Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

В. С. Будыка, М. М. Маламуд, И. Л. Покровский

О САМОСОПРЯЖЁННОСТИ НЕКОТОРЫХ БЛОЧНЫХ ЯКОБИЕВЫХ МАТРИЦ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

§1. Введение

Следуя М. Г. Крейну (см. [35]), рассмотрим бесконечную блочную якобиеву матрицу

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathcal{B}_0^* & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathcal{B}_1^* & \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathbb{O}_m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

с $m \times m$-матричными элементами. Здесь $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathcal{A}_n$ – самосопряжённые матрицы, $\mathcal{B}_n$ – обратимы, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{O}_m$ – нулевая матрица.

Пусть $l_0^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$ – подмножество финитных последовательностей в $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^m)$. Отображение $l_0^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m) \ni f \to \mathbf{J}f$ определяет линейный симметрический, но незамкнутый оператор $\mathbf{J}^0$ в $l_0^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$. Его замыкание определяет минимальный (замкнутый) симметрический оператор $\mathbf{J}_{\min}$ в $l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$. В дальнейшем мы отождествляем минимальный оператор $\mathbf{J}_{\min}$ с матрицей $\mathbf{J}$. Положим также $\mathbf{J}_{\max} = \mathbf{J}^*$. Хотя оператор $\mathbf{J}$ симметрический, $\mathbf{J} \subset \mathbf{J}^*$, он не обязательно самосопряжённый. Его индексы дефекта

$$n_\pm(\mathbf{J}) := \dim \mathfrak{N}_{\pm i}(\mathbf{J}) := \dim \ker(\mathbf{J}^* \mp iI)$$

удовлетворяют оценкам $0 \leqslant n_\pm(\mathbf{J}) \leqslant m$ (см. [21, 35, 36]). Более того, для каждой пары чисел $\{n_+, n_-\} \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ с $0 \leqslant n_\pm \leqslant m-1$ найдется

Ключевые слова: блочная якобиева матрица, индексы дефекта, самосопряжённость, операторы Шрёдингера и Дирака, нерелятивистский предел.

Исследования первых двух авторов выполнены за счёт гранта Российского научного фонда No. 23-11-00153-П, а работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках реализации программы регионального Азово-Черноморского математического центра по соглашению No. 075-02-2026-734.

матрица $\mathbf{J}$ с $n_\pm(\mathbf{J}) = n_\pm$ ([28]). При этом, равенства $n_-(\mathbf{J}) = m$ и $n_+(\mathbf{J}) = m$ выполняются лишь одновременно.

Проблема нахождения индексов дефекта, в частности, условий самосопряжённости, блочных якобиевых матриц является первой основной задачей, естественно возникающей в спектральной теории якобиевых матриц. Эта проблема привлекала значительное внимание на протяжении многих лет (см., например, [3, 6, 10–12, 15–24, 26–34, 36] и литературу в них).

Наиболее известным достаточным условием самосопряжённости блочного якобиева оператора $\mathbf{J}$ вида (1.1) является матричная версия теста Карлемана, доказанная в [21] Ю. Березанским при $m \geqslant 1$.

Теорема 1.1 ([21, Теорема VII.2.9])**.** (*Тест Карлемана*). *Якобиев оператор* $\mathbf{J}$, *ассоциированный с матрицей* (1.1), *самосопряжён, т.е.* $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$ ($\Leftrightarrow n_\pm(\mathbf{J}) = 0$), *если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{B}_n\|^{-1} = +\infty. \tag{1.2}$$

Березанский (см. [21, теорема VII.1.1], [20]) также показал, что при $m = 1$ и дополнительных предположениях на элементы матрицы $\mathbf{J}$, условие (1.2) является необходимым для самосопряжённости $\mathbf{J}$. Матричные версии этого результата получены в [31, 33].

Отметим, что в статьях [3, 16–18, 21] найдены новые условия самосопряжённости блочных якобиевых матриц $\mathbf{J}$.

В работе [25] в развитии результатов [3] получены новые условия самосопряжённости, максимальности индексов дефекта и дискретности спектра блочных якобиевых матриц $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$ (см. (2.1)).

В работе [10] (в скалярном случае) и в [30] (в матричном) обнаружена связь между блочными якобиевыми матрицами $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ и операторами Шрёдингера с точечными взаимодействиями, задаваемыми формальным дифференциальным выражением вида

$$l_{X,\alpha} := -\frac{d^2}{dx^2} \otimes \mathbb{I}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta(x - x_n). \tag{1.3}$$

Здесь δ – дельта-функция Дирака, $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{I} = (0, b)$ – строго возрастающая последовательность с $x_0 := 0$, $x_{n+1} > x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to b\,(\leqslant \infty)$, и $\{\alpha_n\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha_n = \alpha_n^*$. Эти операторы Шрёдингера играют большую роль в спектральной теории и математической физике.

Скалярные операторы, задаваемые выражением (1.3), впервые возникли в квантовой механике как описывающие точно решаемые модели (см. [1]). Их спектральные свойства достаточно хорошо изучены (см., например, монографии [1, 2, 16], обзоры [9, 11] и литературу в них).

Вторым основным объектом настоящей работы является матричный оператор Шрёдингера $\mathbf{H}_{X,\alpha}$, ассоциированный с выражением (1.3) в $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$. Одно из его строгих определений даётся в рамках теории расширений. Для этого вначале вводится предминимальный оператор:

$$\mathbf{H}^0_{X,\alpha} := -\frac{d^2}{dx^2}\otimes\mathbb{I}_m, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{dom}(\mathbf{H}^0_{X,\alpha}) = \left\{ f\in W^{2,2}_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}_+\setminus X;\mathbb{C}^m)\colon \begin{matrix} f'(0+)=0,\ f(x_n+)=f(x_n-) \\ f'(x_n+)-f'(x_n-)=\alpha_n f(x_n) \end{matrix} \right\}.$$

В силу условия $\alpha_n=\alpha_n^*$, $n\in\mathbb{N}$, он симметричен и, следовательно, допускает замыкание, которое и определяет замкнутый симметрический оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ ассоциированный в $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$ с дифференциальным выражением (1.3).

В силу общей теории граничных троек (см. [7, 8]) равенство (3.5), полученное в [10], (ср. с общим равенством (5.3)) означает, что (скалярный) минимальный якобиев оператор $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ является граничным оператором для гамильтониана $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ в граничной тройке

$$\Pi_{\mathbf{H}} = \{l^2\oplus l^2, \Gamma_{0,H}, \Gamma_{1,H}\}$$

для оператора $\mathbf{H}^*_X$ (см. §3), также построенной в [10]. Поэтому из теоремы 5.2(ii) вытекает равенство

$$n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})),$$

ведущее к оценке $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha})\leqslant 1$. Эта оценка впервые установлена различными методами в [5, 14].

В работе [30] соответствующая связь спектральных свойств операторов $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ и $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ перенесена на матричный случай ($m\geqslant 1$). В частности, там доказано равенство

$$n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) \leqslant m, \tag{1.5}$$

также вытекающее (после конструкции соответствующей граничной тройки) из общей теории граничных троек (см. [7, 8]).

Несколько ранее, чем статья [30], появилась работа К. Мирзоева и Т. Сафоновой [38], в которой для матричных операторов $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ равенство (1.5) установлено другим методом в двух случаях: нулевых и максимальных индексов дефекта якобиевой матрицы (т.е. в случаях самосопряжённости $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ и $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = m$).

Используя равенство (1.5), в недавней работе авторов [25] другим методом найдены новые условия самосопряжённости и максимальности индексов дефекта матричных операторов Шрёдингера $\mathbf{H}_{X,\alpha}$, а также условия дискретности их спектров.

В работе Р. Карлоне, М. Маламуда и А. Посиликано [6] результаты из [10, 29] распространены на случай скалярных операторов Дирака с точечными взаимодействиями. В частности, получен аналог равенства (1.5) для оператора Дирака. В работах [3, 25] и [26] исследованы операторы Дирака с матричными точечными взаимодействиями и найдены новые условия их самосопряжённости, максимальности индексов дефекта и дискретности их спектра.

В настоящей работе продолжаются исследования из [3] и [25] условий самосопряжённости и дискретности спектра блочных якобиевых матриц из класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$, не удовлетворяющих условию Карлемана (1.2).

Используя отмеченную выше связь, мы получаем новые условия самосопряжённости и дискретности спектра операторов Шрёдингера $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ с матричными точечными взаимодействиями на полуоси и конечном интервале.

Продемонстрируем (при $m = 1$) обнаруженные нами эффекты для матриц $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ и операторов $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ при условии $\{d_n\}_1^\infty \notin l^1(\mathbb{N})$:

$$d_{n+1}|\alpha_n| \leqslant a < 1 \ \Rightarrow n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = 0,$$
$$\text{и} \ \ d_{n+1}|\alpha_n| > 4 \Rightarrow n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = 0.$$

В работах [6] ($m = 1$) и [26] ($m \geqslant 1$) обоснован нерелятивистский предел при условии самосопряжённости оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$. Здесь мы указываем новые явные условия его существования (см. теорему 4.1).

§2. Самосопряжённость и дискретность спектра класса якобиевых матриц $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$

Обозначим через $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$ множество блочно якобиевых матриц вида

$$\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})=\begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_m & -\frac{\alpha_1}{d_2} & \frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \frac{1}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_m & -\frac{\alpha_2}{d_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Здесь $\alpha := \{\alpha_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha_n = \alpha_n^*$, и $d_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. В этом параграфе мы находим условия, обеспечивающие самосопряжённость матрицы $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ в $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$.

Всюду далее, $\|\cdot\|_m$ обозначает матричную норму в пространстве $\mathbb{C}^{m\times m}$, $|\alpha_n| = \sqrt{\alpha_n^2}$ и $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m) := l^2(\mathbb{N}_0)\otimes\mathbb{C}^m$.

Здесь указывается подкласс класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$ блочно якобиевых матриц, оказывающихся самосопряжёнными и при условии $\{d_n\}_1^\infty \in l^2(\mathbb{N})$, т.е. в случае неприменимости теста Карлемана (1.2). Новые условия самосопряжённости блочных якобиевых матриц из класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$ дополняют результаты работ [10, 25, 30, 38].

В следующей теореме получены условия самосопряжённости и максимальности индексов дефекта оператора $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$, которые существенно зависят от принадлежности $\{d_n\}_1^\infty$ пространству $l^1(\mathbb{N})$.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) \in \mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$, и $\alpha_n = \alpha_n^*$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть также при некоторых $a\in(0,1)$ и $N\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$\|\alpha_n\|_m \leqslant \frac{a}{d_{n+1}}\left(1+\left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right)^{3/2}\right), \qquad n\geqslant N. \tag{2.2}$$

Тогда:

(i) *оператор $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ самосопряжённый в $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$ в точности тогда, когда $\{d_n\}_1^\infty \notin l^1(\mathbb{N})$;*

(ii) *если $\{d_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N})$, то индексы дефекта оператора $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ – максимальны, т. е. $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = m$.*

Следствие 2.2. *Пусть $\{d_n\}_1^\infty \notin l^1(\mathbb{N})$ и $\alpha_n = \alpha_n^*$, $n\in\mathbb{N}$. Если при некоторых $a\in(0,1)$ и $N\in\mathbb{N}$ выполнены условия*

$$\|\alpha_n\|_m \leqslant a d_{n+1}^{-1}, \qquad n\geqslant N, \tag{2.3}$$

то якобиев оператор $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ самосопряжённый, $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})^*$.

Следствие 2.3. *Пусть* $\{d_n\}_1^\infty \notin l^1(\mathbb{N})$, $\alpha_n = \alpha_n^*$ *при* $n \in \mathbb{N}$ *и пусть*

$$\beta := \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} > 0.$$

Пусть также при некоторых $a \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,\beta)$ *и* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$\|\alpha_n\|_m \leqslant \frac{a}{d_{n+1}} \left(1 + (\beta-\varepsilon)^{3/2}\right), \qquad n \geqslant N_\varepsilon. \tag{2.4}$$

Тогда якобиев оператор $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *самосопряжён.*

Следующая теорема дополняет результат теоремы 2.1 в случае отрицательных α_n и произвольной последовательности $\{d_n\}$. В её доказательстве существенно используется теорема 2.6 из [3].

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) \in \mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$, *и* $\alpha_n = \alpha_n^* < 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Если выполнены оценки*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left\||\alpha_n|^{-1/2}\right\|_m}{d_n^{1/2}} < \frac{1}{2}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\left\||\alpha_n|^{-1/2}\right\|_m}{d_{n+1}^{1/2}} < \frac{1}{2}, \tag{2.5}$$

то оператор $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *самосопряжён в* $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$.

Следствие 2.5. *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) \in \mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$ *Пусть также* $\alpha_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Если, к тому же, минимальные собственные значения матриц* $|\alpha_n|$ *допускают оценку снизу:*

$$\lambda_{\min}(|\alpha_n|) > \frac{4}{\min\{d_n, d_{n+1}\}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

то оператор $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *самосопряжён в* $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$, $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})^*$.

Следствие 2.6. *Пусть в условиях следствия* 2.5 $\{d_n\}_1^\infty$ *монотонно стремится к нулю* ($d_n \downarrow 0$). *Если, к тому же, при некотором* $N \in \mathbb{N}$ *справедливы неравенства*

$$\lambda_{\min}(|\alpha_n|) > \frac{4}{d_{n+1}}, \qquad n > N,$$

то оператор $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *самосопряжён в* $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$.

Замечание 2.7. (i) Сопоставляя следствия 2.6 и 2.2 при $\{d_n\}_1^\infty \notin l^1(\mathbb{N})$ и $\{d_n\}_1^\infty \downarrow 0$, приходим к следующим импликациям

$$\lambda_{\min}(|\alpha_n|) > \frac{4}{d_{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = 0, \tag{2.6}$$

$$\lambda_{\max}(|\alpha_n|) \leqslant \frac{a}{d_{n+1}},\ a<1 \quad \Longrightarrow \quad n_{\pm}(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}))=0. \tag{2.7}$$

(ii) Левая часть условия (2.6) означает, что все собственные значения матриц $|\alpha_n|$ принадлежат бесконечному интервалу $\left(\frac{4}{d_{n+1}},+\infty\right)$, а условия (2.7) – интервалу $\left(0,\frac{a}{d_{n+1}}\right]$.



Рис. 1. Условия самосопряжённости $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$.

Замечание 2.8. (i) Результат близкий к результату теоремы 2.4 анонсирован авторами в [25].

(ii) Доказательство теорем 2.1 и 2.4 базируется на некоторых фактах теории возмущений.

Дополним теорему 2.4 результатом о дискретности спектра оператора $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$. Для этого напомним, что $\mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m))$ обозначает идеал Неймана–Шаттена в $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$.

Теорема 2.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4 *и пусть* $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2},\frac{\alpha_2}{d_3},\dots\right\}$ *– часть блочной диагонали* $\mathcal{A}$ *матрицы* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$.

Если оператор $\mathcal{A}'$ *имеет дискретный спектр в* $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$, *то спектр блочной якобиевой матрицы* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})=\mathbf{J}^*_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *также дискретен. Более того, если* $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m))$, $p\in(1,\infty]$, *то* $(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})-i\mathbb{I})^{-1}\in\mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m))$.

Замечание 2.10. Заметим, что для класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$ блочных якобиевых матриц теорема 2.9 дополняет известные результаты о дискретности спектра абстрактных блочных якобиевых матриц $\mathbf{J}$ из [3, 12].

§3. Применение к оператору Шрёдингера с точечными взаимодействиями

Здесь мы применим результаты предыдущего раздела к операторам Шрёдингера $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ ассоциированным с дифференциальным выражением

$$l_{X,\alpha} := -\frac{d^2}{dx^2}\otimes\mathbb{I}_m + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\delta(x-x_n) \tag{3.1}$$

(см. (1.4)) на полуоси. Здесь $\{\alpha_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$. Полагаем, что $d_n := x_n - x_{n-1} > 0$, и значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = |\mathcal{I}|$. Всюду далее, $L^2(\mathcal{I};\mathbb{C}^{2m}) := L^2(\mathcal{I})\otimes\mathbb{C}^{2m}$.

В одном из известных подходов к исследованию спектральных свойств оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ этот гамильтониан трактуется в рамках теории расширений, как расширение минимального симметрического оператора $\mathbf{H}_X = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{H}_n$, где $\mathbf{H}_n = \mathbf{H}_{n,\min}$ – минимальный симметрический оператор ассоциированный в $L^2[x_{n-1},x_n]$ с выражением $-d^2/dx^2$:

$$\mathbf{H}_n f := -f'', \quad \mathrm{dom}(\mathbf{H}_n) = W_0^{2,2}[x_{n-1},x_n].$$

Граничная тройка $\Pi_n = \{\mathcal{H},\Gamma_{0,n},\Gamma_{1,n}\}$ для оператора $\mathbf{H}_n^*$ может быть выбрана в виде $\Pi_n = \{\mathbb{C}^2,\Gamma_{0,n},\Gamma_{1,n}\}$, где

$$\Gamma_{0,n} f := \begin{pmatrix} f(x_{n-1}+) \\ f'(x_n-) \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_{1,n} f := \begin{pmatrix} f'(x_{n-1}+) \\ f(x_n-) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

и $\mathrm{dom}(\Gamma_{j,n}) = W^{2,2}[x_{n-1},x_n]\otimes\mathbb{C}^2$, $j\in\{0,1\}$.

В работе А. Кочубея [34] показано, что в случае $d_*(X) := \inf_n d_n > 0$ граничная тройка для сопряжённого (максимального) оператора $\mathbf{H}_X^* = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{H}_n^*$ может быть выбрана в виде прямой суммы троек Π_n : $\Pi = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n =: \{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$. Случай $d_*(X) = 0$ представлял значительную трудность, так как в этом случае прямая сумма $\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n$ граничных троек Π_n вида (3.2) граничной тройкой для оператора $\mathbf{H}_X^*$ не является. Причина этого эффекта в том, что отображение $\Gamma_j := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{j,n}$ не является сюръективным при $j\in\{0,1\}$.

В случае $d_*(X) = 0$ граничная тройка для оператора $\mathbf{H}_X^*$ впервые построена в работе А. Костенко и М. Маламуда [10] (см. также [29] и обзор [11]). В этом случае вместо троек (3.2) введены регуляризованные граничные тройки вида

$$\Gamma_{0,H}^{(n)} f := \begin{pmatrix} d_n^{1/2} f(x_{n-1}+) \\ d_n^{3/2} f'(x_n-) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\Gamma_{1,H}^{(n)} f := \begin{pmatrix} d_n^{-1/2}(f'(x_{n-1}+) - f'(x_n-)) \\ d_n^{-3/2}(f(x_n-) - (f(x_{n-1}+)) - d_n^{-1/2} f'(x_n-) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

и показано, что тройка $\Pi_{\mathbf{H}} = \{l^2(\mathbb{N})\otimes\mathbb{C}^2,\Gamma_{0,H},\Gamma_{1,H}\}$, в которой

$$\Gamma_{j,H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Gamma_{j,H}^{(n)}, \quad j\in\{0,1\},$$

уже является граничной для $\mathbf{H}_X^*$.

Отметим, что процедура регуляризации граничных троек на абстрактном уровне впервые предложена в [13] и применена в [10] для конструкции регуляризованной граничной тройки (3.3)–(3.4).

Принципиальным эффектом, открытым в [10], является тот факт, что именно в тройке $\Pi_{\mathbf{H}}$ граничный оператор $B_{X,\alpha}$, соответствующий расширению $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ в смысле равенства (5.3), оказался (скалярной) якобиевой матрицей вида (2.1). Другими словами, в граничной тройке $\Pi_{\mathbf{H}}$ оператора $\mathbf{H}_X^*$ расширение $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ задается равенством

$$\mathbf{H}_{X,\alpha}=\mathbf{H}_X^* \restriction \mathrm{dom}(\mathbf{H}_{X,\alpha}), \quad \mathrm{dom}(\mathbf{H}_{X,\alpha})=\ker(\Gamma_{1,H}-\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})\Gamma_{0,H}), \tag{3.5}$$

в котором $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ – оператор, порождаемый скалярной якобиевой матрицей вида (2.1) при $m=1$.

Именно это обстоятельство (согласно теореме 5.2) объясняет природу совпадения ряда свойств дифференциального оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ и дискретного якобиева оператора $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$.

В работе [30] результаты работы [10] были распространены на выражения вида (3.1) с матричными взаимодействиями $\{\alpha_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha_n=\alpha_n^*$, $n\in\mathbb{N}$. В частности, в [30] показано, что в этом случае граничная тройка для оператора $\mathbf{H}_X^*$ может быть выбрана в виде векторной модификации тройки из [10]: $\Pi_{\mathbf{H}}=\{l^2(\mathbb{N})\otimes\mathbb{C}^{2m},\Gamma_{0,H},\Gamma_{1,H}\}$, где $\Gamma_{j,H}=\bigoplus_{n=1}^\infty \Gamma_{j,H}^{(n)}$, $j\in\{0,1\}$, а отображения

$$\Gamma_{j,H}^{(n)} : W^{2,2}[x_{n-1},x_n]\otimes\mathbb{C}^{2m}\to\mathbb{C}^{2m}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

определяются теми же равенствами (3.3) и (3.4)). Более того, формула (3.5) также распространена в [30] на матричный случай, в котором $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ – оператор, порождаемый блочной якобиевой матрицей (2.1).

Теорема 3.1. *Пусть $x_n\to b(\leqslant\infty)$ и $\alpha_n=\alpha_n^*\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть также $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ – минимальный оператор ассоциированный с выражением (3.1) в $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$ и выполнены условия (2.2). Тогда*:

(i) *оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ самосопряжён в $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$;*

(ii) *В случае $b<\infty$ индексы дефекта оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ в $L^2((0,b);\mathbb{C}^m)$ – максимальны, т. е. $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}))=m$.*

В следующей теореме, в отличие от теоремы 3.1, указываются условия самосопряжённости оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ общие для всех пространств $L^2((0,b);\mathbb{C}^m)$ при $b\leqslant\infty$.

Теорема 3.2. *Пусть* $x_n \to b(\leqslant \infty)$ *и* $\alpha_n = \alpha_n^* < 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Пусть также выполнены условия* (2.5). *Тогда оператор* $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ *самосопряжён и в* $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$, *и в* $L^2((0,b);\mathbb{C}^m)$ *при всех* $b < \infty$.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.9 *и* $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$. *Тогда оператор* $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ *имеет дискретный спектр. Более того, если* $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m))$, $p \in (1,\infty]$, *то* $(\mathbf{H}_{X,\alpha} - i\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m))$.

Утверждения теорем 3.1, 3.2 и 3.3 вытекают из результатов теорем 2.1, 2.4 и 2.9, соответственно, если воспользоваться содержащейся в (3.5) связью операторов Шрёдингера с соответствующими якобиевыми операторами, и следующей ключевой формулы о связи индексов дефекта (см. (1.5)):

$$n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}),$$

вытекающей из (3.5) на основании теоремы 5.2(ii).

Замечание 3.4. В работах [10] ($m = 1$) и [30] ($m \geqslant 1$) самосопряжённость оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ в $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$ доказана при условии $\{d_n\}_1^\infty \notin l^2(\mathbb{N})$. Это условие является универсальным, т.е. не зависящим от интенсивностей взаимодействий α_n. Новые результаты (см. теоремы 3.1 и 3.2) допускают условие $\{d_n\}_1^\infty \in l^2(\mathbb{N})$, но предполагают ограничения (2.2) и (2.5) на интенсивности взаимодействий α_n. При $\{d_n\}_1^\infty \in l^2(\mathbb{N}) \setminus l^1(\mathbb{N})$ они дополняют результаты о самосопряжённости из [10] ($m = 1$, предл. 5.7), а также результаты из [3, Т. 7.2], [22, Т. 11], [25, предл. 2], [30, Т. 2] (случай $m \geqslant 1$).

Теорема 3.3 дополняет результаты о дискретности спектра операторов Шрёдингера $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ в $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$ из работ [3, Т. 7.2], [25, предл. 2], [30, Т. 2].

§4. Нерелятивистский предел

Следуя [3, 6], напомним определение операторов Дирака с матричными δ-взаимодействиями в $L^2(\mathcal{I};\mathbb{C}^{2m}) := L^2(\mathcal{I}) \otimes \mathbb{C}^{2m}$. Пусть $\mathbf{D}_{X,\alpha}$ – замыкание оператора $\mathbf{D}^0_{X,\alpha}$ вида

$$\mathbf{D}^0_{X,\alpha} := -i, c\frac{d}{dx} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \mathbb{I}_m \\ \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m \end{pmatrix} + \frac{c^2}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m \\ \mathbb{O}_m & -\mathbb{I}_m \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta(x - x_n), \quad (4.1)$$

$$\operatorname{dom}(\mathbf{D}^0_{X,\alpha})=\Big\{f\in W^{1,2}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{I}\backslash X;\mathbb{C}^{2m}):\ f_I\in AC_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I}),\ f_{II}\in AC_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I}\backslash X);$$

$$f_{II}(0+)=0\,,\quad f_{II}(x_n+)-f_{II}(x_n-)=-\frac{i\alpha_n}{c}f_I(x_n),\ n\in\mathbb{N}\Big\}. \tag{4.2}$$

Здесь δ – дельта-функция Дирака, c – скорость света, $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{I}=(0,b)$, строго возрастающая последовательность с $x_0:=0$, $x_{n+1}>x_n$, $n\in\mathbb{N}$, $x_n\to b(\leqslant\infty)$, $\{\alpha_n\}_1^{\infty}\subset\mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha_n=\alpha_n^*$ и $f=\begin{pmatrix} f_I & f_{II}\end{pmatrix}^{\top}$.

Оператор Дирака $\mathbf{D}_{X,\alpha}$ в $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{2m})$ ($\mathcal{I}=\mathbb{R}_+$) всегда самосопряжён при всех $X=\{x_n\}_1^{\infty}$ и $\alpha=\{\alpha_n\}_1^{\infty}$ (см. [6, 15, 39] ($m=1$) и [3] ($m\geqslant 1$)).

Результаты теорем 3.1 и 3.2 позволяют при их условиях обосновать существование нерелятивистского предела при $c\to\infty$.

Теорема 4.1. *Пусть $X=\{x_n\}_1^{\infty}$ – дискретное подмножество $\mathbb{R}_+$, и $\alpha:=\{\alpha_n\}_1^{\infty}$, $\alpha_n=\alpha_n^*\subset\mathbb{C}^{m\times m}$. Пусть также выполнено одно из условий* (2.2) *или* (2.5).

(i) *Тогда оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ самосопряжён в $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$ и существует нерелятивистский предел*

$$s-\lim_{c\to+\infty}\big(\mathbf{D}_{X,\alpha}-(z+c^2/2)\big)^{-1}=(\mathbf{H}_{X,\alpha}-z)^{-1}\bigotimes\begin{pmatrix}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m\\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m\end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

(ii) *Если $d_*(X):=\inf_n d_n>0$, то сходимость в* (4.3) *равномерна.*

§5. Аппендикс

Пусть A – плотно заданный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_\lambda(A):=\mathfrak{H}\ominus\operatorname{ran}(A-\overline{\lambda}I)=\ker(A^*-\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, – его *дефектные подпространства*, а $n_\pm(A):=\dim\mathfrak{N}_{\pm i}(A)$ – его *индексы дефекта*.

Всюду в дальнейшем мы считаем, $n_+(A)=n_-(A)<\infty$.

Определение 5.1. [7, 8, 27] *Совокупность $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, а Γ_j – линейное отображение из $\operatorname{dom}A^*$ в $\mathcal{H}$, $j\in\{0,1\}$, называется граничной тройкой оператора A^*, если:*

(i) *справедливо тождество Грина*

$$(A^*f,g)-(f,A^*g)=(\Gamma_1 f,\Gamma_0 g)_{\mathcal{H}}-(\Gamma_0 f,\Gamma_1 g)_{\mathcal{H}},\quad f,g\in\operatorname{dom}A^*; \tag{5.1}$$

(ii) *Отображение $\Gamma:f\to\{\Gamma_0 f,\Gamma_1 f\}$ из $\operatorname{dom}A^*$ в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ сюръективно.*

Граничная тройка для оператора A^* существует в том и только том случае, когда $n_+(A) = n_-(A)$. Более того, $n_\pm(A) = \dim \mathcal{H}$ и $\ker \Gamma = \ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1 = \operatorname{dom} A$.

Расширение $\widetilde{A}$ плотно заданного симметрического оператора A называется *собственным*, если $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} \widetilde{A} \subset \operatorname{dom} A^*$. Множество *собственных расширений* оператора A обозначают Ext_A.

Теорема 5.2. [7, 8] *Пусть* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – *граничная тройка для оператора* A^*. *Тогда отображение* $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\} : \operatorname{dom} A^* \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *задает биективное соответствие между совокупностью* Ext_A *собственных расширений* $\widetilde{A}$ *оператора* A *и совокупностью* $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *замкнутых линейных отношений в* $\mathcal{H}$

$$\operatorname{Ext}_A \ni \widetilde{A} \to \Theta := \Gamma(\operatorname{dom} \widetilde{A}) = \{\{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} : f \in \operatorname{dom} \widetilde{A}\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}). \quad (5.2)$$

Если Θ *является графиком линейного оператора* B, $\Theta = \operatorname{gr} B$, *то соотношение* (5.2) *принимает вид:*

$$\operatorname{dom} A_B = \{f \in \operatorname{dom} A^* : \Gamma_1 f = B\Gamma_0 f\}. \quad (5.3)$$

Для расширения $\widetilde{A}$ *при выполнении условия* (5.2) $\widetilde{A} =: A_\Theta$ *или* $\widetilde{A} =: A_B$ *при* (5.3). *При этом справедливы соотношения*

(i) $(A_B)^* = A_{B^*}$;

(ii) *расширение* A_B *симметрическое* $\Longleftrightarrow$ *оператор* B *симметрический. При этом справедливо равенство* $n_\pm(A_B) = n_\pm(B)$.

В частности, верна эквивалентность $A_B = A_B^* \Longleftrightarrow B = B^*$.

(iii) *пусть* $A_{B_1} = A_{B_1}^*$ *и* $A_{B_2} = A_{B_2}^*$. *Тогда справедлива эквивалентность:*

$$(A_{B_1} - iI)^{-1} - (A_{B_2} - iI)^{-1} \in \mathcal{S}_p(\mathfrak{H})$$
$$\Updownarrow$$
$$(B_1 - iI)^{-1} - (B_2 - iI)^{-1} \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}), \quad p \in (0, +\infty].$$

Аналогичные утверждения верны и для линейного отношения Θ.

Оператор B называют *граничным оператором* расширения A_B.

Отметим ещё, что впервые связь индексов дефекта симметрического расширения A_B абстрактного симметрического оператора A и соответствующего ему граничного оператора B, т.е. равенство $n_\pm(A_B) = n_\pm(B)$, обнаружено в работе [37].

Список литературы

1. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI (2005).
2. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators and Schrödinger type operators*, Cambridge University Press (2000).
3. V. Budyka, M. Malamud, *Deficiency indices and discreteness property of block Jacobi matrices and Dirac operators with point interactions.* — J. Math. Anal. Appl. **506** (2022), Paper No. 125582, 50.
4. V. Budyika, M. Malamud, A. Posilicano, *Nonrelativistic limit for $2p \times 2p$-Dirac operators with point interactions on a discrete set.* — Russ. J. Math. Phys. **24** (2017), 426–435.
5. D. Buschmann, G. Stolz, J. Weidmann, *One-dimensional Schrödinger operators with local point interactions.* — J. Reine Angew. Math. **467** (1995), 169–186.
6. R. Carlone, M. Malamud, A. Posilicano, *On the spectral theory of Gesztesy–Šeba realizations of 1–D Dirac operators with point interactions on a discrete set.* — J. Differential Equations **254**, no. 9 (2013), 3835–3902.
7. V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Extension Theory of Symmetric Operators and Boundary Value Problems,* Birkhäuser, Basel (2025).
8. V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps.* — J. Funct. Anal. **95** (1991), 1–95.
9. P. Exner, Seize ans après, *Appendix K to "Solvable Models in Quantum Mechanics" by Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H.*, Sec. Edition, AMS Chelsea Publ. (2005).
10. A. S. Kostenko, M. M. Malamud, *1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set.* — J. Differential Equations **249** (2010), 253–304.
11. A. Kostenko, M. Malamud, *1-D Schrödinger operators with local point interactions: a review".* — Spectral Analysis, Differential Equations and Mathematical Physics: a Festschrift in Honor of Fritz Gesztesy's 60th Birthday, Proc. Symp. Pure Math., **87**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2013), 235–262.
12. S. Kupin, S. Naboko, *On the Instability of the Essential Spectrum for Block Jacobi Matrices.* — Constr Approx **48** (2018), 473–500.
13. M. M. Malamud, H. Neidhardt, *Sturm-Liouville boundary value problems with operator potentials and unitary equivalence.* — J. Differential Equations **252** (2012), 5875–5922. arXiv:1102.3849v3 (2010).
14. N. Minami, *Schrödinger operator with potential which is the derivative of a temporally homogeneous Levy process.* — Probability Theory and Mathematical Sciences, Lect. Notes Math. **1299** (1988), 298–304.
15. V. Rabinovich, *Dirac operators on $\mathbb{R}$ with general point interactions*, in: Bauer W., Duduchava R., Grudsky S., Kaashoek M. (eds) Operator Algebras, Toeplitz Operators and Related Topics. Operator Theory: Advances and Applications **279** (2020) Birkhäuser, Cham.
16. K. Schmuedgen, *Unbounded Self-adjoint operators on Hilbert Space*, Springer (2012).
17. P. Štoviček, G. Świderski, *On positive Jacobi matrices with compact inverses.* — J. Approx. Theory **313** (2026), Paper No. 106217.

18. G. Świderski, *Periodic perturbations of unbounded Jacobi matrices III: The soft edge regime.* — J. Approx. Theory **233** (2018), 1–36.
19. G. Świderski, *Spectral properties of block Jacobi matrices.* — Constr. Approx. **48**, No. 2 (2018), 301-335.
20. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею,* "Физматгиз", Москва (1961).
21. Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов,* "Наукова думка", Киев (1965).
22. И. Н. Бройтигам, К. А. Мирзоев, *О дефектных числах операторов, порожденных якобиевыми матрицами с операторными элементами.* — Алгебра и анализ **30**, No. 4 (2018), 1–26.
23. В. С. Будыка, М. М. Маламуд, *Об индексах дефекта блочно якобиевых матриц, связанных с операторами Дирака с точечными взаимодействиями.* — Матем. заметки **106**, вып. 6 (2019), 940–945.
24. В. С. Будыка, М. М. Маламуд, К. А. Мирзоев, *Индексы дефекта блочных матриц Якоби: обзор.* — СМФН **67**, № 2 (2021), 237–254.
25. В. С. Будыка, М. М. Маламуд, И. Л. Покровский, *Индексы дефекта блочных якобиевых матриц, не удовлетворяющих условию Карлемана, и операторы с точечными взаимодействиями.* — Матем. заметки **114**, вып. 5 (2023), 789–795.
26. В. Будыка, М. Маламуд., А. Посиликано, *К спектральной теории одномерных матричных операторов Дирака с точечными матричными взаимодействиями.* — ДАН **479**, No. 2 (2018), 117–125.
27. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений,* "Наукова думка", Киев (1984).
28. Ю. М. Дюкарев, *О дефектных числах симметрических операторов, порожденных блочными матрицами Якоби.* — Матем. сб. **197**, вып. 8 (2006), 73–100.
29. А. С. Костенко, М. М. Маламуд, *Об одномерном операторе Шрёдингера с δ-взаимодействиями.* — Функц. анализ и его прил. **44**, вып. 2 (2010), 87–91.
30. А. С. Костенко, М. М. Маламуд, Д. Д. Натягайло, *Матричные операторы Шрёдингера с δ–взаимодействиями.* — Матем. заметки **100**, вып. 1. (2016), 59–77.
31. А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, *Трехчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределенный случай.* — Матем. заметки. **63**, No. 5 (1998), 709–716.
32. А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, *Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.* — Функц. анализ и его прил. **33**,No. 1 (1999), 30–45.
33. А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, *Признаки вполне неопределенности якобиевых матриц с матричными элементами.* — Функц. анализ и его прил. **35**,No. 4 (2001), 32–37.
34. А. Н. Кочубей, *Одномерные точечные взаимодействия.* — Укр. матем. ж. **41**,No. 10 (1989), 1391–1395.
35. М. Крейн, *Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов.* — Доклады Академии Наук СССР **LXIX** No. 2 (1949), 125–128.

36. М. Крейн, *Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m,m).* — Укр. мат. ж. **1**, No. 2 (1949), 3–66.
37. М. М. Маламуд, *О формуле обобщённых резольвент неплотно заданного эрмитова оператора.* — Укр. мат. ж. **44**, No. 12 (1992), 1658–1688.
38. К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Об индексе дефекта векторного оператора Штурма–Лиувилля.* — Матем. заметки **99**, вып. 2 (2016), 262–277. arXiv:1511.08949 (2015).
39. В. С. Рабинович, *Существенный спектр одномерных операторов Дирака с дельта-взаимодействиями.* — Функц. анализ и его прил. **54**, вып. 2 (2020), 90–94.

Budyka V. S., Malamud M. M., Pokrovskii I. L. On the self-adjointness of some classes of block Jacobi matrices and the associated Schrödinger operators with point interactions.

We obtain new conditions for the self-adjointness of some block Jacobi operators, as well as conditions for the maximality of their deficiency indices. The obtained results are applied to the study of analogous properties of Schrödinger operators with point interactions. We also establish conditions ensuring the discreteness of their spectra.

Поступило 6 октября 2026 г.

Донецкий филиал РАНХиГС, г. Донецк;
“Институт прикладной математики и механики”
(ФГБНУ ИПММ), г. Донецк;
Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург
E-mail: budyka.vik@gmail.com

“Институт прикладной математики и механики”
(ФГБНУ ИПММ), г. Донецк;
Санкт-Петербургский
государственный университет,
г. Санкт-Петербург
E-mail: malamud3m@gmail.com

Московский государственный
технический университет
имени Н.Э. Баумана, г. Москва;
“Институт прикладной математики и механики”
(ФГБНУ ИПММ), г. Донецк
E-mail: pokrovski.ilia@yandex.ru