Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

Н. А. Каразеева

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ И АТТРАКТОР ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЮЩИХ ТРЕХМЕРНЫЕ ВЯКОУПРУГИЕ ТЕЧЕНИЯ С ТРЕНИЕМ ФОЙГТА

§1. Введение

- Движение сплошной среды задается ситемой уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}v + v \cdot \nabla v - \operatorname{div}\, \sigma + \operatorname{grad}\, p = f \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\sigma = 0, \tag{2}$$

где v – скорость движения частиц жидкости, σ – девиатор тензора напряжений, p – давление, f – вектор внешних сил. Задавая связь между тензором скоростей деформации D и тензором σ (реологическое уравнение), мы задаем тип жидкости.

В работе рассматривается реологическое уравнение вида

$$\sigma = 2\mu_1 D + 2\mu\frac{\partial D}{\partial t} + \int\limits_0^t K(t-\tau)D(x,\tau)d\tau, \tag{3}$$

где K – скалярная функция. Это соотношение описывает поведение так называемой вязкоупругой жидкости с трением Фойгта. Трению Фойгта соответствует второй член в уравнении (3). Подставляя данное реологическое уравнение в систему (1)–(2), мы получим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}v + v\cdot\nabla v - \mu_1\Delta v - \mu\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \int\limits_0^t K(t-\tau)\Delta v(x,\tau)d\tau + \operatorname{grad}\, p = f(x,t) \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\, v = 0 \tag{5}$$

Система рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R^3}$ с границей $\partial\Omega \subset C^1$. Обозначим $Q_T = \Omega \times [0,T]$, а боковая поверхность цилиндра

Ключевые слова: неньютоновские жидкости, жидкость Кельвина–Фойгта, аттрактор, полугруппа разрешающих операторов.

S пусть обозначена $S = \partial\Omega \times [0,t]$, $T \leqslant \infty$. В цилиндре Q_T ставится начально-краевая задача с условием прилипания

$$v(0) = v_0; \qquad v|_S = 0. \tag{6}$$

Ядро K представлено в виде ряда экспонент

$$K(\tau) = \Sigma_{s=1}^{\infty} \beta_s e^{-\alpha_s \tau}, \qquad \alpha_s, \beta_s > 0. \tag{7}$$

Коэффициенты α_s, β_s - это положительные константы, такие что $K(0) < \infty$.

• Вязкоупругие течения рассматривались в работах многих авторов. Среди них можно упомянуть монографии Tscoegl [13], Golden, Graham [14]. Теоретическое обоснование возможности применения таких систем имеется в книге Bird и других авторов [15]. Практическое применение систем движения вязкоупругой жидкости можно найти, например, в книге Creus [16]. О приложениях таких систем можно прочитать также в работе [11].

В теории вязкоупругости ядро K определяется в результате эксперимента. Полученные данные приближаются конечной суммой экспонент. В такой форме система является обобщением системы уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта, для которой ядро K имеет вид

$$K(\tau) = \Sigma_{s=1}^{N} \beta_s e^{-\alpha_s \tau}, \qquad \alpha_s, \beta_s > 0. \tag{8}$$

Такие системы рассматривались в работах Осколкова, Котсиолиса и других авторов [4–6]. В ранних работах Осколкова использовалось N – кратное дифференцирование (N – количество слагаемых в сумме) и отбрасывались члены более высоких порядков, в работах [5, 6] вводилось N новых переменных. Оба эти метода невозможно применить в случае, когда сумма состоит из бесконечного количества слагаемых (а именно такой случай рассматривается в работе).

Кроме прочего, системы подобного типа возникают в теории усреднений [9]. Уравнения Санчес–Паленсия для анизотропной пористой среды описывают обтекание твердого тела слабовязким флюидом.

Более того, если откинуть нелинейный член и спроектировать систему на пространство соленоидальных векторов, то система превратится в уравнение Гуртина–Пипкина. Такие уравнения рассматривались в работах многих авторов, в частности, в работах [11, 12, 17, 18].

Вязкоупругие течения с трением Фойгта изучались в работах В. Г. Звягина, А. В. Звягина, Орлова, Воротникова и других [21–23].

• Работа состоит из двух частей. Первая часть содержит теорему существования решения с условием прилипания на бесконечном интервале времени. А именно, утверждается следующее.

Теорема 1. *Пусть Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbf{R}^3$, $\partial\Omega \in C^1$; $f, f_t \in L_{2,1}(Q_T)$; $v_0 \in W_2^2(\Omega) \cap J^0(\Omega)$. Коэффициенты α_s, β_s удовлетворяют условиям*

$$\Sigma_{s=1}^{\infty}\beta_s < \infty, \tag{9}$$

$$\Sigma_{s=1}^{\infty}\frac{\beta_s}{\alpha_s} < \infty, \tag{10}$$

$$\Sigma_{s=1}^{\infty}\beta_s\alpha_s < \infty. \tag{11}$$

Тогда начально-краевая задача (4), (5), (6) *с оператором свертки, имеющим ядро вида* (7)*, разрешима, то есть существует и единственно решение v такое, что $v, v_t \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, кроме того $v_x, v_{xt} \in L_2(Q_T)$ и верны оценки* (29), (31), (43)*, причем константы $C_i(t), i = 1-3$ стремятся при $t \to \infty$ к константам C_i, не зависящим от t.*

Отметим, что условия (9), (10), (11) совместимы. Например, когда β_s порядка s^{-2}, а α_s порядка s^{ϵ} при малом ϵ.

Теорема верна и в более общем случае, когда ядро K есть гладкая функция, имеющая неотрицательное преобразование Фурье из класса $L_2(\Omega)$.

• Вторая часть работы посвящена предельному по времени поведению решений системы. Приведенные в этой части теоремы верны только для случая, когда ядро K представимо в виде ряда убывающих экспонент вида (7). То, что данные уравнения действительно задают динамическую систему, вытекает из того факта, что в случае, когда ядро K является суммой экспонент, система может быть заменой переменных представлена в дифференциальном виде (подробнее об этом говорится в §4). Построен аттрактор для данной динамической системы. Под термином “аттрактор” здесь подразумевается минимальный глобальный B-аттрактор, введенный Ладыженской [3]. Об этом также написано подробно в §4. Доказана следующая теорема

Теорема 2. *Начально-краевая задача* (4)–(5)–(6) *имеет минимальный глобальный B-аттрактор, который является компактным и связным множеством и имеет конечную Хаусдорфову размерность.*

§2. Обозначения

Будем далее использовать обозначение

$$\mathbf{K}v = \int_0^t K(t-\tau)v(x,\tau)d\tau \tag{12}$$

Дадим определение некоторых пространств, встречающихся ниже. Через $L_p(\Omega)$ обозначается множество суммируемых в Ω с показателем p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, функций с нормой

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{13}$$

В случае $p = \infty$ $L_\infty(\Omega)$ – это пространство ограниченных функций с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \text{ess } \sup_{x\in\Omega}|f(x)|. \tag{14}$$

Пространство $W_p^l(\Omega)$ состоит из всех измеримых на Ω функций $f(x)$, имеющих всевозможные производные $D_x^k f$ до порядков $|k| \leqslant l$ и суммируемых со степенью p по Ω. Здесь k -мультииндекс, $|k| = k_1+k_2+k_3$. Норма, как обычно, определяется

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \Sigma_{|k|=0}^l \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{15}$$

Используются также пространства функций, имеющих различные дифференциальные свойства по пространственным переменным и по времени. Если x-пространственные координаты, $x \in \Omega$, t -время, $t \in [0,T]$, то под $L_{p,q}(Q_T)$ будем понимать пространство функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,q}(Q_T)} = \|f\|_{p,q,Q_T} = \left(\int_0^t \left(\int_\Omega |f(x,t)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{16}$$

Обозначение $W_p^{l_1,l_2}(Q_T)$ ($p \geqslant 1$, l_i – целые неотрицательные числа) используется для пространства функций $f(x,t)$, принадлежащих $L_p(Q_T)$ вместе со всеми производными по x до порядка l_1 и по t до порядка l_2 включительно. Норма определяется

$$\|f\|_{p,Q_T}^{(l_1,l_2)} = \left[\int\limits_{Q_T} \left(\Sigma_{|k|=0}^{l_1}|D_x^k f|^p + \Sigma_{i=0}^{l_2}|D_t^i|^p\right) dx\ dt\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{17}$$

Обозначим через $J^{\cdot}(\Omega)$ множество бесконечно дифференцируемых в Ω соленоидальных вектор-функций с носителями в Ω со скалярным произведением

$$(u_x, v_x)_\Omega = \int\limits_\Omega u_{x_k} \cdot v_{x_k}\ dx. \tag{18}$$

Норма $\|v_x\|_{2,\Omega}$ определяется так: $\|v_x\|_{2,\Omega}^2 = \Sigma_{k=1}^3 \|v_{x_k}\|_{2,\Omega}^2 = (v_x, v_x)_\Omega$. Пополнив $J^{\cdot}(\Omega)$ в метрике, соответствующей этому скалярному произведению, получим пространство $H(\Omega)$, а пополнение $J^{\cdot}(\Omega)$ в метрике L_2 обозначим $J^0(\Omega)$.

Наконец, через $V(Q_T)$ обозначим банахово пространство функций $v(x,t)$ с конечной нормой

$$< v >_{Q_T} = \sup_{t\in[0,T]} \|v(.,t)\|_{2,\Omega} + \|v_x\|_{2,Q_T}. \tag{19}$$

Здесь $\|v_x\|_{2,Q_T}$ определяется аналогично $\|v_x\|_{2,\Omega}$.

Назовем обобщенным решением задачи (4), (5), (6) функцию $v \in V(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T} &(- v\Phi_t - v_k v\Phi_{x_k} + \mu_1 v_x\Phi_x + \mu v_x\Phi_{xt} + \mathbf{K}v_x\Phi_x)dx\ dt \\ &+ \int\limits_\Omega (v\Phi - \mu v_x\Phi_x)|_{t=T}dx \\ &- \int\limits_\Omega (v_0\Phi - \mu v_x\Phi_x)|_{t=0}dx = \int\limits_{Q_T} f\Phi dx\ dt\end{aligned} \tag{20}$$

при любой функции $\Phi \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap J^0(\Omega)$.

§3. Априорные оценки

• В этом параграфе мы рассмотрим более общий случай функции $K(t)$. Предположим, что функция $K(t)$ из класса $W_1^1(0,\infty)$. Кроме того предположим, что обратное преобразование Фурье функции $F^{-1}K$ неотрицательно:

$$L(p) = F^{-1}(K) \geqslant 0 \tag{21}$$

Тогда квадратичная форма, соответствующая интегральному оператору с таким ядром, положительно определена, то есть верна следующая Лемма:

Лемма 1. *Пусть функция $K(t) \in W_1^1[0,t]$ обладает свойством* (21). *Тогда для любой функции $u(\tau) \in L_2[0,t]$ верно неравенство:*

$$I = \int_0^t \int_0^\sigma K(\sigma-\tau)u(\sigma)u(\tau)d\tau d\sigma \geqslant 0. \tag{22}$$

Доказательство леммы дано в [7]. Для удобства мы представим его здесь. Продолжим функцию K четным образом на отрицательную полуось, а функцию u продолжим нулем вне отрезка $[0,t]$. Тогда исследуемая квадратичная форма преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\sigma-\tau)u(\sigma)u(\tau)d\sigma d\tau.$$

Преобразуем I.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(L)(\sigma-\tau)u(\sigma)u(\tau)d\tau d\sigma \\ &= \int_{\mathbf{R}^3}\int\int e^{-i(\sigma-\tau)p}L(p)\ dp\ u(\sigma)u(\tau)d\sigma d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma p}u(\sigma)d\sigma\right|^2 L(p)dp \geqslant 0. \end{aligned} \tag{23}$$

• Получим некоторые априорные оценки решения начально-краевой задачи (4), (5), (6). Для этого умножим уравнение (4) на v и проинтегрируем по области Ω. В результате придем к интегральному тождеству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{2,\Omega} + \mu_1\|v_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2_{2,\Omega} + (\mathbf{K}v_x, v_x)_\Omega = (f, v)_\Omega. \tag{24}$$

После интегрирования по t в пределах от 0 до t получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\|v(t)\|^2_{2,\Omega} - \|v(0)\|^2_{2,\Omega}) + \frac{\mu}{2}(\|v_x(t)\|^2_{2,\Omega} - \|v_x(0)\|^2_{2,\Omega}) \\ + \mu_1\|v_x\|^2_{2,Q_T} + \int\limits_0^t (\mathbf{K}v_x, v_x)_\Omega = \int\limits_0^t (f, v)_\Omega.\end{aligned} \tag{25}$$

Учитывая неотрицательность двух последних членов в левой части, приходим к неравенству

$$\begin{aligned}&(\|v(t)\|^2_{2,\Omega} - \|v(0)\|^2_{2,\Omega}) + \mu(\|v_x(t)\|^2_{2,\Omega} - \|v_x(0)\|^2_{2,\Omega}) \\ &\quad\leqslant 2\int\limits_0^t |(f, v)_\Omega| \leqslant 2\int\limits_0^t \|f\|_{2,\Omega}\|v\|_{2,\Omega} \leqslant 2\sup_t \|v\|_{2,\Omega}\int\limits_0^t \|f\|_{2,\Omega}.\end{aligned} \tag{26}$$

Переходя к sup в левой части (26), получим оценку

$$\sup_t \|v\|^2_{2,\Omega} \leqslant \|v(0)\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x(0)\|^2_{2,\Omega} + 2\sup_t \|v\|_{2,\Omega}\|f\|_{2,1}. \tag{27}$$

Дискриминант полученного квадратного неравенства неотрицателен

$$\frac{1}{4}D = \|f\|^2_{2,1} + \|v(0)\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x(0)\|^2_{2,\Omega} \geqslant 0. \tag{28}$$

В итоге мы приходим к оценке

$$\|v\|_{2,\infty} \leqslant \|f\|_{2,1} + \sqrt{\|f\|^2_{2,1} + \|v_0\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x(0)\|^2_{2,\Omega}} \equiv C_1(t). \tag{29}$$

Из (26) вытекает еще такое неравенство

$$\|v(t)\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x(t)\|^2_{2,\Omega} \leqslant 2\|v\|_{2,\infty}\|f\|_{2,1} + \|v(0)\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x(0)\|^2_{2,\Omega} \leqslant 2C_1\|f\|_{2,1} + \|v(0)\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x(0)\|^2_{2,\Omega} \equiv C_2(t) \quad (30)$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\|v(t)\|^2_{2,\Omega} + 2\mu_1\|v_x\|^2_{2,Q_T} + \mu\|v_x(t)\|^2_{2,\Omega} &\leqslant 2\int_0^t |(f,v)_{2,\Omega}| \\ &+ \|v_0\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x(0)\|^2_{2,\Omega} \leqslant \|v_0\|^2_{2,\Omega} + 2\|v\|_{2,\infty}\|f\|_{2,1} \\ &+ \mu\|v_x(0)\|^2_{2,\Omega} \leqslant \|v_0\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x(0)\|^2_{2,\Omega} + 2\|f\|_{2,1} \\ &\times \left(\|f\|_{2,1} + \sqrt{\|f\|^2_{2,1} + \|v_0\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x(0)\|^2_{2,\Omega}}\right) = C_3(t).\end{aligned} \quad (31)$$

Теперь продифференцируем первое уравнение системы (4) по t, умножим скалярно в пространстве $L_2(\Omega)$ на v_t и проинтегрируем по Ω. После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t\|^2_{2,\Omega} + \mu_1\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} - \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{K}\Delta v), v_t\right)_\Omega \\ + \frac{1}{2}\mu\frac{d}{dt}\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} + \int_\Omega v_{kt}v_{x_k}v_t = (f_t, v_t)_\Omega.\end{aligned} \quad (32)$$

Преобразуем третий член в левой части

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{K}\Delta v, v_t\right)_\Omega &= \left(\frac{d}{dt}\left(\int_0^t K(t-\tau)\Delta v(x,\tau)d\tau\right), v_t\right)_\Omega \\ &= K(0)(\Delta v(t), v_t(t))_\Omega + \left(\int_0^t \frac{d}{dt}K(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau, v_t(t)\right)_\Omega \\ &= -K(0)(v_x, v_{xt})_\Omega - (\mathbf{K}'v_x, v_{xt})_\Omega,\end{aligned} \quad (33)$$

где $\mathbf{K}'$ – интегральный оператор Вольтерра с ядром $\frac{d}{dt}K$:

$$\mathbf{K}'u = \int\limits_0^t \frac{d}{dt}K(t-\tau)u(\tau)d\tau. \tag{34}$$

Нелинейный член можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} |\int\limits_\Omega v_{kt}v_{x_k}v_t| &\leqslant \|v_x\|_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{4,\Omega} \\ &\leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\kappa_1\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} + C_{\kappa_1}\|v_x\|^4_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{2,\Omega}\right), \end{aligned} \tag{35}$$

где $C_{\kappa_1} = \frac{1}{4}\kappa_1^{-1}$.
Перепишем (32) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t\|^2_{2,\Omega} + \mu_1\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} &\leqslant \left|\int\limits_\Omega v_{kt}v_{x_k}v_t\right| \\ &+ |K(0)(v_x, v_{xt})_\Omega| + |(\mathbf{K}'v_x, v_{xt})_\Omega| + |(f_t, v_t)_\Omega|. \end{aligned} \tag{36}$$

Для остальных членов в правой части можно, используя неравенство Юнга, написать такие оценки

$$|K(0)(v_x, v_{xt})| \leqslant K(0)(\kappa_2\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} + C_{\kappa_2}\|v_x\|^2_{2,\Omega}), \tag{37}$$

$$|(\mathbf{K}'v_x, v_{xt})_\Omega| \leqslant \|\mathbf{K}'v_x\|_{2,\Omega}\|v_{xt}\|_{2,\Omega} \leqslant \kappa_3\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} + C_{\kappa_3}\|\mathbf{K}'v_x\|^2_{2,\Omega}, \tag{38}$$

где $C_{\kappa_i} = \frac{1}{4}\kappa_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3$.
Правая часть оценивается следующим образом

$$|(f_t, v_t)_\Omega| \leqslant \|f_t\|_{2,\Omega}\|v_t\|_{2,\Omega} \leqslant \frac{1}{2}\|f_t\|_{2,\Omega} + \frac{1}{2}\|f_t\|_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{2,\Omega}. \tag{39}$$

Полагая $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\kappa_1 = \frac{\mu_1}{4}$; $K(0)\kappa_2 = \frac{\mu_1}{4}$; $\kappa_3 = \frac{\mu_1}{4}$, мы приходим к следующему соотношению

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t\|^2_{2,\Omega} + \mu_1\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} \\ \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f_t\|_{2,\Omega} + \frac{1}{2}\|f_t\|_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{2,\Omega}\right) \\ + \left(\frac{\mu_1}{4}\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} + \frac{2}{\mu_1}\|v_x\|^2_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{2,\Omega}\right) \\ + \left(\frac{\mu_1}{4}\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} + \frac{(K(0))^2}{\mu_1}\|v_x\|^2_{2,\Omega}\right) \\ + \left(\frac{\mu_1}{4}\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} + (\mu_1)^{-1}\|\mathbf{K}'v_x\|^2_{2,\Omega}\right).\end{aligned} \tag{40}$$

Усиливая неравенство, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t\|^2_{2,\Omega} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega} \leqslant \frac{1}{2}\|f_t\|_{2,\Omega} + \frac{1}{2}\|f_t\|_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{2,\Omega} \\ + \frac{2}{\mu_1}\|v_x\|^4_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{2,\Omega} + \frac{(K(0))^2}{\mu_1}\|v_x\|^2_{2,\Omega} + \mu_1^{-1}\|\mathbf{K}'v_x\|^2_{2,\Omega}.\end{aligned} \tag{41}$$

Обозначим $\varphi = \|v_t\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_{xt}\|^2_{2,\Omega}$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi &\leqslant \|f_t\|_{2,\Omega} + \|f_t\|_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{2,\Omega} + \frac{2}{\mu_1}\|v_x\|^4_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{2,\Omega} \\ &+ \frac{2(K(0))^2}{\mu_1}\|v_x\|^2_{2,\Omega} + 2\mu_1^{-1}\|\mathbf{K}'v_x\|^2_{2,\Omega} \\ &\leqslant \left(\|f_t\|_{2,\Omega} + C_{\mu_1}\|v_x\|^4_{2,\Omega}\right)\varphi \\ &+ \left(\|f_t\|_{2,\Omega} + \frac{2(K(0))^2}{\mu_1}\|v_x\|^2_{2,\Omega} + 2\mu_1^{-1}\|\mathbf{K}'v_x\|^2_{2,\Omega}\right).\end{aligned} \tag{42}$$

Обозначим стоящие в правой части функции через M_1 и M_2:

$$\begin{aligned}M_1 &= \left(\|f_t\|_{2,\Omega} + C_{\mu_1}\|v_x\|^4_{2,\Omega}\right), \\ M_2 &= \left(\|f_t\|_{2,\Omega} + \frac{2(K(0))^2}{\mu_1}\|v_x\|^2_{2,\Omega} + 2\mu_1^{-1}\|\mathbf{K}'v_x\|^2_{2,\Omega}\right).\end{aligned}$$

В новых обозначениях мы пришли к неравенству

$$\frac{d}{dt}\varphi \leqslant M_1\varphi + M_2,$$

где M_1 и M_2 - неотрицательные функции. Можно применить лемму Гронуолла.

$$\varphi \leqslant \exp\left(\int_0^t (\|f_t\|_{2,\Omega} + C_{\mu_1}\|v_x\|_{2,\Omega}^4)\right)\left[\|v_t(0)\|_{2,\Omega}^2 + \mu_1\|v_{xt}(0)\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t (\|f_t\| + \frac{2(K(0))^2}{\mu_1}\|v_x\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{\mu_1}\|\mathbf{K}'v_x\|_{2,\Omega}^2)\right]. \quad (43)$$

Поскольку оператор $\mathbf{K}'$ тоже непрерывен в $L_2(Q_T)$ и его норма не превосходит $C_{K'} = \int_0^T |K'(\tau)|d\tau$, мы доказали, что для $\|v_t\|_{2,\Omega}^2$ справедлива следующая оценка

$$\|v_t\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \exp\left(\int_0^t \|f_t\|_{2,\Omega} + \frac{2}{\mu^2}C_2\right) \times \left[\|v_t(0)\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \|f_t\|_{2,\Omega} + \mu^{-2}C_2(K^2(0) + C_{K'}^2)\right] = C_3(t). \quad (44)$$

Кроме того проинтегрировав неравенство (40) по t по промежутку $[0,t]$, мы получим оценку для нормы $\|v_{xt}\|_{2,Q_T}^2$.

$$\begin{aligned}\|v_t(0)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\mu}{2}\int_0^t \|v_{xt}\|_{2,\Omega}^2 &\leqslant \|v_t(0)\|_{2,\Omega}^2 + \|f_t\|_{2,1}\|v_t\|_{2,\infty}^2 + \|f_t\|_{2,1} \\ &+ \frac{4}{\mu}\|v_t\|_{2,\infty}^2\|v_x\|_{2,Q_T}^2 + \frac{2(K(0))^2}{\mu}\|v_x\|_{2,Q_T}^2 \\ &+ \frac{2C_{K'}^2}{\mu}\|v_x\|_{2,Q_T}^2 \leqslant \|v_t(0)\|_{2,\Omega}^2 + C_3(t)\|f_t\|_{2,1} + \|f_t\|_{2,1} \\ &+ \frac{2}{\mu^2}C_3(t)C_2(t) + \frac{(K(0))^2}{\mu^2}C_2(t) + \frac{C_{K'}^2}{\mu^2}C_2(t) = C_4(t)\end{aligned} \quad (45)$$

При помощи этих априорных оценок доказывается теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи.

§4. Существование и единственность решения

.

•

Теорема 3. *Пусть* Ω *-произвольная ограниченная область в* $\mathbf{R}^3$, $\partial\Omega \in C^1$; $f, f_t \in L_{2,1}(Q_T)$; $v_0 \in W_2^2(\Omega) \cap J^0(\Omega)$. *Функция* K *из пространства* W_1^1 *удовлетворяет соотношению* (21). *Тогда начально-краевая задача* (4), (5), (6) *с оператором свертки, имеющим ядро* K, *разрешима, то есть существует и единственно решение* v *такое, что* $v, v_t \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, *кроме того* $v_x, v_{xt} \in L_2(Q_T)$ *и верны оценки* (29), (31), (43), *причем константы* $C_i(t), i = 1-3$, *стремятся при* $t \to \infty$ *к константам* C_i, *не зависящим от* t.

Из теоремы 3 вытекает теорема 1. Чтобы доказать это, нужно проверить, что функция K вида (7) принадлежит пространству W_1^1 и имеет неотрицательное преобразование Фурье. При выполнении условий (9), (10), (11) ряды из экспонент мажорируются рядами из коэффициентов, которые сходятся. Обратное преобразование Фурье функции K вида (7) равно

$$L(p) = F^{-1}(K) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itp} K(t)dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{s=1}^{\infty} \frac{2\beta_s \alpha_s}{p^2 + \alpha_s^2}. \quad (46)$$

Для доказательства теоремы используется метод Галеркина. Пусть $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ – полная в $W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$ система функций, ортонормированная в $L_2(\Omega)$. Тогда $\forall v_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$ найдется последовательность функций $v_n(x) = \Sigma_{k=1}^n C_{kn}^0 \varphi_k(x)$ такая, что

$$\|v_n(0) - v_0\|_{W_2^2} \to 0. \quad (47)$$

Приближенное решение задачи (4),(5),(6) ищется в виде

$$v^n(x.t) = \Sigma_{k=1}^n C_{kn}(t)\varphi_k(x), \qquad n = 1, 2, \ldots \quad (48)$$

где функции C_{kn} находятся из системы уравнений

$$\frac{d}{dt}C_{kn} + \mu_1 \Sigma_{i=1}^{n} \varphi_{ki} C_{in}(t) + \mu \frac{d}{dt} \Sigma_{i=1}^{n} \varphi_{ki} C_{in}(t) + \Sigma_{i,j=1}^{n} \varphi_{kij} C_{in}(t) C_{jn}(t) + \Sigma_{i=1}^{n} \varphi_{ki} \int_0^t K(t-\tau) C_{in}(\tau) d\tau = f_k(t) \quad (49)$$

и начальных данных

$$C_{kn}(0) = C_{kn}^0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (50)$$

где $\varphi_{ki} = (\varphi_x^i, \varphi_x^k)_\Omega$, $\varphi_{kij} = \Sigma_{l=1}^{2} \int_\Omega \varphi_{jl} \varphi_i \varphi_{kx_l}$; $f_k = (f, \varphi_k)_\Omega$. Система (49) представляет собой систему интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра, решение которой существует и единственно. (Локально его можно построить, например, с помощью метода последовательных приближений Пикара. Глобальная ограниченность следует из равенства (49) и оценки (29)). Действительно, умножив каждое из равенств на соответствующее C_{kn} и просуммировав по k от 1 до n, мы получим интегральное тождество для v_n, из которого следует ограниченность $\sup_t \|v\|_{2,\Omega}^2$ и ограниченность $\sup_t |C_{kn}(t)|^2$. Далее можно из последовательности v^n выделить подпоследовательность v^{n_k}, сходящуюся слабо в $L_2(Q_T)$ к некоторой функции v, причем производные $v_x^{n_k}$,$v_t^{n_k}$,$v_{xt}^{n_k}$ сходятся к v_x,v_t,v_{xt} соответственно. Можно показать, что эта функция v является обобщенным решением, или удовлетворяет тождеству

$$\int_{Q_T} (v_t \phi^m + \mu_1 v_x \phi_x^m - v_k v \phi_{x_k}^m + \mu v_{xt} \phi_x^m + \mathbf{K} v_x \phi_x^m) dx dt = \int_{Q_T} f \phi^m \quad (51)$$

для всех функций ϕ^m вида

$$\phi^m(x,t) = \Sigma_{k=1}^{m} d_k \varphi^k(x) \quad (52)$$

с произвольными непрерывными функциями $d_k(t)$. Это следует из того, что функции v^{n_k} удовлетворяют этому тождеству, сходятся в L_4 и слабо в $W_2^1(Q_T)$ и оператор $\mathbf{K}$ непрерывен в $L_2(Q_T)$. В равенстве (51) можно перейти к пределу.

• Единственность решения также легко проверить. Действительно, предположим, что существует два решения начально-краевой задачи (4), (5), (6) v' и v''. Тогда для их разности $u = v' - v''$ будет верно тождество

$$\int\limits_{Q_T}[-u\phi_t+\mu_1 u_x\phi_x+\mu v_{xt}\phi_x-(v_k'u+u_kv'')\phi_{x_k}]dxdt$$

$$+\int\limits_0^t(\mathbf{K}u_x,\phi_x)dt+\int\limits_\Omega u(t)\phi(t)dx=0. \quad (53)$$

Значит, функция u есть решение начально-краевой задачи

$$u_t-\mu_1\Delta u-\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u+\mathbf{K}\Delta u+\text{grad } q=g^k \quad (54)$$

$$\text{div } u=0,$$

$$u|_{S_T}=0, \qquad u|_{t=0}=0,$$

где $g^k=v_k'u+u_kv''$. Тогда u удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2}\|u(x,k)\|^2_{2,\Omega}+\mu_1\int\limits_0^t\|u_x\|^2+\frac{1}{2}\|u_x\|^2_{2,\Omega}+\int\limits_0^t(\mathbf{K}u_x,u_x)_\Omega$$
$$=\int\limits_{Q_t}g^ku_{x_k}dxdt=\int\limits_{Q_t}u_kv''u_{x_k}dxdt. \quad (55)$$

Правую часть (55) оценим так

$$|\int\limits_{Q_t}u_kv''u_{x_k}dxdt|\leqslant\|u_x\|_{2,Q_t}\|u\|_{4,Q_t}\|v''\|_{4,Q_t}. \quad (56)$$

Поскольку

$$\|v\|^4_{4,Q_t}\leqslant C\text{sup}_t\ \|v\|_{2,\Omega}\|v_x\|^3_{2,Q_t}\leqslant 2<v>^4, \quad (57)$$

то интеграл слева в (56) оценивается

$$|\int\limits_{Q_t}u_kv''u_{x_k}dxdt|\leqslant C_9\|v''\|_{4,Q_t}<u>^2\ . \quad (58)$$

В результате, откинув неотрицательное слагаемое, мы придем к неравенству

$$< u > \leqslant (2^{\frac{1}{2}} + \mu^{-\frac{1}{2}}) C_9^{\frac{1}{2}} \|v''\|^{\frac{1}{2}}_{4,Q_t} < u > \; = c_{10} \|v''\|^{\frac{1}{2}}_{4,Q_t} < u > . \qquad (59)$$

Из этого неравенства следует, что $u \equiv 0$ для t, удовлетворяющих требованию $C_{10}\|v''\|^{\frac{1}{2}}_{4,Q_t} < 1$. Если такие t не исчерпывают всего интервала $[0, T]$, то, повторяя рассуждение для $t \in [t_1, t_2]$, где t_1 таково, $u(x, t_1) = 0$, и т. д., мы за конечное число шагов убедимся, что $u \equiv 0$ на всем Q_T.

§5. Поглощающее множество, соответствующее динамической системе

Дадим определения аттрактора и поглощающего множества, введенные Ладыженской [3].

Пусть H – гильбертово пространство, B – ограниченное множество из H, $\mathbf{B}$ - совокупность всех ограниченных множеств B из H.

Пусть далее $V_t, t \in \mathbf{R}^+$ – полугруппа нелинейных непрерывных операторов, действующих в пространстве H.

Говорят, что множество B_0 притягивает множество B, если для любого $\epsilon > 0$ найдется число $t_1(\epsilon, B)$ такое, что при любом $t \geqslant t_1$, $V_t(B) \subset O_\epsilon(B_0)$, где $O_\epsilon(B_0)$ – это ϵ – окрестность B_0.

Множество B_0 называется поглощающим, если для любого $B \in \mathbf{B}$ найдется $t_1(B)$ такое, что включение $V_t(B) \subset B_0$ выполнено при любом $t \geqslant t_1(B)$.

Глобальным B-аттрактором полугруппы V_t называется замкнутое множество, которое притягивает любое множество $B \in \mathbf{B}$.

Минимальным глобальным B -аттрактором полугруппы V_t называется наименьшее замкнутое множество $\mathfrak{M}$, которое притягивает любое $B \in \mathbf{B}$.

Вернемся к начально-краевой задаче (4), (5), (6). Пусть теперь $f = f(x)$. Благодаря теореме 1 существует оператор $V_t(v_0)$, ставящий в соответствие начальным данным v_0 решение начально-краевой задачи (4), (5), (6) $v(x, t) = V_t(v_0)$. То есть определена полугруппа разрешающих операторов $V_t,\ t \geqslant 0$.

Лемма 2. *Для полугруппы V_t разрешающих операторов начально-краевой задачи* (4), (5), (6) *в пространстве $H(\Omega)$ определено поглощающее множество B_{R_0}.*

Доказательство. Вернемся к интегральному тождеству (24) и представим в явном виде четвертый член, стоящий в левой части

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{2,\Omega} + \mu_1\|v_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2_{2,\Omega} + \left(\int_0^t \Sigma_{s=1}^{\infty}\beta_s e^{-\alpha_s(t-\tau)}v_x(x,\tau)d\tau, v_x(t)\right)_{\Omega} = (f,v)_{\Omega}. \tag{60}$$

Сделаем замену переменной

$$\eta^s = \int_0^t e^{-\alpha_s(t-\tau)}v(x,\tau)d\tau. \tag{61}$$

Тогда функция η^s удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial\eta^s}{\partial t} = v - \alpha_s\eta^s. \tag{62}$$

Подставив η^s в интегральное тождество (60), мы придем к следующему соотношению

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{2,\Omega} + \mu_1\|v_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2_{2,\Omega} + (\Sigma_{s=1}^{\infty}\beta_s\eta^s_x, \frac{\partial\eta^s_x}{\partial t} + \alpha_s\eta^s_x)\\ = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{2,\Omega} + \mu_1\|v_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2_{2,\Omega}\\ + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Sigma_{s=1}^{\infty}\beta_s\|\eta^s_x\|^2_{2,\Omega} + \Sigma_{s=1}^{\infty}\alpha_s\beta_s\|\eta^s_x\|^2_{2,\Omega} = (f,v)_{\Omega}.\end{aligned} \tag{63}$$

Оценим правую часть:

$$|(f,v)_{\Omega}| \leqslant \epsilon\|v\|^2_{2,\Omega} + C_{\epsilon}\|f\|^2_{2,\Omega}. \tag{64}$$

Кроме того, введем новую функцию

$$\xi = \|v\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x\|^2_{2,\Omega} + \Sigma_{s=1}^{\infty}\beta_s\|\eta^s_x\|^2_{2,\Omega}. \tag{65}$$

Тогда из тождества (63) следует оценка для функции ξ

$$\frac{d}{dt}\xi + \mu^*\xi \leqslant C_{\epsilon}\|f\|^2_{2,\Omega}, \tag{66}$$

где μ^* – минимум из чисел $\lambda_1\mu$, μ_1 и $\Sigma_{s=1}^{\infty}\alpha_s\beta_s$, а λ_1 – первое собственное число соответствующей задачи Стокса. Домножим обе части неравенства (66) на $\exp\,\mu^* t$.

$$\frac{d\xi}{dt}(\exp\,(\mu^* t)) \leqslant -\mu^*\xi(\exp\,(\mu^* t)) + C_\epsilon\|f\|^2_{2,\Omega}(\exp\,(\mu^* t)), \tag{67}$$

что эквивалентно

$$\frac{d}{dt}(\xi\,\exp\,(\mu^* t)) \leqslant C_\epsilon\|f\|^2_{2,\Omega}(\exp\,(\mu^* t)). \tag{68}$$

Проинтегрировав по t неравенство (68), мы придем к следующей оценке

$$\xi(t)e^{\mu^* t} \leqslant \xi(0) + \int\limits_0^t C_\epsilon\|f\|^2_{2,\Omega}e^{\mu^*\tau}d\tau = \xi(0) + C_\epsilon\|f\|^2_{2,\Omega}\frac{e^{\mu^* t}-1}{\mu^*}. \tag{69}$$

В результате

$$\xi(t) \leqslant \xi(0)e^{-\mu^* t} + C_\epsilon\|f\|^2_{2,\Omega}\frac{1}{\mu^*}. \tag{70}$$

Положим

$$R_0 = C_\epsilon\|f\|^2_{2,\Omega}\frac{1}{\mu^*}. \tag{71}$$

Тогда шар радиуса R

$$B_{R_0} = \{v \in H(\Omega) : \|v\|_{2,\Omega} \leqslant R_0\}. \tag{72}$$

является поглощающим множеством в пространстве $H(\Omega)$. Другими словами все слабые решения задачи (4), (5), (6) втягиваются в шар B_{R_0} за конечное время.

§6. Аттрактор для начально-краевой задачи

Определим множество

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{t\in\mathbf{R}^+} V_t(B_{R_0}). \tag{73}$$

Это множество является минимальным глобальным B-аттрактором начально-краевой задачи (4), (5), (6). Этот факт вытекает из следующей теоремы 2 и доказанной О. А. Ладыженской теоремы о том, что в случае, если разрешающие операторы задачи образуют асимптотически компактную полугруппу, то формула (73) определяет минимальный глобальный B-аттрактор соответствующей начально краевой задачи.

Понятие асимптотической компактности было введено О. А. Ладыженской в [3]. Полугруппа V_T называется асимптотически компактной, если для любого ограниченного множества $B \in \mathbf{B}$, для любой совокупности точек $x_k \in B$ и любой последовательности $t_k \nearrow \infty$ множество $\{V_{t_k}(x_k)\}$ предкомпактно. Далее О. А. Ладыженская показала, что если полугруппа V_t представима в виде

$$V_t = W_t + U_t, \tag{74}$$

где W_t – это полугруппа сжимающих операторов, а U_t – вполне непрерывные операторы, то такая полугруппа является асимптотически компактной.

Лемма 3. *Полугруппа V_t асимптотически компактна.*

Обозначим буквой P ортопроектор на ммножество соленоидальных векторов. Применим этот ортопроектор к обеим частям уравнения (4).

$$\frac{\partial v}{\partial t} + P(v\cdot\nabla v) - \mu_1\Delta v - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v - \int\limits_0^t K(t-\tau)\Delta v(x,\tau)d\tau = P(f(x)). \tag{75}$$

Представим V_t в виде (74). Для этого представим функцию v в виде суммы $v = w + u$. Пусть W_t будут у нас разрешающими операторами линейной однородной системы

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \mu_1\Delta w - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta w - \mathbf{K}\Delta w = 0, \tag{76}$$

$$w|_{t=0} = v_0, \quad w|_S = 0. \tag{77}$$

Тогда U_t должны быть разрешающими операторами для следующей системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1\Delta u - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u - \mathbf{K}\Delta u = G(x,t), \tag{78}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_S = 0. \tag{79}$$

Здесь $G(x,t) = P(f(x)) - P(v\cdot\nabla v)$. Считаем, что V_t уже построена и $v(t)$ найдено. Получим оценки для решений w начально-краевой задачи (76), (77). Для этого умножим уравнение (76) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $w(x,t)$. Тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{2,\Omega} + \mu_1\|w_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{t} K(t-\tau)w_x(x,\tau)w_x(x,t)\ d\tau dx = 0. \tag{80}$$

Введем новую функцию

$$\theta^s = \int\limits_0^t e^{-\alpha_s(t-\tau)}w(x,\tau)\ d\tau. \tag{81}$$

Для функции θ^s верно равенство

$$\frac{\partial\theta^s}{\partial t} = w - \alpha_s\theta^s. \tag{82}$$

С помощью этих функций θ^s равенство (80) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{2,\Omega} + \mu_1\|w_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2_{2,\Omega} + \sum_{s=1}^{\infty}\beta_s\alpha_s\|\theta^s_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{\infty}\beta_s\|\theta^s_x\|^2_{2,\Omega} = 0. \tag{83}$$

Нам понадобится еще одна новая функция

$$\zeta = \|w\|^2_{2,\Omega} + \mu\|w_x\|^2_{2,\Omega} + \sum_{s=1}^{\infty}\beta_s\|\theta^s_x\|^2_{2,\Omega}. \tag{84}$$

Тогда из равенства (83) следует неравенство

$$\frac{d}{dt}\zeta + \mu^{**}\zeta \leqslant 0, \tag{85}$$

где $\mu^{**} = \min\{\lambda_1\mu, \mu_1, \alpha_1\}$. Через λ_1 обозначено первое собственное число соответствующей задачи Стокса. Отсюда можно получить, что

$$\zeta(t) \leqslant \zeta(0)e^{-\mu^{**}t}, \tag{86}$$

то есть полугруппа W_t действительно является экспоненциально сжимающей.

Теперь перейдем к изучению начально-краевой задачи (78), (79). Сначала оценим правую часть (78) $G(x,t)$, используя неравенство (Ладыженская [1]).

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \leqslant C_{11}\|u\|_{2,\Omega}\|u_x\|_{2,\Omega}^3, \tag{87}$$

верное для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, $\Omega \cap \mathbf{R}^3$. Мы находим, что функция v принадлежит пространству $L_4(\Omega)$, а тогда по неравенству Гельдера $G(x,t) \in L_{\frac{4}{3}}(\Omega)$. Компактность операторов U_t вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbf{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in C^1$. Пусть правая часть системы* (78) $G(x,t)$ *принадлежит пространству L_p, $1 < p \leqslant 2$. Тогда начально-краевая задача* (78), (79) *имеет решение $u = U_t(G)$ и для этого решения выполняется оценка*

$$\|U_t(G)\|_{p,\Omega}^{(2)} \leqslant C\|G(x,t)\|_{p,\Omega}. \tag{88}$$

Здесь через символ $\|.\|_{p,\Omega}^{(2)}$ обозначена норма в пространстве $W_p^2(\Omega)$. Поскольку пространство $W_p^2(\Omega)$ вкладывается компактно в $W_2^1(\Omega)$, оператор U_t будет компактным в $W_2^1(\Omega)$.

Доказать эту теорему можно, например, используя рассуждения, приведенные в книге Копачевского [20].

Решение начально-краевой задачи для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1\Delta u - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u = G(x,t) \tag{89}$$

$$u(0) = u^0 \tag{90}$$

выражается формулой

$$u(t) = \Upsilon(t)u^0 + \int_0^t \Upsilon(t-s)G(s)\,ds. \tag{91}$$

Теперь вернемся к уравнению (78). Обозначим через $\Psi(x,t)$ функцию

$$\Psi(x,t) = \int_0^t K(t-\tau)\Delta u(x,\tau)\ d\tau + G(x,t). \tag{92}$$

Тогда (78) перепишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - \mu \frac{\partial}{\partial t}\Delta u = \Psi(x,t). \tag{93}$$

Решение начально-краевой задачи (93) с начальным условием $u(0) = u^0$ дается формулой

$$u(x,t) = \Upsilon(t)u^0 + \int_0^t \Upsilon(t-s)\Psi(x,s)ds. \tag{94}$$

Это соотношение с учетом (92) приводит к уравнению

$$u(t) - \int_0^t \Upsilon(t-s)\left(\int_0^s K(s-\tau)\Delta u(\tau)\ d\tau\right)\ ds = u_0(t), \tag{95}$$

где $u_0(t)$ – известная функция, являющаяся решением задачи Коши соответствующего "укороченного" уравнения с ядром $K = 0$:

$$u_0(t) = \Upsilon(t)u^0 + \int_0^t \Upsilon(t-s)G(s)\ ds. \tag{96}$$

Теперь поменяем порядок интегрирования во втором слагаемом справа в (95).

$$\begin{aligned}\int_0^t \Upsilon(t-s)\left(\int_0^s K(s-\tau)\Delta u(\tau)\ d\tau\right)\ ds \\ = \int_0^t \left(\int_\tau^t \Upsilon(t-s)K(s-\tau)\ ds\right)\Delta u(\tau)\ d\tau \\ =: \int_0^t \Phi(t,\tau)\Delta u(\tau)\ d\tau. \end{aligned} \tag{97}$$

Тогда уравнение (78) перепишется в виде

$$u(t) - \int_0^t \Phi(t,\tau)\Delta u(\tau)\, d\tau = u_0(t). \tag{98}$$

Применив преобразование Фурье по x, мы сведем задачу к решению уравнения Вольтерра, которое имеет единственное решение в пространствах L_p, $1 < p \leqslant 2$ ([20]).

Из всего вышесказанного следует, что имеет место теорема

Теорема 5. *Разрешающие операторы V_t начально-краевой задачи* (4), (5), (6) *с оператором* $\mathbf{K}$*, имеющим вид* (7)*, с коэффициентами α_s, β_s, удовлетворяющими условиям* (9)–(11)*, образуют асимптотически компактную полугруппу.*

Из теоремы 5 следует теорема 2.

Список литературы

1. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М. Наука, (1961).
2. О. А. Ладыженская, *О динамической системе, порожденной уравнениями Навье-Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **27** (1972), 91–115.
3. О. А. Ладыженская, *О нахождении минимальных глобальных B-аттракторов для полугрупп, порождаемых начально-краевыми задачами для нелинейных диссипативных уравнений с частными производными.* Препринт ЛОМИ Е-3-87, (1987).
4. А. П. Осколков, *О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей I.* — Труды Мат. Инст. АН СССР **127** (1975), 32–57.
5. А. П. Осколков, *Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей.* Препринт ЛОМИ Р-2-83, (1983).
6. Н. А. Каразеева, А. А. Котсиолис, А. П. Осколков, *О динамической системе, порожденной уравнениями движения жидкостей Олдройта порядка L.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **164** (1987), 47–53.
7. Н. А. Каразеева, *О разрешимости в целом на $[0,\infty)$ основной начально-краевой задачи для двумерных уравнений движения жидкостей Олдройта.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **156** (1986), 69–72.
8. Н. А. Каразеева, А. А. Котсиолис, А. П. Осколков, *О динамических системах, порождаемых начально-краевыми задачами для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей.* — Труды Мат. Инст. **188** (1990), 32–68.
9. E. Sanchez-Palencia, *Non-homogeneous Media and Vibration Theory.* — Lecture Notes in Physics **127** (1980).
10. И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М., (1973). (пер. с англ.)

11. В. В. Власов, Д. А. Медведев, *Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории.* — Современная Математика. Фундаментальные Направления **30** (2008), 3–173.
12. N. A. Karazeeva, *Correct solvability of integro-differential equations in classes of generalized solutions.* — Functional Differential Equations **19**, No. 1-2 (2012), 125–139.
13. N. W. Tschoegl, *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior.* Springer-Verlag, Berlin, (1989).
14. J. M. Golden, G. A. Graham, *Boundary Value Problems in Linear Viscoelasticity.* Springer-Verlag, Berlin, (1988).
15. R. B. Birg, R. C. Armstrong, O. Hassanger, *Dynamics of Polimeric Liquids, I.* John Wiley and Sons, New-York, (1987).
16. G. J. Creus, *Viscoeladticity - Basic Theory and Applications to Concrete Structures.* — LectureNotes in Engineering, **16**, Springer-Verlag, Berlin, (1986).
17. M. E. Gurtin, A. C. Pipkin, *A general theory of heat conduction with finite wave speeds.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **31** (1968), 113–126.
18. S. Ivanov, L. Pandolfi, *Heat equations with memory; lack of controllability to the rest.* — J. Math. Anal. Appl. **355** (2009), 1–11.
19. Д. Астарита, Д. Маруччи, *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей.* Москва, Мир, (1978).
20. Н. Д. Копачевский, *Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в Гильбертовом пространстве.* Симферополь (2012).
21. D. A. Vorotnikov, V. G. Zvyagin, *A review of results and open problems on mathematical models of motion of viscoelastic media of Jeffreys' type.* `arxive 0911.2206`.
22. В. Г. Звягин, В. П. Орлов, *О слабой разрешимости одной задачи протекания вязкоупругой жидкости с памятью.* — Журн. Вычисл. Матем. и Мат. Физики **63:11** (2023), 1859–1876.
23. В. Г. Звягин, В. П. Орлов, *О слабой разрешимости одной неоднородной задачи динамики вязкоупругой среды с памятью.* — Функ. Анал. и его Прилож. **57:1** (2023).

Karazeeva N. A. Asymptotics and Attractor for the system describing 3-D flows with Voight friction.

The initial boundary-value problem with slipping boundary condition for the system describing Kelvin–Voight flow with infinite number of relaxation times is investigated. Theorem of existence and uniqueness of a solution for this initial boundary-value problem is proved. Moreover, it is proved that the semigroup of the resolving operators is asymptotically compact and that the minimal global B-attrractor exists.

Санкт-Петербургское Отделение
Математического Института им. Стеклова РАН

E-mail: `karazeev@pdmi.ras.ru`

Поступило 29 сентября 2026 г.