Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

Д. В. Кориков

О НЕГОМЕОМОРФНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С БЛИЗКИМИ ДН-ОПЕРАТОРАМИ

Устойчивость определения поверхности с краем по её ДН-оператору

Пусть (M, g) – ориентируемая поверхность (гладкое двумерное риманово многообразие) рода m с краем $(\Gamma; dl)$ (в дальнейшем мы считаем, что Γ диффеоморфен окружности, а элемент длины dl на ней индуцирован метрикой g). Введем оператор Лапласа–Бельтрами Δ_g и обозначим через u^f гармоническое продолжение функции $f \in C^\infty(\Gamma)$, заданной на крае, внутрь (M, g). Пусть ν – вектор единичной внешней нормали на Γ. *Оператор "Дирихле-в-Нейман"* (ДН-оператор) Λ поверхности (M, g) определяется правилом $\Lambda f := \partial_\nu u^f|_\Gamma$.

Теперь пусть (M', g') – другая поверхность с краем (Γ', dl'), оператором Лапласа–Бельтрами $\Delta_{g'}$ и ДН-оператором $\Lambda' : f' \mapsto \partial_{\nu'} u^{'f'}|_{\Gamma'}$, где $u^{'f'}$ – гармоническое продолжение $f' \in C^\infty(\Gamma'; \mathbb{R})$ внутрь (M', g') и ν' – единичная внешняя нормаль. Если существует конформный диффеоморфизм $\beta : M \to M'$, $\beta^* g' = \rho g$, то гармонические функции и ДН-операторы поверхностей (M, g) и (M', g') связаны соотношениями

$$\beta^*[u^{'f'}] = u^{\beta^* f'}, \qquad \Lambda' = \beta^{*-1} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Lambda \beta^*, \tag{1}$$

где $\beta^* u' := u' \circ \beta$. В частности, $\Lambda' = \Lambda$ если $(\Gamma', dl') = (\Gamma, dl)$ и β не двигает точки Γ. В силу известного результат Лассаса и Улмана [4] также верно обратное, т.е. из равенств $\Gamma = \Gamma'$ и $\Lambda' = \Lambda$ вытекает существование конформного диффеоморфизма β между (M, g) и (M', g') который не двигает точки Γ.

Ключевые слова: электроимпедансная томография, ДН-операторы, вырождение поверхностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение No. 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН)..

В [6, 7] доказано, что из близости ДН-оператора Λ' поверхности (M', g') (того же рода и с тем же краем, что и (M, g)) к ДН-оператору Λ по операторной норме следует близость конформных классов $\tau' := [(M', g')]$ и $\tau := [(M, g)]$ поверхностей (M', g') и (M, g) по расстоянию Тейхмюллера d_T; кроме того, в [11] выведены оценки

$$d_T(\tau', \tau) \leqslant c(\Lambda)\|\Lambda' - \Lambda\|_{B(H^1\Gamma, L_2(\Gamma)}.$$

Таким образом, если Λ' близок к Λ и M' гомеоморфна M, то существует такие диффеоморфизм $\beta : M \mapsto M'$ и положительная функция ρ' на M', что β не двигает точки $\Gamma = \Gamma'$ и имеет место близость метрик

$$\|\beta^*(\rho' g') - g\|_{C(M)} \leqslant c(\Lambda)\|\Lambda' - \Lambda\|_{B(H^1\Gamma, L_2(\Gamma; dl)}.$$

Неустойчивость топологии поверхности относительно малых возмущений её ДН-оператора

Итак, конформный класс поверхности непрерывно зависит от её ДН-оператора при условии, что топология поверхности фиксирована. В то же время сама топология поверхности неустойчива относительно малых возмущений её ДН-оператора [10]. Именно, вырезая малые дырки во внутренности поверхности и затем присоединяя к ней малые/тонкие ручки или листы Мёбиуса, можно получить поверхность, ДН-оператор которой сколь угодно близок (по операторной норме) к ДН-оператору исходной поверхности. Отметим, что невозможно понизить род поверхности или сделать из неориентируемой поверхности ориентируемую без существенного (неуменьшаемого по норме) возмущения ДН-оператора. Более детально устойчивость/неустойчивость топологии поверхности при возмущениях ДН-оператора обсуждается в предложениях 5.5, 6.2 и теореме 6.3, [11].

Целью этой заметки является изучения обратного вопроса: следует ли из близости ДН-оператора Λ' топологически возмущенной поверхности (M, g) к ДН-оператору Λ_* исходной поверхности (M_*, g_*), что "лишние" ручки на (M, g) отделены от внешней части поверхности (содержащей край) короткими замкнутыми кривыми? Поскольку ДН-оператор не меняется при раздутии "малых" ручек путем умножения метрики на конформный множитель (большой на ручках и равный единице вблизи края), изучаемый вопрос корректно поставлен только если на M выбрана некоторая "каноническая" метрика (принадлежащая тому же конформному классу $[g]$, что и исходная метрика g), в которой считается длина кривых.

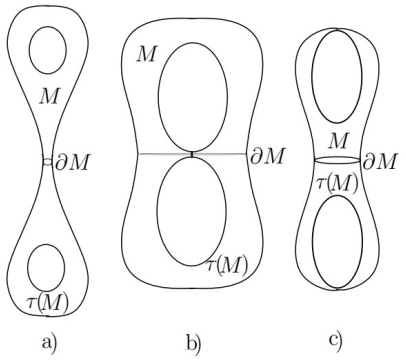


Рис. 1. Различные типы вырождения $(2M, h)$ при $\Lambda \to \Lambda_*$ в роде 2.

Естественным выбором такой канонической метрики является *гиперболическая метрика* на M – метрика $h \in [g]$ постоянной гауссовой кривизны $K = -1$ на M в которой край $\partial M =: \Gamma$ является геодезическим. Такая метрика строится следующим образом. В дальнейшем мы считаем, что все поверхности ориентируемы и что любая поверхность M наделена комплексной структурой (максимальным биголоморфным атласом), согласованной с конформной структурой $[g]$ и выбором ориентации на M. Склеивая M с её копией, наделенной противоположной ориентацией, мы получаем *дубль Шоттки* $2M$ поверхности M – риманову поверхность без края, наделенную антиголоморфной инволюцией τ, меняющей местами соответствующие точки оригинала и копии так, что $2M/\tau \cong M$ и ∂M совпадает с множеством неподвижных точек τ. Поверхность $2M$ допускает единственную (гиперболическую) метрику h постоянной гауссовой кривизны -1, совместимую с комплексной структурой на ней. Отсюда $\tau'^* h = h$, т.е. инволюция на дубле является изометрией $(2M, h)$. Ввиду этой симметрии дубля, геодезическая кривая в $(2M, h)$, выходящая из любой точки $x \in \partial M \subset 2M$ в направлении касательного вектора $k \in T_x \partial M$, не покидает множество ∂M. Таким образом, край ∂M является геодезической кривой в $(2M, h)$ и сужение h на M (по-прежнему обозначаемое через h) и есть искомая гиперболическая метрика на $M \subset 2M$.

(Отметим, что вложение (Γ, dl) в $2M$ является C^{1+r}-гладким если метрика g является C^r-гладкой (где $r \in (1,2)$). В самом деле, вблизи Γ можно выбрать голоморфные локальные координаты $z(x) := iG(x,y) - \int_\cdot^x \star d_x G(x,y)$, где $y \in M\backslash\Gamma$, G – функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа–Бельтрами на (M,g) и $\star$ – оператор Ходжа на (M,g). Поскольку g является C^r-гладкой, функция Грина $G(\cdot,y)$ является C^{1+r}-гладкой вне y ввиду шаудеровских локальных оценок решений эллиптических краевых задач (см. теорему 6.2 и лемму 6.4, [3]); тогда таковой является и функция z. В то же время продолжение координат z на дубль $2M$ по четности $z(\tau(x)) = \overline{z(x)}$ доставляет голоморфные координаты на $2M$, которые являются C^{1+r}-гладкими (относительно исходной гладкой структуры) на каждой поверхности M, $\tau(M)$. Аналогично, вложение (Γ, dl) в $2M$ является C^∞-гладким, если g является C^∞-гладкой.)

Спектром длин $\mathrm{Sp}(2M)$ на $2M$ называется набор длин всех замкнутых геодезических в гиперболической метрике на $2M$. Обозначим через $\mathrm{Sys}(2M)$ инфимум множества $\mathrm{Sp}(2M)$. Результатом этой заметки является следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\{(M_k, g_k)\}_{k=1}^\infty$ – последовательность поверхностей рода m с общим (связным) краем (Γ, dl); обозначим через Λ_k ДН-оператор (M_k, g_k), а через $2M_k$ – дубль M_k, наделенный гиперболической метрикой h_k. Предположим, что*

$$\|\Lambda_k - \Lambda_*\|_{B(H^{1/2}(\Gamma);H^{-1/2}(\Gamma))} \to 0, \tag{2}$$

где Λ_* – ДН-оператор поверхности (M_*, g_*) меньшего рода $m_* < m$ с тем же краем (Γ, dl). Тогда

$$\mathrm{Sys}(2M_k) \to 0.$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Пусть Λ близок к ДН-оператору поверхности меньшего рода. Тогда на дубле $(2M, h)$ существует замкнутая геодезическая $\mathscr{L}$ малой длины L; без ограничения общности можно считать $\mathscr{L}$ простой. Ввиду леммы о воротнике (см, например, формулу (A) в [8], лемму 13.6, [9], или доказательство следствия 4.4, [18]) метрическая $\mathbf{d}$-окрестность $\mathscr{R}(\mathscr{L})$ кривой $\mathscr{L}$ в $(2M, h)$ биголоморфно эквивалентна тонкому цилиндру $(0,1) \times \mathbb{T}_r$, где $\mathbb{T}_r = \mathbb{R}/2\pi r\mathbb{Z}$ и

$$\mathbf{d} = \operatorname{arcsinh}\Big(1\Big/\sinh\Big(\frac{L}{2}\Big)\Big) \simeq |\log(L)| \gg 1, \qquad r = \frac{L}{2\pi^2} \ll 1.$$

Поскольку суммарный ток, текущий через кривую является конформным инвариантом, это означает, что пересечение $\mathscr{R}(\mathscr{L})$ с $M \subset 2M$ является "тонкой" областью, которая подавляет текущие через неё токи, тем самым эффективно понижая наблюдаемый с границы род поверхности при изучении её структуры методами электроимпедансной томографии (см. рис. 1).

О связи между спектром преобразования Гильберта поверхности с краем и спектром длин её дубля

Пусть (M, g) – гладкая поверхность со связным краем (Γ, dl) и ДН-оператором Λ. Пусть (Γ, dl) ориентирована гладким полем единичных касательных векторов γ; далее мы предполагаем, что ориентация на (M, g) согласована с ориентацией края (Γ, dl) так, что пара (ν, γ) положительно ориентирована (здесь ν – внешняя нормаль). Обозначим через ∂_γ оператор дифференцирования по длине вдоль Γ в направлении γ и введем оператор ∂_γ^{-1}, который аннулируется на константах и обращает ∂_γ на $L_2(\Gamma; dl) \ominus \mathbb{C} = \partial_\gamma H^1(\Gamma)$. Оператор

$$H := \partial_\gamma^{-1}\Lambda$$

называется *преобразованием Гильберта* поверхности (M, g). Легко видеть, что H продолжается по непрерывности до оператора в $H^{1/2}(\Gamma)$. Имеется следующая связь между H и топологией и комплексной структурой на (M, g) (см. Лемму 1, [5], см. также Лемму 2.1, [12]). Сужая условия Коши–Римана $d\Im w = \star d\Re w$ на край Γ, получаем уравнения $\partial_\gamma \Im\eta = \Lambda\Re\eta$, $\partial_\gamma \Re\eta = -\Lambda\Im\eta$, где $\eta = w|_\Gamma$. Интегрирование этих уравнений дает $\Im\eta = H\Re\eta + \text{const}$, $(H^2 + I)\Re\eta = \text{const}$. Таким образом, преобразование Гильберта связывает вещественные и мнимые части граничных следов голоморфных функций на поверхности. Собственные функции H, отвечающие собственным значениям $-i$ $(+i)$ есть все граничные следы η голоморфных (антиголоморфных) функций w на (M, g), такие, что $\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $\int_\Gamma \eta dl = 0$. Вне точек $\lambda = \pm i$, спектр H дискретен и состоит из нуля ($\mathrm{Ker} H = \mathbb{C}$) и (полупростых) собственных значений

$$\lambda_{\pm k}(H) = \pm\mu_k i(H), \qquad 0 < \mu_1(H) \leqslant \ldots \leqslant \mu_m(H) < 1,$$

суммарной кратности $2m$, где m – род M. Соответствующие собственные функции $\eta_{\pm k}$ являются C^∞-гладкими если C^∞-гладкой является

метрика g. Отметим, что смена ориентации на M приводит к изменению знака H в то время, как его спектр не меняется.

Непосредственно из определения вытекает конформная инвариантность преобразования Гильберта: если $\beta : (M, g) \to (M', g')$ – конформный сохраняющий ориентацию (не обязательно C^∞-гладкий) диффеоморфизм, $\beta^* g' = \rho g$, то из (1) и формулы $\partial_{\gamma'} = \beta^{*-1} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_\gamma \beta^*$, связывающей дифференцирования вдоль $(\Gamma' = \partial M', dl' = g'|_{T^*\Gamma' \otimes T^*\Gamma'})$ и (Γ, dl), следует, что преобразования Гильберта H и H' поверхностей (M, g) и (M', g') связаны соотношением

$$H' f = \beta^{*-1} H \beta^* f + \mathrm{const}(f). \tag{3}$$

Появление лишнего постоянного члена в (3) связано с тем, что оператор замены переменной $\beta^{*-1} : L_2(\Gamma, dl) \mapsto L_2(\Gamma', dl')$, вообще говоря, не изометричен и потому не переводит $L_2(\Gamma, dl) \ominus \mathbb{C}$ (образ ∂_γ^{-1}) в $L_2(\Gamma', dl') \ominus \mathbb{C}$ (образ $\partial_{\gamma'}^{-1}$). В частности, спектр H является конформным инвариантом: в самом деле, $H\eta_k = \lambda_k(H)\eta_k$ $(\lambda_k \neq 0)$ если и только если $H'(\beta^{*-1}\eta_k + \mathrm{const}(\eta_k)/\lambda_k(H)) = \lambda(\beta^{*-1}\eta_k + \mathrm{const}(\eta_k)/\lambda_k(H))$.

В частности, вышеописанные спектральные свойства H остаются верными даже если метрика g на M лишь C^r-гладкая $(r \in (1, 2))$. В самом деле, как показано выше, в этом случае имеется C^{r+1}-гладкое вложение β поверхности (M, g) в ее дубль $2M$ и, таким образом, соотношение (3) выполнено для преобразования Гильберта H' вложенной поверхности $\beta(M)$ с (C^∞-гладким) краем $\partial\beta(M)$.

Поскольку полная кратность отличных от $\pm i, 0$ собственных значений $\lambda_k(H)$ оператора H совпадает с удвоенным родом m поверхности (M, g), пара $\lambda_{\pm m}$ должна стремиться $\pm i$, соответственно, если поверхность вырождается (например, если одна из ручек на ней становится малой, как в [10]). Ниже мы доказываем, что обратное утверждение тоже верно в следующем смысле.

Предложение 2. *Пусть $\{(M_k, g_k)\}_{k=1}^\infty$ – последовательность поверхностей рода m с общим (связным) краем (Γ, dl) и пусть H_k и $(2M_k, h_k)$ есть преобразование Гильберта и дубль поверхности (M_k, g_k) (где h_k – гиперболическая метрика). Обозначим через $\lambda_m(H_k) \neq i$ ближайшее к i собственное значение оператора H_k. Тогда*

$$\lambda_m(H_k) \to i \;\Rightarrow\; \mathrm{Sys}(2M_k) \to 0.$$

Отметим, что в частном случае $m_0 = 0$, $m = 1$ предложение 2 доказано в [13] с помощью явных формул для вычисления матриц b-периодов дублей $2M_k$ в терминах их преобразований Гильберта H_k, выведенных в [12]. предложение 1 является следствием предложения 2. В самом деле, условие (2) и определение преобразований Гильберта дают сходимость

$$\|H_k - H_*\|_{B(H^{1/2}(\Gamma))} \to 0, \tag{4}$$

где $H_* = \partial_\gamma^{-1}\Lambda_*$ – преобразование Гильберта (M_*, g_*). Поскольку дискретный спектр ограниченного оператора в банаховом пространстве устойчив к малым (по операторной норме) возмущениями (см. IV.3.5, Като [15]), из (4) следует, что любая область $\mathscr{D}$, замыкание которой не пересекается с существенным спектром $\{-i, +i\}$ оператора H_* содержит собственные значения H_k той же полной кратности $2m_*$, что и у H_*, при достаточно больших $k > k(\mathscr{D})$. Таким образом, оставшиеся собственные значения $\lambda_{\pm(m_*+1)}(M_k), \ldots, \lambda_{\pm m}(M_k)$ стремятся к $\pm i$, соответственно.

Доказательство предложения 2. Мы доказываем предложение 2 методом от противного. Предположим, что $\lambda_m(H_k) \to i$, но $\mathrm{Sys}(2M_k) \not\to 0$; переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $\mathrm{Sys}(2M_k) \geqslant \epsilon$ для всех k, где $\epsilon > 0$. Обозначим через $\mathcal{M}_m(\epsilon)$ пространство римановых поверхностей рода m со связными C^∞-гладкими краями, дубли $2M$ которых удовлетворяют неравенству $\mathrm{Sys}(2M) \geqslant \epsilon$; тогда $\{M_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{M}_m(\epsilon)$.

1) Напомним известный критерий компактности Мамфорда (Следствие 3, [16]): для любых $\epsilon > 0$, $g > 1$ подмножество

$$\{[X] \in \mathcal{M}_g \mid \mathrm{Sys}(X) > \epsilon\}$$

пространства $\mathcal{M}_g$ модулей римановых поверхностей рода g без края компактно. Мы будем использовать следующее обобщение этого критерия на случай общих многообразий с краем, полученное в теореме 3.1, [1]. В окрестности точки x в d-мерном C^∞-гладком компактном связном римановом многообразии (M, g) (с пустым или C^∞-гладким краем), введем геодезические координаты α_x правилом $\alpha_x(y) := k$, где $k \in T_xM$ и $y = \exp_x(k)$ – конец геодезического сегмента $\gamma_{x,k} : [0, 1] \to M$ в (M, g), выходящего из $x = \gamma_{x,k}(0)$ в направлении касательного вектора $k = [d\gamma_{x,k}/dt](0)$. Наибольшее $r \geqslant 0$, при котором α_x доставляет вложение метрической окрестности $\mathrm{dist}_g(y, x) < r$ в T_xM, называется *радиусом инъективности* (M, g) в точке x; его супремум по всем

$x \in M$ обозначается через $\iota_{(M,g)}$. Если $\partial M \neq \varnothing$, то мы также вводим нормальные полугеодезические координаты $\alpha_{\partial M}$ в окрестности ∂M правилом $\alpha_{\partial M}(y) := n$, где вектор $n \in N_x\partial M \subset N\partial M$ нормален к ∂M и y есть конец геодезического сегмента $\gamma_{x,n} : [0,1] \to M$ in (M,g) с начальной точкой x и начальным касательным вектором n. *Граничный радиус инъективности* $\iota^b_{(M,g)}$ есть наибольшее r, при котором $\alpha_{\partial M}$ доставляет вложение приграничного слоя $\mathrm{dist}_g(y,\partial M) < r$ в $N\partial M$. Тогда для любых $R_0, H_0, \iota_0, D_0 > 0$ множество $\mathcal{M}(d, R_0, H_0, \iota_0, D_0)$ всех C^∞-гладких d-мерных многообразий (M,g) удовлетворяющих условиям

$$\|\mathrm{Ric}_{(M,g)}\|_{L^\infty(M)},\ \|\mathrm{Ric}_{(\partial M, g|_{T\partial M})}\|_{L^\infty(\partial M)} \leqslant R_0,\ \ \|H_{\partial M}\|_{Lip(\partial M)} \leqslant H_0, \tag{5}$$

$$\iota_{(M,g)},\ \iota_{(\partial M, g|_{T\partial M})}, \iota^b_{(M,g)} \geqslant \iota_0, \qquad \mathrm{diam}(M,g) \leqslant D_0 \tag{6}$$

(где Ric – тензор Риччи (M,g), $|\mathrm{Ric}_M| := \sqrt{R_{ij}R^{ij}}$ и $H_{\partial M}$ – средняя кривизна ∂M) прекомпактно в C^r-топологии $(0 < r < 2)$, т.е. любая последовательность в $\mathcal{M}(n, r, R_0, H_0, \iota_0, D_0)$ содержит такую подпоследовательность $\{(M_j, g_j)\}_{j=1}^\infty$, что для неё существуют такие многообразие (M_∞, g_∞) и диффеоморфизмы $\beta_j : M_\infty \to M_j$ класса C^r, что $\beta_j^* g_j \to g_\infty$ в $C^r(M_\infty, T^*M_\infty \otimes T^*M_\infty)$. Отметим, что само предельное многообразие M_∞ можно считать C^∞-гладким (см., например, теорему 5.11, [17]) в то время, как $g_\infty \in \cap_{0<r<2} C^r(M_\infty, T^*M_\infty \otimes T^*M_\infty)$ не зависит от r.

Отсюда немедленно вытекает следующее обобщение критерия Мамфорда. Предположим, что метрика на каждой $M \in \mathcal{M}_m(\epsilon)$ получается сужением на M гиперболической метрики h на её дубле $2M$. Ввиду связи $\mathrm{Ric}_{(M,g)} = K_g g$ между скалярной кривизной и кривизной Риччи, справедливой в двумерном случае, имеем $\mathrm{Ric}_{(M,h)} = -h$ и $\|\mathrm{Ric}_M\|^2_{L^\infty(M)} = 2$. В то же время в размерности 1 кривизна Риччи всегда нулевая $|\mathrm{Ric}_{(\partial M, h|_{T\partial M})}| = 0$ и, поскольку кривая ∂M геодезическая в гиперболической метрике, её средняя кривизна также равна нулю (см. теорему 10.5.1, [2]). Итак, условия (5) выполнены при $R_0 = \sqrt{2}$ и $H_0 = 0$. Далее, пусть τ – антиголоморфная (следовательно, изометрическая) инволюция на дубле $2M$. Поскольку на гиперболической полуплоскости (универсальное накрытие $2M$) любые две геодезические не могут пересекаться более чем в одной точке, любые две

геодезические в $2M$ с общими концами образуют нестягиваемую петлю. Аналогично, на поверхностях отрицательной кривизны отсутствуют сопряженные точки. Тем самым радиус инъективности $2M$ есть просто половина длины кратчайшей замкнутой геодезической на $2M$, $\iota_{(2M,h)} = \mathrm{Sys}(2M)/2$, откуда $\iota_{(M,h)} \geqslant \iota_{(2M,h)} \geqslant \epsilon/2$. Очевидно, что $\iota_{(\partial M, h|_{T\partial M})} \geqslant \mathrm{Sys}(2M)/2 \geqslant \epsilon/2$ поскольку край ∂M геодезический в $(2M, h)$. Далее, если L_1 и L_2 – два геодезических сегмента, выходящих в нормальном направлении из точек $x_1 \in \partial M$ и $x_2 \in \partial M$, соответственно, и заканчивающихся в общей точке x, то L_1, L_2 и $\tau(L_1), \tau(L_2)$ замкнутую кусочно-гладкую кривую L, длина которой должна быть не меньше $\mathrm{Sys}(2M)$. Отсюда $\iota^b_{(M,h)} \geqslant \mathrm{Sys}(2M)/4 \geqslant \epsilon/4$. Наконец, для диаметра римановой поверхности без края рода $g > 1$, наделенной гиперболической метрикой h, справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\mathrm{diam}(X,h)\ \mathrm{Sys}(X) \leqslant C_0(g)\mathrm{Vol}(X,h)\\ &= -C_0(g)\int_X K_h\, dS_h = -2\pi\chi(X)C_0(g) = 4\pi(g-1)C_0(g) =: C_1(g)\end{aligned}$$

(см. лемму на стр. 291, [16]), из которой следует, что

$$\mathrm{diam}(M,h) \leqslant \mathrm{diam}(X,h) \leqslant C_1(2m)/\epsilon.$$

Значит, условия (6) выполнены при $\iota_0 = \epsilon/4$ и $D_0 = C_1(2m)/\epsilon$ и множество

$$\mathcal{M}_m(\epsilon) \subset \mathcal{M}(2, \sqrt{2}, 0, \epsilon/4, C_1(2m)/\epsilon)$$

прекомпактно в C^r-топологии ($r \in (0,2)$). Последнее означает, что любая последовательность в $\mathcal{M}_m(\epsilon)$ содержит такую подпоследовательность $\{M_k\}_{k=1}^\infty$, что существует поверхность (M_∞, h_∞) и C^r-диффеоморфизмы $\beta_k : M_\infty \to M_k$, для которых имеет место сходимость $\beta_k^* h_k \to h_\infty$ в $C^r(M_\infty, T^*M_\infty \otimes T^*M_\infty)$, где h_k – гиперболическая метрика на (дубле) M_k. Таким образом, переходя к подпоследовательностям, мы можем считать, что последняя сходимость имеет место для последовательности $\{M_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{M}_m(\epsilon)$ из условий предложения 2.

2) Положим $\Gamma_\infty := \partial M_\infty$, $\tilde{h}_k := \beta_k^* h_k$ и введем операторы Лапласа-Бельтрами

$$\mathfrak{L}_k := \frac{1}{\sqrt{|\tilde{h}_k|}}\partial_i\sqrt{|\tilde{h}_k|}\,\tilde{h}_k^{ij}\partial_j, \qquad \mathfrak{L}_\infty := \frac{1}{\sqrt{|h_\infty|}}\partial_i\sqrt{|h_\infty|}\,h_\infty^{ij}\partial_j$$

на $(M_\infty, \beta_k^* h_k)$ и (M_∞, h_∞), соответственно; тогда

$$\lambda_- h_\infty^{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \tilde{h}_k^{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_+ h_\infty^{ij}\xi_i\xi_j$$

для всех $\xi \in T^*M_\infty$; в частности, $\sqrt{|\tilde{h}_k|/|h_\infty|} \in [\lambda_+^{-1}, \lambda_-^{-1}]$. Положим $Q_k := \|\tilde{h}_k - h_\infty\|_{C^1(M_\infty, T^*M_\infty \otimes T^*M_\infty)}$; тогда $Q_k \to 0$. Обозначим единичный векторы внешней нормали и единичный касательный вектор на Γ_∞ в метриках $\tilde{h}_k$ и h_∞ через $\tilde{\nu}_k$, $\tilde{\gamma}_k$ и ν_∞, γ_∞, соответственно.

Пусть v_k^f – гармоническое продолжение $f \in C^\infty(\Gamma_\infty)$ внутрь $(M_\infty, \beta_k^* h_k)$, т.е., решение задачи $\mathfrak{L}_k v_k^f = 0$ в M_∞, $v_k^f = f$ на Γ_∞. Отметим, что v_k^f является C^{r+1}-гладкой ввиду шаудеровских оценок решений эллиптических краевых задач; см. теорему 6.2 и лемму 6.4, [3]. Аналогично, пусть v^f есть гармоническое продолжение f внутрь (M_∞, h_∞). Тогда $v_k^f - v^f = \tilde{v}_k \in H_0^1(M_\infty)$. Поскольку оператор умножения на C^1-гладкую функцию в $H^{\pm 1}(M_\infty)$ ограничен, имеем

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{L}_k \tilde{v}_k\|_{H^{-1}(M_\infty)} &= \|(\mathfrak{L}_k - \mathfrak{L}_\infty)v^f\|_{H^{-1}(M_\infty)} \leqslant c\, Q_k \|v^f\|_{H^1(M_\infty)} \\ &\leqslant c(M_\infty, \mathfrak{L}_\infty) Q_k \|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_\infty)}.\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\|\nabla_{\tilde{h}_k}\tilde{v}_k\|^2_{L_2(M_\infty; TM_\infty|\,\tilde{h}_k)} &= -(\tilde{v}_k, \mathfrak{L}_k\tilde{v}_k)_{L_2(M_\infty;\tilde{h}_k)} \\ &\leqslant c(\lambda_+, \mathfrak{L}_\infty)\|\tilde{v}_k\|_{H^1(M_\infty)}\|\mathfrak{L}_k\tilde{v}_k\|_{H^{-1}(M_\infty)}.\end{aligned}$$

Далее, постоянная Фридрихса $c_F(\tilde{h}_k)$ of $(M_\infty, \tilde{h}_k)$ подчинена оценке

$$c_F(\tilde{h}_k) := \inf_{0\neq v\in H_0^1(M_\infty)} \frac{\int_{M_\infty} \tilde{h}_k^{ij}\partial_i v \partial_j v \sqrt{|\tilde{h}_k|}dx}{\int_{M_\infty} v^2\sqrt{|\tilde{h}_k|}dx} \geqslant c_F(h_\infty)\lambda_-^2\lambda_+^{-1},$$

откуда

$$\|\tilde{v}_k\|_{H^1(M_\infty)} \leqslant c(\lambda_\pm, \mathfrak{L}_\infty)\|\nabla_{\tilde{h}_k}\tilde{v}_k\|_{L_2(M_\infty; TM_\infty|\,\tilde{h}_k)}.$$

Комбинируя последние 4 оценки, приходим к неравенству

$$\|\tilde{v}_k\|_{H^1(M_\infty)} \leqslant c(\lambda_\pm, \mathfrak{L}_\infty)\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_\infty)} Q_k. \tag{7}$$

Теперь обозначим $dl = h_\infty|_{T\Gamma_\infty}$, тогда $\tilde{h}_k|_{T\Gamma_\infty}) = \rho_k dl$, где $\rho_k \to 1$ в $C^1(\Gamma_\infty)$. Поскольку

$$\int_{\Gamma_\infty} \partial_{\tilde{\nu}_k}\tilde{v}_k\, v\rho_k dl = (\mathfrak{L}_k\tilde{v}_k, v)_{L_2(M_\infty;\tilde{h}_k)} + (\nabla_{\tilde{h}_k}\tilde{v}_k, \nabla_{\tilde{h}_k} v)_{L_2(M_\infty; TM_\infty|\,\tilde{h}_k)},$$

для всех $v \in C^\infty(M_\infty)$, имеем

$$\Big|\int_{\Gamma_\infty} \partial_{\tilde\nu_k}\tilde v_k\, v\rho_k dl\Big| \leqslant c(\lambda_\pm,\mathfrak{L}_\infty)(\|\mathfrak{L}_k\tilde v_k\|_{H^{-1}(M_\infty)}+\|\tilde v_k\|_{H^1(M_\infty)}\|v\|_{H^1(M_\infty)}$$
$$\leqslant C(\lambda_\pm,\mathfrak{L}_\infty)\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_\infty)}Q_k\|v\|_{H^1(M_\infty)},$$

ввиду (7). Отсюда

$$\|\partial_{\tilde\nu_k}\tilde v_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty)} \leqslant C(\lambda_\pm,\mathfrak{L}_\infty)\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_\infty)}Q_k$$

ввиду непрерывности умножения на C^1-гладкую функцию в $H^{1/2}(\Gamma_\infty)$. Аналогично, поскольку

$$\Big|\int_{\Gamma_\infty}(\rho_k\partial_{\tilde\nu_k}-\partial_{\nu_\infty})v^f\, v dl\Big| = (\mathfrak{L}_k v^f, v)_{L_2(M_\infty;\tilde h_k)}$$
$$+(\nabla_{\tilde h_k}v^f,\nabla_{\tilde h_k}v)_{L_2(M_\infty;TM_\infty|\,\tilde h_k)}$$
$$-(\nabla_{h_\infty}\tilde v_k,\nabla_{h_\infty}v)_{L_2(M_\infty;TM_\infty|\,h_\infty)},$$

для всех $v \in C^\infty(M_\infty)$, при больших k имеем

$$\|(\partial_{\tilde\nu_k}-\partial_{\nu_\infty})v^f\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty)} \leqslant C(\lambda_\pm,\mathfrak{L}_\infty)\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_\infty)}Q_k.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\|(\tilde\Lambda_k-\Lambda_\infty)f\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty)} = \|\partial_{\tilde\nu_k}v_k^f-\partial_{\nu_\infty}v^f\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty)}$$
$$\leqslant C(\lambda_\pm,\mathfrak{L}_\infty)\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_\infty)}Q_k,$$

откуда

$$\|\tilde\Lambda_k-\Lambda_\infty\|_{B(H^{1/2}(\Gamma_\infty);H^{-1/2}(\Gamma_\infty))}\to 0. \tag{8}$$

3) Пусть $\tilde H_k := \partial_{\tilde\gamma_k}^{-1}\tilde\Lambda_k$ – преобразование Гильберта поверхности $(M_\infty,\beta_k^*h_k)$ и $\lambda_{\pm l}(\tilde H_k)$ – отличные от $\pm i, 0$ собственные значения $\tilde H_k$. Поскольку $h_k \in [g_k]$, каждый диффеоморфизм $\beta_k : (M_\infty,\beta_k^*h_k) \to (M_k,g_k)$ является конформным и из формулы (3) вытекает равенство

$$H_kf = \beta_k^{*-1}\tilde H_k\beta_k^*f + \mathrm{const}(f) \qquad \forall f\in H^{1/2}(\Gamma) \tag{9}$$

(для одного из двух выборов ориентации на M). Отметим, что оператор $\beta_k^* : H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_\infty)$ ограничен для β_k из класса C^r. Отсюда и из (9) следует, что спектры (собственные значения и их кратности) операторов H_k и $\tilde H_k$ (действующих в $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(\Gamma_\infty)$, соответственно) совпадают,

$$\lambda_{\pm l}(\tilde H_k) = \lambda_{\pm l}(H_k) \qquad (l=1,\dots,m). \tag{10}$$

4) Введем преобразование Гильберта $H_\infty := \partial_{\gamma_\infty}^{-1}\Lambda_\infty$ поверхности (M_∞, h_∞) и обозначим через $\lambda_{\pm l}(H_\infty)$ отличные от $\pm i, 0$ собственные значения H_∞. Сходимость $\rho_k \to 1$ in $C^1(\Gamma_\infty)$ означает, что

$$\|\partial_{\tilde\gamma_k}^{-1} - \partial_{\gamma_\infty}^{-1}\|_{B(H^{-1/2}(\Gamma_\infty);H^{1/2}(\Gamma_\infty))} \to 0.$$

Поскольку

$$\tilde H_k - H_\infty = (\partial_{\tilde\gamma_k}^{-1} - \partial_{\gamma_\infty}^{-1})\tilde\Lambda_k + (\partial_{\tilde\gamma_k}^{-1} - \partial_{\gamma_\infty}^{-1})(\Lambda_\infty - \tilde\Lambda_k) + \partial_{\gamma_\infty}^{-1}(\tilde\Lambda_k - \Lambda_\infty),$$

отсюда и из сходимости (8) следует, что

$$\|\tilde H_k - H_\infty\|_{B(H^{1/2}(\Gamma_\infty))} \to 0. \tag{11}$$

Поскольку дискретный спектр ограниченного оператора в банаховом пространстве устойчив к малым (по норме) возмущениям (см. IV.3.5, [15]), из (11) имеем

$$\lambda_{\pm l}(\tilde H_k) \to \lambda_{\pm l}(H_\infty) \qquad (l = 1, \dots, m).$$

Таким образом, все собственные значения $\lambda_{\pm l}(\tilde H_k)$ не приближаются к $\pm i$ при больших k. Ввиду (10) то же самое верно для $\lambda_{\pm l}(H_k)$. Поскольку это противоречит исходному предположению $\lambda_m(H_k) \to i$, доказана сходимость $\mathrm{Sys}(2M_k) \to 0$. Тем самым доказаны предложения 2 и 1. □

Связь между спектром преобразования Гильберта поверхности с краем и периодами абелевых дифференциалов на её дубле

Выберем *симметричный* (относительно инволюции τ) канонический базис гомологий $(a_{+1}, \dots, a_{2m}, b_{+1}, \dots, b_{2m})$ на дубле $2M$: петли $\{l_k := a_k, l_{m+k} := b_k\}_{k=1}^m$ лежат в $M \subset 2M$, а петли $\{a_{m+k}, b_{m+k}\}_{k=1}^m$ лежат в $\tau(M)$ и связаны с l_k соотношениями

$$a_{m+k}(t) = \tau \circ a_{\pm k}(t), \quad b_{m+k}(t) = \tau \circ b_{\pm k}(1-t), \qquad (t \in [0,1]).$$

Пусть $\mathscr{D}$ – пространство гармонических дифференциалов q на M, нормальных к краю ∂M, т.е. $q(\gamma) = 0$ (γ – единичный касательный вектор на (Γ, dl)). Выберем базис $\{q_i\}_{i=1}^{2m}$ в $\mathscr{D}$, двойственный к базису гомологий $\{l_k := a_k, l_{m+k} := b_k\}_{k=1}^m$ в следующем смысле: $\int\limits_{l_j} q_i = \delta_{ij}$. Введем

вспомогательную матрицу периодов $\mathfrak{B}$ с элементами

$$\mathfrak{B}_{ij} := \int\limits_{l_i} \star q_j$$

($\star$ – оператор Ходжа).

Предложение 3. *Дискретный спектр преобразования Гильберта H с исключенным нулем совпадает со спектром вспомогательной матрицы периодов $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}T = \lambda T$, положим $q = \sum_j T^j q_j$ и введем гармонический дифференциал $\omega := (\star - \lambda)q$. Тогда

$$\int\limits_{l_i} \star\omega = [(\mathfrak{B} - \lambda)T]^i = 0,$$

откуда $\omega = du$ для некоторой гармонической функции $u = u^f$. В частности,

$$\Lambda f = \partial_\nu u^f = \omega(\nu) = (\star q, \nu) - \lambda q(\nu) = -(q, \gamma) - \lambda q(\nu) = -\lambda q(\nu)$$

и

$$\partial_\gamma f = \omega(\gamma) = q(\nu) - \lambda q(\gamma) = q(\nu)$$

ввиду $\star(\nu^\flat) = \gamma^\flat$. Из последних двух равенств имеем $Hf = \partial_\gamma^{-1}\Lambda f = -\lambda f + \text{const}$; от константы можно избавиться выбором f. Отметим, что $f = \text{const}$ если и только если $q(\nu) = 0$, т.е. $q \equiv 0$ (последнее условие эквивалентно равенству $T = 0$).

Обратно, предположим, что $Hf = -\lambda f$, т.е. $\Lambda f = -\lambda\partial_\gamma f$. Напомним ортогональное разложение

$$\mathscr{H}^1 = d\mathscr{H}^0 \oplus \star\mathscr{D} \tag{12}$$

подпространства гармонических 1-форм $\mathscr{H}^1 = \{a \mid da = d \star a \text{ in } M\}$ в $L_2(M; T^*M)$, где $\mathscr{H}^0 = \mathscr{H}^1 \cap dH^1(M)$ образовано точными формами. Отсюда имеем

$$\star du^f = du^h + \star p, \qquad \star du^h = du^r + \star q,$$

где $p, q = \sum_j T^j q_j \in \mathscr{D}$. Сравнивая эти равенства, находим $\star q - p = du^{r-f}$, а сужая эти неравенства на Γ, получаем

$$\Lambda r = [\star(du^h - q)](\nu) = -\partial_\gamma h, \qquad \Lambda h = -\partial_\gamma f = \lambda^{-1}\Lambda f,$$

откуда $h = \lambda^{-1} f + \text{const}$, $\Lambda r = -\lambda^{-1}\partial_\gamma f = \lambda^{-2}\Lambda f$, т.е. $r = \lambda^{-2} f + \text{const}$. Таким образом, $\star q - p = (\lambda^{-2} - 1)du^f$; в частности,

$$p(\nu) = -[\star q - p](\nu) = (1 - \lambda^{-2})\Lambda f = (\lambda^{-2} - 1)\lambda\partial_\gamma f$$

и

$$q(\nu) = [\star q](\gamma) = (\lambda^{-2} - 1)\partial_\gamma f.$$

Сравнивая последние две формулы, приходим к равенству $p(\nu) = \lambda q(\nu)$ на Γ, откуда $p = \lambda q$. Значит, $(\star - \lambda)q = (\lambda^{-2} - 1)du^f$ имеет все нулевые периоды, т.е.

$$\lambda T^i = \int\limits_{l_i} \star q = \mathfrak{B}_{ij} T^j.$$

Итак, мы показали, что $\lambda \neq 0$ является собственным значением $\mathfrak{B}$ если и только если $-\lambda$ является собственным значением H той же кратности. Осталось заметить, что спектр H симметричен относительно инверсии $\lambda \mapsto -\lambda$ поскольку $H\eta = \lambda\eta \;\Rightarrow\; H\overline{\eta} = \overline{\lambda\eta} = -\lambda\overline{\eta}$. □

Пусть $q = \sum_j T^j q_j \in \mathscr{D}$. Поскольку форма q нормальна к ∂M, она допускает гармоническое продолжение (обозначаемое тем же символом q) на дубль $2M \supset M$ по правилу $\tau^* q = -q$. Тогда $(\star - i)q = \omega$ является абелевым дифференциалом на $2M$ с периодами

$$\int\limits_{l_i} \omega = \mathfrak{B}_{ij} T^j - iT^i,$$

$$\int\limits_{\tau \circ l_i} \omega = \sum_j T^j \int\limits_{\tau \circ l_i} (\star - i)q_j = \sum_j T^j \int\limits_{l_i} (\star + i)q_j = \mathfrak{B}_{ij} T^j + iT^i$$

(здесь использовано условие антиголоморфности $\tau^* \star = -\star\tau^*$ инволюции τ). В частности, если $\mathfrak{B}T = \lambda T$, то

$$\int\limits_{\tau \circ l_i} \omega = \frac{\lambda + i}{\lambda - i} \int\limits_{l_i} \omega \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Итак, из предложения 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть $\lambda_{\pm k} = \pm i\mu_k$ – отличные от $0, \pm i$ собственные значения преобразования Гильберта H поверхности M. Тогда в пространстве абелевых дифференциалов на дубле $2M$ можно выбрать*

такой базис $\{\omega_k, \omega_{-k}\}_{k=1}^m$, *что*

$$\int\limits_{\tau\circ l} \omega = \frac{\pm\mu_k + 1}{\pm\mu_k - 1} \int\limits_l \omega$$

для любой петли l *в* $M \subset 2M$. *В частности,*

$$\int\limits_{a_{m+i}} \omega_{\pm k} = \frac{\pm\mu_k + 1}{\pm\mu_k - 1} \int\limits_{a_i} \omega_{\pm k},$$
$$\int\limits_{b_{m+i}} \omega_{\pm k} = \frac{1 \pm \mu_k}{1 \mp \mu_k} \int\limits_{b_i} \omega_{\pm k} \quad (i, k = 1, \ldots, m)$$

для любого симметричного базиса гомологий на $2M$.

Теперь предположим, что собственное значение λ_m близко i; тогда на $2M$ имеется абелев дифференциал ω_{-m} с периодами порядка единицы на M (следовательно, с ограниченной снизу L_2-нормой), такой, что все его периоды на $\tau(M)$ имеют порядок $O(|\lambda_m - i|)$. Наличие такого дифференциала на $2M$ можно интерпретировать как вырождение $2M$ поскольку абелев дифференциал ω на дубле $2M$ поверхности с краем имеет все нулевые периоды на M (или, что эквивалентно, на $\tau(M)$) только если он тождественно равен нулю. В самом деле, в противном случае $\omega = dw$ на M, где функция w голоморфна. В то же время $\omega = \omega_+ + i\omega_-$ на $2M$, где $\omega_+ = (\omega + \overline{\tau^*\omega})/2$, $\omega_- = (\omega - \overline{\tau^*\omega})/2i$ подчинены условию симметрии $\tau^*\omega = \overline{\omega}$. Последнее условие означает, что дифференциалы $\Re\omega_\pm$ касательны ($\Re\omega_\pm(\nu) = 0$) а $\Im\omega_\pm = \star\Re\omega_\pm$ – нормальны к $\partial M \equiv \Gamma$. Следовательно, $dw = q + \star p$ на M, где $q, p \in \mathscr{D}$. Из ортогонального разложения (12) и ортогональности подпространств $\mathscr{D}$ и $\star\mathscr{D}$ в $L_2(M; T^*M)$ следует, что $q = 0$. Поскольку w голоморфна, $dw = i \star dw = -ip$, откуда $p = 0$ и $w = 0$. Таким образом, $\omega = 0$ на $2M$.

Благодарности.

Автор признателен С. В. Иванову за указание на работу [1], результаты которой позволили значительно упростить исходное доказательство предложения 1, и Г. Ю. Паниной за полезные обсуждения и консультации.

Список литературы

1. M. Anderson, A. Katsuda, Ya. Kurylev, M. Lassas, M. Taylor, *Metric tensor estimates, geometric convergence, and inverse boundary problems.* — Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **9** (2003), 69–79.
2. R. L. Bishop, R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds.* Academic Press, New York, London (1964).
3. Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* Пер. с англ. Л. П. Купцова; под ред. А. К. Гущина. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. (1989).
4. M. Lassas, G. Uhlmann, *On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map.* — Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **34**, No. 5 (2001), 771–787.
5. M. I. Belishev, *The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method.* — SIAM J. Math. Analysis **35**, No. 1 (2003), 172–182.
6. M. I. Belishev, D. V. Korikov, *Stability of determination of Riemann surface from its DN-map.* — J. Inverse Ill-posed Problems **31**, No. 2 (2023), 159–176.
7. M. I. Belishev, D. V. Korikov, *Stability of Determination of Riemann Surface from its Dirichlet-to-Neumann Map in Terms of Teichmüller Distance.* — SIAM J. Math. Analysis **55**, No. 6 (2023), 7426–7448.
8. P. Buser, *The collar theorem and examples.* — Manuscripta Math. **25** (1978), 349–357.
9. B. Farb, D. Margalit, *A primer on mapping class groups.* — Princeton Math. Ser. **49**, Princeton University Press, Princeton, NJ (2012).
10. Д. В. Кориков, *О топологии поверхностей с общим краем и близкими ДН-операторами.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **506** (2021), 79–88; English transl., J. Math. Sci. **283**, No. 4 (2024), 549–555.
11. D. V. Korikov, *Stability Estimates in Determination of Non-orientable Surface from Its Dirichlet-to-Neumann Map.* — Complex Anal. Oper. Theory **18**, 29 (2024).
12. D. V. Korikov, *Determination of period matrix of double of surface with boundary via its DN map.* — Canadian J. Math. (2025).
13. Д. В. Кориков, *О возмущениях ДН-оператора круга, приводящих к изменению топологии.* — Матем. заметки **119**, No. 5 (2026), 791–794.
14. D. V. Korikov, *On non-homeomorphic surfaces with close DN maps.* — ArXiv preprint (2026). `https://arxiv.org/abs/2602.13236v1`
15. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М. (1972).
16. D. Mumford, *A Remark on Mahler's Compactness Theorem.* Proceed. Amer. Math. Soc. **28**, No. 1 (1971), 289–294.
17. J. R. Munkres, *Elementary Differential Topology.* — Annals of Mathematics Studies, No. 54 (1966).
18. Y. Wang, Y. Xue, *The Brownian loop measure on Riemann surfaces and applications to length spectra.* — Communications on Pure and Applied Mathematics **78**, Mo. 11 (2025).

Korikov D. V. On non-homeomorphic surfaces with close DN maps.

Let (M, g) be a genus m surface with boundary Γ and DN map Λ. Introduce the Schottky double $2M$ of (M, g) and denote by $\mathrm{Sys}(2M)$ the

length of the shortest closed geodesics in the hyperbolic metrics on $2M$. We prove that $\mathrm{Sys}(2M)$ is small if Λ is close, in the operator norm, to the DN map Λ_* of some surface (M_*, g_*) of lower genus $m_* < m$ with the same boundary Γ:

$$\|\Lambda - \Lambda_*\|_{B(H^{1/2}(\Gamma);H^{-1/2}(\Gamma))} \to 0 \implies \mathrm{Sys}(2M) \to 0.$$

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург;
Университет ИТМО,
Кронверкский пр., д. 49, лит. А,
Санкт-Петербург 197101, Россия
E-mail: thecakeisalie@list.ru

Поступило 14 мая 2026 г.