Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

В. С. Михайлов

О КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

§1. Введение

Комплексная проблема моментов ставится следующим образом: по данному набору комплексных чисел $s_0, s_1, s_2, \ldots$, требуется найти борелевскую меру $d\rho$ на $\mathbb{C}$ такую что

$$s_k = \int\limits_{\mathbb{C}} \lambda^k \, d\rho(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.1}$$

Если такая мера существует, то числа $s_0, s_1, s_2, \ldots$ называются моментами этой меры.

Для заданной последовательности комплексных чисел $\{a_1, a_2, \ldots\}$, $\{b_1, b_2, \ldots\}$, $a_i \neq 0$, мы определим комплексную матрицу Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Для $N \in \mathbb{N}$, через A^N мы обозначаем матрицу Якоби $N \times N$, которая представляет собой блок (1.2), состоящий из пересечения первых N столбцов с первыми N строками матрицы A.

Рассмотриим динамическую систему с дискретным временем, связанную с матрицей A и дополнительным параметром $\mathbb{C} \ni a_0 \neq 0$:

$$\begin{cases} u_{n,t+1} + u_{n,t-1} - a_n u_{n+1,t} - a_{n-1} u_{n-1,t} - b_n u_{n,t} = 0, & n, t \in \mathbb{N}, \\ u_{n,-1} = u_{n,0} = 0, & n \in \mathbb{N}, \\ u_{0,t} = f_t, & t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases} \tag{1.3}$$

которая является дискретным аналогом динамических систем, описываемых волновым уравнением на полуоси [2, 4]. По аналогии с непрерывными задачами [3], мы рассматриваем комплексную последовательность $f = (f_0, f_1, \ldots)$ как *граничное управление*. Решение (1.3) мы обозначаем через $u^f_{n,t}$. Задавая граничное условие при $n = N + 1$, мы

Ключевые слова: комплексная проблема моментов, обратная задяча, матрицы Якоби, метод Граничного управления.

также рассморим динамическую систему, связанную с конечной матрицей A_N: l

$$\begin{cases} v_{n,t+1}+v_{n,t-1}-a_n v_{n+1,t}-a_{n-1}v_{n-1,t}-b_n v_{n,t}=0,\ t\in\mathbb{N}_0,\ n\in 1,\dots,N, \\ v_{n,-1}=v_{n,0}=0, \quad n=1,2,\dots,N+1, \\ v_{0,t}=f_t, \quad v_{N+1,t}=0, \quad t\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \end{cases} \tag{1.4}$$

которая является естественным аналогом динамических систем, описываемых волновым уравнением на интервале, решение уравнения (1.4) обозначается как v^f.

Фиксируя $T\in\mathbb{N}$, мы определим опратор реакции для системы (1.3), который отображает управление $f=(f_0,\dots f_{T-1})$ в $u^f_{1,t}$:

$$\left(R^T f\right)_t := u^f_{1,t}, \quad t=1,\dots,T.$$

Во втором разделе, следуя [11], мы выводим специальное «спектральное представление» для решения (1.4). Для решения той же системы (1.4), но с вещественнозначной матрицей A^N, мы также выводим стандартное спектральное представление. В обоих случаях мы определяем соответствующие меры, сосредоточенные на конечном множестве точек.

В последнем разделе мы используем предельную процедуру для построения меры, связанной с A, на комплексной плоскости, и объясняем, почему введенная мера решает комплексную проблему моментов. При этом, в силу связей нашего подхода с обратной динамической задачей [9], достаточное условиие разрешимости есть условие обратимости Ганкелевых матриц, построенных по данной последовательности чесел. Затем мы показываем, что построенную меру можно рассматривать как реализацию обобщенной спектральной функции, связанной с комплексной матрицей Якоби (1.2), введенной в [5]. Мы также показываем, что достаточное условие разрешимости комплексной проблемы моментов, которое мы использовали, не является необходимым.

Если $H\in C^{n\times n}$ тогда через H^* мы обозначим матрицу, сопряженную к H и напомним что $H^*=\overline{H^\top}$, где $H^\top$ это транспонированная матрица.

§2. Дискретные динамические системы. Прямая задача, специальное представление решения, конечномерный случай

Сначала мы выведем специальное представление (разложение типа Фурье) решения уравнения (1.4). Для случая вещественных a_i, b_i см. [7, 10].

Вектор реакции для системы (1.3), комплексной или вещественной, представляет собой ядро свертки оператора реакции. $r=(r_0, r_1, \ldots, r_{T-1}) = (a_0, w_{1,1}, w_{1,2}, \ldots w_{1,T-1})$:

$$\left(R^T f\right)_t = u^f_{1,t} = a_0 f_{t-1} + \sum_{s=1}^{t-1} w_{1,s} f_{t-1-s} \quad t = 1, \ldots, T.$$
$$\left(R^T f\right) = r * f_{\cdot -1}.$$

Выбрав специальное управление $f = \delta = (1, 0, 0, \ldots)$, ядро оператора реакции можно определить следующим образом:

$$\left(R^T \delta\right)_t = u^\delta_{1,t} = r_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Оператор отклика для системы (1.4) обозначается как R^T_N.

2.1. Спектральное представление решения уравнения (1.4), в случае вещественной матрицы Якоби. Введем оператор $A^N : \mathcal{H}^N \mapsto \mathcal{H}^N$

$$(A^N \psi)_n = \begin{cases} b_1\psi_1 + a_1\psi_2, & n = 1, \\ a_n\psi_{n+1} + a_{n-1}\psi_{n-1} + b_n\psi_n, & 2 \leqslant n \leqslant N-1, \\ a_{N-1}\psi_{N-1} + b_N\psi_N, & n = N. \end{cases}$$

Обозначим через $\phi = \{\phi_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ решение задачи Коши для следующего разностного уравнения

$$\begin{cases} a_n\phi_{n+1} + a_{n-1}\phi_{n-1} + b_n\phi_n = \lambda\phi_n, & n \geqslant 1, \\ \phi_0 = 0, & \phi_1 = 1, \end{cases}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$. Каждый ϕ_n является многочленом от λ степени $n-1$. Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ корни уравнения $\phi_{N+1}(\lambda) = 0$, известно, [1] что они действительные и различные. Введем векторы $\phi(\lambda), \phi^k \in \mathbb{R}^N$

по правилам

$$\phi(\lambda) := \begin{pmatrix} \phi_1(\lambda) \\ \phi_2(\lambda) \\ \cdot \\ \phi_N(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \phi^k := \begin{pmatrix} \phi_1(\lambda_k) \\ \phi_2(\lambda_k) \\ \cdot \\ \phi_N(\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, N,$$

и определим числа ω_k по правилу

$$(\phi^k, \phi^l) = \delta_{kl}\omega_k, \quad k, l = 1, \ldots, N,$$

где $(\cdot, \cdot)$ есть скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$. Обозначим через $\mathcal{T}_k(2\lambda)$ полиномы Чебышева второго рода: они получаются как решение следующей разностной задачи Коши:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{t+1} + \mathcal{T}_{t-1} - \lambda\mathcal{T}_t = 0, \\ \mathcal{T}_0 = 0, \ \mathcal{T}_1 = 1. \end{cases}$$

В работах [6, 9] была доказана следующая формула представления для решения (1.4):

Proposition 1. *Решение задачи (1.4) допускет следующее представление*

$$v^f_{n,t} = \begin{cases} \sum_{k=1}^N c_t^k \phi_n^k, & n = 1, \ldots, N, \\ f_t, & n = 0, \end{cases} \qquad c^k = \frac{1}{\omega_k} \mathcal{T}(\lambda_k) * f.$$

Спектральная функция оператора A^N вводится по правилу

$$\rho^N(\lambda) = \sum_{\{k \,|\, \lambda_k < \lambda\}} \frac{1}{\omega_k},$$

Proposition 2. *Решение уравнения* (1.4) *и вектор реакции системы* (1.4) *имеют следующие спектральные представления*:

$$v^f_{n,t} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{t} \mathcal{T}_k(\lambda) f_{t-k} \phi_n(\lambda) \, d\rho^N(\lambda), \quad n, t \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

$$r^N_{t-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_t(\lambda) \, d\rho^N(\lambda), \quad t \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

2.2. Специальное представление решения уравнения (1.4), случай комплексной матрицы Якоби. Доказательства в этом разделе взяты из [11]. Идея специального представления основана на следующей факторизации Автонне–Такаги [13]:

Theorem 1. *Пусть $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — комплексная симметричная матрица: $H^* = \overline{H}$, тогда существует унитарная матрица U такая, что*

$$UHU^\top = D = \begin{pmatrix} \widehat{d}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{d}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{d}_n \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где $\widehat{d}_i \geqslant 0$, $i = 1 \dots, n$.

Мы применяем эту теорему к матрице A^N: существуют унитарные U^N такие, что $U^N A^N \left(U^N\right)^\top$, как в теореме. Заметим, что в нашем случае все $\widehat{d}_i > 0$, поскольку в противном случае $A^N u = 0$ подразумевает $\det A^N = 0$, что, в свою очередь, подразумевает линейную зависимость некоторых строк или столбцов A^N, что невозможно. В то же время некоторые из $\widehat{d}_i$ могут совпадать. В последнем случае мы модифицируем унитарную матрицу следующим образом: предположим, например, что $\widehat{d}_1 = \widehat{d}_2$, тогда, взяв

$$U_1^N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} U^N,$$

мы получим что

$$U_1^N A^N \left(U_1^N\right)^\top = \begin{pmatrix} \widehat{d}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{d}_2 e^{i\varphi} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{d}_n \end{pmatrix}.$$

Используя эти аргументы, мы можем сделать все $\widehat{d}_i$ в представлении (2.3) различными (но некоторые из них при этом могут быть комплексными). Подводя итог тому, что мы сделали до сих пор, далее мы выбираем унитарное U (в дальнейшем мы опускаем верхний индекс N)

таким образом, что

$$UA^NU^\top = \begin{pmatrix} \widehat{d}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{d}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{d}_n \end{pmatrix},$$

$$\widehat{d}_i \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \;\; \widehat{d}_i \neq \widehat{d}_j, \;\; i \neq j, \;\; i,j = 1\dots,N.$$

Мы введем вектора

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{с 1 на i-ом месте}, i = 1,\dots,N.$$

Тогда

$$UA^NU^\top e_i = \widehat{d}_i e_i,$$

умножим приведенное выше равенство слева на U^* и получим

$$A^NU^\top e_i = \widehat{d}_i U^* e_i = \widehat{d}_i \overline{U^\top} e_i,$$

Введя обозначения

$$U^\top = \left(\widehat{u}^1 \,|\, \widehat{u}^2 \,|\, \dots \,|\, \widehat{u}^N\right), \quad \widehat{u}^i = \begin{pmatrix} \widehat{u}^i_1 \\ \widehat{u}^i_2 \\ \dots \\ \widehat{u}^i_n \end{pmatrix},$$

то есть $\widehat{u}^i$ является столбцом матрицы $U^\top$, мы видим, что $\widehat{u}^i$ удовлетворяет равенству:

$$A^N\widehat{u}^i = \widehat{d}_i\overline{\widehat{u}^i}, \quad A^N \begin{pmatrix} \widehat{u}^i_1 \\ \widehat{u}^i_2 \\ \dots \\ \widehat{u}^i_n \end{pmatrix} = \widehat{d}_i \begin{pmatrix} \overline{\widehat{u}^i_1} \\ \overline{u^i_2} \\ \dots \\ \overline{\widehat{u}^i_n} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Обратим внимание, что первые компоненты всех векторов не равны нулю:

$$\widehat{u}^i_1 \neq 0, \quad i = 1,\dots,N,$$

в противном случае из (2.4) сразу следует, что $\widehat{u}^i = 0$.

Таким образом, векторы, которые мы используем в разложении Фурье для решения уравнения (1.4), можно ввести следующим образом:

$$u^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\widehat{u}^i_1}{\widehat{u}^i_1} \\ \dots \\ \frac{\widehat{u}^i_N}{\widehat{u}^i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N,$$

то есть, мы формально добавили два значения: $u^i_0 = u^i_{N+1} = 0$ и нормализовали векторы так, чтобы $u^i_1 = 1$. В этом случае мы имеем (см. (2.4))

$$A^N \begin{pmatrix} \frac{\widehat{u}^i_1}{\widehat{u}^i_1} \\ \frac{\widehat{u}^i_2}{\widehat{u}^i_1} \\ \dots \\ \frac{\widehat{u}^i_n}{\widehat{u}^i_1} \end{pmatrix} = d_i \begin{pmatrix} \frac{\overline{\widehat{u}^i_1}}{\overline{\widehat{u}^i_1}} \\ \frac{\overline{\widehat{u}^i_2}}{\overline{\widehat{u}^i_1}} \\ \dots \\ \frac{\overline{\widehat{u}^i_n}}{\overline{\widehat{u}^i_1}} \end{pmatrix},$$

где мы ввели обозначения

$$d_i := \widehat{d}_i \frac{\overline{\widehat{u}^i_1}}{\overline{\widehat{u}^i_1}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Возьмем произвольный вектор $(y_0, y_1, \dots y_N, y_{N+1})$, умножим уравнение в (1.4) на y_n, суммируем и меняем порядок суммирования:

$$0 = \sum_{n=1}^{N} (v_{n,t+1} y_n + v_{n,t-1} y_n - a_{n-1} v_{n,t} y_{n-1} - a_n v_{n,t} y_{n+1} - b_n v_{n,t} y_n) \\ - a_N v_{N+1,t} y_N - a_0 v_{0,t} y_1 + a_0 v_{1,t} y_0 + a_N v_{N,t} y_{N+1}.$$

Далее мы выберем $(y_0, y_1, \dots y_N, y_{N+1}) = \left(u^i_0, u^i_1, \dots u^i_N, u^i_{N+1}\right)$ и проделаем ту же выкладку, учиьывая что $u^i_1 = 1$ а также значения при $n = 0$ и $n = N + 1$:

$$0 = \sum_{n=1}^{N} \left(v_{n,t+1} u^i_n + v_{n,t-1} u^i_n - v_{n,t} \left(a_{n-1} y^i_{n-1} + a_n v u^i_{n+1} + b_n u^i_n\right)\right) \\ - a_0 v_{0,t} u^i_1.$$

Учитывая (2.4), мы получим:

$$0 = \sum_{n=1}^{N} \left(v_{n,t+1} u_n^i + v_{n,t-1} u_n^i - d_i v_{n,t} \overline{u_n^i} \right) - a_0 f_t \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.5}$$

Мы будем искать решение уравнения (1.4) в следующем виде:

$$v_{n,t} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} c_t^k \overline{u_n^k}, \\ f_t, \quad n = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.5), мы получим:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} \left(c_{t+1}^k \overline{u_n^k} + c_{t-1}^k \overline{u_n^k} \right) u_n^i - d_i \sum_{k=1}^{N} c_t^k \overline{u_n^k} \overline{u_n^i} \right) = a_0 f_t. \tag{2.7}$$

Введя обозначения

$$\sum_{n=1}^{N} \overline{u_n^k} u_n^i = \delta_{ki} \rho_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$H_{ki} = \sum_{n=1}^{N} \overline{u_n^k} \overline{u_n^i}, \quad k, i = 1, \ldots, N,$$

мы можем переписать (2.7) в виде:

$$\left(c_{t+1}^k + c_{t-1}^k \right) \delta_{ki} \rho_i - d_i \sum_{k=1}^{N} c_t^k H_{ki} = a_0 f_t, \quad t, k, i = 1 \ldots, N.$$

Таким образом, мы видим, что c_t^i определяются из равенств

$$c_{t+1}^i + c_{t-1}^i - \frac{d_i}{\rho_i} \sum_{k=1}^{N} c_t^k H_{ki} = \frac{a_0}{\rho_i} f_t, \quad t, i = 1, \ldots, N. \tag{2.8}$$

Мы ищем решение уравнения (2.8) в виде:

$$c_t^i = \frac{a_0}{\rho_i} \sum_{l=0}^{t} f_l T_{t-l}^{(i)}, \quad t, i = 1, \ldots, N.$$

Подставив это представление в (2.8), получаем:

$$\frac{a_0}{\rho_i} \left(\sum_{l=0}^{t} f_l T_{t+1-l}^{(i)} + \sum_{l=0}^{t-1} f_l T_{t-1-l}^{(i)} - \sum_{k=1}^{N} d_i \frac{H_{ki}}{\rho_k} \sum_{l=0}^{t} f_l T_{t-l}^{(i)} \right) = \frac{a_0}{\rho_i} f_t,$$

Изменяя порядок суммирования (на этом этапе мы используем дополнительное значение $T_{-1}^{(i)}$), мы приходим к следующему результату:

$$\sum_{l=0}^{t} f_l \left(T_{t+1-l}^{(i)} + T_{t-1-l}^{(i)} - \left(\sum_{k=1}^{N} d_i \frac{H_{ki}}{\rho_k} \right) T_{t-l}^{(i)} \right) + f_{t+1} T_0^{(i)} - f_t T_{-1}^{(i)} = f_t. \tag{2.9}$$

Мы введем обозначение

$$\omega_i = \sum_{k=1}^{N} d_i \frac{H_{ki}}{\rho_k}, \quad i = 1, \dots, N,$$

тогда (2.9) выполнено, если $T_t^{(i)}$ удовлетворяют

$$\begin{cases} T_{t+1}^{(i)} + T_{t-1}^{(i)} - \omega_i T_t^{(i)} = 0, \quad t = 0, 1 \dots, N, \\ T_0^{(i)} = 0, \ T_{-1}^{(i)} = -1. \end{cases}$$

Или, другими словами, $T_t^{(i)}$ — это многочлены Чебышева первого рода, вычисленные в точках ω_i: $T_t^{(i)} = T_t(\omega_i)$.

Таким образом, решение может быть представлено следующим образом:

$$v_{n,t}^f = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_0}{\rho_k} \sum_{l=0}^{t} f_l T_{t-l}(\omega_k) \overline{u_n^k}.$$

Мы определим дискретную меру $d\rho^N$ на $\mathbb{C}$, сосредоточенную на множестве точек $\{\omega_k\}_{k=1}^N$: по определению положим

$$d\rho^N(\{\omega_k\}) = \frac{1}{\rho_k},$$

так что в точках ω_k она имеет веса $\frac{1}{\rho_k}$. Тогда мы можем сформулировать комплексный аналог Предложения 2.

Proposition 3. *Вектор реакции системы* (1.4) *допускает следующее представление:*

$$r_{t-1}^N = \int_{\mathbb{C}} T_t(\lambda)\, d\rho^N(\lambda), \quad t = 1, 2, \dots. \tag{2.10}$$

Мы видим, что в отличие от случая вещественной матриця Якоби, само решение $v_{n,t}^f$ не может быть записано как интеграл по некоторой мере (см. формулу (2.1)).

§3. Бесконечномерный случай: мера, ассоциированная с A, обобщенная спектральная функция, условия разрешимости

Теперь мы изучаем задачу (1.3) с полубесконечной комплексной матрицей A. Наша цель — каким-то образом перейти к пределу для задач с A^N при $N \to \infty$. В вещественнозначном случае используется существование спектральной меры $d\rho$, связанной с A, см. [1, 10]. Заметим, что эта мера не обязательно единственна. Тогда формулы представления из предложения 2 справедливы и для u^f, при этом $d\rho^N$ заменено на $d\rho$. В комплексном случае у нас нет возможности использовать спектральные методы, поэтому мы будем использовать методы, имеющие динамическую природу, связанные с локальной зависимостью элементов вектора реакции от элеметнтов матрицы в системе (1.3).

3.1. Мера на $\mathbb{C}$, связанная с полубесконечной матрицей A. Определим моменты меры $d\rho^N$ следующим образом:

$$s_k^N = \int\limits_{\mathbb{C}} \lambda^k \, d\rho^N(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Моменты связаны с компонентами вектора реакции простыми формулами, см. [8, 10, 11].

Proposition 4. *Компоненты вектора реакции* (2.10) *системы* (1.4) *связаны с моментами* $s_k^N = \int\limits_{\mathbb{C}} \lambda^k \, d\rho^N(\lambda)$ *следующим правилом:*

$$\begin{pmatrix} r_0^N \\ r_1^N \\ \dots \\ r_{n-1}^N \end{pmatrix} = \Lambda_n \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \dots \\ s_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{3.1}$$

где элементы матрицы $\Lambda_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *задаются следующим образом:*

$$\{\Lambda_n\}_{ij} = a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{если число } i + j \text{ нечетное}, \\ E^j_{\frac{i+j}{2}} (-1)^{\frac{i+j}{2}+j} & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

где E_n^k *биномиальные коэффициенты.*

Возьмем одно и то же управление f в (1.3) и в (1.4) и сделаем следующее наблюдение: из-за конечной скорости распространения волны в обеих системах мы имеем, что

$$R^{2N-2} = R_N^{2N-2},$$
$$u^f_{n,\,t} = v^f_{n,\,t}, \quad n \leqslant t \leqslant N.$$

Таким образом, взяв $\mathbb{N} \ni N' > N$, мы видим, что поскольку вектор отклика не зависит от представления:

$$r_t = r_t^N = r_t^{N'} = \int\limits_{\mathbb{C}} T_{t+1}(\lambda)\, d\rho^N(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} T_{t+1}(\lambda)\, d\rho^{N'}(\lambda),\ 0 \leqslant t \leqslant 2N-1.$$

Поэтому, если многочлен P имеет вид $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{M} a_k \lambda^k$, то тогда

$$\int\limits_{C} P(\lambda)\, d\rho^N(\lambda) = \int\limits_{C} P(\lambda)\, d\rho^{N'}(\lambda),$$

коль скоро $M < 2N-1$, and $N' > N$. Отсюда следует существование следующего предела для произвольного многочлена P:

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{C} P(\lambda)\, d\rho^N(\lambda) := L(P).$$

Последнее означает что меры $d\rho^N$ сходятся в $*-$слабой топологии к некоторой мере:

$$d\rho^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} d\rho, \quad *-\text{слабо в } C(\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Таким образом, мы построили меру $d\rho$ — это мера на $\mathbb{C}$, связанная с комплексной матрицей A (1.2) и с динамической системой (1.3).

3.2. Динамическая обратная задача для системы (1.3) и комплексная проблема моментов. Динамическая обратная задача для системы (1.3) о восстанавлении матрицы A по оператору реакции R, была исследована в [9]. Здесь мы приведем некоторые результыты, которые будут использованы в дальнейшем.

Введем внутреннее пространство динамической системы (1.3) $\mathcal{H}^T := \mathbb{C}^T$, $h \in \mathcal{H}^T$, $h = (h_1, \ldots, h_T)$ с внутренним произведением $h, l \in \mathcal{H}^T$, $(h, g)_{\mathcal{H}^T} = \sum_{k=1}^{T} h_k \overline{g_k}$. Оператор управления $W^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{H}^T$ определяется по правилу:

$$W^T f := u^f_{n,T}, \quad n = 1, \ldots, T.$$

Наряду с системой (1.3) мы рассматриваем вспомогательную систему, связанную с комплексно сопряженной матрицей $\overline{A}$:

$$\begin{cases} v_{n,t+1}+v_{n,t-1}-\overline{a_n}v_{n+1,t}-\overline{a_{n-1}}v_{n-1,t}-\overline{b_n}v_{n,t}=0, & n,t\in\mathbb{N}, \\ v_{n,-1}=v_{n,0}=0, & n\in\mathbb{N}, \\ v_{0,t}=f_t, & t\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Объекты, соответствующие системе (3.3) будут отмечены дополнительным символом #.

Для систем (1.3), (3.3) мы вводим связывающий оператор $C^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T$ с помощью билинейной формы: для произвольных $f, g \in \mathcal{F}^T$ мы определяем

$$\left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T} = \left(u^f_{\cdot,T}, v^g_{\cdot,T}\right)_{\mathcal{H}^T} = \left(W^T f, W^T_{\#} g\right)_{\mathcal{H}^T}.$$

Следующее утверждение имеет решающее значение для решения динамической обратной задачи:

Theorem 2. *Связывающий оператор C^T является изоморфизмом в $\mathcal{F}^T$, он допускает представление в терминах данных обратной задачи:*

$$C^T = a_0 C^T_{ij}, \quad C^T_{ij} = \sum_{k=0}^{T-\max i,j} r_{|i-j|+2k}, \quad r_0 = a_0, \tag{3.4}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} r_0+r_2+\ldots+r_{2T-2} & r_1+r_3+\ldots+r_{2T-3} & \cdot & r_T+r_{T-2} & r_{T-1} \\ r_1+r_3+\ldots+r_{2T-3} & r_0+r_2+\ldots+r_{2T-4} & \cdot & \ldots & r_{T-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{T-3}+r_{T-1}+r_{T+1} & \ldots & \cdot & r_1+r_3 & r_2 \\ r_T+r_{T-2} & \ldots & \cdot & r_0+r_2 & r_1 \\ r_{T-1} & r_{T-2} & \cdot & r_1 & r_0 \end{pmatrix}.$$

Набору моментов (1.1) меры $d\rho$ мы поставим с соответствие следующие матрицы Ганкеля:

$$S^n := \begin{pmatrix} s_{2n-2} & s_{2n-3} & \ldots & s_{n-1} \\ s_{2n-3} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & s_1 \\ s_{n-1} & \ldots & s_1 & s_0 \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{3.5}$$

Мы также введем матрицу $J_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Учитывая взаимосвязь между моментами и вектором реакции (3.1), нетрудно доказать следующее.

Proposition 5. *Справедливо следующее соотношение*:

$$C^N = \widetilde{\Lambda}_N S^N \left(\widetilde{\Lambda}_N\right)^*, \quad \widetilde{\Lambda}_N := J_N \Lambda_N J_N. \tag{3.6}$$

В работе [9] авторы доказали следующую теорему о характеризации обратных динамических данных для системы (1.3).

Theorem 3. *Вектор* $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_{2T-2})$ *является вектором реакции для динамической системы* (1.3) *тогда и только тогда, когда комплексная симметричная матрица* C^{T-k}, $k = 0, 1, \dots, T-1$, *построенная с помощью* (3.4), *обратима.*

В качестве прямого следствия этой теоремы, в работе [11] авторы нашли достаточные условия для набора чисел $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, чтобы он представлял собой набор моментов некоторой меры на $\mathbb{C}$.

Theorem 4. *Если числа* $s_0, s_1, \dots$ *таковы, что матрица Ганкеля* S^T (3.5) *является обратимой для каждого* $T \in N$, *то существует решение комплексной проблемы моментов* (1.1).

3.3. Мера $d\rho$ как реализация обобщенной спектральной функции. В работе [5] автор ввел обобщенную спектральную функцию, связанную с A, делается это слкдующим образом: берется решение задачи Коши.

$$\begin{cases} b_1\phi_1 + a_1\phi_2 = \lambda\phi_1, \\ a_n\phi_{n+1} + a_{n-1}\phi_{n-1} + b_n\phi_n = \lambda\phi_n, \quad n \geqslant 2, \end{cases} \tag{3.7}$$

Решение, соответствующее данным Коши $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$, обозначается как $P_n(\lambda)$, это многочлен степени $n-1$.

Definition 1. *Аддитивный и однородный функционал $\mathcal{G}$ на пространстве полиномов, такой что $\langle \mathcal{G}, (P_n(\lambda)P_m(\lambda))\rangle = \delta_{mn}$, $n, m = 1, 2, 3\ldots$, называется обобщенной спектральной функцией уравнения* (3.7).

Обратная задача о восстановлении A по обобщенной спектральной функции рассматривается в [5]. Определим нормированную меру.

$$d\widehat{\rho}(\lambda) = \frac{d\rho(\lambda)}{s_0} = \frac{d\rho(\lambda)}{a_0}. \tag{3.8}$$

Theorem 5. *Норммрованная мера $d\widehat{\rho}$, введенная в* (3.2), (3.8)*, является реализацией обобщенной спектральной функции.*

Доказательство. В соответствии с [14], линейный относительно обоих аргументов функционал $\sigma(q, s)$, заданный на многочленах, является обобщенной спектральной функцией (3.7) в том и только в стом случае, когда выполнены следующие три условия:

1) $\sigma(\lambda u(\lambda), v(\lambda)) = \sigma(u(\lambda), \lambda v(\lambda))$,
2) $\sigma(1, 1) = 1$,
3) для произвольного полинома $P \in C[\lambda]$, $\deg P = k$ существует полином $Q \in C[\lambda]$, $\deg Q = k$ такой что $\sigma(P, Q) \neq 0$.

Поскольку первые два условия выполняются тривиально, нам нужно проверить только третье условие. Предположим, что условие 3) не выполняется для некоторого $n = K$. Тогда для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, K$ мы получим, что

$$\int_{\mathbb{C}} \lambda^K \lambda^i \, d\rho = 0,$$

Откуда сразу следует что $\det S^K = 0$. Это, в свою очередь, означает, что $\det C^K = 0$ ввиду (3.6). Последнее противоречит теореме 3, следовательно, наше предположение было неверным, и 3) выполняется. Таким образом, $d\widehat{\rho}(\lambda)$ является реализацией обобщенной спектральной функции. □

3.4. Комплексная проблема моментов, условия разрешимости. Достаточные условия разрешимости комплексной проблемы моментов в теореме 3 связаны с обратимостью матриц Ганкеля S^T для всех $T \geqslant 1$. Наше последнее замечание, касающееся комплексной проблемы моментов, заключается в том, что эти условия не являются необходимыми. Это отличает меры на $\mathbb{C}$ и на $\mathbb{R}$, где условие обратимости матриц Ганкеля является также и необходимым для разрешимости вещественной проблемы моментов, см. [1].

Мы построим контрпример: возьмем меру $d\rho$ на $\mathbb{C}$ с носителем в трёх точках:

$$d\rho(\lambda) = a\delta(\lambda - \alpha) + b\delta(\lambda - \beta) + c\delta(\lambda - \gamma), \tag{3.9}$$

где $a, b, c > 0$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Тогда первые три момента этой меры следующие:

$$\begin{aligned} s_0 &= a + b + c, \\ s_1 &= a\alpha + b\beta + c\gamma, \\ s_2 &= a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2. \end{aligned}$$

Мы положим $a = b = c = 1$, и вычислим:

$$\begin{aligned} \det S^2 &= 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha + \beta + \gamma)^2 \\ &= 2\alpha(\alpha - \beta) + 2\beta(\beta - \gamma) + 2\gamma(\gamma - \alpha). \end{aligned}$$

Затем, выбрав произвольные $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ и взяв α в качестве любого решения квадратного уравнения:

$$2\alpha^2 - 2\alpha(\beta + \gamma) + 2\gamma^2 + 2\beta(\beta - \gamma) = 0,$$

мы получим, что при таком выборе параметров $detS^2 = 0$. Например, взяв $\gamma = i$, $\beta = -i$ и $\alpha = \pm\sqrt{3}$, мы получаем, что для меры (3.9) Ганкелева матрица S^2 не обратима.

Список литературы

1. N. I. Akhiezer, The classical moment problem. *Oliver and Boyd, Edinburgh* (1965).
2. S. A. Avdonin, V. S. Mikhaylov, *The boundary control approach to inverse spectral theory.* — Inverse Problems, **26**, No. 4 (2010), 045009.
3. M. I. Belishev, Recent progress in the boundary control method. — *Inverse Problems*, **23**, R1 (2007).
4. M. I. Belishev, V. S. Mikhailov, *Unified approach to classical equations of inverse problem theory.* — J. Inverse Ill-Posed Problems, **20**, No. 4 (2012), 461–488.
5. G. Sh. Guseinov, *Determination of an infinite non-self-adjoint Jacobi matrix from its generalized spectral function.* — Mat. Zametki, **23**, No. 2 (1978), 237–248.
6. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Dynamical inverse problem for the discrete Schrödinger operator.* — Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, **7**, No. 5 (2016), 842–854.
7. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Dynamic inverse problem for Jacobi matrices.* — Inverse Problems and Imaging, **13**, No. 3 (2019), 431-447.
8. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Inverse problem for dynamical system associated with Jacobi matrices and classical moment problems.* — J. Math. Anal. Appl., **487**, No. 1 (2020), 12397.

9. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Dynamic inverse problem for complex Jacobi matrices.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI, **521** (2023), 136–154.
10. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Discrete dynamical systems: inverse problems and related topics.* — J. Inverse and Ill-posed Problems (2024), 10.1515/jiip-2024-0062
11. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *On the complex moment problem as a dynamic inverse problem for a discrete system.* — `https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.02443` `https://arxiv.org/abs/2509.02443`
12. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, S. A. Simonov, *On the relationship between Weyl functions of Jacobi matrices and response vectors for special dynamical systems with discrete time.* — Mathematical Methods in the Applied Sciences (2018).
13. `https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_matrix`
14. S. Zagorodnyuk, *On bounded complex Jacobi matrices and related moment problems in the complex plane.* — Surveys in Mathematics and its Applications, **18** (2023), 73–82.

Mikhailov V. S. On the complex moment problem.

For the complex moment problem, that is for the problem of constructing a positive Borel measure on $\mathbb{C}$ from a given set of moments we describe the procedure of the construction of such a measure, provided certain conditions on the set of moments are satisfied. Moreover, we show that the measure constructed is in fact a realization of generalized spectral function introduced by G. Guseinov in 1978. We also show that the sufficient conditions on the moment sequence which implies the existence of the solution of the complex moment problem, are not necessary.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова Российской академии наук,
наб. Фонтанки 27, 191023, С.-Петербург, Россия
E-mail: `ftvsm78@gmail.com`

Поступило 8 августа 2026 г.