

С. Б. Левин, В. О. Торопов

**О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ТРЁХ ОДНОМЕРНЫХ
КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ С БЫСТРО
УБЫВАЮЩИМИ ПАРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ И
ОДНИМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ПАРНЫМ
ПОТЕНЦИАЛОМ ОТТАЛКИВАНИЯ, УБЫВАЮЩИМ
НА БЕСКОНЕЧНОСТИ КУЛОНОВСКИМ ОБРАЗОМ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Задача трёх квантовых частиц была впервые решена в классической работе Л. Д. Фаддеева [1] для случая размерности частицы $d \geq 3$ и короткодействующих парных потенциалов. В этой работе была построена система уравнений, впоследствии получившая название уравнений Фаддеева, а также доказана их однозначная разрешимость. Полученные результаты послужили основой для большого числа прикладных исследований, связанных с численным анализом в задачах рассеяния нескольких квантовых частиц и в смежных областях физики.

Однако в случае одномерных систем ситуация существенно усложняется. Даже для финитных парных потенциалов отталкивания прямое применение схемы уравнений Фаддеева оказывается невозможным из-за специфики размерности: итерации ядер соответствующих интегральных уравнений не приводят к сглаживанию сингулярностей в импульсном представлении.

Для одномерного случая ($d=1$) в ситуации быстро убывающих парных потенциалов (включая потенциалы притяжения, соответствующие конечному дискретному спектру парных операторов Шрёдингера) строгая математическая теория была построена значительно позже. Она основана на альтернирующем методе Шварца [2–4], который

Ключевые слова: квантовая задача трех тел, одномерные частицы, кулоновское Фурье-преобразование.

можно рассматривать как одну из форм реализации метода уравнений Фаддеева. Ключевым элементом этого подхода является выделение эффективно конечномерного оператора в соответствующей системе интегральных уравнений и его обращение, что позволяет привести задачу к фредгольмовой системе уравнений.

Параллельно с этим развивался феноменологический дифракционный подход, предложенный В. С. Буслаевым и его учениками [5–9], В его основе лежит эквивалентность математической постановки задачи рассеяния трёх одномерных квантовых частиц и задачи дифракции плоской волны на системе трёх полупрозрачных экранов с окрестностями, пересекающихся в одной точке. В рамках данного подхода была получена асимптотика собственных функций абсолютно непрерывного спектра, а также проведён её численный анализ [7, 10, 11]. Позднее строгая математическая обоснованность этих результатов была установлена с использованием альтернирующего метода Шварца [2, 3], что позволило построить предельные значения ядра резольвенты трёхчастичного оператора Шрёдингера и извлечь координатную асимптотику решений с помощью стандартной предельной процедуры.

Дальнейшее развитие теории связано с учетом дискретного спектра операторов Шрёдингера парных подсистем [4]. В этом случае оказывается, что вклад связанных состояний приводит лишь к модификации упомянутого эффективно конечномерного оператора, не меняя принципиальной схемы решения задачи. Это позволило обобщить ранее полученные результаты на случай конечного числа точек дискретного спектра парных операторов Шрёдингера и обосновать соответствующие феноменологические модели. В частности, был обоснован подход, близкий к оптической модели, который после исключения кластерных каналов рассеяния, приводит к граничной задаче для модифицированного оператора Шрёдингера в канале трехчастичного распада.

Тем не менее, непосредственное обобщение этой схемы на случай медленно убывающих (кулоновских) парных потенциалов сталкивается с принципиальными трудностями. Основная из них связана с невозможностью выделения на бесконечности невозмущённой трёхчастичной динамики и, как следствие, с невозможностью разделения взаимного влияния парных подсистем. Несмотря на это, в рамках дифракционного подхода в данной задаче были получены новые результаты; в частности, построена равномерная асимптотика на бесконечности решений задачи рассеяния для случая кулоновских парных потенциалов

на основе методов погранслоя и согласования различных асимптотических представлений [8, 12, 13].

Цель данной работы состоит в развитии альтернирующего метода Шварца применительно к задаче трёх одномерных квантовых частиц в случае, когда парные потенциалы убывают на бесконечности медленно. Рассматривается наиболее простой вариант такой ситуации: три частицы взаимодействуют посредством быстро убывающих потенциалов, тогда как две из них дополнительно взаимодействуют посредством регулярного в нуле и медленно убывающего (кулоновским образом) на бесконечности по координате потенциала.

Предлагаемый подход основан на переходе к новому представлению для трехчастичного уравнения Шредингера с помощью композиции специальных (кулоновских) преобразований Фурье, позволяющих перейти к представлению, в котором все парные взаимодействия становятся эффективно короткодействующими. Это даёт возможность применить ранее развитую технику альтернирующего метода Шварца, построить предельные значения ядра резольвенты и затем, посредством обратного преобразования, восстановить асимптотику решения в исходном координатном представлении. Дальнейшее обобщение данного подхода связано с рассмотрением общего случая нескольких кулоновских взаимодействий на бесконечности и построением соответствующих преобразований, обеспечивающих редукцию задачи к эффективно короткодействующей.

Работа построена следующим образом. В §2 вводятся основные обозначения и формулируются условия на парные потенциалы. В §3 строится кулоновское преобразование Фурье $\check{F}_C$; доказываются его унитарность и показывается, что оно действует нетривиально лишь по координате x_1 заряженной пары и тождественно по координате y_1 . Благодаря этому образы $\check{V}_i$ всех трёх парных потенциалов выражаются через одно и то же одномерное ядро K . В §4 это ядро исследуется: показывается, что оно отличается от дельта-функции на поправку, сосредоточенную в окрестности диагонали ширины $O(T^{-1})$, где T — большой параметр. Как следствие, операторы $\check{V}_i$ оказываются нелокальными, но быстро убывающими, а носители их главных членов образуют ту же систему трёх экранов, что и в задаче с быстро убывающими потенциалами. Параграфы §5 и §6 посвящены альтернирующему методу Шварца для оператора $\check{H}$ в новом представлении: в §5 с помощью определителей Фредгольма строятся парные резольвенты

и находится асимптотика их ядер, в §6 изучаются итерации операторов отражения и обосновывается переход спектрального параметра к предельным значениям на абсолютно непрерывном спектре. Наконец, в §7 выписывается координатная асимптотика ядра резольвенты в новых координатах и обсуждается, как при обратном преобразовании возникает кулоновская логарифмическая фаза.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассматривается система трёх частиц, включающая одну нейтральную и две заряженные частицы, взаимодействующие на бесконечности кулоновским образом. Гамильтониан системы, действующий в $L^2(\mathbb{R}^2)$, записанный в терминах координат Якоби

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_k - r_j), \quad y_i = \sqrt{\frac{3}{2}}r_i, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), \quad (2.1)$$

после отделения динамики центра масс имеет вид

$$H = -\Delta + v_1^c(x_1) + \sum_{i=1}^3 v_i(x_i), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}. \quad (2.2)$$

Здесь r_i — координаты частиц в лабораторной системе, индексы (i, j, k) в (2.1) образуют чётные перестановки, индекс 1 отвечает нейтральной частице, индексы 2 и 3 нумеруют заряженные частицы. Массы всех частиц считаются одинаковыми, что является техническим упрощением и не влияет на постановку задачи принципиально. Координаты $\{x_1, y_1\}$ отвечают соответственно расстоянию между частицами 2 и 3 и расстоянию между частицей 1 и центром масс пары 2, 3; сопряжённые им импульсы обозначаются $\{k_1, p_1\}$. Векторы координат и импульсов в i -й яковиевой системе обозначаются $z_i = (x_i, y_i)$ и $q_i = (k_i, p_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Условие 2.1. Функция v_1^c вещественна, четна, $v_1^c \in C^\infty(\mathbb{R})$, $v_1^c \geq 0$, и при некотором фиксированном $\ell > 0$

$$v_1^c(x) = \frac{\alpha}{|x|} \quad (\text{при } |x| \geq \ell, \quad \alpha = \text{const} > 0), \quad (2.3)$$

тогда как на отрезке $|x| \leq \ell$ выполнено $0 \leq v_1^c(x) \leq M < \infty$.

Условие 2.2. Функции v_i , $i = 1, 2, 3$, вещественны, неотрицательны, непрерывны, четны, и существуют $b_i > 0$ такие, что $\text{supp } v_i \subset [-b_i, b_i]$.

Ограничение случаем финитных v_i принято ради простоты изложения и, как и в [3], не является упрощением по существу, поскольку суммарный потенциал взаимодействия всех трёх частиц остаётся неубывающим на бесконечности. Приводимые оценки сохраняются для произвольных быстро убывающих v_i с заменой точных равенств вида $v_i \equiv 0$ вне носителя на оценки остатков через скорость убывания.

Координаты Якоби в разных парных подсистемах связаны соотношениями

$$x_i = c_i x_1 + s_i y_1, \quad y_i = -s_i x_1 + c_i y_1, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

где для частиц равных масс

$$(c_1, s_1) = (1, 0), \quad (c_2, s_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (c_3, s_3) = \left(-\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (2.5)$$

§3. КУЛОНОВСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Выделим в (2.2) вклад свободной динамики нейтральной частицы относительно центра масс пары заряженных частиц и вклад подсистемы заряженных частиц, содержащий только медленно убывающее взаимодействие:

$$H = H_0 + H^C + \sum_{i=1}^3 v_i(x_i), \quad H_0 = -\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, \quad H^C = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + v_1^c(x_1). \quad (3.1)$$

Положим $\eta(k) = \alpha/(2k)$ и введём модифицированную плоскую волну

$$\xi_c(x, k) = \exp \left[ikx - i\eta(k) \operatorname{sgn}(x) \ln |kx| \right]. \quad (3.2)$$

Обозначим через ψ_k^C собственные функции оператора $-d^2/dx^2 + v_1^c$, отвечающие собственному значению k^2 и нормированные на δ -функцию:

$$-(\psi_k^C)'' + v_1^c \psi_k^C = k^2 \psi_k^C, \quad \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_k^C(x)} \psi_{k'}^C(x) dx = \delta(k - k'). \quad (3.3)$$

Они характеризуются асимптотическим поведением

$$\psi_k^C(x) \sim (2\pi)^{-1/2} s(k) \xi_c(x, k), \quad kx \rightarrow +\infty, \quad (3.4)$$

$$\psi_k^C(x) \sim (2\pi)^{-1/2} [\xi_c(x, k) + r(k) \xi_c^*(x, k)], \quad kx \rightarrow -\infty, \quad (3.5)$$

где $s(k)$ и $r(k)$ — коэффициенты прохождения и отражения, $|s(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1$. В силу чётности v_1^c выполнено $\psi_{-k}^C(-x) = \psi_k^C(x)$,

$s(k) = s(|k|)$, $r(k) = r(|k|)$. Множитель $(2\pi)^{-1/2}$ в (3.4)–(3.5) отвечает δ -нормировке: при $\alpha \rightarrow 0$ имеем $\psi_k^C(x) \rightarrow (2\pi)^{-1/2} e^{ikx}$.

Коэффициент отражения $r(k)$ убывает быстрее любой наперед заданной степени, так как все производные порядка $m \geq 1$ функции v_1^c интегрируемы на $\mathbb{R}$: из $d^m(\alpha/|x|)/dx^m = O(|x|^{-m-1})$ и гладкости на компакте следует, что образ Фурье допускает любое число интегрирований по частям, а отражение при больших k контролируется этим образом.

Поскольку $r(k) = O(k^{-N})$ для любого N , отсюда $|s(k)| = 1 + O(k^{-N})$, то есть $s(k) = e^{i\sigma/k} (1 + O(k^{-N}))$, где $\sigma = - \int_0^\ell v_1^c ds$. После разложения экспоненты в ряд получаем

$$s(k) = 1 + \frac{i\sigma_1}{k} + O(k^{-2}), \quad k \rightarrow +\infty, \quad \sigma_1 \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

3.1. Унитарность преобразования. Собственную функцию свободного оператора H_0 , отвечающую собственному значению p_1^2 , обозначим $\psi_p^0(y) = (2\pi)^{-1/2} e^{ipy}$.

Предложение 3.1. При выполнении условия 2.1 оператор $-d^2/dx^2 + v_1^c$ неотрицателен и не имеет дискретного спектра; система $\{\psi_k^C\}_{k \in \mathbb{R}}$ полна в $L^2(\mathbb{R})$. Как следствие, набор $\{\psi_{k_1}^C \psi_{p_1}^0\}$ образует полный ортогональный базис в $L^2(\mathbb{R}^2)$, и оператор

$$(\mathcal{F}_C G)(q_1) = \int_{\mathbb{R}^2} dz_1 \overline{\psi_{k_1}^C(x_1) \psi_{p_1}^0(y_1)} G(z_1) \quad (3.7)$$

унитарен как оператор из $L^2(\mathbb{R}_{z_1}^2)$ в $L^2(\mathbb{R}_{q_1}^2)$.

Доказательство. Для $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеем

$$((-d^2/dx^2 + v_1^c)u, u) = \|u'\|^2 + \int v_1^c |u|^2 \geq 0,$$

откуда спектр содержится в $[0, \infty)$ и отрицательных собственных значений нет. Отсутствие собственного значения и резонанса в нуле устанавливается следующим образом. Пусть u — ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения $-u'' + v_1^c u = 0$. Тогда

$$(|u|^2)'' = 2|u'|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{u} u'') = 2|u'|^2 + 2v_1^c |u|^2 \geq 0,$$

то есть функция $|u|^2$ выпукла на $\mathbb{R}$. Ограниченная выпуклая функция на всей прямой постоянна, поэтому $|u'|^2 + v_1^c |u|^2 \equiv 0$; поскольку

$v_1^c(x) = \alpha/|x| > 0$ при $|x| \geq \ell$, отсюда $u \equiv 0$. Полнота абсолютно непрерывной части и δ -нормировка при условии 2.1 стандартны, см. [16]. Унитарность (3.7) есть переформулировка полноты и ортонормированности. $\square$

Применение (3.7) к (2.2) переводит оператор H в новое импульсное представление:

$$\mathcal{F}_C H \mathcal{F}_C^\dagger = |q_1|^2 + \sum_{i=1}^3 \mathcal{F}_C v_i \mathcal{F}_C^\dagger, \quad (3.8)$$

где операторы $\mathcal{F}_C v_i \mathcal{F}_C^\dagger$ имеют ядра

$$(\mathcal{F}_C v_i \mathcal{F}_C^\dagger)(q'_1, q_1) = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi_{p'_1}^0(y_1) \psi_{k'_1}^C(x_1)} v_i(x_i) \psi_{k_1}^C(x_1) \psi_{p_1}^0(y_1) dx_1 dy_1. \quad (3.9)$$

3.2. Композиция преобразований и её факторизация. Подействуем на (3.8) стандартным обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^\dagger$. Обозначая $\check{\mathcal{F}}_C = \mathcal{F}^\dagger \mathcal{F}_C$ и через $\check{z}_1 = (\check{x}_1, \check{y}_1)$ — переменные нового координатного представления, а через $\check{z}_i = (\check{x}_i, \check{y}_i)$ — переменные, связанные с ними соотношениями вида (2.4), получаем

$$\check{H} = \check{\mathcal{F}}_C H \check{\mathcal{F}}_C^\dagger = -\Delta + \sum_{i=1}^3 \check{V}_i, \quad \check{V}_i = \check{\mathcal{F}}_C v_i \check{\mathcal{F}}_C^\dagger. \quad (3.10)$$

Явно, для $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} (\check{\mathcal{F}}_C \phi)(\check{x}_1, \check{y}_1) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon' \rightarrow 0}} \int_{\mathbb{R}} dp_1 e^{ip_1 \check{y}_1 - \epsilon' |p_1|} \int_{\mathbb{R}} dk_1 e^{ik_1 \check{x}_1 - \epsilon |k_1|} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi_{k_1}^C(x_1) \psi_{p_1}^0(y_1)} \phi(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Предложение 3.2. Преобразование (3.11) факторизуется: $\check{\mathcal{F}}_C = K \otimes I$, где I — тождественный оператор по переменной $\check{y}_1$, а K — унитарный интегральный оператор по одной переменной с ядром

$$K(\check{x}_1, x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{ik\check{x}_1 - \epsilon |k|} \overline{\psi_k^C(x_1)} dk. \quad (3.12)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ имеем $K(\check{x}_1, x_1) \rightarrow \delta(\check{x}_1 - x_1)$.

Доказательство. Функция $\psi_{p_1}^0$ есть обычная плоская волна, не затронутая кулоновской модификацией. Меняя в (3.11) порядок интегрирования, что законно при $\epsilon, \epsilon' > 0$ ввиду абсолютной сходимости, и выполняя интегрирование по p_1 , получаем

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{ip_1(\tilde{y}_1 - y_1) - \epsilon'|p_1|} dp_1 = \delta(\tilde{y}_1 - y_1)$$

в смысле обобщённых функций. Оставшееся интегрирование даёт (3.12). Унитарность K следует из унитарности $\check{\mathcal{F}}_C$ и тождественности второго сомножителя. $\square$

Из предложения 3.2 следует, что все три оператора $\check{V}_i$ имеют ядро, локальное по переменной $\tilde{y}_1$:

$$\check{V}_i(\tilde{z}_1, \tilde{z}'_1) = \delta(\tilde{y}_1 - \tilde{y}'_1) \mathcal{K}_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}'_1; \tilde{y}_1), \quad (3.13)$$

$$\mathcal{K}_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}'_1; \tilde{y}_1) = \int_{\mathbb{R}} K(\tilde{x}_1, x_1) \overline{K(\tilde{x}'_1, x_1)} v_i(x_i) dx_1, \quad x_i = c_i x_1 + s_i \tilde{y}_1. \quad (3.14)$$

Здесь переменная интегрирования есть исходная координата x_1 , а поскольку по второй переменной преобразование тождественно, равенство $x_i = c_i x_1 + s_i \tilde{y}_1$ есть соотношение (2.4). Ядро $\mathcal{K}_i$ эрмитово, а из $v_i \geq 0$ следует

$$\begin{aligned} (\check{V}_i f, f) &= \int_{\mathbb{R}^2} v_i(x_i) |h(x_1, \tilde{y}_1)|^2 dx_1 d\tilde{y}_1 \geq 0, \\ h(x_1, \tilde{y}_1) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{K(\tilde{x}'_1, x_1)} f(\tilde{x}'_1, \tilde{y}_1) d\tilde{x}'_1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким образом, задача сводится к изучению одного одномерного ядра K ; различие между каналами $i = 1, 2, 3$ состоит лишь в подстановке аргумента в (3.14).

§4. АНАЛИЗ ЯДРА ОДНОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

4.1. Срезающие функции и согласование параметров. Введём большой параметр $T \gg 1$ и положим

$$t > l. \quad (4.1)$$

Пусть χ_T и ζ_t — гладкие срезающие функции:

$$\chi_T(k) = \begin{cases} 0, & |k| < T, \\ \text{монотонно растёт от 0 до 1,} & T \leq |k| < 2T, \\ 1, & |k| \geq 2T; \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\zeta_t(x_1) = \begin{cases} 0, & |x_1| < t, \\ \text{монотонно растёт от 0 до 1,} & t \leq |x_1| < 2t, \\ 1, & |x_1| \geq 2t. \end{cases} \quad (4.3)$$

Например, в качестве χ_T может быть использована $\chi_T(k) = \chi(|k|/T)$, где $\chi(v) = e^{-\frac{e^{-1/(2-v)}}{v-1}}$ на $[1, 2]$, продолженная нулём и единицей; тогда $|\chi_T^{(m)}| \leq C_m T^{-m}$.

Напомним, что ℓ — радиус из условия 2.1, вне которого $v_1^c(x) = \alpha/|x|$, а b_1 — полуширина носителя v_1 (условие 2.2). Параметры считаются согласованными следующим образом:

$$T \gg \max\left(\frac{1}{\ell}, \frac{1}{b_1}\right), \quad t \geq \max(\ell, b_1). \quad (4.4)$$

На асимптотической ветви, где одновременно $|k| > T$ и $|x_1| > t$, выполняется

$$|kx_1| \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty, \quad (4.5)$$

то есть условие применимости асимптотик (3.4)–(3.5) обеспечено с неограниченно растущим запасом; при этом параметр разложения по логарифмической фазе на границе области равен

$$\frac{\ln |kx_1|}{k} \Big|_{|k|=T, |x_1|=t} \ll 1. \quad (4.6)$$

Оба требования совместны при любом фиксированном $\epsilon_0 > 0$.

Фиксированный масштаб регуляризации ℓ не нарушает применимости асимптотики в зоне $t < |x_1| < \ell$, где потенциал не является кулоновским: расхождение фаз там равно

$$\frac{1}{2k} \int_0^{x_1} v_1^c ds - \frac{\alpha}{2k} \ln |kx_1| = \frac{\alpha}{2k} \ln \frac{\ell}{|x_1|} + O\left(\frac{M\ell}{k}\right),$$

причём константа поглощается коэффициентом $s(k)$, а первый член во всей зоне мажорируется величиной $\alpha(2T)^{-1} \ln(\ell T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

4.2. Разбиение. Разобьём собственную функцию в (3.12) на три вклада:

$$\begin{aligned} \overline{\psi_k^C(x_1)} = & (1 - \zeta_t(x_1)) \overline{\psi_k^C(x_1)} + \zeta_t(x_1) (1 - \chi_T(k)) \overline{\psi_k^C(x_1)} \\ & + \zeta_t(x_1) \chi_T(k) \overline{\psi_k^C(x_1)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

и в последнем слагаемом заменим ψ_k^C его асимптотикой (3.4)–(3.5), где $s(k)$ и $r(k)$ – коэффициенты прохождения и отражения кулоновской задачи. Пусть для определённости $x_1 > 0$; случай $x_1 < 0$ разбирается зеркально. Тогда $kx_1 > 0$ равносильно $k > 0$, и для первого (диагонального) вклада получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \chi_T(k) e^{ik(\tilde{x}_1 - x_1) + i\eta(k) \operatorname{sgn}(x_1) \ln |kx_1|} dk \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \chi_T(k) \overline{s(k)} e^{ik(\tilde{x}_1 - x_1) + i\eta(k) \operatorname{sgn}(x_1) \ln |kx_1|} dk, \end{aligned} \quad (4.8)$$

тогда как слагаемое с $r(k)$ даёт вклад, сосредоточенный вблизи прямой $\tilde{x}_1 = -x_1$.

Поскольку в (4.8) интегрирование ведётся по области, где $|kx_1|$ велико, разложим экспоненту, содержащую логарифм, в ряд по малому параметру (4.6):

$$e^{i\eta(k) \operatorname{sgn}(x_1) \ln |kx_1|} = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} \left(\frac{i\alpha \operatorname{sgn}(x_1)}{2} \frac{\ln |kx_1|}{k} \right)^j, \quad \eta(k) = \frac{\alpha}{2k}. \quad (4.9)$$

Ряд (4.9) понимается как асимптотический; ниже удерживаются члены $j = 0, 1$, остаток мажорируется величиной $O((\ln T/T)^2)$ равномерно в силу (4.6).

4.3. Главный член.

Лемма 4.1. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_T(k) e^{ik(\tilde{x}_1 - x_1)} dk = \delta(\tilde{x}_1 - x_1) - g_T(\tilde{x}_1 - x_1), \quad g_T = \widehat{(1 - \chi_T)}, \quad (4.10)$$

$$|g_T(\tilde{x}_1 - x_1)| \leq C_N T (1 + T|\tilde{x}_1 - x_1|)^{-N}$$

для любого N ; здесь g_T – преобразование Фурье финитной функции $1 - \chi_T$.

Доказательство. Первое равенство очевидно. Функция $1 - \chi_T$ гладкая и финитная, следовательно её преобразование Фурье принадлежит классу Шварца; оценки $|\chi_T^{(m)}| \leq C_m T^{-m}$ и длина носителя порядка T дают масштабированную оценку. $\square$

Быстрое убывание в (4.10) есть следствие гладкости срезки.

4.4. Логарифмическая поправка.

Лемма 4.2. Пусть $|\check{x}_1 - x_1| > 0$. Тогда вклад члена $j = 1$ разложения (4.9) в (4.8) при замене $s(k)$ единицей равен

$$\frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{sgn}(x_1) \operatorname{sgn}(\check{x}_1 - x_1) \left[J_1 \ln \frac{|\check{x}_1 - x_1|}{|x_1|} - J_2 \right], \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{T|\check{x}_1 - x_1|}^{\infty} \frac{du}{u} \chi_T\left(\frac{u}{|\check{x}_1 - x_1|}\right) \sin u, \\ J_2 &= \int_{T|\check{x}_1 - x_1|}^{\infty} \frac{du}{u} \chi_T\left(\frac{u}{|\check{x}_1 - x_1|}\right) \ln u \sin u. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Доказательство. Функция $\ln |kx_1|/k$ нечётна по k , а χ_T чётна, поэтому в $\int f(k) e^{ik(\check{x}_1 - x_1)} dk = 2i \int_0^{\infty} f(k) \sin(k(\check{x}_1 - x_1)) dk$, справедливом для нечётной f , остается лишь синус, и рассматриваемый вклад равен

$$-\frac{\alpha \operatorname{sgn}(x_1)}{2\pi} \int_0^{\infty} \chi_T(k) \frac{\ln |kx_1|}{k} \sin(k(\check{x}_1 - x_1)) dk.$$

Замена $u = k|\check{x}_1 - x_1|$ даёт $\ln |kx_1| = \ln u + \ln |x_1| - \ln |\check{x}_1 - x_1|$ и $\sin(k(\check{x}_1 - x_1)) = \operatorname{sgn}(\check{x}_1 - x_1) \sin u$, откуда следует (4.11). $\square$

Условие $|\check{x}_1 - x_1| > 0$ в лемме 4.2 существенно. Интеграл в (4.8) сходится на бесконечности лишь условно и понимается с регуляризирующим множителем $e^{-\epsilon|k|}$ из (3.12); при фиксированном $\check{x}_1 - x_1 \neq 0$ сходимость по признаку Дирихле равномерна по ϵ , что и позволяет перейти к пределу $\epsilon \rightarrow 0$ под знаком интеграла. При $\check{x}_1 \rightarrow x_1$ правая часть (4.11) содержит член $J_1 \ln |\check{x}_1 - x_1|$ с $J_1 \rightarrow \pi/2$, то есть ядро имеет на диагонали логарифмическую, но интегрируемую особенность.

По этой причине вблизи диагонали оценка в теореме 4.7 ниже дана в интегральной форме.

Лемма 4.3. *Для интегралов (4.12) справедливы оценки*

$$\left| J_1 - \frac{\pi}{2} \right| \leq 2T|\check{x}_1 - x_1|, \quad \left| J_2 + \frac{\pi\gamma_E}{2} \right| \leq CT|\check{x}_1 - x_1| \ln \frac{1}{T|\check{x}_1 - x_1|}, \quad (4.13)$$

$$T|\check{x}_1 - x_1| \ll 1;$$

$$J_1 = O((T|\check{x}_1 - x_1|)^{-N}), \quad J_2 = O((T|\check{x}_1 - x_1|)^{-N} \ln(T|\check{x}_1 - x_1|)) \quad \forall N,$$

$$T|\check{x}_1 - x_1| \gg 1, \quad (4.14)$$

где γ_E — постоянная Эйлера.

Доказательство. Пусть $T|\check{x}_1 - x_1| \ll 1$. Так как $\chi_T(u/|\check{x}_1 - x_1|) = 0$ при $u < T|\check{x}_1 - x_1|$ и равно единице при $u \geq 2T|\check{x}_1 - x_1|$, имеем

$$J_1 - \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \left[\chi_T\left(\frac{u}{|\check{x}_1 - x_1|}\right) - 1 \right] \frac{\sin u}{u} du,$$

где использован интеграл Дирихле $\int_0^\infty u^{-1} \sin u du = \pi/2$. Подынтегральная функция отлична от нуля лишь при $u \leq 2T|\check{x}_1 - x_1|$ и мажорируется единицей, откуда

$$|J_1 - \pi/2| \leq \int_0^{2T|\check{x}_1 - x_1|} u^{-1} |\sin u| du \leq 2T|\check{x}_1 - x_1|.$$

Аналогично, с учётом $\int_0^\infty u^{-1} \ln u \sin u du = -\pi\gamma_E/2$, получается вторая оценка.

Пусть $T|\check{x}_1 - x_1| \gg 1$. Интегрирование по частям даёт

$$J_1 = \int_{T|\check{x}_1 - x_1|}^\infty \frac{d}{du} \left[\frac{\chi_T(u/|\check{x}_1 - x_1|)}{u} \right] \cos u du,$$

поскольку внеинтегральный член обращается в нуль ввиду $\chi_T(T) = 0$. Далее, производная в квадратных скобках равна

$$\chi'_T(u/|\check{x}_1 - x_1|)/(|\check{x}_1 - x_1|u) - \chi_T(u/|\check{x}_1 - x_1|)/u^2;$$

на плече $u \in [T|\check{x}_1 - x_1|, 2T|\check{x}_1 - x_1|]$ выполнено $|\chi'_T| \leq C/T$, так что оба слагаемых мажорируются величиной $C(T|\check{x}_1 - x_1|)^{-2}$. Повторные интегрирования по частям дают выигрыш $(T|\check{x}_1 - x_1|)^{-1}$ на каждом шаге, откуда следует (4.14); для J_2 дополнительно возникает множитель $\ln(T|\check{x}_1 - x_1|)$. $\square$

4.5. Вклады коэффициентов прохождения и отражения.

Лемма 4.4. *Вклад разности $\overline{s(k)} - 1$ во второе слагаемое (4.8) при $j = 0$ равен, в обозначениях разложения (3.6) коэффициента прохождения $s(k) = 1 + i\sigma_1/k + O(k^{-2})$,*

$$\frac{i\sigma_1}{2\pi} [\ln(T|\check{x}_1 - x_1|) + \gamma_E] + \frac{\sigma_1}{4} \operatorname{sgn}(\check{x}_1 - x_1) + O(T|\check{x}_1 - x_1|) \quad (4.15)$$

при $T|\check{x}_1 - x_1| \ll 1$ и допускает оценку $O((T|\check{x}_1 - x_1|)^{-N})$ при $T|\check{x}_1 - x_1| \gg 1$ для любого N .

Доказательство. При $k > 0$ разность $\overline{s(k)} - 1$ равна, в силу (3.6), величине $-i\sigma_1/k + O(k^{-2})$. Замена $u = k|\check{x}_1 - x_1|$ и разложения

$$\begin{aligned} \int_{T|\check{x}_1 - x_1|}^{\infty} u^{-1} \cos u \, du &= -\gamma_E - \ln(T|\check{x}_1 - x_1|) + O((T|\check{x}_1 - x_1|)^2), \\ \int_{T|\check{x}_1 - x_1|}^{\infty} u^{-1} \sin u \, du &= \pi/2 + O(T|\check{x}_1 - x_1|) \end{aligned}$$

дают (4.15). При $T|\check{x}_1 - x_1| \gg 1$ применимо рассуждение леммы 4.3. $\square$

Лемма 4.5. *Вклад слагаемого с $r(k)$ в (4.7) сосредоточен в окрестности прямой $\check{x}_1 = -x_1$, убывает по $|\check{x}_1 + x_1|$ быстрее любой степени и подчинён равномерной оценке $O(T^{-N})$ для любого N .*

Доказательство. Модуль рассматриваемого вклада не превосходит $(2\pi)^{-1} \int \chi_T(k) |r(k)| \, dk$, а $r(k)$ убывает быстрее любой степени. Локализация получается интегрированием по частям: фаза $k(\check{x}_1 + x_1)$ не имеет стационарных точек, а логарифмическая добавка вносит поправку порядка $\eta(k)/k = O(T^{-2})$. $\square$

4.6. Вклад окрестности нуля.

Лемма 4.6. Пусть выполнены условия 2.1, 2.2 и (4.4), M — постоянная из условия 2.1, ограничивающая v_1^c на отрезке $[-\ell, \ell]$, и $t = T^{-1+\epsilon_0}$ — радиус срезки ζ_t . Тогда

$$\sup_{|x_1| \leq \ell} \sup_{k \in \mathbb{R}} |\psi_k^C(x_1)| \leq C(M, \ell) < \infty, \quad (4.16)$$

и вклад окрестности нуля в потенциал по норме в L^1 :

$$\|v_i(x_i) (1 - \zeta_t(x_1))\|_{L^1(dx_1)} \leq 4\ell \|v_i\|_\infty. \quad (4.17)$$

Доказательство. Из (3.4) и $|s(k)| \leq 1$ следует ограниченность $\psi_k^C(\ell)$ и $(\psi_k^C)'(\ell)/k$ равномерно по k . Функция ψ_k^C удовлетворяет уравнению $\psi'' + k^2\psi = v_1^c\psi$. Рассматривая правую часть как неоднородность, воспользуемся фундаментальной системой $\{\cos k(x - \ell), k^{-1} \sin k(x - \ell)\}$ оператора $d^2/dx^2 + k^2$. Метод вариации постоянных с данными Коши в точке ℓ даёт при $x \leq \ell$

$$\begin{aligned} \psi_k^C(x) = & \psi_k^C(\ell) \cos k(x - \ell) + \frac{(\psi_k^C)'(\ell)}{k} \sin k(x - \ell) \\ & - \int_x^\ell \frac{\sin k(x - \tau)}{k} v_1^c(\tau) \psi_k^C(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Пользуясь оценкой $|\sin k(x - \tau)/k| \leq |x - \tau| \leq 2\ell$ вместе с $0 \leq v_1^c \leq M$, по лемме Гронуолла получаем (4.16). Носитель функции $1 - \zeta_t$ содержится в $[-2t, 2t]$, откуда следует (4.17); ввиду $2t \ll 1$ весовая норма с весом $1 + |x_1|$ имеет тот же порядок. $\square$

Оценка (4.17) даёт малость в той норме, в которой она требуется, поскольку используемые далее построения опираются на интегральные нормы потенциала. В операторной норме вклад окрестности нуля малым не является: оператор $\check{\mathcal{F}}_C$ унитарен, и соответствующая норма равна $\sup_{|x_1| \leq 2t} |v_i| = O(1)$.

Теорема 4.7. При выполнении условий 2.1, 2.2 и (4.4) для $|x_1| \geq 2t$ справедливо разложение

$$K(\check{x}_1, x_1) = \delta(\check{x}_1 - x_1) + \Lambda(\check{x}_1, x_1) + K_r(\check{x}_1, x_1), \quad (4.18)$$

где K_r — вклад коэффициента отражения, подчинённый оценке леммы 4.5, а при $0 < T|\tilde{x}_1 - x_1| \ll 1$

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{x}_1, x_1) = & \frac{\alpha}{4} \operatorname{sgn}(x_1) \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1 - x_1) \ln \frac{|\tilde{x}_1 - x_1|}{|x_1|} + \frac{i\sigma_1}{2\pi} \ln(T|\tilde{x}_1 - x_1|) \\ & + \left(\frac{\sigma_1}{4} + \frac{\alpha\gamma_E}{4} \operatorname{sgn}(x_1) \right) \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1 - x_1) - g_T(\tilde{x}_1 - x_1) + \dots, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где σ_1 — коэффициент из (3.6), γ_E — постоянная Эйлера, g_T — функция из леммы 4.1. Для любого N справедливы оценки

$$|\Lambda(\tilde{x}_1, x_1)| \leq C_N \alpha \frac{1 + |\ln(T|\tilde{x}_1 - x_1|)| + |\ln|x_1||}{(T|\tilde{x}_1 - x_1|)^N}, \quad |\tilde{x}_1 - x_1| \geq T^{-1}, \quad (4.20)$$

$$\int_{|\tilde{x}_1 - x_1| \leq T^{-1}} |\Lambda(\tilde{x}_1, x_1)| d\tilde{x}_1 \leq C \alpha \frac{\ln T + |\ln|x_1||}{T}. \quad (4.21)$$

Оценки (4.20)–(4.21) составляют точный смысл утверждения о том, что ядро K отличается от дельта-функции на поправку, сосредоточенную в окрестности диагонали ширины $O(T^{-1})$. Логарифмический рост коэффициентов в (4.19) подавляется сжатием носителя, что и выражает оценка (4.21).

4.7. Структура ядер. Напомним явный вид индексных переменных нового представления:

$$\tilde{x}_i = c_i \tilde{x}_1 + s_i \tilde{y}_1, \quad \tilde{y}_i = -s_i \tilde{x}_1 + c_i \tilde{y}_1, \quad \tilde{x}'_i = c_i \tilde{x}'_1 + s_i \tilde{y}_1, \quad (4.22)$$

с коэффициентами (2.5). Подставляя разложение (4.18) в (3.14), получаем следующее утверждение.

Теорема 4.8. При выполнении условий 2.1, 2.2 и (4.4) операторы $\tilde{V}_i$, $i = 1, 2, 3$, имеют ядра вида (3.13), причём

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}'_1; \tilde{y}_1) = & v_i(\tilde{x}_i) \delta(\tilde{x}_1 - \tilde{x}'_1) + v_i(\tilde{x}_i) \overline{\Lambda(\tilde{x}'_1, \tilde{x}_1)} + v_i(\tilde{x}'_i) \Lambda(\tilde{x}_1, \tilde{x}'_1) \\ & + \int_{\mathbb{R}} \Lambda(\tilde{x}_1, x_1) \overline{\Lambda(\tilde{x}'_1, x_1)} v_i(x_i) dx_1 + \mathcal{K}_i^r(\tilde{x}_1, \tilde{x}'_1; \tilde{y}_1), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где Λ описано в теореме 4.7, а остаток $\mathcal{K}_i^r$ складывается из членов, содержащих K_r , и из вклада окрестности нуля, подчинённых соответственно лемме 4.5 и оценке (4.17).

4.8. Геометрия носителей. Главный член в (4.23) отличен от нуля лишь при $\check{x}_i \in \text{supp } v_i$, то есть в полосе $|c_i \check{x}_1 + s_i \check{y}_1| \leq b_i$ вокруг прямой $\check{x}_i = 0$. Три прямые $\check{x}_1 = 0$, $\check{x}_2 = 0$, $\check{x}_3 = 0$ пересекаются в начале координат под углами $2\pi/3$; это та же система трёх экранов, которая возникает в задаче с быстро убывающими парными потенциалами, см. [3, рис. 1] и [12, §1]. Тем самым геометрическая картина, лежащая в основе дифракционной интерпретации и оценок числа преотражений, в новом представлении сохраняется.

§5. АЛЬТЕРНИРУЮЩИЙ МЕТОД ШВАРЦА

В результате преобразований, проведенных в предыдущей части работы, гамильтониан исходной задачи был переведен в новое координатное представление

$$\check{H} = -\Delta + \sum_{i=1}^3 \check{V}_i, \quad (5.1)$$

где потенциалы $\check{V}_i$ являются нелокальными операторами с ядрами вида

$$\begin{aligned} \check{V}_i(\check{z}_i, \check{z}'_i) &= \delta(\check{y}_1 - \check{y}'_1) \mathcal{K}_i(\check{x}_1, \check{x}'_1; \check{y}_1), \\ \mathcal{K}_i(\check{x}_1, \check{x}'_1; \check{y}_1) &= v_i(\check{x}_i) \delta(\check{x}_1 - \check{x}'_1) + v_i(\check{x}_i) \overline{\Lambda(\check{x}'_1, \check{x}_1)} + v_i(\check{x}'_i) \Lambda(\check{x}_1, \check{x}'_1) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \Lambda(\check{x}_1, x_1) \overline{\Lambda(\check{x}'_1, x_1)} v_i(x_i) dx_1 + \mathcal{K}_i^r(\check{x}_1, \check{x}'_1; \check{y}_1). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Напомним, что здесь $\check{x}_i = c_i \check{x}_1 + s_i \check{y}_1$ — координаты нового представления, $x_i = c_i x_1 + s_i \check{y}_1$ — координата под знаком интеграла, отвечающая исходному представлению, Λ — логарифмическая поправка к ядру K из теоремы 4.7, а $\mathcal{K}_i^r$ — остаток, описанный в теореме 4.8.

Ключевой объект нашего исследования — предельные значения ядра резольвенты оператора $\check{R}(\lambda) = (\check{H} - \lambda I)^{-1}$ при подходе к действительной оси сверху ($\text{Re}(\lambda) = E > 0$, $\text{Im}(\lambda) \rightarrow +0$). Работа ведется в рамках формализма оснащенного гильбертова пространства (троек Гельфанда). Предельные операторы рассматриваются в *-слабом смысле на банаховом пространстве $\mathcal{B}$, вложенном в исходное гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2)$. При этом обобщенные собственные

функции принадлежат сопряженному пространству $\mathcal{B}^*$, а сам оператор $\check{R}(E + i0) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ задается через предел квадратичной формы $(\check{R}(E \pm i\varepsilon)\phi, \phi)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ для $\phi \in \mathcal{B}$.

В дальнейшем нам также понадобятся операторы

$$R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}, \quad \check{R}_j(\lambda) = (-\Delta + \check{V}_j - \lambda I)^{-1},$$

а также операторы отражения

$$\begin{aligned} \Gamma_j(\lambda) &= \check{V}_j \check{R}_j(\lambda), \quad \text{так что} \\ I - \Gamma_j(\lambda) &= (I + \check{V}_j R_0(\lambda))^{-1}, \quad \check{R}_j(\lambda) = R_0(\lambda)(I - \Gamma_j(\lambda)). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Опишем асимптотики их ядер. Асимптотика $R_0(\check{z}_1, \check{z}'_1|\lambda)$ при $\text{Im}(\lambda) > 0$, $|\check{z}_1 - \check{z}'_1| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$R_0(\check{z}_1, \check{z}'_1, \lambda) = H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda|\check{z}_1 - \check{z}'_1|})/4i \sim \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{\lambda}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\check{z}_1 - \check{z}'_1|}}{|\check{z}_1 - \check{z}'_1|^{1/2}}, \quad (5.4)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода (не путать с оператором H_0 из (3.1)). В отличие от случая локального потенциала, рассмотренного в [3], резольвента парной подсистемы не может быть построена по решениям Йоста, поскольку оператор $-d^2/dx^2 + v_i$ с интегральным v_i не порождает обыкновенного дифференциального уравнения; в частности, для него не определён сохраняющийся вронскиан. Роль последнего берёт на себя определитель Фредгольма.

Обозначим через $r_0(x, x'|k^2) = (2ik)^{-1}e^{ik|x-x'|}$, $\text{Im} k > 0$, свободную резольвенту на прямой.

Напомним определения, см. [14, 15]. Пусть A — ядерный оператор в $L^2(\mathbb{R})$ и $\{\lambda_n(A)\}$ — его собственные значения с учётом алгебраической кратности. Определитель Фредгольма оператора $I + A$ определяется равенством

$$\det(I + A) = \prod_n (1 + \lambda_n(A)), \quad (5.5)$$

причём произведение сходится абсолютно ввиду $\sum_n |\lambda_n(A)| \leq \|A\|_1$. Если ядро $A(x, x')$ непрерывно, то справедливо представление рядом Фредгольма

$$\det(I + A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \det[A(s_l, s_m)]_{l,m=1}^n ds_1 \dots ds_n. \quad (5.6)$$

Первым минором Фредгольма называется интегральный оператор $\mathcal{N}$ с ядром

$$\mathcal{N}(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \det \begin{bmatrix} A(x, x') & A(x, s_1) & \dots & A(x, s_n) \\ A(s_1, x') & A(s_1, s_1) & \dots & A(s_1, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(s_n, x') & A(s_n, s_1) & \dots & A(s_n, s_n) \end{bmatrix} ds_1 \dots ds_n. \quad (5.7)$$

Если $\det(I + A) \neq 0$, то оператор $I + A$ обратим и

$$(I + A)^{-1} = I - \frac{\mathcal{N}}{\det(I + A)}. \quad (5.8)$$

Применим эти определения к оператору $A_i(k) = \check{V}_i r_0(k^2)$, ядерность которого при $\text{Im } k \geq 0$, $k \neq 0$, обеспечивается достаточно быстрым убыванием ядра $\check{V}_i$, и положим

$$\begin{aligned} D_i(k) &= \det(I + \check{V}_i r_0(k^2)), \\ \mathcal{N}_i(k) &= \text{первый минор оператора } \check{V}_i r_0(k^2). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Функции $D_i(k)$ и ядро $\mathcal{N}_i(k)$ аналитичны по k при $\text{Im } k > 0$ и непрерывно продолжаются на вещественную ось. В силу второго резольвентного тождества и (5.8) резольвента $r_i(k^2)$ одномерного оператора $-d^2/dx^2 + \check{V}_i$ выражается через них равенством

$$r_i(k^2) = r_0(k^2) - r_0(k^2) \left(I - \frac{\mathcal{N}_i(k)}{D_i(k)} \right) \check{V}_i r_0(k^2). \quad (5.10)$$

Обозначим далее через $\varphi_i(x, k)$ обобщённые собственные функции, определяемые как решения уравнения Липмана–Швингера

$$\varphi_i(x, k) = e^{ikx} - \iint r_0(x, \tau | k^2 + i0) \check{V}_i(\tau, \tau') \varphi_i(\tau', k) d\tau d\tau', \quad (5.11)$$

однозначно разрешимого в силу $D_i(k) \neq 0$; здесь r_0 — свободная резольвента на прямой. Решения (5.11) равны $s^{(i)}(k)e^{ikx}$ при больших положительных x и $e^{ikx} + r^{(i)}(k)e^{-ikx}$ при больших отрицательных x , где $s^{(i)}$, $r^{(i)}$ — коэффициенты прохождения и отражения i -й парной задачи (верхний индекс в скобках отличает их от коэффициентов s_i в (2.4) и от резольвенты r_i).

Ядро резольвенты выражается через φ_i и D_i следующим образом:

$$r_i(x, x' | k^2) = \frac{D_i(k)}{2ik} \varphi_i(x, -k) \varphi_i(x', k), \quad x < x', \quad (5.12)$$

и симметрично при $x > x'$. Знаменатель $2ik/D_i(k)$ играет здесь роль вронскиана; в локальном случае $D_i = 1/s^{(i)}$ и (5.12) переходит в обычную формулу $\varphi_+\varphi_-/W$.

5.1. Асимптотика ядра Γ_j . Ядро «двухчастичной» резольвенты $\check{R}_i(\check{z}_i, \check{z}'_i|\lambda)$ проще всего рассматривать как свёртку

$$\check{R}_i(\check{z}_i, \check{z}'_i|\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\xi r_i(\check{x}_i, \check{x}'_i|\xi) r_0(\check{y}_i, \check{y}'_i|\lambda - \xi), \quad (5.13)$$

где C — контур вокруг положительной полуоси в стандартном отрицательном направлении, отделяющий точку λ от положительной полуоси. Справедливость (5.13) устанавливается введением спектральных мер операторов соответствующих одномерных задач с применением теории вычетов; существенно, что нелокальность возмущения этому рассуждению не препятствует, поскольку оба оператора самосопряжены.

В связи с положением точек $\check{z}_i$ и $\check{z}'_i$ мы считаем $\check{x}'_i$ и $\check{y}_i - \check{y}'_i$ большими, в то время как $\check{x}_i$ ограничен. Подставляя (5.12) и сворачивая контур, для случая больших положительных $\check{x}'_i$ и $\check{y}_i - \check{y}'_i$ получаем

$$\check{R}_i(\check{z}_i, \check{z}'_i|\lambda) = \frac{-1}{4\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_i(\check{x}_i, -k) D_i(k)}{\sqrt{\lambda - k^2}} e^{ik\check{x}'_i + i\sqrt{\lambda - k^2}(\check{y}_i - \check{y}'_i)} dk, \quad (5.14)$$

где ветвь корня $\sqrt{\lambda - k^2}$ выбирается с положительной мнимой частью. Основной вклад в асимптотику настоящего интеграла вносит точка перевала, превращающаяся в стационарную, когда спектральный параметр λ садится на положительную полуось; эта точка описывается соотношением $\check{x}'_i \sqrt{\lambda - k^2} = k(\check{y}_i - \check{y}'_i)$, откуда для точки перевала k_0 получаем

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{\sqrt{\lambda} \check{x}'_i}{|\check{z}_i - \check{z}'_i|} + O(|\check{z}_i - \check{z}'_i|^{-1}), \\ \sqrt{\lambda - k_0^2} &= \frac{\sqrt{\lambda} (\check{y}_i - \check{y}'_i)}{|\check{z}_i - \check{z}'_i|} + O(|\check{z}_i - \check{z}'_i|^{-1}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

фазовая функция в точке перевала равна $\sqrt{\lambda} |\check{z}_i - \check{z}'_i| + O(1)$, а вторая производная фазовой функции равна $\lambda^{-1/2} |\check{z}_i - \check{z}'_i|^3 (\check{y}_i - \check{y}'_i)^{-2} + O(1)$.

Метод перевала, или стационарной фазы, если λ садится на вещественную ось, даёт асимптотику

$$\begin{aligned} \check{R}_i(\check{z}_i, \check{z}'_i | \lambda) &= \varphi_i(\check{x}_i, -k_0) D_i(k_0) \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi} \sqrt[4]{\lambda}} \\ &\times \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\check{z}_i - \check{z}'_i|}}{\sqrt{|\check{z}_i - \check{z}'_i|}} (1 + O(|\check{z}_i - \check{z}'_i|^{-1})). \end{aligned} \quad (5.16)$$

§6. ИТЕРАЦИИ И ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

6.1. Разложения типа АВ. Нахождение асимптотики ядра произведения $\Gamma_j \Gamma_k$ сводится к изучению интеграла вида

$$v_j(\check{x}_j) \varphi_j \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v_k(\check{x}_k) \varphi_k \exp[i\sqrt{E}(|\check{z}_j - \check{z}_k| + |\check{z}_k - \check{z}'_1|)]}{\sqrt{|\check{z}_j - \check{z}_k| |\check{z}_k - \check{z}'_1|}} d\check{z}_k \quad (6.1)$$

при $\check{y}_j \rightarrow \pm\infty$; ср. [3, (3.6)]. Здесь φ_j, φ_k — обобщённые собственные функции (5.11) соответствующих парных задач, а $E = \operatorname{Re} \lambda$.

Выделение старшего члена проходит без изменений, и $\Gamma_j \Gamma_k = A_{jk} + B_{jk}$, где A_{jk} — оператор ранга два с ядром

$$\begin{aligned} A_{jk}(\check{z}_j, \check{z}'_1) &= v_j(\check{x}_j) \varphi_j(\check{x}_j, 0) |\check{y}_j|^{-1/2} \\ &\times \exp[i|\check{y}_j|\sqrt{E}] (\chi_+(\check{y}_j)\psi_+(\check{z}'_1) + \chi_+(-\check{y}_j)\psi_-(\check{z}'_1)), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\varphi_j(\check{x}_j, 0)$ — решение (5.11) при нулевом импульсе, χ_+ — гладкая функция, равная единице при $y > T + 1$ и нулю при $y < T$, а $\psi_{\pm}$ — функции, описывающие зависимость ядра от второго аргумента. Оценки

$$|\psi_{\pm}(\check{z}_1)| \leq \frac{C}{\sqrt{1 + |\check{z}_1|}}, \quad |B_{jk}(\check{z}_j, \check{z}'_1)| \leq \frac{C |v_j(\check{x}_j)|}{(1 + |\check{z}_j|)^{3/2} (1 + |\check{z}'_1|)^{1/2}} \quad (6.3)$$

также остаются в силе без изменений.

Поскольку взаимодействий между экранами не более трёх, рассмотрение доводится до произведений троек; повторяя аргументацию [3, §4.2], получаем

$$\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k = A_{ijk} + B_{ijk}, \quad (6.4)$$

где A_{ijk} конечного ранга, а B_{ijk} компактен.

6.2. Обращение $I + \Gamma^3$. Обозначим через Γ операторную матрицу размера 3×3 , у которой диагональные элементы равны нулю, а все внедиагональные элементы i -й строки равны Γ_i . Альтернирующий метод Шварца сводит построение резольвенты $\check{R}$ к обращению оператора $I + \Gamma$, а в силу тождества $(I + \Gamma)^{-1} = (I - \Gamma + \Gamma^2)(I + \Gamma^3)^{-1}$ — к обращению оператора $I + \Gamma^3$, компоненты которого суть суммы произведений вида $\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k$. Соотношение (6.4) влечёт представление

$$I + \Gamma^3(\lambda) = I - A(\lambda) - B(\lambda), \quad (6.5)$$

где A конечного ранга, а B компактен. Обращение проводится в два шага, оба из которых суть применения теории Фредгольма.

Во-первых, оператор $I - A$ конечного ранга, и его обращение сводится к решению конечной системы линейных уравнений, разрешимой ввиду малости соответствующих скалярных произведений при больших T .

Во-вторых, для оператора $I - B$ применима альтернатива Фредгольма, и обратимость равносильна отсутствию у B собственного значения, равного единице. Последнее устанавливается так же, как в [3, §4.3]. Обозначим через $\tilde{V}$ сумму потенциалов $\tilde{V}_i$, умноженную на гладкую срезку, равную единице в круге радиуса T и нулю вне круга радиуса $T + 1$, и через $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_i$ — отвечающие ей операторы отражения. Из равенства

$$(-\Delta - \lambda)(-\Delta + \tilde{V} - \lambda - i0)^{-1} = I - \tilde{\Gamma}(\lambda + i0) = (I + \tilde{V}(-\Delta - \lambda)^{-1})^{-1} \quad (6.6)$$

следует, что компактный оператор $\tilde{V}(-\Delta - \lambda)^{-1}$ не имеет единицы собственным значением, а суммирование соотношений $\tilde{\Gamma}_i(\phi_j + \phi_k) = -\phi_i$ по чётным перестановкам приводит к противоречию. Здесь используется неотрицательность v_i .

Посадка спектрального параметра на вещественную ось опирается на следующее обстоятельство. Сильного предела у $\Gamma_i(\lambda)$ нет: для функции ϕ из пространства $H^{\mu, \theta}$, заданной в импульсном представлении, $\Gamma_i(\lambda)\phi(q_i) \sim f(q_i)/\sqrt{p_i^2 - \lambda}$, где f — гёльдерова вплоть до вещественных λ функция. Однако произведение $(-\Delta - \lambda)^{-1}\Gamma_i(\lambda)$, в котором порядок множителей существен, слабый предел имеет:

$$\int dp_i \int dk_i \frac{f(q_i) \phi(q_i)}{(p_i^2 + k_i^2 - \lambda)\sqrt{p_i^2 - \lambda}} \sim \int \frac{g(p_i) dp_i}{p_i^2 - \lambda}, \quad (6.7)$$

и последний интеграл при гёльдеровой g имеет предел при $\text{Im } \lambda \downarrow 0$. Именно это обстоятельство определяет выбор пространств гёльдеровых функций $H^{\mu, \theta}$ (показатель Гёльдера μ , вес θ на бесконечности, см. [3]): на них сингулярный интеграл Гильберта определён как ограниченный оператор. Аналитический характер корня $\sqrt{p_i^2 - \lambda}$ здесь существен: в ряде Неймана степени оператора $v_i(-\Delta - \lambda)^{-1}$ наращивают особенность, и предельный переход невозможен; переход к итерациям с попарно различающимися индексами соседних операторов этого избегает.

§7. КООРДИНАТНАЯ АСИМПТОТИКА ЯДРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ В НОВЫХ КООРДИНАТАХ

Собирая результаты, приходим к следующему описанию резольвенты $\check{R}(\lambda) = (\check{H} - \lambda)^{-1}$.

Теорема 7.1. *Резольвента $\check{R}(\lambda)$ имеет слабый предел в $H^{\mu, \theta}$ при $\text{Im } \lambda \downarrow 0$ и $0 < c_1 \leq \text{Re } \lambda \leq c_2 < \infty$, и этот предел описывается равенством*

$$\begin{aligned} \check{R}(E + i0) = & (-\Delta - E - i0)^{-1} \left[I - \sum_j \Gamma_j(E + i0) \right] \\ & + \sum_{i \neq j} (-\Delta - E - i0)^{-1} \Gamma_i(E + i0) \Gamma_j(E + i0) \\ & - \sum_{\substack{i \neq j \\ j \neq k}} (-\Delta - E - i0)^{-1} \Gamma_i(E + i0) \Gamma_j(E + i0) \Gamma_k(E + i0) \\ & - \tilde{A}(E + i0) - \tilde{B}(E + i0), \end{aligned} \quad (7.1)$$

где Γ_j — операторы отражения (5.3), $\tilde{A}$ — оператор конечного ранга, а $\tilde{B}$ — компактный оператор с быстро убывающим ядром.

В координатном представлении при $|\check{z}_1| \rightarrow \infty$ и фиксированном $\check{z}'_1$ получаем

$$\begin{aligned} \check{R}(\check{z}_1, \check{z}'_1 | E + i0) = & \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi} E^{1/4}} \frac{e^{i\sqrt{E}|\check{z}_1|}}{\sqrt{|\check{z}_1|}} \times \\ & \times \left[g(\check{z}_1/|\check{z}_1|, \check{z}'_1) + \sum_{j=1}^3 \sum_{\pm} \varphi_j(\check{x}_j, 0) C_j^{\pm}(\check{z}'_1) \chi_{+}(\pm \check{y}_j) \right] + o(|\check{z}_1|^{-1/2}), \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $\varphi_j(\check{x}_j, 0)$ — решения (5.11) при нулевом импульсе, χ_+ — срезка из §6.1, g — гладкая по угловой переменной амплитуда, отвечающая трёхчастичному процессу и происходящая от оператора $\tilde{B}$, а слагаемые второй группы с амплитудами $C_j^\pm$ отвечают двухчастичным процессам рассеяния, включая многократное перерассеяние, происходят от $\sum_j \Gamma_j$, $\sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j$, $\sum_{i \neq j \neq k} \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k$ и $\tilde{A}$, и в смысле слабых асимптотик по угловой переменной сингулярны. Обе группы убывают как $|\check{z}_1|^{-1/2}$; различие состоит в наличии или отсутствии сингулярного по угловой переменной коэффициента, что и составляет, как отмечено в [3, §1], основную трудность одномерного случая. Собственные функции абсолютно непрерывного спектра восстанавливаются по формуле

$$\check{R}(\check{x}_1, \check{y}_1 | E \pm i0) \underset{\check{y}_1 \rightarrow \infty}{\sim} \check{\psi}^\pm(\check{x}_1, E) \frac{e^{\pm i\sqrt{E}|\check{y}_1|}}{\sqrt{|\check{y}_1|}}. \quad (7.3)$$

Отметим, что в исходном координатном представлении, то есть после применения обратного преобразования $\check{\mathcal{F}}_C^\dagger$, расходящаяся волна приобретает кулоновскую логарифмическую фазу:

$$\frac{e^{i\sqrt{E}|\check{z}_1|}}{\sqrt{|\check{z}_1|}} \mapsto \frac{\exp[i\sqrt{E}|z_1| + i\gamma_c \ln |z_1|]}{\sqrt{|z_1|}}, \quad (7.4)$$

где

$$\gamma_c = -\frac{\alpha |z_1|}{2\sqrt{E} |x_1|}$$

— кулоновский параметр, отвечающий направлению $z_1/|z_1|$; при $x_1 \rightarrow 0$, то есть для направлений вдоль экрана заряженной пары, он неограниченно растёт. Формула (7.4) воспроизводит формулу (7) работы [12], в которой для одной заряженной пары остаётся одно слагаемое. Тем самым назначение построенного преобразования состоит в том, чтобы снять кулоновскую логарифмическую фазу и свести задачу к эффективно короткодействующей.

§8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача рассеяния трёх одномерных квантовых частиц с быстро убывающими парными потенциалами отталкивания и одним дополнительным парным потенциалом, убывающим на бесконечности кулоновским образом. Предложен подход, позволяющий перенести на этот случай технику альтернирующего метода Шварца, развитую для быстро убывающих потенциалов.

Основным инструментом служит кулоновское преобразование Фурье $\check{F}_C$ — композиция разложения по собственным функциям кулоновской парной задачи и стандартного обратного преобразования Фурье. Показано, что это преобразование унитарно и факторизуется: оно действует нетривиально лишь по координате x_1 заряженной пары и тождественно по координате y_1 . Благодаря этому образы $\check{V}_i$ всех трёх быстро убывающих парных потенциалов выражаются через одно и то же одномерное ядро K , а различие между каналами сводится к подстановке аргумента.

Исследование ядра K показало, что на асимптотической ветви оно отличается от дельта-функции на поправку, сосредоточенную в окрестности диагонали ширины $O(T^{-1})$ и убывающую вне неё быстрее любой степени. В новом представлении парные взаимодействия описываются нелокальными, но быстро убывающими операторами, носители главных членов которых образуют ту же систему трёх экранов, пересекающихся под углами $2\pi/3$, что и в задаче с быстро убывающими потенциалами.

Для полученной задачи реализована схема альтернирующего метода Шварца. Парные резольвенты построены средствами теории Фредгольма: определитель Фредгольма парной подсистемы выполняет роль вронскиана, недоступного для нелокальных потенциалов. Для операторов отражения и их итераций до третьего порядка включительно получены разложения на операторы конечного ранга и компактные операторы, обоснован предельный переход к вещественным значениям спектрального параметра и выписана координатная асимптотика ядра резольвенты в новых координатах. При обратном преобразовании расходящаяся волна приобретает кулоновскую логарифмическую фазу, что согласуется с результатами дифракционного подхода.

Естественным продолжением работы является случай нескольких кулоновских взаимодействий на бесконечности, для которого необходимо построение соответствующих преобразований, обеспечивающих редукцию задачи к эффективно короткодействующей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трёх частиц*. — Труды Математического института АН СССР **69** (1963), 3–122.

2. А. М. Будылин, С. Б. Левин, *К вопросу о построении асимптотики ядра резольвенты оператора Шрёдингера в задаче рассеяния трёх одномерных квантовых частиц, взаимодействующих посредством финитных парных отталкивательных потенциалов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **438** (2015), 95–103.
3. И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин, *Задача рассеяния нескольких одномерных квантовых частиц. Структура и асимптотика предельных значений ядра резольвенты*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **461** (2017), 14–51.
4. А. М. Будылин, С. Б. Левин, В. О. Торопов *О задаче рассеяния трёх одномерных короткодействующих квантовых частиц при наличии связанных состояний в парных подсистемах*. — Зап. научн. семина ПОМИ **541** (2025), 51–71.
5. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *Описание парных потенциалов, для которых рассеяние в системе трёх одномерных частиц свободно от дифракционных эффектов*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **84** (1979), 16–22.
6. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трёх одномерных частиц*. — Проблемы математической физики **9** (1979), 14–30.
7. V. S. Buslaev, S. B. Levin, *Asymptotic behavior of the eigenfunctions of the many-particle Schrödinger operator. I. One-dimensional particles*. — Amer. Math. Soc. Transl. (2) **225** (2008), 55–71.
8. В. С. Буслаев, С. Б. Левин, *Система трёх трёхмерных заряженных квантовых частиц: асимптотическое поведение собственных функций непрерывного спектра на бесконечности*. — Функци. анализ прилож. **46** (2012), 83–88.
9. С. Б. Левин, *О дифракционном подходе в задаче рассеяния трёх заряженных квантовых частиц*. — Матем. заметки **108** (2020), 469–473.
10. V. S. Buslaev, S. B. Levin, P. Neittaanmäki, T. Ojala, *New approach to numerical computation of the eigenfunctions of the continuous spectrum of three-particle Schrödinger operator. I. One-dimensional particles, short-range pair potentials*. — J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 285205.
11. В. С. Буслаев, Я. Ю. Коптелов, Левин С. Б., Д. А. Стрыгина, *Численное построение собственных функций непрерывного спектра трёхчастичного оператора Шрёдингера: три частицы на оси с короткодействующими парными потенциалами*. — Ядерная физика. **76** (2013), 236–247. (Англ. пер., Phys. Atom. Nuclei. **76**, No. 2 (2013), 208–218.)
12. В. С. Буслаев, С. Б. Левин, *Асимптотическое поведение собственных функций трёхчастичного оператора Шрёдингера. II. Одномерные заряженные частицы*. — Алгебра и анализ **22**, No. 3 (2010), 60–79.
13. С. Б. Левин, *Об асимптотическом поведении собственных функций непрерывного спектра на бесконечности для системы трёх трёхмерных одноимённо заряженных квантовых частиц*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **451** (2016), 79–115.
14. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве*. Наука, М. (1965).
15. B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*. 2nd ed. Providence: AMS (2005). (Math. Surveys Monogr. V. 120.)
16. Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния*. Изд-во СПбГУ, СПб. (1994).

Levin S. B., Toropov V. O. On the scattering problem of three one-dimensional quantum particles with short-range pairwise potentials and one additional repulsive pairwise potential slowly decreasing at infinity in the Coulomb manner.

We consider the scattering problem of three one-dimensional quantum particles interacting pairwise via rapidly decaying repulsive potentials, with two of them additionally interacting via a repulsive potential, regular at zero, that decays at infinity in a Coulomb manner. A composition of the Coulomb and standard Fourier transforms is constructed, which translates the Hamiltonian into a new coordinate representation. We prove that this transformation is unitary and acts nontrivially only on the coordinate of the charged pair, while the images of all three rapidly decaying pairwise potentials are expressed in terms of a single one-dimensional kernel. We show that this kernel differs from the delta function by a correction concentrated in the vicinity of the diagonal of width $O(T^{-1})$, where T is a large parameter. Thus, in the new representation, pairwise interactions are described by nonlocal operators, but with kernels that decay rapidly at infinity with respect to both variables, and the supports of their main terms form the same system of three intersecting screens as in the problem with rapidly decaying potentials. For the resulting problem, we realize the alternating Schwarz method: pairwise resolvents are constructed using Fredholm determinants, the iterations of reflection operators up to and including the third order are studied, and the limiting transition of the spectral parameter to the limit values of the absolutely continuous spectrum is justified. We write out the coordinate asymptotics of the resolvent kernel in the new coordinates and show how the Coulomb logarithmic phase arises during the inverse transformation.

Санкт-Петербургский
государственный университет;
Национальный исследовательский университет ИТМО,
Санкт-Петербург, Россия

Поступило 29 сентября 2026 г.

E-mail: s.levin@spbu.ru

E-mail: st076443@student.spbu.ru