Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

М. Н. Демченко

КОРРЕКТНОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЕКТОРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

§1. Введение

В работе рассматривается характеристическая задача для ультрагиперболического уравнения в $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{R}^{1,d}$, $d \geqslant 1$, где $\mathbb{R}^{1,d}$ – пространство Минковского, состоящее из элементов

$$u = (u^0, u^1, \dots, u^d), \quad u^\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, d,$$

и снабженное скалярным произведением

$$uv = u^0 v^0 - u^1 v^1 - \dots - u^d v^d = u^\alpha v_\alpha,$$

относительно которого оно является псевдоевклидовым пространством. Мы используем ковариантные обозначения, в которых:

$$u_0 := u^0, \quad u_k := -u^k, \quad k = 1, \dots, d,$$

и подразумевается суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам. Символ ∂_{u^α} обозначает частную производную по u^α, $\partial_{u_\alpha} := (\partial_{u^0}, -\partial_{u^1}, \dots, -\partial_{u^d})$. Исследуемое в работе уравнение имеет вид

$$(\partial_{u^\alpha} - iA_\alpha(u))\partial_{v_\alpha}\Omega(u, v) = 0, \tag{1}$$

где $u, v \in \mathbb{R}^{1,d}$, $\Omega(u, v)$ – неизвестная комплекснозначная функция, а коэффициент $A(u)$ принимает значения в $\mathbb{R}^{1,d}$. На решение Ω накладывается условие

$$\Omega|_{u^0=0} = \Omega_0. \tag{2}$$

Гиперплоскость $\{u^0 = 0\}$, на которой ставится данное условие, является характеристической для ультрагиперболического уравнения (1).

Мы будем рассматривать решения $\Omega(u, v)$ в классе непрерывных функций переменной $u^0 \in \mathbb{R}$ со значениями в $L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1,d})$. Запишем это условие кратко

$$\Omega(u^0, \cdot) \in C\left(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1,d})\right). \tag{3}$$

Ключевые слова: ультрагиперболическое уравнение, характеристическая задача, векторный потенциал.

Условие (2) для таких функций и данных $\Omega_0 \in L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1,d})$ имеет очевидный смысл. Мы потребуем, чтобы уравнение (1) выполнялось в обобщенном смысле во всем пространстве $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{R}^{1,d}$. Это требование также имеет смысл, поскольку решения из указанного класса можно рассматривать как элементы $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{R}^{1,d})$. Результатом данной работы является корректность задачи (1), (2) в классе функций (3).

Теорема 1. *В предположении $A \in C^\infty(\mathbb{R}^{1,d}; \mathbb{R}^{1,d})$, $\Omega_0 \in L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1,d})$ существует единственная функция Ω класса* (3)*, удовлетворяющая уравнению* (1) *в обобщенном смысле и условию* (2)*, причем выполнено равенство*

$$\left\|\Omega\left(u^0, \cdot\right)\right\|_{L_2} = \left\|\Omega_0\right\|_{L_2}, \quad u^0 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Если, кроме того, выполнено

$$\Omega_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1,d}), \tag{5}$$

решение Ω задачи (1), (2) *непрерывно в $\mathbb{R}^{1,d}$.*

Первые результаты для характеристической задачи для невозмущенного ультрагиперболического уравнения были получены в работах [1, 2]. В работе [2] рассматривалось уравнение

$$(\partial_{ts}^2 + \Delta_x - \Delta_y)u(t, s, x, y) = 0, \quad (t, s, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,$$

где Δ_x, Δ_y – операторы Лапласа соответственно по $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^n$. При этом условие вида (2) ставилось на гиперплоскости $\{t = 0\}$. Была доказана корректность такой задачи в определенном классе функций, а также получена формула для ее решения в виде свертки начальных данных с некоторым распределением. В работах [3, 4] были исследованы асимптотические свойства решений характеристической задачи в такой постановке. А именно, была получена асимптотика решения при удалении на бесконечность вдоль характеристик. В работах [5–8] рассматривалась задача для невозмущенного ультрагиперболического уравнения с данными в виде асимптотики решения на бесконечности. В случае *гиперболических* уравнений такого рода задачи были исследованы в работах [9–12]. Упомянем также работы, посвященные задачам для возмущенных ультрагиперболических уравнений в постановках, отличных от рассмотренной здесь. Случай уравнения со скалярным потенциалом в евклидовом пространстве был изучен в [13]. В работах [14, 15] рассмотрен случай сингулярного возмущения специального вида.

§2. Единственность решения

Начнем с доказательства тождества (4), из которого будет следовать единственность решения задачи (1), (2). Введем следующие обозначения для элементов u из $\mathbb{R}^{1,d}$:

$$\overline{u} := (u^1, \dots, u^d) \in \mathbb{R}^d, \quad |u| := \left((u^0)^2 + |\overline{u}|^2\right)^{1/2}.$$

Для произвольной пробной функции $\Psi(u,v)$ из $C_0^\infty((\mathbb{R}^{1,d})^2)$ имеем

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^{1,d})^2} \Omega(u,v)(\partial_{u^\alpha} + iA_\alpha(u))\partial_{v^\alpha}\Psi(u,v)dudv = 0.$$

Из условия (3) нетрудно вывести, что подинтегральная функция в левой части является суммируемой в $(\mathbb{R}^{1,d})^2$, поэтому интеграл можно представить как повторный по переменным u и v. Далее, при п.в. u функция $\Omega(u,v)$ переменной v принадлежит $L_2(\mathbb{R}^{1,d})$, а значит, это же верно для ее преобразования Фурье

$$\widetilde{\Omega}(u,\mu) := (F\Omega)(u,\mu) := \int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{iv\mu}\Omega(u,v)dv.$$

Поэтому приведенное выше тождество можно записать в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} du \int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} \widetilde{\Omega}(u,\mu)\,\mu^\alpha(\partial_{u^\alpha} + iA_\alpha(u))\widetilde{\Psi}(u,\mu)d\mu = 0, \tag{6}$$

где $\widetilde{\Psi}(u,\mu)$ – *обратное* преобразование Фурье $F^{-1}\Psi$ функции $\Psi(u,v)$ по v:

$$\widetilde{\Psi}(u,\mu) = (2\pi)^{-d-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{-iv\mu}\Psi(u,v)dv.$$

Для пробной функции вида

$$\Psi(u,v) = \Psi_1(u)\Psi_2(v)$$

выполнено $\widetilde{\Psi}(u,\mu) = \Psi_1(u)\widetilde{\Psi}_2(\mu)$, где $\widetilde{\Psi}_2 = F^{-1}\Psi_2$. Применив к такой функции тождество (6) и переставив в нем интегралы по u и μ,

получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} (P\widetilde{\Psi}_2)(\mu)G(\mu)d\mu = 0, \quad P(\mu) := \left(1+|\mu|^2\right)^{1/2}, \tag{7}$$

$$G(\mu) := P(\mu)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} \widetilde{\Omega}(u,\mu)\, \mu^\alpha (\partial_{u^\alpha} + iA_\alpha(u))\Psi_1(u)du.$$

По неравенству Коши-Шварца имеем

$$|G(\mu)|^2 \leqslant P(\mu)^{-2}|\mu|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} |(\partial_u + iA(u))\Psi_1(u)|^2 du \times \int\limits_{\operatorname{supp}\Psi_1} |\widetilde{\Omega}(u,\mu)|^2 du \leqslant C_{\Psi_1,A} \int\limits_{\operatorname{supp}\Psi_1} |\widetilde{\Omega}(u,\mu)|^2 du.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} |G(\mu)|^2 d\mu \leqslant C_{\Psi_1,A} \int\limits_{\operatorname{supp}\Psi_1} du \int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} |\widetilde{\Omega}(u,\mu)|^2 d\mu.$$

Повторный интеграл в полученном выражении не превосходит

$$\int\limits_{-T}^{T} du^0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\overline{u} \int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} |\widetilde{\Omega}(u,\mu)|^2 d\mu = \int\limits_{-T}^{T} du^0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\overline{u} \int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} |\Omega(u,v)|^2 dv < \infty$$

для достаточно большого T, зависящего от носителя функции Ψ_1 (в последней оценке мы воспользовались условием (3)). Таким образом, функция $G(\mu)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^{1,d})$. Но тогда из равенства (7) будет следовать, что $G(\mu) = 0$ при п.в. μ, как только мы установим, что

$$\operatorname{clos}_{L_2}\{PF^{-1}\Psi_2 \,|\, \Psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})\} = L_2(\mathbb{R}^{1,d}).$$

Пусть функция $\chi(w)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$ и равна единице в начале координат. Положим $\chi^\varepsilon(w) := \chi(\varepsilon w)$, $\varepsilon > 0$. Для заданной функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{1,d})$ функции

$$\Psi_2^\varepsilon = \chi^\varepsilon F(P^{-1}\varphi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$$

стремятся к $F(P^{-1}\varphi)$ в топологии $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{1,d})$ при $\varepsilon \to 0$, а тогда функции $PF^{-1}\Psi_2^\varepsilon$ стремятся к φ.

Итак, мы получили, что для фиксированной пробной функции $\Psi_1(u)$ при п.в. $\mu \in \mathbb{R}^{1,d}$ выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} \widetilde{\Omega}(u,\mu)\, \mu^\alpha (\partial_{u^\alpha} + iA_\alpha(u))\Psi_1(u) du = 0. \tag{8}$$

Покажем, что для μ из некоторого множества Ξ полной меры в $\mathbb{R}^{1,d}$ данное равенство выполнено сразу для всех пробных функций Ψ_1 (подразумевается, что для таких μ функция $\widetilde{\Omega}(\cdot,\mu)$ локально суммируема). Пусть B – произвольный открытый шар (относительно метрики $|\cdot|$) в $\mathbb{R}^{1,d}$, а счетное множество

$$\{\Psi_1^k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(B)$$

является плотным в пространстве $C_0^1(B)$. Для точек μ из некоторого множества Ξ_B полной меры в $\mathbb{R}^{1,d}$ функция $\widetilde{\Omega}(\cdot,\mu)$ является локально суммируемой, и, кроме того, равенство (8) выполнено сразу для всех функций $\Psi_1 \in \{\Psi_1^k\}_k$. Тогда для таких μ это равенство выполнено для любой функции $\Psi_1 \in C_0^1(B)$. Нам остается выбрать последовательность шаров B, исчерпывающих пространство $\mathbb{R}^{1,d}$, и взять в качестве Ξ пересечение соответствующих множеств Ξ_B (также имеющее полную меру в $\mathbb{R}^{1,d}$).

Зафиксируем теперь произвольное $\mu \in \Xi$. Будем предполагать, что $\mu^0 \neq 0$. От функций $\widetilde{\Omega}$, Ψ_1 перейдем соответственно к функциям

$$\widetilde{\omega}(u,\mu) = \widetilde{\Omega}\left(u^0, \overline{u} + u^0\,\overline{\mu}/\mu^0, \mu\right), \quad \psi(u) = \Psi_1\left(u^0, \overline{u} + u^0\,\overline{\mu}/\mu^0\right). \tag{9}$$

Нам удобно сохранить в обозначении функции $\widetilde{\omega}(u,\mu)$ зависимость от μ, а в обозначении функции $\psi(u)$ эту зависимость не указывать, считая μ фиксированным параметром. Отметим следующие равенства

$$\widetilde{\Omega}(u,\mu) = \widetilde{\omega}\left(u^0, \overline{u} - u^0\,\overline{\mu}/\mu^0, \mu\right), \quad \Psi_1(u) = \psi\left(u^0, \overline{u} - u^0\,\overline{\mu}/\mu^0\right), \tag{10}$$

$$\mu^\alpha \partial_{u^\alpha}\Psi_1(u) = \mu^0(\partial_{u^0}\psi)\left(u^0, \overline{u} - u^0\,\overline{\mu}/\mu^0\right). \tag{11}$$

Заменив в интеграле в левой части (8) переменную интегрирования $u = (u^0, \overline{u})$ на $(u^0, \overline{u} + u^0\overline{\mu}/\mu^0)$ и применив последние равенства, мы получим тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\overline{u} \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{\omega}(u,\mu)\left(\mu^0 \partial_{u^0}\psi(u) + i\mu^\alpha A_\alpha\left(u^0, \overline{u} + u^0\,\overline{\mu}/\mu^0\right)\psi(u)\right) du^0 = 0.$$

Это соотношение установлено нами для функций ψ вида (9), в котором Ψ_1 принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$. Тогда оно выполнено для всех функций ψ

из того же класса, так как они могут быть представлены в указанном виде. В частности, для функций

$$\psi(u) = \psi_1(u^0)\psi_2(\overline{u})$$

это равенство принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\overline{u}\,\psi_2(\overline{u}) \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{\omega}(u,\mu)\big(\mu^0\partial_{u^0}\psi_1(u^0) + i\mu^\alpha A_\alpha\left(u^0, \overline{u} + u^0\,\overline{\mu}/\mu^0\right)\psi_1(u^0)\big)du^0 = 0.$$

Поскольку $\mu \in \Xi$, функция $\widetilde{\Omega}(\cdot,\mu)$, а значит и $\widetilde{\omega}(\cdot,\mu)$ локально суммируема. Поэтому внутренний интеграл в полученном равенстве является локально суммируемой функцией переменной $\overline{u}$. Ввиду произвольности ψ_2 мы получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{\omega}(u,\mu)\left(\mu^0\partial_{u^0}\psi_1(u^0) + i\mu^\alpha A_\alpha\left(u^0, \overline{u} + u^0\,\overline{\mu}/\mu^0\right)\psi_1(u^0)\right)du^0 = 0$$

для $\overline{u}$ из некоторого множества, зависящего от μ и ψ_1, полной меры в $\mathbb{R}^d$. Данное множество может быть выбрано независимо от пробной функции ψ_1 так же, как это было сделано в случае равенства (8). А тогда мы получаем, что для п.в. $(\overline{u},\mu)$ найдется число $\widetilde{\omega}_0(\overline{u},\mu)$, такое что для п.в. $u^0 \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\widetilde{\omega}(u,\mu) = \widetilde{\omega}_0(\overline{u},\mu)\exp\left(i\int\limits_0^{u^0}\frac{\mu^\alpha}{\mu^0}A_\alpha\left(s, \overline{u} + s\overline{\mu}/\mu^0\right)ds\right). \tag{12}$$

Функция $\widetilde{\omega}_0(\overline{u},\mu)$ измерима, поскольку последнее равенство, выполненное при п.в. (u,μ), позволяет представить ее как произведение двух измеримых функций. Кроме того, из данного равенства вытекает следующее соотношение для п.в. $u^0 \in \mathbb{R}$:

$$\|\widetilde{\omega}_0\|_{L_2} = \|\widetilde{\omega}(u^0,\cdot)\|_{L_2}.$$

Из определения (9) следует, что норма $\|\widetilde{\Omega}(u^0,\cdot)\|_{L_2}$ совпадает с $\|\widetilde{\omega}(u^0,\cdot)\|_{L_2}$, а значит, также не зависит от u^0, что эквивалентно равенству (4).

§3. Существование решения

В доказательстве существования решения мы будем исходить из формулы (12) (напомним, что функция $\widetilde{\omega}(u,\mu)$ определена равенством (9)). В этой формуле следует положить $\widetilde{\omega}_0$ равным преобразованию Фурье $F\Omega_0$ функции Ω_0 по переменной v. Тогда обратный переход от $\widetilde{\omega}$ к функции $\widetilde{\Omega}$ по правилу (10) дает

$$\widetilde{\Omega}(u,\mu)=\widetilde{\Omega}_0\left(\overline{u}-u^0\,\overline{\mu}/\mu^0,\mu\right)\exp\left(i\int\limits_0^{u^0}\frac{\mu^\alpha}{\mu^0}A_\alpha\left(s,\overline{u}+(s-u^0)\overline{\mu}/\mu^0\right)ds\right). \quad (13)$$

Покажем, что для $a\in\mathbb{R}$ выполнено

$$\|\widetilde{\Omega}(u^0,\cdot)-\widetilde{\Omega}(a,\cdot)\|_{L_2}\to 0,\quad u^0\to a. \quad (14)$$

Для этого нам удобно обозначить первый и второй сомножители в правой части (13) соответственно через $W(u,\mu)$ и $E(u,\mu)$. Для преобразования Фурье $\widehat{W}(u^0,\overline{\lambda},\mu)$ функции $W(u,\mu)$ по $\overline{u}$ имеем

$$\begin{aligned}\widehat{W}(u^0,\overline{\lambda},\mu)&=\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-i\overline{u}\,\overline{\lambda}}W(u,\mu)\,d\overline{u}\\&=\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-i\overline{u}\,\overline{\lambda}}\,\widetilde{\Omega}_0\left(\overline{u}-u^0\,\overline{\mu}/\mu^0,\mu\right)d\overline{u}=e^{-iu^0\frac{\overline{\lambda}\,\overline{\mu}}{\mu^0}}\widehat{\Omega}_0(\overline{\lambda},\mu)\end{aligned}$$

($\widehat{\Omega}_0(\overline{\lambda},\mu)$ – аналогичное преобразование Фурье функции $\widetilde{\Omega}_0(\overline{u},\mu)$ по $\overline{u}$). Первый сомножитель в полученном выражении ограничен и при п.в. $(\overline{\lambda},\mu)$ непрерывен по u^0. Тогда с учетом включения $\widehat{\Omega}_0\in L_2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{1,d})$ по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла мы получаем, что функция $\widehat{W}(u^0,\cdot)$ принадлежит классу (3). По теореме Планшереля это же верно для функции $W(u^0,\cdot)$. Далее, оценим норму разности

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\Omega}(u^0,\cdot)-\widetilde{\Omega}(a,\cdot)\|_{L_2}=\|W(u^0,\cdot)E(u^0,\cdot)-W(a,\cdot)E(a,\cdot)\|_{L_2}\\&\leqslant\|(W(u^0,\cdot)-W(a,\cdot))E(u^0,\cdot)\|_{L_2}+\|W(a,\cdot)(E(u^0,\cdot)-E(a,\cdot))\|_{L_2}.\end{aligned}$$

При $u^0\to a$ первое слагаемое полученной суммы стремится к нулю ввиду ограниченности функции $E(u,\mu)$ и установленной выше непрерывности $W(u^0,\cdot)$ как функции переменной u^0 со значениями в L_2. Из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что и второе слагаемое стремится к нулю, так как функция $E(u,\mu)$

ограничена и при п.в. $(\overline{u},\mu)$ непрерывна по u^0. Тем самым справедливо (14).

При п.в. u функция $\widetilde{\Omega}(u,\mu)$ переменной μ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^{1,d})$, а потому имеет обратное преобразование Фурье

$$\Omega(u,v) := (F^{-1}\widetilde{\Omega})(u,v) = (2\pi)^{-d-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} e^{-iv\mu}\widetilde{\Omega}(u,\mu)d\mu \qquad (15)$$

из того же класса. Покажем, что $\Omega(u,v)$ является решением задачи (1), (2) класса (3).

По теореме Планшереля из свойства непрерывности (14) вытекает аналогичное свойство для $\Omega(u^0,\cdot\,)$, которое по определению эквивалентно включению (3). Условие (2) обеспечивается равенством

$$\widetilde{\Omega}|_{u^0=0} = \widetilde{\Omega}_0,$$

которое является следствием формулы (13).

Докажем теперь, что $\Omega(u,v)$ является обобщенным решением уравнения (1). Пусть $\Psi(u,v)$ – произвольная пробная функция из $C_0^\infty((\mathbb{R}^{1,d})^2)$, $\widetilde{\Psi}(u,\mu)$ – ее *обратное* преобразование Фурье F^{-1} по v. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} \Omega(u,v)(\partial_{u^\alpha} + iA_\alpha(u))\partial_{v_\alpha}\Psi(u,v)dv$$
$$= i\int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} \widetilde{\Omega}(u,\mu)\mu^\alpha(\partial_{u^\alpha} + iA_\alpha(u))\widetilde{\Psi}(u,\mu)d\mu.$$

Тогда по теореме Фубини получаем

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^{1,d})^2} \Omega(u,v)(\partial_{u^\alpha} + iA_\alpha(u))\partial_{v_\alpha}\Psi(u,v)dudv$$
$$= i\int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} \widetilde{\Omega}(u,\mu)\mu^\alpha(\partial_{u^\alpha} + iA_\alpha(u))\widetilde{\Psi}(u,\mu)du. \qquad (16)$$

Введем функцию $\widetilde{\psi}(u,\mu)$, которая связана с $\widetilde{\Psi}(u,\mu)$ соотношением, аналогичным (9):

$$\widetilde{\psi}(u,\mu) := \widetilde{\Psi}\left(u^0, \overline{u} + u^0\,\overline{\mu}/\mu^0, \mu\right).$$

С учетом равенства

$$\mu^\alpha\partial_{u^\alpha}\widetilde{\Psi}(u,\mu) = \mu^0(\partial_{u^0}\widetilde{\psi})\left(u^0, \overline{u} - u^0\,\overline{\mu}/\mu^0, \mu\right),$$

аналогичного равенству (11), замена переменной интегрирования $u = (u^0, \overline{u})$ на $(u^0, \overline{u} + u^0\overline{\mu}/\mu^0)$ во внутреннем интеграле в правой части (16) дает

$$i\int\limits_{\mathbb{R}^{1,d}} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\overline{u} \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{\omega}(u,\mu)\left(\mu^0 \partial_{u^0}\widetilde{\psi}(u,\mu) + i\mu^\alpha A_\alpha\left(u^0, \overline{u} + u^0\,\overline{\mu}/\mu^0\right)\widetilde{\psi}(u,\mu)\right) du^0.$$

Функция $\widetilde{\psi}(\cdot, \overline{u}, \mu)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$ при п.в. $(\overline{u}, \mu)$. Тогда ввиду равенства (12) внутренний интеграл по u^0 равен нулю. Таким образом, уравнение (1) выполняется в обобщенном смысле.

Докажем непрерывность решения $\Omega(u, v)$ в случае, когда выполнено условие (5). Последнее гарантирует, что для любого $M \geqslant 0$ выполнено

$$|\mu|^M |\widetilde{\Omega}_0(\overline{u}, \mu)| \leqslant C_M, \quad (\overline{u}, \mu) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1,d}.$$

Отсюда следует, что подинтегральное выражение в правой части (15) имеет суммируемую мажоранту, не зависящую от u, v. Кроме того, при п.в. μ подинтегральное выражение непрерывно по u, v. Тогда из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что функция $\Omega(u, v)$ непрерывна всюду в $(\mathbb{R}^{1,d})^2$.

Список литературы

1. А. С. Благовещенский, *О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения.* — Матем. сб., **63:105**, No. 1 (1964), 137–168.
2. А. С. Благовещенский, *О задаче для ультрагиперболического уравнения с данными на характеристической плоскости.* — Вестник ЛГУ, **13** (1965), 13–19.
3. М. Н. Демченко, *Об одном представлении решения характеристической задачи для ультрагиперболического уравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **541** (2025), 76–88.
4. M. N. Demchenko, *Asymptotic properties of solutions to the characteristic problem for the ultrahyperbolic equation.* `arXiv:2605.05839`.
5. М. Н. Демченко, *Асимптотические свойства решений одного ультрагиперболического уравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **516** (2022), 40–64.
6. М. Н. Демченко, *Существование решения задачи рассеяния для ультрагиперболического уравнения.* — Записки научных семинаров ПОМИ, **521** (2023), 79–94.
7. M. N. Demchenko, *On the scattering problem for the nonhomogeneous ultrahyperbolic equation.* — IEEE Conference Proceedings: Days on Diffraction (2024), 21–24.
8. М. Н. Демченко, *Существование решения неоднородного ультрагиперболического уравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **533** (2024), 77–100.

9. А. С. Благовещенский, *О некоторых новых корректных задачах для волнового уравнения.* — Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн (1970), 29–35. Ленинград, Наука, 1971.
10. H. E. Moses, R. T. Prosser, *Acoustic and Electromagnetic Bullets: Derivation of New Exact Solutions of the Acoustic and Maxwell's Equations.* — SIAM J. Appl. Math., **50:5** (1990), 1325–1340.
11. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения* (*обзор*). — Оптика и спектроскопия, **102:4** (2007), 661–681.
12. А. Б. Плаченов, *Выражение энергии акустического, электромагнитного и упругого волнового поля через его асимптотику на больших временах и расстояниях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **493** (2020), 269–287.
13. A. Holst, A. Melin, *Intertwining Operators in Inverse Scattering.* 2004. In: Bingham, K., Kurylev, Y.V., Somersalo, E. (eds) *New Analytic and Geometric Methods in Inverse Problems*, Springer, Berlin, Heidelberg.
14. Л. Н. Ляхов, И. П. Половинкин, Э. Л. Шишкина, *Об одной задаче И. А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения.* — Дифференциальные уравнения, **50:4** (2014), 516–528.
15. Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, *Формула Пуассона решения радиальной задачи Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения.* — Дифференциальные уравнения, **61:2** (2025), 229–241.

Demchenko M. N. Well-posedness of the characteristic problem for the ultrahyperbolic equation with the vector potential.

We deal with the problem for a certain ultrahyperbolic equation perturbed by the vector potential with data on the characteristic hyperplane. The well-posedness of such a problem in a natural class of functions is established.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 30 сентября 2026 г.