_{\mathcal{Q}_1}=0$, становится единственным и удовлетворяет оценке $\|W;\mathcal{E}(\Pi)\|\leqslant c_\Pi\|\mathcal{F};\mathcal{E}(\Pi)^*\|$.

Решение сформулированной специальной задачи (38)–(41) не существует в "энергетическом" пространстве $\mathcal{E}(\Pi)$ ввиду двух обстоятельств. Прежде всего, из-за сингулярности $a\Phi_1\notin H^2_{loc}\big(\overline{\Pi}\big)$ при $a\neq0$. Помимо этого, отыскивая нужное решение в виде суммы

$$W(\eta)=a\Phi_1(\eta)\chi(|\eta|)+\mathbf{W}(\eta),$$

где $\chi\in C^\infty(\mathbb{R})$ – эталонная срезающая функция,

$$\chi(t)=1\text{ при }|t|<1/3,\quad\text{и}\quad\chi(t)=0\text{ при }|t|>3/2,\tag{43}$$

обнаруживаем, что у новой задачи для "остатка" $\mathbf{W}$ возникает условие разрешимости. Вместе с тем согласно общим результатам [27], [28, гл. 5] решение можно найти в виде

$$W(\eta)=a\Phi_1(\eta)\chi(|\eta|)+(1-\chi(\eta_1)\gamma\tfrac{\eta_1^2}{2}+\widehat{W}(\eta),\tag{44}$$

причём "энергетическая" составляющая $\widehat{W}\in\mathcal{E}(\Pi)$ допускает представление

$$\widehat{W}(\eta)=\gamma_0+\gamma_1\eta_1+\widetilde{W}(\eta)\tag{45}$$

с отделённым линейным членом и экспоненциально затухающим при $\eta_1\to-\infty$ остатком $\widetilde{W}(\eta)$.

Множитель γ в представлении (44) вычислим при помощи метода [44], для чего подставим 1-периодические по переменной η_2 бигармонические функции W и η_1 в формулу Грина на длинном ($T \to +\infty$) прямоугольнике $\mathcal{Q}_T = (-T, 0) \times (-1/2, 1/2)$ с вырезанным полукругом $\mathbb{B}_\delta^- = \{\eta : \rho = |\eta| < \delta, \eta_1 < 0\}$ малого ($\delta \to +0$) радиуса. При учёте соотношений (38)–(40) получим равенство

$$0 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_1} \Delta_\eta W(-T, \eta_2) - \eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} \Delta_\eta W(-T, \eta_2) \right) d\eta_2$$
$$- \int\limits_{-1/2}^{1/2} b \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_1} d\eta_2 - \int\limits_{\partial \mathbb{B}_\delta^- \cap \Pi} \left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta_\eta W(\eta) - \frac{\partial \eta_1}{\partial \rho} \Delta_\eta W(\eta) \right) ds_\eta.$$

Отметим, что минус при последнем интеграле возник потому, что ∂_ρ – производная вдоль внутренней нормали по отношению к области $\mathcal{Q}_T \setminus \overline{\mathbb{B}_\delta^-}$. После непосредственного вычисления интегралов и пределов выводим формулу

$$0 = \gamma - b - a \quad \Rightarrow \quad \gamma = b + a. \tag{46}$$

Поиск решения W задачи (38)–(41) закончен: формулы (44) и (45), (46) определяют его поведение в полуполосе как около начала координат, так и на бесконечности. Напомним, что коэффициент B_1 зафиксирован соотношением (41), а значит, функция W гладко зависит от вещественных параметров a и b.

§4. Построение асимптотики в случае $\alpha = 0$.

Предшествующие результаты (см. описание в разд. 2) и простые соображения подсказывают, что главный член u^0 асимптотики решения u^ε задачи (1)–(3) удовлетворяет бигармоническому уравнению (24) и первому условию Дирихле в списке (21), т.е. требуется как-то определить только второе краевое условие для u^0 на границе области Ω. Поэтому, назначив функции u^0 соответствующее поведение около контура $\Gamma = \partial\Omega$

$$u^0(x) = n\partial_n u^0(0, s) + \tfrac{n^2}{2} \partial_n^2 u^0(0, s) + O(|n|^3), \quad n \to -0, \tag{47}$$

построим пограничные слои около точек $P_1^{\ell_j^\varepsilon}, \dots, P_N^{\ell_j^\varepsilon}$ для соблюдения условий Соболева (3) и вычислим связь следов производных $\partial_n u^0$ и

$\partial_n^2 u^0$ на Γ. При этом не изменяем обозначение для функций, переписанных внутри $\Omega \cap \mathcal{V}$ в локальных координатах (n, s).

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. монографии [45, 46], [47, гл. 2] и др.), привлекая построенные в разд. 3 специальные решения U_1 и W.

Переход к растянутым координатам (25) придаёт соотношению (47) форму

$$u^0(x) = \varepsilon\eta_1 \partial_n u^0(0,s) + \varepsilon^2 \tfrac{\eta_1^2}{2} \partial_n^2 u^0(0,s) + \dots, \tag{48}$$

в которой многоточие замещает младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого формального анализа. Соотношение (48) порождает такое представление для осциллирующего пограничного слоя, возникающего вблизи контура Γ:

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon w_0(\eta; s) + \varepsilon^2 w_1(\eta; s) + \dots . \tag{49}$$

Здесь w_k – функции переменных $(\eta_1, \eta_2; s) \in \Pi \times \Gamma$, причём, как обычно, зависимость от переменной s гладкая, а от переменной η_2 – 1-периодическая. Сами функции и их поведение при $|\eta| \to +0$ и $\eta_1 \to -\infty$ предстоит зафиксировать.

Разложение (49) никак не учитывает условия Соболева (3), и поэтому приходится принять во внимание ещё один, более мелкий – экспоненциальный, пограничный слой, локализованный около самих точек $P_j^{\ell_j^\varepsilon}$, $j = 1, \dots, N$, и использующий "сверхбыстрые" переменные (28). Соответствующие разложения отыскиваем (в настоящий момент просто угадываем) в виде

$$u^\varepsilon(x) = v_j^\varepsilon(\xi) + \dots := \varepsilon \ell^\varepsilon(s_j^\varepsilon) k(s_j^\varepsilon) U_1(\xi) + \dots, \quad j = 1, \dots, N, \tag{50}$$

где U_1 – указанное в разд. 3 решение (35) однородной задачи (29)–(32), а k – гладкая на контуре Γ функция, которую нужно ещё вычислить.

Сравнивая определения (25) и (28) при учёте связи (27) параметров в случае $\alpha = 0$, видим, что

$$\eta = e^{-\beta(s)/\varepsilon} \xi, \tag{51}$$

а значит, в силу формул (36) и (37) переход к координатам (51) в представлении (50), распространённом номинально на все значения переменной $s \in \Gamma$, показывает, что

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \varepsilon \ell^\varepsilon(s) k(s)(\Phi_1(\xi) + B_1\xi_1) + \dots \\ &= \varepsilon^2 k(s)\eta_1 \Big(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{e^{-\beta(s)/\varepsilon}}{|\eta|} + B_1 \Big) + \dots \\ &= \varepsilon k(s) \left(-\frac{\beta(s)}{2\pi}\eta_1 + \varepsilon\big(\Phi_1(\eta) + B_1\eta_1\big) \right) + \dots \\ &=: V_j^\varepsilon(\eta, s) + \dots . \end{aligned} \tag{52}$$

Сращивая разложения (50), (52) и (51) на уровне ε, находим функцию

$$\Pi \ni \eta \ \mapsto \ w_0(\eta; s) = -k(s)\tfrac{\beta(s)}{2\pi}\eta_1 \tag{53}$$

удовлетворяющую однородной ($b = 0$) задаче (38)–(40) (см. лемму 3) при всех $s \in \Gamma$.

Продолжив процедуру сращивания, согласуем главные члены разложений (49) и (48). В итоге обнаруживаем связи

$$\partial_n u^0(0, s) = -k(s)\tfrac{\beta(s)}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad k(s) = -\tfrac{2\pi}{\beta(s)}\partial_n u^0(0, s). \tag{54}$$

Теперь вычислим функцию w_1 из формулы (49). В локальных координатах (n, s) оператор Лапласа принимает вид

$$\Delta_x = J(n, s)^{-1}\partial_n J(n, s)\partial_n + J(n, s)^{-1}\partial_s J(n, s)^{-1}\partial_s, \tag{55}$$

где $J(n, s) = 1 + n\varkappa(s)$ – якобиан. Следовательно, формулы (4), (2) и (49), (53) означают, что выполнено краевое условие

$$\begin{aligned} \Delta_\eta w_1(0, \eta_2; s) &= -\nu\varkappa(s)\partial_{\eta_1} w_0(0, \eta_2; s) \\ &= -\nu\varkappa(s)\partial_n u^0(0, s), \quad \eta_2 \in (-1/2, 1/2), \end{aligned} \tag{56}$$

которое конкретизирует величину b в соотношениях (39). Линейная функция (53) не привносит в главном возмущений в бигармоническое уравнение (38), а сращивание разложений (49) и (52) на уровне ε^2 указывает множитель a в асимптотическом условии (41). Таким образом, w_1 – решение (44) задачи (38)–(41), где

$$b = -\nu\varkappa(s)\partial_{\eta_1} w_0(0, \eta_2; s) \quad \text{и} \quad a = k(s). \tag{57}$$

В силу формул (46) и (54) согласование поведения этого решения при $\eta_1 \to -\infty$ с поправочным членом разложения (48) даёт соотношение

$$\partial_n^2 u^0(0,s) = b + a = -\nu\varkappa(s)\partial_n u^0(0,s) - \tfrac{2\pi}{\beta(s)}\partial_n u^0(0,s). \tag{58}$$

Преобразуем его согласно представлениям (4) и (55) дифференциальных операторов. В результате находим, что функцию u^0 следует подчинить второму краевому условию (21) с коэффициентом

$$A(s) = \tfrac{2\pi}{\beta(s)} > 0. \tag{59}$$

Лемма 4. *Задача* (24), (21) *с правой частью* $f \in L^2(\Omega)$ *и коэффициентом* (59) *имеет единственное (классическое) решение* $u^0 \in H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, *и для него верна оценка* $\|u^0; H^4(\Omega)\| \leqslant c_{\Omega,\nu,A}\|f; L^2(\Omega)\|$.

Доказательство. Достаточно убедиться в однозначной разрешимости вариационной постановки задачи – повышение гладкости решения и оценка для него обеспечены общими результатами [14,48]. Для решения $u^0 \in H^3(\Omega)$ и пробной функци $\psi \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ верна формула Грина (см [18], [4, §27], [12, §1.1] и др.)

$$(\Delta_x^2 u^0, \psi)_\Omega = E(u,\psi;\Omega) - (Mu^0, \partial_n\psi)_\Gamma, \tag{60}$$

которая в соответствии с соотношением (21) превращается в интегральное тождество

$$E(u,\psi;\Omega) + A(\partial_n u^0, \partial_n\psi)_\Gamma = (f,\psi)_\Omega \qquad \forall\ \psi \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),$$

содержащее положительно определённую билинейную форму в левой части и потому однозначно разрешимое в силу теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве. □

Замечание 2. Ввиду C^∞-гладкости границы $\partial\Omega$ включение $f \in H^k(\Omega)$ с показателем $k \in \mathbb{N}$ гарантирует, что решение предельной задачи (24), (21) принадлежит классу $H^{k+4}(\Omega)$. Для существенного сокращения выкладок при обосновании асимптотики и достижения асимптотически точных оценок в очередных разделах считаем, что $f \in C^\infty\big(\overline{\Omega}\big)$ и поэтому $u^0 \in C^\infty\big(\overline{\Omega}\big)$. Вместе с тем теоремы 2 и 3 сохраняют силу и в случае $u^0 \in H^3(\Omega)$ и $f \in H_0^1(\Omega)^*$ (сопряжённое пространство) – необходимые изменения в оценках асимптотических остатков можно найти, например, в книге [10, § 4, гл. 4], однако в данной работе подобными уточнениями пренебрегаем. ⊠

§5. Обоснование асимптотики.

Зафиксировав $\alpha = 0$, сформируем глобальное приближение к решению u^ε задачи (1)–(3) из членов многомасштабной асимптотики, построенной в разд. 4. С этой целью применим разработанную в [49] (см. также [47, гл. 2] и др.) конструкцию, включающую срезающие функции с перехлёстывающимися носителями и обеспечивающую приемлемую оценку погрешностей. Именно, введём функции $X^\varepsilon, X \in C^\infty\big(\overline{\Omega}\big)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &X^\varepsilon(x) = 1 \text{ при } x \in \Omega \setminus \mathcal{V} \text{ или } x \in \mathcal{V},\ n < -3\varepsilon \\ &\qquad \text{и} \\ &X^\varepsilon(x) = 0 \text{ при } n > -2\varepsilon, \\ &X(x) = 0 \text{ при } x \in \Omega \setminus \mathcal{V} \text{ или } x \in \mathcal{V},\ n < -d \\ &\qquad \text{и} \\ &X(x) = 1 \text{ при } n > -d/2. \end{aligned} \tag{61}$$

Как и ранее, размер $d > 0$ зафиксирован так, что $\{x \in \Omega :\ n \in (0, d]\} \subset \mathcal{V}$. Отметим, что $X^\varepsilon(x) = 0$ и $X(x) = 1$ при $x \in \Gamma \cup \mathcal{P}^\varepsilon$, но $XX^\varepsilon \neq 0$ разве лишь на множестве $\{x \in \mathcal{V} : -n \in (2\varepsilon, d/2)\}$.

Ещё два набора ($j = 1, \dots, N$) срезающих функций, имеющих носители в малых окрестностях точек P_j^0 и равных единице в них, определим следующим образом:

$$\mathfrak{x}_j^\varepsilon(x) = \chi\Big(\tfrac{n}{6\ell_j^\varepsilon}\Big)\chi\Big(\tfrac{s-s_j^\varepsilon}{6\ell_j^\varepsilon}\Big), \quad \chi_j^\varepsilon(x) = \chi\Big(\tfrac{4n}{3\varepsilon}\Big)\chi\Big(\tfrac{4(s-s_j^\varepsilon)}{3\varepsilon}\Big). \tag{62}$$

При этом χ – эталонная срезающая функция (43) и далее $\mathfrak{X}^\varepsilon = \mathfrak{x}_1^\varepsilon + \dots + \mathfrak{x}_N^\varepsilon$. Кроме того, $\operatorname{supp}\mathfrak{x}_j^\varepsilon \subset \operatorname{supp}\chi_j^\varepsilon \subset \mathcal{V}$, а сами функции (62) не зависят от переменной n около контура Γ.

В качестве глобального асимптотического приближения к решению u^ε задачи (1)–(3) возьмём сумму

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(x) &= X^\varepsilon(x)u^0(x) + X(x)(1 - \mathfrak{X}^\varepsilon(x))\big(\varepsilon w_0(\eta; s) + \varepsilon^2 w_1(\eta; s)\big) \\ &\quad - X^\varepsilon(x)X(x)\Big(n\partial_n u^0(s) + \frac{n^2}{2}\partial_n^2 u^0(s)\Big) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \chi_j^\varepsilon(x)\big(v_j^\varepsilon(\xi^j) - (1 - \mathfrak{x}_j^\varepsilon(x))V_j^\varepsilon(\eta; s)\big). \end{aligned} \tag{63}$$

Здесь $v_j^\varepsilon(\xi^j)$ – величина из разложения (50), а $V_j^\varepsilon(\eta^j;s)$ – член её асимптотики, указанный в представлении (52). Подчеркнём, что члены, подвергшиеся сращиванию в разд. 4, учтены в формуле (63) дважды, т.е. в слагаемых u^0 и $w_0+\varepsilon w_1$, а также в v_j^ε. Вместе с тем указанное дублирование компенсировано вычитаемыми, а именно третьим в правой части и последними в сумме по $j=1,\dots,N$.

Согласно определениям ингредиентов глобального приближения (63), в частности, срезок X и χ_j^ε, $\mathfrak{x}_j^\varepsilon$ (см. (61) и (62)) и составляющей U_1 выражения v_j^ε (см. (35) и (50)) для функции $\mathbf{u}^\varepsilon$ и для разности

$$R^\varepsilon = u^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon \tag{64}$$

выполнены первое условие Дирихле (2) и условия Соболева (3). Таким образом, функция $R^\varepsilon \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ подчинена формуле Грина вида (60), дающей для неё такое соотношение:

$$\begin{aligned} E(R^\varepsilon,R^\varepsilon;\Omega) &= (f,R^\varepsilon)_\Omega - E(U^\varepsilon,R^\varepsilon;\Omega)\\ &= (f-\Delta_x^2\mathbf{u}^\varepsilon,R^\varepsilon)_{\Omega\setminus\mathcal{P}^\varepsilon} - (M\mathbf{u}^\varepsilon,\partial_n R^\varepsilon)_\Gamma. \end{aligned} \tag{65}$$

Следовательно, в силу неравенств (7), (9) и (8) для оценки асимптотической погрешности $\|R^\varepsilon;H^2(\Omega)\|$ проведенного асимптотического анализа достаточно обследовать выражения на первых позициях в скалярных произведениях из правой части соотношения (65).

Сначала обработаем более простое последнее скалярное произведение в пролстранстве $L^2(\Gamma)$. Поскольку $\mathbf{u}^\varepsilon=0$ при $n=0$ и, как упоминалось, срезающие функции (62) не зависят от переменной n вблизи Γ, при учёте формулы для V_j^ε имеем

$$\begin{aligned} M\mathbf{u}^\varepsilon &= (\partial_n^2+\nu\varkappa\partial_n)\\ &\quad\times\big((1-\mathfrak{x}_j^\varepsilon)\big(\varepsilon w_0+\varepsilon^2(w_1-k\Phi_1)\big)+\chi_j^\varepsilon v_j^\varepsilon\big)\ \text{ при } n=0. \end{aligned} \tag{66}$$

Согласно асимптотическому условию (41) с коэффициентом $a=k$ из списка (57) вычитаемое $k\Phi_1$ компенсирует особенность, предписанную слагаемому w_1. Следовательно, при учёте однократных дифференцирований по быстрым переменным (25) и (28) (вторая производная $\partial_n^2=\varepsilon^2\partial^2/\partial\eta_1^2$ не играет роли) краевые условия (56) и (39) обеспечивают мажоранту $c\varepsilon$ для величины (66) при каждом $j=1,\dots,N=1/\varepsilon$.

В итоге находим, что

$$\begin{aligned}\bigl|(M\mathbf{u}^\varepsilon, \partial_n R^\varepsilon)_\Gamma\bigr| &\leqslant \|M\mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|\,\|\partial_n R^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| \\ &\leqslant c_0\biggl(\sum_{j=1}^N \varepsilon\bigl(\varepsilon + \varepsilon^2\varepsilon^{-1}\varepsilon\ell_j^\varepsilon(\ell_j^\varepsilon)^{-1}\bigr)^2\biggr)^{1/2}\|R^\varepsilon; H^2(\Omega)\| \\ &\leqslant C_0\varepsilon E(R^\varepsilon, R^\varepsilon;\Omega)^{1/2}.\end{aligned} \tag{67}$$

Теперь преобразуем разность $\Delta_x^2\mathbf{u}^\varepsilon - f$. Учитывая расположение носителей срезающих функций (61) и (62), видим, что

$$\bigl[\Delta_x^2, X^\varepsilon X\bigr] = \bigl[\Delta_x^2, X^\varepsilon\bigr] + \bigl[\Delta_x^2, X\bigr]$$

и

$$\bigl[\Delta_x^2, \chi_j^\varepsilon(1-\mathfrak{x}_j^\varepsilon)\bigr] = \bigl[\Delta_x^2, \chi_j^\varepsilon\bigr] - \bigl[\Delta_x^2, \mathfrak{x}_j^\varepsilon\bigr].$$

Здесь $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ – коммутатор операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Таким образом, группируя слагаемые, содержащие коммутаторы бигармонического оператора и срезок, получаем, что

$$\begin{aligned}\Delta_x^2\mathbf{u}^\varepsilon - f &= \bigl(X^\varepsilon\Delta_x^2 u^0 - f\bigr) + \bigl[\Delta_x^2, X^\varepsilon\bigr]\Bigl(u^0 - n\partial_n u^0 - \frac{n^2}{2}\partial_n^2 u^0\Bigr) \\ &\quad + \Bigl[\Delta_x^2, X\Bigr]\Bigl(\varepsilon(w_0 - \eta_1\partial_n u^0) + \varepsilon^2\Bigl(w_1 - \frac{\eta_1^2}{2}\partial_n^2 u^0\Bigr)\Bigr) \\ &\quad + X(1-\mathfrak{X}^\varepsilon)\Delta_x^2\Bigl(\varepsilon(w_0 - \eta_1\partial_n u^0) + \varepsilon^2\Bigl(w_1 - \frac{\eta_1^2}{2}\partial_n^2 u^0\Bigr)\Bigr) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N\Bigl(\bigl[\Delta_x^2, \chi_j^\varepsilon\bigr]\bigl(v_j^\varepsilon - V_j^\varepsilon\bigr) + \chi_j^\varepsilon(1-\mathfrak{x}_j^\varepsilon)\Delta_x^2\bigl(v_j^\varepsilon - V_j^\varepsilon\bigr) \\ &\quad - \bigl[\Delta_x^2, \mathfrak{x}_j^\varepsilon\bigr]\bigl(\varepsilon w_0 + \varepsilon^2 w_1 - V_j^\varepsilon\bigr)\Bigr) \\ &=: I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon + I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon + \sum_{j=1}^N\bigl(I_{5j}^\varepsilon + I_{6j}^\varepsilon + I_{7j}^\varepsilon\bigr).\end{aligned} \tag{68}$$

Поочередно оценим слагаемые суммы (68). Сначала благодаря весовой оценке (8) и неравенству $\varrho(x) \leqslant 2\varepsilon$ на множестве $\operatorname{supp}(1 - X^\varepsilon)$

находим, что

$$\begin{aligned}\bigl|(I_1^\varepsilon, R^\varepsilon)_\Omega\bigr| &= \bigl|(\Delta_x^2\mathbf{u}^\varepsilon - f, R^\varepsilon)_\Omega\bigr| = \bigl|((1-X^\varepsilon)f, R^\varepsilon)_\Omega\bigr| \\ &\leqslant c_1\|f; L^2(\Omega)\|\varepsilon^{3/2}(1+|\ln\varepsilon|) \\ &\times \|\varrho^{-3/2}(1+|\ln\varrho|)^{-1}R^\varepsilon; L^2(\operatorname{supp}(1-X^\varepsilon))\| \\ &\leqslant C_1\varepsilon^{3/2}(1+|\ln\varepsilon|)E(R^\varepsilon, R^\varepsilon;\Omega)^{1/2}.\end{aligned} \tag{69}$$

Поскольку $u^0 \in C^\infty\bigl(\overline{\Omega}\bigr)$ верны неравенства

$$\begin{aligned}\Bigl|\nabla_x^k\Bigl(u^0(x) - n\partial_n u^0(0,s) - \frac{n^2}{2}\partial_n^2 u^0(0,s)\Bigr)\Bigr| \\ \leqslant c_k^0\varepsilon^{3-k} \text{ при } k=0,1,2,3,\ x\in\Upsilon^\varepsilon.\end{aligned} \tag{70}$$

Таким образом, выполнив оценки на множестве $\Upsilon^\varepsilon := \operatorname{supp}|\nabla_x X^\varepsilon| \subset \{x\in\mathcal{V}:\, n\in[-3\varepsilon,-2\varepsilon]\}$ с площадью $|\Upsilon^\varepsilon| = O(\varepsilon)$, обнаруживаем, что

$$\begin{aligned}\bigl|(I_2^\varepsilon, R^\varepsilon)_\Omega\bigr| &\leqslant c_2\varepsilon^{3/2}(1+|\ln\varepsilon|)\,\|\varrho^{-3/2}(1+|\ln\varrho|)^{-1}R^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \\ &\times \sum_{k=0}^{3}\varepsilon^{k-4}\,|\Upsilon^\varepsilon|^{1/2}\sup_{x\in\Upsilon^\varepsilon}\Bigl|\nabla_x^k\Bigl(u^0 - n\partial_n u^0 - \frac{n^2}{2}\partial_n^2 u^0\Bigr)\Bigr| \\ &\leqslant C_2\varepsilon(1+|\ln\varepsilon|)E(R^\varepsilon, R^\varepsilon;\Omega)^{1/2}.\end{aligned} \tag{71}$$

Согласно построению выполнены равенства (53) и (54), а разность

$$w_1(\eta;s) - \tfrac{\eta_1^2}{2}\partial_n^2 u^0(0,s) \tag{72}$$

на бесконечности в полуполосе Π – линейная функция переменной η_1 с точностью до экспоненциально малого ($\vartheta>0$, но $\eta_1\to-\infty$) слагаемого $O(e^{\vartheta\eta_1})$. Следовательно, на носителе функции $|\nabla_x X|$, удалённом от границы Γ на расстояние $d/2$, справедлива оценка

$$\begin{aligned}\bigl|(I_3^\varepsilon, R^\varepsilon)_\Omega\bigr| &\leqslant c_3\varepsilon^2\sum_{k=0}^{3}\sup_{x\in\operatorname{supp}|\nabla_x X|}\Bigl|\nabla_x^k\Bigl(w_1(\eta;s) - \frac{\eta_1^2}{2}\partial_n^2 u^0(0,s)\Bigr)\Bigr| \\ &\times \|R^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \leqslant c_3'\varepsilon\bigl(1+(\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-3})e^{-\vartheta d/2\varepsilon}\bigr) \\ &\times \|R^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \leqslant C_3\varepsilon E(R^\varepsilon, R^\varepsilon;\Omega)^{1/2}.\end{aligned}$$

Подчеркнём, что экспонента в предпоследнем неравенстве – бесконечно малая более высокого порядка чем любая степень большого параметра $1/\varepsilon$, а единица произошла от членов суммы с индексами $k=0,1$.

Рассмотрим слагаемое I_4^ε из формулы (68). Как и ранее, фигурирующая в нём линейная комбинация асимптотических членов совпадает с разностью (72). Кроме того, в силу соотношений (55) и (25) бигармонический оператор Δ_x^2 отличается от оператора $\varepsilon^{-4}\Delta_\eta^2$ дифференциальным выражением

$$J(n,s)^{-4}\partial_s^4 + \sum_{k=0}^{3} \mathbf{L}^k(n,s,\varepsilon^{-1}\nabla_\eta)\partial_s^k, \tag{73}$$

в котором $\mathbf{L}^k$ – дифференциальный оператор порядка $4-k$, а его коэффициенты при старших производных равны $O(|n|)$. В результате видим, что особенность $a\Phi_1(\eta)$ составляющей $w_1(\eta;s)$ в точке $\eta=0$ порождает сингулярность $O\big(\varepsilon^3|\eta|^{-2}\big)$ после применения оператора (73), однако множитель $\varrho^3(1+|\ln\varrho|)^2$, приходящий из весовой оценки (8), делает сходящимся интеграл по ячейке $\square_j^\varepsilon = \{x\in\Omega\cap\mathcal{V}:\ s\in(s_{j-1}^\varepsilon, s_j^\varepsilon)\}$. Следовательно, в силу неравенства Коши выполнено соотношение

$$\begin{aligned}
\big|(I_4^\varepsilon, R^\varepsilon)_\Omega\big| &\leqslant c_4\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{N} \|\varrho^{-3/2}(1+|\ln\varrho|)R^\varepsilon; L^2(\square_j^\varepsilon)\| \\
&\quad\times \left(\int\limits_{\square_j^\varepsilon} \varrho(x)^3(1+|\ln\varrho(x)|)\left(1+\varepsilon^3|\eta|^{-2}\right)dx\right)^{1/2} \\
&\leqslant c_4\varepsilon^2\sqrt{N}\|\varrho^{-3/2}(1+|\ln\varrho|)R^\varepsilon; L^2(\Omega)\|\,\varepsilon \\
&\leqslant C_4\varepsilon^{3/2}E(R^\varepsilon,R^\varepsilon;\Omega)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Обратимся к членам суммы по $j=1,\dots,N$ в списке (69) и обработаем каждый из них, но оценим именно сумму. В силу соотношений (36) и (51) порядок $O(1+|\ln|\eta||+\varepsilon^{-1})$ разности $\upsilon_j^\varepsilon(\xi^j) - V_j^\varepsilon(\eta;s)$ на носителе υ_j^ε коэффициентов коммутатора $\big[\Delta_x^2, \chi_j^\varepsilon\big]$ показывает, что

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{j=1}^{N}(I_{5j}^\varepsilon, R^\varepsilon)_\Omega\Big| &\leqslant \sum_{j=1}^{N}\big|(I_{5j}^\varepsilon, R^\varepsilon)_\Omega\big| \\
&\leqslant c_5\sum_{j=1}^{N}\|\varrho^{-3/2}(1+|\ln\varrho|)^{-1}R^\varepsilon; L^2(\upsilon_j^\varepsilon)\|\,\varepsilon^{3/2} \\
&\quad\times(1+\|\ln\varepsilon|)\varepsilon\ell^\varepsilon(s_j^\varepsilon)|\upsilon_j^\varepsilon|^{1/2}\varepsilon^{-4} \\
&\quad\times(1+|\ln\varepsilon|+\varepsilon^{-1}) \leqslant C_5\varepsilon^{-m_5}\varepsilon^{-\beta_{min}/\varepsilon}E(R^\varepsilon,R^\varepsilon;\Omega)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{74}$$

Здесь $m_5 \in \mathbb{N}$ – какое-то число, порождённое дифференцированием по переменным η, а $\beta_{\min} = \min\{\beta(s) \,|\, s \in \Gamma\}$ – положительная величина и потому мажоранте в оценке (74) можно придать любой степенной порядок малости.

Обработка слагаемых I^ε_{6j} с носителями на незначительно бóльших множествах $\Upsilon^\varepsilon_j = \operatorname{supp}\big(\chi^\varepsilon_j(1-\mathfrak{x}^\varepsilon_j)\big)$ опирается на такие же соображения:

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j=1}^N (I^\varepsilon_{6j}, R^\varepsilon)_\Omega\Big| &\leqslant c_6 \sum_{j=1}^N \|\varrho^{-3/2}(1+|\ln\varrho|)^{-1} R^\varepsilon; L^2(\Upsilon^\varepsilon_j)\| \\ &\quad \times \varepsilon^{3/2}(1+|\ln\varepsilon|)\varepsilon\ell^\varepsilon(s^\varepsilon_j)|\Upsilon^\varepsilon_j|^{1/2}\varepsilon^{-4}(1+|\ln\varepsilon|+\varepsilon^{-1}) \\ &\leqslant C_6\varepsilon^{-m_6}\varepsilon^{-\beta_{min}/\varepsilon}E(R^\varepsilon, R^\varepsilon; \Omega)^{1/2}.\end{aligned}$$

Наконец, носители $\mathfrak{V}^\varepsilon_j$ слагаемых I^ε_{7j} примыкают к границе $\partial\Omega$ и имеют экспоненциально малые диаметры $O\big(\ell^\varepsilon(s^\varepsilon_j)\big)$. Кроме того, согласно проведенной в разд. 4 процедуре сращивания модули разность

$$\varepsilon w_0(\eta; s) + \varepsilon^2 w_1(\eta; s) - V^\varepsilon_j(\eta; s) \tag{75}$$

приобретает порядок $\varepsilon^2|\eta_1|^2$ на множестве $\mathfrak{V}^\varepsilon_j$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j=1}^N (I^\varepsilon_{7j}, R^\varepsilon)_\Omega\Big| &\leqslant c_7 \sum_{j=1}^N \|\varrho^{-3/2}(1+|\ln\varrho|)^{-1} R^\varepsilon; L^2(\mathfrak{V}^\varepsilon_j)\|\,|\mathfrak{V}^\varepsilon_j|^{1/2} \\ &\quad \times \ell^\varepsilon_j(s^\varepsilon_j)^{3/2}(1+|\ln\ell^\varepsilon_j(s^\varepsilon_j)|)\varepsilon^2 \sum_{k=0}^3 \ell^\varepsilon_j(s^\varepsilon_j)^{-4+k}\Big(\frac{\ell^\varepsilon(s^\varepsilon_j)}{\varepsilon}\Big)^{(2-k)_+} \\ &\leqslant C_7\varepsilon^{-\beta_{min}/2\varepsilon}E(R^\varepsilon, R^\varepsilon; \Omega)^{1/2}.\end{aligned}$$

В этих неравенствах использованы соотношения (23), $\alpha = 0$, и $|\mathfrak{V}^\varepsilon_j| = O\big(\ell^\varepsilon_j(s^\varepsilon_j)^2\big)$, учтено количество $N = 1/\varepsilon$ ячеек интегрирования, а при обработке действия коммутатора на функцию (75) через $t_+ = (t+|t|)/2$ обозначена положительная часть числа $t \in \mathbb{R}$.

Оценивание невязок (67) и (68) закончено. Соберём полученные неравенства и, обнаружив наихудшую мажоранту в формуле (71), сформулируем результат.

Теорема 1. *Пусть u^0 – гладкое в Ω вплоть до границы решение предельной задачи* (24), (21) *с коэффициентом* (59) *и правой частью $f \in C^\infty\big(\overline{\Omega}\big)$, а точки $P_j^{\ell^\varepsilon_j}$ расположены на расстоянии* (22) *от контура Γ. Тогда решение $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon \subset H^2(\Omega)$ задачи* (5) *(или* (1)–(3) *в*

дифференциальной форме) и построенное асимптотическое приближение (63) *связаны неравенством*

$$\|u^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon; H^2(\Omega)\| \leqslant C_f \varepsilon (1 + |\ln \varepsilon|), \tag{76}$$

в котором множитель C_f *не зависит от малого параметра* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *при некотором* $\varepsilon_0 > 0$.

Повторив с некоторыми упрощениями приведенные оценки членов глобального асимптотического приближения (63) выводим соотношение $\|\mathbf{u}^\varepsilon - u^0; H^2(\Omega)\| = o(1)$ при $\varepsilon \to +0$, которое вместе с неравенством (76) приводит к очередному утверждению, вполне аналогичному сформулированным для похожих задач в предшествующих публикациях [17, 22, 35] и др.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *при* $N \to +\infty$ *имеет место сходимость*

$$u^\varepsilon \ \to \ u^0 \text{ сильно в пространстве } H^2(\Omega). \tag{77}$$

§6. Варианты асимптотического анализа.

Обсудим предельные переходы в случае $\alpha \neq 0$. Пусть сначала $\alpha < 0$ в формуле (22), т.е. точки $P_j^{\ell_j^\varepsilon}$ расположены "достаточно далеко" от кромки пластины Ω. Номинально сохраняются разложения (47), (48) для решения u^0 гладкого типа и разложения (49), (50) для пограничных слоёв. Вместе с тем соотношение в конце концов принимает вид

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon k(s) \Big(-\varepsilon^{-\alpha} \tfrac{\beta(s)}{2\pi} \eta_1 + \varepsilon \big(\Phi_1(\eta) + B_1 \eta_1 \big) \Big) + \ldots, \tag{78}$$

и поэтому процедура сращивания на уровне ε показывает, что, во-первых, из-за нового множителя $\varepsilon^{-\alpha}$ с положительным показателем $-\alpha > 0$ первое слагаемое в представлении осциллирующего пограничного слоя (49) обращается в нуль и, во-вторых, $\partial_n u^0(0, s) = 0$ в формуле (47). В итоге видим, что в пределе при $\varepsilon \to +0$ бигармоническое уравнение (24) замыкается двойным условием Дирихле (18), а именно

$$u^0(x) = 0, \ \partial_n u^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{79}$$

Пусть теперь $\alpha > 0$ и точки $P_j^{\ell_j^\varepsilon}$ лежат в "непосредственной близости" от контура Γ. Опять-таки сохраняются разложения (48) и (49), однако из-за большого множителя $\varepsilon^{-\alpha}$ в формуле (78) приходится изменить разложения (50) для "мелких" пограничных слоёв следующим

образом:

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon^{1+\alpha}\ell^\varepsilon(s)k(s)U_1(\xi) + \dots, \quad j = 1, \dots, N,$$

Теперь соотношение (78) принимает вид

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon k(s)\left(-\frac{\beta(s)}{2\pi}\eta_1 + \varepsilon^{1+\alpha}\big(\Phi_1(\eta) + B_1\eta_1\big)\right) + \dots,$$

В результате сохраняются формулы (53) и (54), однако последним слагаемым с общим множителем $\varepsilon\varepsilon^{1+\alpha}$, в котором общий показатель степени малого параметра превосходит двойку, при сращивании приходится пренебречь. Таким образом, второй член w_1 разложения (49) оказывается (гладким) решением задачи (38)–(40), включающей краевое условие (56), но в отличие от разд. 4 лишённой асимптотического условия в точке $\eta = 0$ (иными словами, $a = 0$ в представлении (41)). В результате при сращивании на уровне ε^2 исчезает последний член в равенстве (58), которое тем самым превращается во вторую формулу из набора (13) условий шарнирного крепления края пластины:

$$u^0(x) = 0, \ M(x, \nabla_x)u^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{80}$$

Как и ранее, $M(x, \nabla_x)$ – дифференциальный оператор (4).

Конструкция глобального асимптотического приближения в обеих ситуациях вполне аналогична формуле (63), а оценки невязок и погрешностей по сути не отличаются от приведенных в разд. 5 ввиду предположения о гладкости правой части f и решений u^0 каждой из предельных задач. Поэтому в случае $\alpha \neq 0$ ограничимся формулировкой утверждений о сходимости, похожих на теорему 2, – их вывод также не нуждается в комментариях.

Теорема 3. *Пусть $f \in C^\infty\big(\overline{\Omega}\big)$ и точки $P_j^{\ell_j^\varepsilon}$ расположены на расстоянии* (22) *от контура Γ, причем показатель α отличен от нуля. Тогда для решения $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ задачи* (1)–(3) *имеет место сходимость* (77)*, в которой u^0 – гладкое решение задачи Дирихле* (24)*,* (79) *при $\alpha < 0$, но решение смешанной краевой задачи* (24)*,* (80) *при $\alpha > 0$.*

Как уже упоминалось, теоремы 2 и 3 остаются верными при слабом ограничении $f \in H_0^1(\Omega)^*$, однако проверки этого факта в данной статье нет. Вместе с тем требование $f \in C^\infty\big(\overline{\Omega}\big)$ в теоремах 1–3 можно ослабить без каких-либо изменений в доказательствах оценки погрешности: просматривая выкладки в разд. 5 при учёте теорем вложения [15]

можно убедиться, что они остаются в силе, например, при $f \in H^2(\Omega)$ и $u^0 \in H^6(\Omega)$ (см. лемму 4).

Область применения предложенного асимптотического анализа можно расширить – укажем одно из доступных обобщений геометрического строения сингулярно возмущённой области Ω^ε.

Замечание 3. Обозначим через $\upsilon_j^{\ell_j^\varepsilon}$ замкнутые отрезки, соединяющие точки P_j^ε и $P_j^{\ell_j^\varepsilon}$ и рассмотрим бигармоническое уравнение

$$\Delta_x^2 u^\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{81}$$

в области

$$\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \left(\upsilon_1^{\ell_1^\varepsilon} \cup \cdots \cup \upsilon_N^{\ell_N^\varepsilon} \right), \tag{82}$$

с краевыми условиями шарнирного опирания

$$u^\varepsilon(x) = 0, \ M(x, \nabla_x) u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^\varepsilon, \tag{83}$$

на проколотом контуре $\Gamma \setminus (P_1^\varepsilon \cup \cdots \cup P_N^\varepsilon)$, но также на берегах $\upsilon_{j\pm}^{\ell_j^\varepsilon}$ приграничных трещин. Для задачи (81), (83) остаются верными утверждения теорем 1–3, а единственное изменение в разд. 3 относится к предельной задаче (29)–(31). Именно, бигармоническое уравнение ставится на полуплоскости $\mathbb{R}^2_-$ с единичной трещиной $\{\xi : \xi_1 \in [-1, 0], \xi_2 = 0\}$, а краевые условия шарнирного опирания – на проколотой границе полуплоскости и берегах трещины. Такая задача имеет решение U_1, представимое в виде (36) и фигурирующее в асимптотических формулах из разд. 4. Описанная область Ω^ε имитирует область, которая изображена на рис. 2, b, изучена в работе [22] и представляет собой "регулярное возмущение" [47] области (82). Таким образом, процедуры из [47, гл.5̇] позволяют построить и асимптотику решения задачи (10), (11) в многоугольной области на рис. 2, b.

Работа выполнена при финансовой подержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500009-8).

Список литературы

1. G. R. Kirchhoff, *Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe.* — J. Reine Angew. Math., bf 40 (1850), 51–88.
2. G. Buttazzo, G. Cardone, S. A. Nazarov, *Thin elastic plates supported over small areas.* II: *Variational-Asymptotic Models.* — J. of Convex Analysis, **24**, No. 3 (2017), 819—855.

3. С. А. Назаров, *Осреднение пластин Кирхгофа, соединенных заклепками, которые моделируются точечными условиями Соболева.* — Алгебра и анализ, **32**, No. 2 (2020), 143–200.
4. С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике.* М.: Наука, 1970.
5. В. З. Власов, *Общая теория оболочек и её приложения в технике.* М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
6. А. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки.* М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
7. С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, *Пластинки и оболочки.* М.: Наука, 1966.
8. Ю. Н. Работнов, *Механика деформируемого твердого тела.* М.: Наука, 1988.
9. P. G. Ciarlet, Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis. Paris: Masson. 1988.
10. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки.* Новосибирск: Научная книга. 2002.
11. G. Panassenko, *Multi-scale modelling for structures and composites.* Dordrecht: Springer, 2005.
12. F. Gazzola, H. C. Grunau, G. Sweers, *Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains.* — Lecture Notes in Mathematics, **1991**, Berlin: Springer-Verlag (2010).
13. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973.
14. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.: Мир. 1971.
15. С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1988.
16. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* М.: ИЛ, 1948.
17. И. Бабушка, *Устойчивость области определения по отношению к возмущению границы основных задач теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости.* — 1.- Чехословацкий матем. журнал, No. 1, **11** (1961), 76—-105; 2.— Чехословацкий матем. журнал, No. 2, **11** (1961), 165-—203.
18. М. Ш. Бирман, *О вариационном методе Треффца для уравнения* $\Delta^2 u = f$. — Докл. АН СССР, **101**, No. 2 (1955), 201–204.
19. N. W. Murray, The Polygone-Circle Paradox and Convergence in Thin Plate Theory Proceedings of the Ccambridge Philosophical Society, **73** (1973), 279-—283.
20. G. Rieder, *On the Plate paradox of sapondzhyan and babuska.* — Mech. Res. Comm., **1** (1974), 51—-53.
21. K. Rajaiah, A. K. Rao, *On the polygone-circle paradox.* — J. Applied Mechanics, **48** (1981), 195–196.
22. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, *Парадоксы предельного перехода в решениях краевых задач при аппроксимации гладких областей многоугольными.* — Известия АН СССР. Серия матем., **50**, No. 6 (1986), 1156–1177.
23. I. Babuška, J. Pitkaranta, *The plate paradox for hard and soft simple support.* — SIAM J. Math. Anal., **21**, No. 3 (1990), 551–576.

24. О. М. Сапонджян, *Изгиб свободно опертой полигональной плиты.* — Изв. АН Арм. ССР., **5**, No. 2 (1952), 29—-46.
25. О. М. Сапонджян, *Изгиб тонких упругих плит.* Ереван: Айастан, 1975.
26. М. Ш. Бирман, Г. Е. Скворцов, *О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно гладкой границей.* — Известия ВУЗ'ов. Матем., No. 5 (1962), 11–21.
27. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* — Труды Московск. матем. общества., **16** (1963), 219–292.
28. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries.* — Berlin, New York: Walter de Gruyter (1994).
29. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, *О парадоксе Сапонджяна–Бабушки в задачах теории тонких пластин.* — Доклады АН АрмССР, No. 3, **78** (1984), 127–130.
30. S. A. Nazarov, G. Sweers, *A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners.* — J. of Differential Equations, No. 1, **233** (2007), 151–180.
31. М. Ш. Бирман, *Три задачи теории сплошных сред в многогранниках.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **200** (1992), 27—37.
32. С. А. Назаров, М. В. Олюшин, *Приближение гладких контуров многоугольными. Парадоксы в задачах для системы Ламе.* — Известия РАН. Серия матем., **61**, No. 3 (1997), 159–186.
33. S. A. Nazarov, A. Stilyanou, G. Sweers, *Hinged and supported plates with corners.* — Z. Angew. Math. Phys. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, **63** (2012), 929—960.
34. С. А. Назаров, Г. А. Чечкин, *Аппроксимация тонких трехмерных пластин с гладкой боковой поверхностью многогранными.* — Проблемы матем. анализа, Вып. 81. Новосибирск (2015), 55–81.
35. J. M. Arrieta, P. D. Lamberti, *Higher order elliptic operators on variable domains. Stability results and boundary oscillations for intermediate problems.* — J. Differential Equations, **263** (2017), 4222-–4266.
36. Д. Гомес, С. А. Назаров, М. Е. Перес, *Точечное крепление пластины Кирхгофа вдоль её кромки.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **203** (2020), 107–136.
37. E. Sánchez-Palencia, *Nonhomogeneous media and vibration theory.* — Lecture Notes in Physics, **127**, Berlin–New York: Springer-Verlag (1980).
38. G. Nguetseng, E. Sanchez-Palencia, *Stress concentration for defects distributed near a surface*, in: *Local Effects in the Analysis of Structures.* — Stud. Appl. Mech., **12**, Elsevier, Amsterdam (1985), 55–74.
39. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, М.: изд-во МГУ, 1990.
40. E. Pérez, *On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-band and the spectral homogenization problem.* — Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B., **7** (2007), 859–883.
41. С. А. Назаров, *Асимптотика решений и моделирование задач теории упругости в области с быстроосциллирующей границей.* — Известия РАН. Серия матем., **72**, No. 3 (2008), 103–158.
42. А. Г. Чечкина, *Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова.* — Известия РАН. Серия матем., **81**, No. 1 (2017), 203–240.

43. S. A. Nazarov, M. E. Perez, *On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary.* — Revista Matemática Complutense., **31**, No. 1 (2018), 1—62.
44. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками.* — Math. Nachr., **76** (1977), 29–60.
45. М. Д. Ван Дайк, *Методы возмущений в механике жидкостей.* М.: Мир, 1967.
46. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука (1989), 336.
47. W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenewski, *Asymptotische theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten.* 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991. (Английский перевод: V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains.* Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000)
48. С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.* Изд-во иЛ, 1962.
49. С. А. Назаров, Ю. А. Ромашев, *Изменение коэффициента интенсивности при разрушении перемычки между двумя коллинеарными трещинами.* — Известия АН АрмССР. Механика, No. 4 (1982), 30–40.

Nazarov S. A. The Kirchhoff plate with hinge-support conditions and a dense periodic family of point fixations.

We study a planar Kirchhoff plate with a double fixation at its edge, namely the hinge support (the bending angle is arbitrary but the torque annuls) and the Sobolev point conditions at a dense periodic set (small supports are imitated, e.g., tiny welding spots or rivets). By means of constructing boundary layers of several types we prove that in dependence of two small parameters, that is, the distance between neighboring points and their distance from plate's edge, in the limits the plate gains either a rigidly clamped edge (the double Dirichlet conditions for the bi-harmonic equation), or it is left with the hinge-support conditions while the Sobolev point conditions disappear. Furthermore, under a restrictive relation between these parameters the condition of an elastic fixation occurs so that the bending angle becomes proportional to the torque at the edge. The justification of the asymptotics is performed by using various weighted inequalities.

Институт Проблем Машиноведения РАН,
Большой проспект, В.О., 61
199178, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: srgnazarov108@gmail.com, serna108@mail.ru

Поступило 25 сентября 2026 г.