Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

В. С. Михайлов

О СПЕЦИАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЙОСТА И ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА НА ПОЛУОСИ

§1. Введение

Для заданных вещественных непрерывных ограниченных функций $p, q \in C(\mathbb{R}_+)$ мы рассмотрим оператор Дирака

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}, \quad x > 0 \tag{1.1}$$

на $L_2\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2\right)$, заданный на области

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \right\}.$$

Известно [6], что (1.1) при таком выборе матричного потенциала, соотвтетсвует случаю предельной точки на бесконечности, то есть, для каждого $z \in \mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_x + \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix} \Phi = z\Phi \tag{1.2}$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя решение Φ_+ из L_2:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \left|\Phi_+^1(x,z)\right|^2 + \left|\Phi_+^2(x,z)\right|^2 dx < \infty, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Такое решение Φ_+ называется решением Йоста, и его существование является центральным фактом теории Титчмарша–Вейля.

Функция *Титчмарша–Вейля*, или *m-функция*, $m(z)$, определяется для $z \in \mathbb{C}_+$ по правилу:

$$m(z) := \frac{\Phi_+^2(0,z)}{\Phi_+^1(0,z)}. \tag{1.3}$$

Ключевые слова: оператор Дирака, решение Йоста, функция Веяля.

Функция $m(z)$ аналитична в $\mathbb{C}_+$ и обладает свойством Герглотца, т.е. $m : \mathbb{C}_+ \mapsto \mathbb{C}_+$.

Для случая оператора Шрёдингера на полуоси $H = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)$, $x > 0$, Саймон и Гестези в [5,11] предложили следующее представление для функции Вейля:

$$m(-k^2) = -k - \int_0^\infty A(\alpha) e^{-2\alpha k}\, d\alpha, \tag{1.4}$$

где интеграл абсолютно сходится в некоторой области (зависящей от потенциала) на комплексной плоскости. В работе [11] функцию A назвали A-*амплитудой*, а в работе [2], см. также [10], авторы предложили её физическую интерпретацию: для того же потенциала Q рассматривается задача Коши для волнового уравнения:

$$\begin{cases} U_{tt}(x,t) - U_{xx}(x,t) + Q(x)U(x,t) = 0, \quad x > 0, \;\; t \geqslant 0, \\ U(x,0) = U_t(x,0) = 0, \quad U(0,t) = f(t). \end{cases} \tag{1.5}$$

где f – произвольная функция из $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Решение уравнения (1.5) обозначается через U^f. Фиксируем некоторое $T > 0$. Оператор реакции (динамический оператор Дирихле–Неймана) R^T для системы (1.5) определяется в $\mathcal{F}^T := L_2(0,T)$ следующим образом:

$$(R^T f)(t) = U^f_x(0,t), \quad t \in (0,T),$$

он задан на области $\{f \in C^2(0,T) : \; f(0) = f'(0) = 0\}$ и имеет следующее представление:

$$(R^T f)(t) = -f'(t) + \int_0^t r(s) f(t-s)\, ds,$$

где r называется *функцией отклика* [1,2]. В [2] авторы показали, что

$$m(-k^2) = -k + \int_0^\infty r(\alpha) e^{-k\alpha}\, d\alpha, \quad A(\alpha) = -2r(2\alpha). \tag{1.6}$$

Формула (1.6) показывает, что A-амплитуда, первоначально введенная несколько искусственным образом, на самом деле (с учетом знака и масштабирования координат) является функцией отклика, то есть ядром оператора реакции, классическим объектом теории динамических

обратных задач [3]. Для дискретных систем соответствующие результаты получены в [7–9].

В данной работе мы получим результаты аналогичные результатам [2, 10] для решения Йоста и функции Вейля (1.3), связанных с оператором (1.1). Для этого мы рассматриваем начально-краевую задачу вида

$$iu_t + Ju_x + Vu = 0, \qquad x > 0, \quad t > 0 \tag{1.7}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad x \geqslant 0 \tag{1.8}$$

$$u_1\big|_{x=0} = f, \qquad t \geqslant 0\,, \tag{1.9}$$

где $i = \sqrt{-1}$;

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix},$$

где $f = f(t)$ комплекснозначная функция (*гроаничное управление*); $u = u^f(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix}$ решение.

Динамический отклик для системы (1.7)–(1.9) описывается с помощью оператора реакции. Для фиксированнного $T > 0$, он действует в $L_2([0,2T];\mathbb{C})$ по правилу $R_D f := u_2^f(0,\,\cdot\,)\big|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$ и представляется в виде свертки $R_D f = if + r_D * f$, где $r_D\big|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$ – функция отклика. В работе [4] авторы исследовали обратную задачу: для фиксированного $T > 0$ и при заданном $r_D\big|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$ требуется восстановить $V\big|_{0\leqslant x\leqslant T}$. Здесь же, следуя схеме, изложенной в [2, 10] для оператора Шрёдингера, мы установим для оператора Дирака соотношения между решением системы (1.7)–(1.9) с управлением дельта-функцией Дирака, $f = \delta$, и решением Йоста, а также функцией отклика r_D и функцией Вейля.

Структура статьи следующая: во втором разделе мы выводим специальное представление решения (1.7)–(1.9) в терминах некоторой задачи Гурса. Мы сводим эту задачу Гурса к интегральному уравнению и формулируем утверждения о его разрешимости и свойствах, таких как оценки на рост решения в случае гладких ограниченных потенциалов. В третьем разделе мы показываем, как решение Йоста и функция Вейля связаны с решением и функцией отклка динамической системы (1.7)–(1.9).

§2. Динамическая система.

В работе [4] авторы показали, что решение уравнения (1.7)–(1.9) допускает следующее представление

$$u^f(x,t) = f(t-x)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} + \int_x^t f(t-s)\begin{pmatrix}w^1(x,s)\\ w^2(x,s)\end{pmatrix} ds, \quad t \geqslant x, \tag{2.1}$$

также были также указаны некоторые свойства ядра $\begin{pmatrix}w^1(x,s)\\ w^2(x,s)\end{pmatrix}$, например, его гладкость, что было вполне достаточно для решения обратной задачи. В данной работе нас будут интересовать более тонкие свойства ядра, такие как поведение его на бесконечности по x и по s. Заметим, что в силу определения R_D и представления (2.1), имеет место следующее равенство

$$r_D(s) = w^2(0,s), \quad s > 0. \tag{2.2}$$

Мы снабдим систему (1.7)–(1.9) пространствами и операторами теории управления. Пространство $\mathcal{F}^T := L_2([0,T];\mathbb{C})$ управлений со скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathcal{F}^T} := \int_0^T f(t)\bar{g}(t)\,dt$$

называется *внешним пространством* системы (1.7)–(1.9).

Векторозначная функция $u^f(\cdot,t)$ представляет собой состояние системы в момент времени t. Пространство состояний $\mathcal{H}^T := L_2([0,T];\mathbb{C}^2)$ со скалярным произведением

$$(a,b)_{\mathcal{H}^T} := \int_0^T a(x)\cdot\bar{b}(x)\,dx,$$

$(a\cdot\bar{b} := a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2)$ называется *внутренним пространством*.

Соответствие между входом (управлением) и состоянием системы реализуется с помощью оператора управления $W^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}^T$.

$$W^T f := u^f(\,\cdot\,,T)\,.$$

В работе [4] авторы показали (это следует из представления (2.1)), что $W^T\mathcal{F}^T \subset \mathcal{H}^T$ и $W^T\mathcal{F}^T \neq \mathcal{H}^T$. В частности, это означает отсутствие граничной управляемости для системы (1.7)–(1.9). Мы, следуя [4],

рассмотрим ещё одну начально-краевую задачу, связанную с потенциалом V:

$$iv_t - Jv_x - Vv = 0, \qquad 0 < x < T,\ 0 < t < T \tag{2.3}$$

$$v\big|_{t<x} = 0 \tag{2.4}$$

$$v_1\big|_{x=0} = g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.5}$$

Решение $v = v^g(x,t)$ связано с решением (1.7)–(1.9) простым образом:

$$v^g(x,t) \,=\, \overline{u^{\bar{g}}(x,t)}\,.$$

Вследствие этой взаимосвязи мы получаем следующее представление для v^g:

$$v^g(x,t) = g(t-x)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} + \int_x^t g(t-s)\begin{pmatrix}\overline{w}^1(x,s)\\ \overline{w}^2(x,s)\end{pmatrix} ds\,. \tag{2.6}$$

В работе [4] был введен вспомогательный оператор управления, действующий по правилу

$$\widetilde{W}^T : \widetilde{\mathcal{F}}^T := \mathcal{F}^T \oplus \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{H}^T, \quad \widetilde{W}^T\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix} := u^f(\,\cdot\,,T) + v^g(\,\cdot\,,T),$$

и было показано что $\widetilde{W}^T$ является изоморфизмом между $\widetilde{\mathcal{F}}^T$ и $\mathcal{H}^T$.

Lemma 1. *Ядро* $\begin{pmatrix}w_1(x,s)\\ w_2(x,s)\end{pmatrix}$ *в представлении* (2.1) *является решением следующей задачи Гурса*:

$$i\begin{pmatrix}w^1_s\\ w^2_s\end{pmatrix} + J\begin{pmatrix}w^1_x\\ w^2_x\end{pmatrix} + V\begin{pmatrix}w^1\\ w^2\end{pmatrix} = 0, \quad x > 0, \quad s \geqslant 0, \tag{2.7}$$

$$w^1(0,s) = 0, \quad s \geqslant 0, \tag{2.8}$$

$$w_2(x,x) - iw_1(x,x) = p(x) + iq(x), \quad x > 0. \tag{2.9}$$

Доказательство. Введем обозначение $L = J\frac{d}{dx} + V$ и отметим, что u^f и v^g удовлетворяют равенству

$$L\left[u^f + v^g\right] = -iu^f_t + iv^g_t. \tag{2.10}$$

Мы преобразуем вышеуказанное равенство для $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, используя представления (2.1) и (2.6):

$$
\begin{aligned}
Lu^f &= J \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (-f'(t-x)) \\
&\quad + J \left[- \begin{pmatrix} w^1(x,x) \\ w^2(x,x) \end{pmatrix} f(t-x) + \int_x^t \begin{pmatrix} w^1_x(x,s) \\ w^2_x(x,s) \end{pmatrix} f(t-s)\, ds \right] \\
&\quad + V \left[f(t-x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \int_x^t \begin{pmatrix} w^1(x,s) \\ w^2(x,s) \end{pmatrix} f(t-s)\, ds \right], \\
Lv^g &= J \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (-g'(t-x)) \\
&\quad + J \left[- \begin{pmatrix} \overline{w}^1(x,x) \\ \overline{w}^2(x,x) \end{pmatrix} g(t-x) + \int_x^t \begin{pmatrix} \overline{w}^1_x(x,s) \\ \overline{w}^2_x(x,s) \end{pmatrix} g(t-s)\, ds \right] \\
&\quad + V \left[g(t-x) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \int_x^t \begin{pmatrix} \overline{w}^1(x,s) \\ \overline{w}^2(x,s) \end{pmatrix} g(t-s)\, ds \right], \\
u^f_t &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} f'(t-x) + \int_x^t \begin{pmatrix} w^1_s(x,s) \\ w^2_s(x,s) \end{pmatrix} f(t-s)\, ds + \begin{pmatrix} w^1(x,x) \\ w^2(x,x) \end{pmatrix} f(t-x), \\
v^g_t &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} g'(t-x) + \int_x^t \begin{pmatrix} \overline{w}^1_s(x,s) \\ \overline{w}^2_s(x,s) \end{pmatrix} f(t-s)\, ds + \begin{pmatrix} \overline{w}^1(x,x) \\ \overline{w}^2(x,x) \end{pmatrix} g(t-x).
\end{aligned}
$$

Подставляя приведенные выше представления в (2.10), получаем выражение вида $I + S = 0$, где I обозначает интегральную часть:

$$
\begin{aligned}
I &= J \int_x^t \begin{pmatrix} w^1_x(x,s) & \overline{w}^1_x(x,s) \\ w^2_x(x,s) & \overline{w}^2_x(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t-s) \\ g(t-s) \end{pmatrix} ds \\
&\quad + V \int_x^t \begin{pmatrix} w^1(x,s) & \overline{w}^1(x,s) \\ w^2(x,s) & \overline{w}^2(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t-s) \\ g(t-s) \end{pmatrix} ds
\end{aligned}
$$

$$+ i \int_x^t \begin{pmatrix} w_s^1(x,s) & -\overline{w}_s^1(x,s) \\ w_s^2(x,s) & -\overline{w}_s^2(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t-s) \\ g(t-s) \end{pmatrix} ds,$$

а S обозначает сингулярную часть:

$$S = Vf(t-x)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + Vg(t-x)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} - J\begin{pmatrix} w^1(x,x) \\ w^2(x,x) \end{pmatrix} f(t-x)$$
$$-J\begin{pmatrix} \overline{w}^1(x,x) \\ \overline{w}^2(x,x) \end{pmatrix} g(t-x) + i\begin{pmatrix} w^1(x,x) \\ w^2(x,x) \end{pmatrix} f(t-x) - i\begin{pmatrix} \overline{w}^1(x,x) \\ \overline{w}^2(x,x) \end{pmatrix} g(t-x).$$

Преобразуя S, мы получим:

$$S = \begin{pmatrix} p+iq & p-iq \\ q-ip & q+ip \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t-x) \\ g(t-x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w^2(x,x) & \overline{w}^2(x,x) \\ -w^1(x,x & -\overline{w}^1(x,x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t-x) \\ g(t-x) \end{pmatrix}$$
$$+i \begin{pmatrix} w^1(x,x) & -\overline{w}^1(x,x) \\ w^2(x,x & -\overline{w}^2(x,x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t-x) \\ g(t-x) \end{pmatrix}.$$

Поскольку f, g произвольные функции, мы можем приравнять как интегральную, так и сингулярную части к нулю и получить, что

$$i \begin{pmatrix} w_s^1 & -\overline{w}_s^1 \\ w_s^2 & -\overline{w}_s^2 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} w_x^1 & \overline{w}_x^1 \\ w_x^2 & \overline{w}_x^2 \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} w^1 & \overline{w}^1 \\ w^2 & \overline{w}^2 \end{pmatrix} = 0,$$
$$w^1(0,t) = 0, \quad \overline{w}^2(0,t) = 0,$$
$$w_2(x,x) - iw_1(x,x) = p + iq,$$
$$\overline{w}^1(x,x) + iw^2(x,x) = q + ip.$$

Где условия при $x = 0$ вытекают из граничных условий (1.9) и (2.5). Из вышеприведенной системы прямо следует что $\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$ является решением (2.7)–(2.9). □

Сведем начально-краевую задачу (2.7)–(2.9), к интегральному уравнению. Сначала введём новые функции.

$$\begin{cases} v^1 = w^2 - iw^1, \\ v^2 = w^2 + iw^1. \end{cases} \tag{2.11}$$

После этого система (2.7) превращается в

$$v_s^1 - v_x^1 + v^2(ip - q) = 0,$$
$$v_s^2 + v_x^2 + v^1(ip + q) = 0.$$

Затем мы делаем замену переменных $x = \frac{\eta-\xi}{2}$, $s = \frac{\eta+\xi}{2}$. Тогда новые функции, определенные по правилу

$$u^{1,2}(\xi,\eta) = v^{1,2}\left(\frac{\eta-\xi}{2}, \frac{\eta+\xi}{2}\right), \tag{2.12}$$

удовлетворяют следующей системе:

$$u^1_\xi + \frac{1}{2}u^2\left(ip\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) - q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)\right) = 0, \tag{2.13}$$

$$u^2_\eta + \frac{1}{2}u^1\left(ip\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) + q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)\right) = 0, \tag{2.14}$$

кororая определена в области $\left\{(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \eta \geqslant \xi \geqslant 0\right\}$.

Проинтегрируем (2.13) от 0 до ξ и используя условие (2.9), получим:

$$u^1(\xi,\eta) - [p(\eta) + iq(\eta)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi u^2(\xi_1,\eta)\left[ip\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right) - q\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)\right] d\xi_1 = 0,$$

или в эквивалентном виде:

$$u^1(\xi,\xi) = [p(\xi) + iq(\xi)] - \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi u^2(\xi_1,\xi)\left[ip\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right) - q\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)\right] d\xi_1.$$

Далее мы проинтегрируем (2.14) от ξ до η, получив при этом следующее равенство:

$$u^2(\xi,\eta) - u^1(\xi,\xi) + \frac{1}{2}\int\limits_\xi^\eta u^1(\xi,\eta_1)\left[ip\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right) + q\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)\right] d\eta_1 = 0.$$

Объединив приведенные выше равенства, мы получаем интегральное уравнение на $\begin{pmatrix} u^1(\xi,\eta) \\ u^2(\xi,\eta) \end{pmatrix}$.

Lemma 2. *Функция* $\begin{pmatrix} u^1(\xi,\eta) \\ u^2(\xi,\eta) \end{pmatrix}$, *связанная с решением* $\begin{pmatrix} w^1(x,s) \\ w^2(x,s) \end{pmatrix}$ *начально-краевой задачи* (2.7)–(2.9) *посредством замен* (2.11) *и* (2.12),

является решением следующего инntегрального уравнения:

$$\begin{pmatrix} u^1(\xi,\eta) \\ u^2(\xi,\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\eta)+iq(\eta) \\ p(\xi)+iq(\xi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (Ku)^1 \\ (Ku)^{2,1}+(Ku)^{2,2} \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

$$(Ku)^1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi u^2(\xi_1,\eta)\left[ip\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right) - q\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)\right]d\xi_1$$

$$(Ku)^2 = (Ku)^{2,1} + (Ku)^{2,2},$$

$$(Ku)^{2,1} = \frac{1}{2}\int\limits_\xi^\eta u^1(\xi,\eta_1)\left[ip\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right) + q\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)\right]d\eta_1,$$

$$(Ku)^{2,2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi u^2(\xi_1,\xi)\left[ip\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right) - q\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)\right]d\xi_1.$$

Перепишем уравнение (2.15) как

$$u = P - Ku, \tag{2.16}$$

где K определён выше, и $P = \begin{pmatrix} p(\eta)+iq(\eta) \\ p(\xi)+iq(\xi) \end{pmatrix}$. Тогда решение (2.16) формально задается формулой

$$u = P - KP + K^2P - K^3P + \ldots, \tag{2.17}$$

при условии сходимости ряда. Далее мы введем обозначение $Q := \max\{\|p\|_{C(\mathbb{R}_+)}, \|q\|_{C(\mathbb{R}_+)}\}$. Нам необходимо оценить по норме в $C(\mathbb{R}_+)$ члены в сумме (2.17). Для первого члена мы имеем:

$$\|P_1\| \leqslant 2Q, \quad \|P_2\| \leqslant 2Q.$$

Для первой итерации верны оценки:

$$|(KP)_1| = \frac{1}{2}\left|\int\limits_0^\xi [p(\xi_1)+iq(\xi_1)]\left[ip\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right) - q\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)\right]d\xi_1\right| \leqslant 2Q^2\xi,$$

$$|(KP)_2| = \frac{1}{2}\left|\int_\xi^\eta [p(\eta_1)+iq(\eta_1)]\left[ip\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)+q\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)\right]d\eta_1 + \int_0^\xi [p(\xi_1)+iq(\xi_1)]\left[ip\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)-q\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)\right]d\xi_1\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[4Q^2(\eta-\xi)+4Q^2\xi\right] = 2Q^2\eta.$$

Для второй итерации мы получим следующие оценки:

$$\left|\left(K^2P\right)_1\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\int_0^\xi 2Q^2\eta\left[ip\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)-q\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)\right]d\xi_1\right| \leqslant 2Q^3\xi\eta,$$

$$\left|\left(K^2P\right)_2\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\int_\xi^\eta 2Q^2\xi\left[ip\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)+q\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)\right]d\eta_1 + \int_0^\xi 2Q^2\xi\left[ip\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)-q\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)\right]d\xi_1\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[(\eta-\xi)2Q2Q^2\xi+2Q2Q^2\xi^2\right] = 2Q^3\eta\xi.$$

Третья итерация оценивается следующим образом:

$$\left|\left(K^3P\right)_1\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\int_0^\xi 2Q^3\eta\xi_1\left[ip\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)-q\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)\right]d\xi_1\right| \leqslant \frac{1}{2}2Q^3\eta 2Q\frac{\xi}{2} = 2Q^4\frac{\xi^2}{2}\eta,$$

$$\left|\left(K^3P\right)_2\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\int_\xi^\eta 2Q^3\xi\eta_1\left[ip\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)+q\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)\right]d\eta_1 + \int_0^\xi 2Q^3\xi_1\xi\left[ip\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)-q\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)\right]d\xi_1\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}2Q^3\xi 2Q\frac{\eta_1^2}{2}\Big|_{\eta_1=\xi}^{\eta_1=\eta}+\frac{1}{2}2Q^3 2Q\xi\frac{\xi^2}{2}=2Q^4\xi\frac{\eta^2}{2}.$$

И для четвертой:

$$\left|\left(K^4P\right)_1\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\int_0^{\xi}2Q^4\frac{\eta^2}{2}\xi_1\left[ip\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)-q\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)\right]d\xi_1\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}2Q^4 2Q\frac{\eta^2}{2}2Q\frac{\xi}{2}=2Q^5\frac{\xi^2}{2}\frac{\eta^2}{2},$$

$$\left|\left(K^4P\right)_2\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\int_{\xi}^{\eta}2Q^5\frac{\xi^2}{2}\eta_1\left[ip\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)+q\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)\right]d\eta_1\right.$$
$$\left.+\int_0^{\xi}2Q^4\xi_1\frac{\xi^2}{2}\left[ip\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)-q\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)\right]d\xi_1\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}2Q^4 2Q\frac{\xi^2}{2}\frac{\eta_1^2}{2}\Big|_{\eta_1=\xi}^{\eta_1=\eta}+\frac{1}{2}2Q^4 2Q\frac{\xi^2}{2}\frac{\xi^2}{2}=2Q^5\frac{\xi^2}{2}\frac{\eta^2}{2}$$

Тогда не сложно показать, используя индукцию, что

$$\left|\left(K^nP\right)_1(\xi,\eta)\right|\leqslant 2Q^{n+1}\frac{\xi^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\left[\frac{n}{2}\right]!}\frac{\eta^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{\left[\frac{n-1}{2}\right]!},$$
$$\left|\left(K^nP\right)_2(\xi,\eta)\right|\leqslant 2Q^{n+1}\frac{\eta^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\left[\frac{n}{2}\right]!}\frac{\xi^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{\left[\frac{n-1}{2}\right]!},$$

где $[M]$ обозначает целую часть $M\in\mathbb{R}_+$. Пусть $\alpha>0$, тогда используя вышеприведенные неравенства, мы можем оценить:

$$\left|u^1(\xi,\eta)\right|\leqslant 2Q+2Q^2\xi+2Q^3\xi\eta+2Q^4\frac{\xi^2}{2}\eta+2Q^5\frac{\xi^2}{2!}\frac{\eta^2}{2!}+\ldots$$
$$\leqslant 2Q\left(1+Q^2\xi\eta+Q^4\frac{\xi^2}{2!}\frac{\eta^2}{2!}+Q^6\frac{\xi^3}{3!}\frac{\eta^3}{3!}+\ldots\right)$$
$$+2Q^2\xi\left(1+Q^2\frac{\xi}{2}\eta+Q^4\frac{\xi^2}{3!}\frac{\eta^2}{2!}+\ldots\right)$$
$$\leqslant 2Q\left(1+Q^2(\alpha\xi)\frac{\eta}{\alpha}+Q^4\frac{(\alpha\xi)^2}{2!}\frac{\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^2}{2!}+Q^6\frac{(\alpha\xi)^3}{3!}\frac{\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^3}{3!}+\ldots\right)$$

$$+2Q^2\xi\left(1+Q^2(\alpha\xi)\frac{\eta}{\alpha}+Q^4\frac{(\alpha\xi)^2}{2!}\frac{\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^2}{2!}+Q^6\frac{(\alpha\xi)^3}{3!}\frac{\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^3}{3!}+\dots\right)$$
$$\leqslant 2Qe^{Q\alpha\xi}e^{Q\frac{\eta}{\alpha}}+2Q^2\xi e^{Q\alpha\xi}e^{Q\frac{\eta}{\alpha}}.$$

Используя симметрию относительно ξ, η, для второй компоненты $u^2(\xi,\eta)$, мы получием аналогичную оценку. Таким образом, в итоге мы приходим к следующей лемме.

Lemma 3. *Если потенциал V в системе* (1.7)–(1.9) *непрерывный и ограниченный, при этом $Q := \max\left\{\|p\|_{C(\mathbb{R}_+)}, \|q\|_{C(\mathbb{R}_+)}\right\}$, то для функций $u^{1,2}$, удовлетворяющих* (2.16), *справедливы следующие оценки с прозвольным $\alpha > 0$*

$$\left|u^1(\xi,\eta)\right| \leqslant 2Qe^{Q\alpha\xi}e^{Q\frac{\eta}{\alpha}}+2Q^2\xi e^{Q\alpha\xi}e^{Q\frac{\eta}{\alpha}}, \quad \xi,\eta>0, \tag{2.18}$$
$$\left|u^2(\xi,\eta)\right| \leqslant 2Qe^{Q\alpha\xi}e^{Q\frac{\eta}{\alpha}}+2Q^2\eta e^{Q\alpha\xi}e^{Q\frac{\eta}{\alpha}}, \quad \xi,\eta>0. \tag{2.19}$$

§3. Формулы представления для решения Йоста и функции Вейля.

Для специального управления $f(t)=\delta(t)$ обозначим через $u^\delta(x,t)$ фундаментальное решение системы (1.7)–(1.9). Из (2.1) очевидно, что любое решение имеет вид $u^f = u^\delta * f$.

Пусть $f \in C_0^\infty(0,\infty)$, через

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(t)\,e^{ikt}\,dt$$

мы обозначим преобразование Фурье от f. Функция $\widehat{f}(k)$ определена для $k\in\mathbb{C}$. Переходя в (1.7)–(1.9) с управлением $f\in C_0^\infty(0,\infty)$ к преобразованию Фурье, получим

$$J\widehat{u^f_x}(x,k)+V(x)\widehat{u^f}(x,k)=k\widehat{u^f}(x,k),$$
$$\widehat{u^f_1}(0,k)=\widehat{f}(k),$$

и

$$\widehat{(Rf)}(k)=\widehat{u^f_2}(0,k)\,,$$

соответственно. Отметим, что ввиду (2.1) мы имеем что

$$\widehat{u^f}(x,k)=\begin{pmatrix}\widehat{u^\delta_1}(x,k)\widehat{f}(k)\\ \widehat{u^\delta_2}(x,k)\widehat{f}(k)\end{pmatrix},$$

таким образом, мы видим, что значения функций $\widehat{u}_2^f(0,k)$ и $\widehat{u}_1^f(0,k)$, связаны посредством m-функции Титчмарша-Вейля (см. (1.3)):

$$\widehat{u_2^f}(0,k) = m(k)\widehat{u}_1^f(0,k) = m(k)\widehat{f}(k)\,.$$

Таким образом, вышеизложенные аргументы можно суммировать в виде следующего утверждения:

Lemma 4. *Если потенциал V в системе* (1.7)–(1.9) *непрерывный и ограниченный, при этом $Q := \max\left\{\|p\|_{C(\mathbb{R}_+)}, \|q\|_{C(\mathbb{R}_+)}\right\}$, то решение Йоста, связанное с уравнением Дирака* (1.2)*, может быть представлено как*

$$\Phi_+(x,k) = \widehat{u^\delta}(x,k), \tag{3.1}$$

а функция Вейля допускает следующее представление

$$m(k) = \widehat{u_2^\delta}(0,k) = i + \int_0^\infty r_D(s)e^{iks}\,ds. \tag{3.2}$$

При этом, формулы (3.1) *и* (3.2) *справедливы (интегралы в них сходятся абсолютно) в области $D := \{k \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} k > 2Q\}$.*

Отметим, что нам необходимо обосновать две вещи: возможность применить преобразование Фурье к $u^\delta(x,t)$ по t, и то, что результат этого преобразования, $\widehat{u^\delta}(x,k)$ является решением Вейля для (1.2), где

$$\widehat{u^\delta}(x,k) = \begin{pmatrix} e^{ikx} + \int\limits_0^\infty w_1(x,t)e^{ikt}\,dt \\ ie^{ikx} + \int\limits_0^\infty w_2(x,t)e^{ikt}\,dt \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Для w^1, w^2 мы используем (2.11), (2.12) и (2.18). (2.19) из Леммы 3 для оценки:

$$\begin{aligned} |w^{1,2}(x,s)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|v^1| + |v^2|\right) \leqslant Qe^{Q\alpha(s-x)}e^{Q\frac{(x+s)}{\alpha}} \\ +Q^2(s-x)e^{Q\alpha(s-x)}e^{Q\frac{(x+s)}{\alpha}} + Qe^{Q\alpha(s-x)}e^{Q\frac{(x+s)}{\alpha}} \\ +2Q^2(x+s)e^{Q\alpha(s-x)}e^{Q\frac{(x+s)}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Из этой оценки ясно, что если $\alpha > 1$, то преобразование Фурье (3.3) $\widehat{u^\delta}$ существует в $\{k \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} k > 2Q\}$, и в этой же области $\widehat{u^\delta}$ является решением Йоста, и, следовательно, функция Вейля (см. также (2.2)) допускает представление (3.2).

Remark 1. Заметим, что, по-видимому, выбор класса потенциалов в данной статье не является оптимальным, и, возможно, формулы представления (3.1) и (3.2) справеднивы для потенциалов из более широкого класса. Например, для

$$p, q \in l^\infty(L^2(\mathbb{R}_+)) := \left\{ q \,|\, \left\{ \int_n^{n+1} |q(x)|^2\, dx \right\}_{n=1}^{\infty} \in l^\infty \right\}.$$

Расширение допустимого класса потенциалов будет предметом дальнеших исследований.

Список литературы

1. S. A. Avdonin, V. S. Mikhaylov, *The boundary control approach to inverse spect —ral theory.* Inverse Problems **26**, No. 4 (2010), 045009.
2. S. A. Avdonin, V. S. Mikhaylov, A. V. Rybkin, *The boundary control approach to the Titchmarsh-Weyl m—function.* — Comm. Math. Phys. **275**, No. 3 (2007), 791–803.
3. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* — Inverse Problems **23**, No. 5 (2007), R1–R67.
4. M. I. Belishev, V. S. Mikhaylov, *Inverse problem for one-dimensional dynamical Dirac system (BC-method).* — Inverse Problems **30**, No. 12 (2014).
5. F. Gesztesy, B. Simon, *A new approach to inverse spectral theory. II. General real potentials and the connection to the spectral measure.* — Ann. Math. **152**, No. 2 (2000), 593–643.
6. B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Sturm—Liouville and Dirac Operators*, Springer Dordrecht (1991).
7. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Discrete dynamical systems: inverse problems and related topics.* — J. Inverse and Ill-posed Problems (2024).
8. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *On the Weyl function for complex Jacobi matrices.* — Запю нфучн. семин. ПОМИ **541** (2025), 131–144.
9. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, S. A. Simonov, *On the relationship between Weyl functions of Jacobi matrices and response vectors for special dynamical systems with discrete time*, Mathematical Methods in the Applied Sciences (2018).
10. V. S. Mikhaylov, *Dynamic representation of the Weyl solution for the Schrödinger operator on the semi-axis.* — Zap. Nauchn, Semin. POMI **550** (2026), ?????
11. B. Simon, *A new approach to inverse spectral theory. I. Fundamental formalism.* — Ann. Math. **150**, No. 2 (1999), 1029-1057.

Mikhailov V. S. On a special representation of the Jost solution and the Weyl function for the Dirac system on the half-line.

We derive representation formulas for the Jost solution and the Weyl function for the Dirac operator on the half-line in the case of continuous

bounded potentials. Our approach relies on connections to an initial-boundary value problem with boundary control for a one-dimensional dynamical Dirac system with the same potential on the half-line.

Ст.Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова Российской академии наук,
наб. Фонтанки 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия;
Университет ИТМО,
Кронверкский пр., 49,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ftvsm78@gmail.com

Поступило 19 августа 2026 г.