Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

М. И. Белишев, С. А. Симонов

СВОЙСТВО АВТОМОДЕЛЬНОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА И ДИРАКА НА ПОЛУОСИ

О статье

• Пусть (X, μ) – измеримое пространство, $\mathscr{E}$ – гильбертово пространство, $\mathscr{H} = L_2(X, \mu; \mathscr{E})$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых $\mathscr{E}$-значных функций на X, $\mathfrak{U}(\mathscr{E})$ – группа унитарных операторов в $\mathscr{E}$. Каждый $\theta \in \mathfrak{U}(\mathscr{E})$ определяет оператор $\widehat{\theta} \in \mathfrak{U}(\mathscr{H})$, действующий по правилу $(\widehat{\theta}y)(x) = \theta[y(x)]$, $y \in \mathscr{H}$. Пусть L – оператор в $\mathscr{H}$ с областью определения $\operatorname{Dom} L$. Для $\theta \in \mathfrak{U}(\mathscr{E})$ обозначим $L_\theta := \widehat{\theta} L \widehat{\theta}^*$ с областью определения $\operatorname{Dom} L_\theta = \widehat{\theta} \operatorname{Dom} L$.

Пусть $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{U}(\mathscr{E})$ – подгруппа. Оператор L' в $\mathscr{H}$ называется *эквивалентным по форме* L, если существует такой $\theta \in \mathfrak{G}$, что $L' = L_\theta$ и $\operatorname{Dom} L' = \operatorname{Dom} L$.

Оператор $\dot{L}$ в (абстрактном) гильбертовом пространстве $\dot{\mathscr{H}}$, унитарно эквивалентный L, называется его (унитарной) *копией*, тогда как L называется (функциональной) *моделью* $\dot{L}$.

Назовём оператор L *автомодельным*, если он определяется любой своей унитарной копией с точностью до эквивалентности по форме. В приложениях это означает, что существует некоторая каноническая процедура, позволяющая восстановить L или, более точно, восстановить класс эквивалентности по форме $\{L_\theta \mid \theta \in \mathfrak{G}\}$ из любой копии $\dot{L}$. В обратных задачах математической физики различные типы обратных данных, такие как функция Вейля–Титчмарша, характеристическая функция, оператор реакции, спектральная функция и другие спектральные данные, дают унитарную копию $\dot{L}$ оператора L, который требуется определить. Для его восстановления можно извлечь копию $\dot{L}$ из данных, а затем решить *абстрактную обратную задачу*, построив функциональную модель копии. *Метод граничного управления* во многих случаях даёт такую процедуру [1, 5, 2].

Ключевые слова: автомодельные операторы, треугольная факторизация операторов, функциональные модели.

• Свойство автомодельности является свойством класса операторов на функциональном пространстве с фиксированной группой $\mathfrak{G}$ унитарных преобразований на пространстве значений $\mathscr{E}$. Группа $\mathfrak{G}$ выбирается таким образом, чтобы соответствующие преобразования сохраняли класс операторов. Например, для операторов Шрёдингера и для операторов Дирака эти группы различны, но обе они сохраняют главные дифференциальные члены.

В настоящей статье мы устанавливаем свойство автомодельности минимальных матричных операторов Шрёдингера и Дирака на полуоси. Для матричных операторов Шрёдингера автомодельность следует непосредственно из наших более ранних результатов [2, 6]. Для операторов Дирака эти результаты также используются для доказательства автомодельности. Данная статья является подробной версией короткой заметки [4].

§1. Минимальные операторы Дирака на полуоси

• Пусть $p \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$; рассмотрим минимальный оператор Дирака $D_{\min}(p)$, который действует в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = L_2\left(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2\right)$ как дифференциальное выражение

$$(\mathscr{D}y)(x) := i\sigma_3 y'(x) + P(x)y(x),$$

$D_{\min}(p)y = \mathscr{D}y$, где $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p(x) \\ \overline{p(x)} & 0 \end{pmatrix}$, на области определения

$$\operatorname{Dom} D_{\min}(p) = \left\{ y \in \mathscr{H} \mid y \in H^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2\right), \mathscr{D}y \in \mathscr{H}, y(0) = 0 \right\}.$$

Это симметрический вполне несамосопряжённый оператор с индексами дефекта $n_+\left(D_{\min}(p)\right) = n_-\left(D_{\min}(p)\right) = 1$. Его сопряжённый есть максимальный оператор Дирака $D_{\max}(p) = D^*_{\min}(p)$, который действует по тому же правилу $\mathscr{D}$ на области определения

$$\operatorname{Dom} D_{\max}(p) = \left\{ y \in \mathscr{H} \mid y \in H^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2\right), \mathscr{D}y \in \mathscr{H} \right\}.$$

Мы также рассматриваем самосопряжённое расширение $D(p)$ оператора $D_{\min}(p)$, которое является сужением $D_{\max}(p)$ на область определения

$$\operatorname{Dom} D(p) = \left\{ y \in \operatorname{Dom} D_{\max}(p) \mid y_1(0) + y_2(0) = 0 \right\}.$$

• Пусть $\mathfrak{G} := \left\{ \eta_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{U}(\mathbb{C}^2)$. Заметим, что равенство $\theta\sigma_3\theta^* = \sigma_3$ возможно для $\theta \in \mathfrak{U}(\mathbb{C}^2)$, только если $\theta = e^{ib}\eta_a$ с $a, b \in \mathbb{R}$, и в этом случае преобразованный оператор имеет вид

$$(D_{\min}(p))_\theta y = i\sigma_3 y' + \begin{pmatrix} 0 & pe^{ia} \\ \overline{p}e^{-ia} & 0 \end{pmatrix} y$$

(независимо от b).

Определение 1. *Назовём два минимальных оператора Дирака $D_{\min}(p_1)$ и $D_{\min}(p_2)$* ***эквивалентными по форме****, если $D_{\min}(p_1) = \widehat{\eta} D_{\min}(p_2)\widehat{\eta}^*$ с некоторым $\eta \in \mathfrak{G}$. Потенциалы двух эквивалентных по форме операторов Дирака p_1 и p_2 связаны равенством $p_1(x) = p_2(x)e^{ia}$ с постоянной $a \in \mathbb{R}$. В этом контексте будем называть p_1 и p_2* ***эквивалентными****.*

Заметим, что $D_{\min}(\overline{p})$ унитарно эквивалентен $-D_{\min}(p)$, поскольку для $\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеем $\theta\sigma_3\theta^* = -\sigma_3$ и $\theta P\theta^* = -\begin{pmatrix} 0 & \overline{p} \\ p & 0 \end{pmatrix}$, так что выполняется $\widehat{\theta} D_{\min}(p)\widehat{\theta}^* = -D_{\min}(\overline{p})$.

Определение 2. *Назовём* ***исключительным случаем*** *ситуацию, когда $D_{\min}(p)$ унитарно эквивалентен $-D_{\min}(p)$.*

Это условие совпадает с условием унитарной эквивалентности $D_{\min}(p)$ и $D_{\min}(\overline{p})$ и имеет место, например, если $p(x) \equiv |p(x)|e^{ia}$ с постоянной a. В дальнейшем важно, что $D^2_{\min}(\overline{p})$ унитарно эквивалентен $D^2_{\min}(p)$. Основной результат статьи состоит в следующем.

Теорема 1. *Минимальные операторы Дирака $D_{\min}(p)$ с потенциалами $p \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$ в неисключительном случае являются автомодельными.*

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 4. Для доказательства результата мы используем волновую функциональную модель минимального матричного оператора Шрёдингера, основанную на треугольной факторизации связывающего оператора [6, 2]. Эта модель также позволяет доказать автомодельность минимальных операторов Шрёдингера.

§2. Свойство автомодельности минимальных операторов Шрёдингера

В этом параграфе мы предполагаем, что $n \in \mathbb{N}$ произвольно.

• Пусть $Q \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; M^n_{\mathbb{C}})$ и выполнено $Q(x) = Q^*(x)$, $x \geqslant 0$. Минимальный оператор Шрёдингера $S_{\min}(Q)$ в $\mathscr{H} = L_2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^n)$ задаётся дифференциальным выражением

$$(\mathscr{S}y)(x) := -y''(x) + Q(x)y(x),$$

$S_{\min}(Q)y = \mathscr{S}y$, на области определения $\operatorname{Dom} S_{\min}(Q)$, которая является замыканием линеала $C_0^\infty((0,\infty);\mathbb{C}^n)$ по норме графика. Минимальный оператор симметричен. Мы предполагаем, что Q таков, что оператор $S_{\min}(Q)$ полуограничен снизу. В этом случае матричная версия [3] теоремы Повзнера–Вингольца утверждает, что $S_{\min}(Q)$ имеет индексы дефекта (n,n), и его область определения есть

$$\operatorname{Dom} S_{\min}(Q) = \{y \in \operatorname{Dom} S_{\max}(Q) \mid y(0) = y'(0) = 0\} \tag{1}$$

(граничные условия на бесконечности отсутствуют). Его сопряжённым является максимальный оператор $S_{\max}(Q)$, который действует по тому же правилу на максимальной области определения

$$\operatorname{Dom} S_{\max}(Q) = \left\{y \in \mathscr{H} \mid y \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^n), \mathscr{S}y \in \mathscr{H}\right\}.$$

Для $\theta \in \mathfrak{U}(n)$ оператор $S_{\min}(Q_\theta)$ с потенциалом $Q_\theta(x) := \theta Q(x)\theta^*$ совпадает с оператором $(S_{\min}(Q))_\theta = \widehat{\theta} S_{\min}(Q)\widehat{\theta}^*$ и, таким образом, унитарно эквивалентен $S_{\min}(Q)$.

Определение 3. *Два минимальных оператора Шрёдингера, $S_{\min}(Q_1)$ и $S_{\min}(Q_2)$, называются* ***эквивалентными по форме****, если $S_{\min}(Q_1) = \widehat{\theta} S_{\min}(Q_2)\widehat{\theta}^*$ с некоторым $\theta \in \mathfrak{U}(n)$.*

Свойство автомодельности операторов Шрёдингера следует из результатов [6, 2] посредством построения волновой функциональной модели копии (её координатной версии). Пусть оператор $\dot{S}$ в гильбертовом пространстве $\dot{\mathscr{H}}$ является унитарной копией $S_{\min}(Q)$, $\dot{S} = \Psi S_{\min}(Q)\Psi^*$ с некоторым $\Psi \in \mathfrak{U}(\mathscr{H};\dot{\mathscr{H}})$. Построение волновой функциональной модели $\dot{S}$ даёт минимальный оператор Шрёдингера $\dot{S}_{\mathrm{mod}} = S_{\min}(\dot{Q}_{\mathrm{mod}})$ с потенциалом $\dot{Q}_{\mathrm{mod}} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{B}(\dot{\mathscr{K}}))$, $\dot{\mathscr{K}} = \operatorname{Ker} \dot{S}^*$. Ещё одно унитарное преобразование переводит этот оператор в $S_{\min}(Q_\theta)$ с $\theta \in \mathfrak{U}(n)$. Такая конструкция решает соответствующую абстрактную обратную задачу: найти $S_{\min}(Q)$ по его унитарной копии $\dot{S}$ с точностью

до эквивалентности по форме. Опишем это построение в предположении, что $S_{\min}(Q)$ положительно определён.

1. Оператор $\dot S$ определяет обыкновенную граничную тройку [8] $(\dot{\mathscr{K}}, \dot\Gamma_1, \dot\Gamma_2)$ с граничным пространством $\dot{\mathscr{K}} = \operatorname{Ker}\dot S^*$ $(\dim\dot{\mathscr{K}} = n)$ и граничными операторами $\dot\Gamma_{1,2} : \operatorname{Dom}\dot S^* \to \dot{\mathscr{K}}$, $\dot\Gamma_1 = \mathbb{I} - \dot S_{\mathrm{F}}^{-1}\dot S^*$, $\dot\Gamma_2 = \dot\Pi\dot S^*$, где $\dot S_{\mathrm{F}}$ — расширение по Фридрихсу оператора $\dot S$, а $\dot\Pi$ — проекция в $\dot{\mathscr{H}}$ на $\dot{\mathscr{K}}$. Элементы этой *тройки Вишика* связаны формулой Грина

$$\left(\dot S^* y, z\right) - \left(y, \dot S^* z\right) = \left(\dot\Gamma_1 y, \dot\Gamma_2 z\right) - \left(\dot\Gamma_2 y, \dot\Gamma_1 z\right), \quad y, z \in \operatorname{Dom}\dot S^*.$$

2. Тройка $(\dot{\mathscr{K}}, \dot\Gamma_1, \dot\Gamma_2)$ для каждого $T > 0$ определяет динамическую систему $\dot\alpha_S^T$

$$u''(t) + \dot S^* u(t) = 0 \qquad \text{в } \dot{\mathscr{H}}, \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(0) = u'(0) = 0 \qquad \text{в } \dot{\mathscr{H}}, \tag{3}$$

$$\dot\Gamma_1 u(t) = f(t) \qquad \text{в } \dot{\mathscr{K}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

где $f \in \dot{\mathscr{F}}^T = L_2([0,T];\dot{\mathscr{K}})$ — *граничное управление*, $u = u^f(t)$ — решение. С этой системой связывают *оператор управления* $\dot W^T : \dot{\mathscr{F}}^T \to \dot{\mathscr{H}}$, $\dot W^T f = u^f(T)$, который изоморфно отображает $\dot{\mathscr{F}}^T$ на $\operatorname{Ran}\dot W^T =: \dot{\mathfrak{U}}^T$, и *связывающий оператор* $\dot C^T : \dot{\mathscr{F}}^T \to \dot{\mathscr{F}}^T$, $\dot C^T = \dot W^{T*}\dot W^T$, который является положительно определённым изоморфизмом вида $\dot C^T = \mathbb{I} + \dot A^T$ с компактным $\dot A^T$.

3. Пространство $\dot{\mathscr{F}}^T$ содержит гнездо подпространств

$$\dot{\mathfrak{f}}^T := \left\{\dot{\mathscr{F}}^{T,s}\right\}_{0\leqslant s\leqslant T},$$

$$\dot{\mathscr{F}}^{T,s} := \left\{ f \in \dot{\mathscr{F}}^T \,\middle|\, \operatorname{supp} f \subset [T-s, T] \right\},$$

образованное запаздывающими управлениями. Оператор $\dot C^T$ допускает единственную треугольную факторизацию $\dot C^T = \dot V^{T*}\dot V^T$, $\dot V^T\dot{\mathscr{F}}^{T,s} \subset \dot{\mathscr{F}}^{T,s}$, относительно гнезда $\dot{\mathfrak{f}}^T$, где фактор имеет вид $\dot V^T = \mathbb{I} + \dot B^T$ с компактным $\dot B^T$ [6, 7].

4. Пусть $\dot{\mathscr{H}}^T_{\mathrm{mod}}$ – копия $L_2([0,T];\dot{\mathscr{K}})$, обозначим аргумент функций из $\dot{\mathscr{H}}^T_{\mathrm{mod}}$ через τ. Пусть $\dot Y^T$ – оператор в $\dot{\mathscr{H}}^T_{\mathrm{mod}}$, заменяющий τ на $T-\tau$, а $\dot Y_0^T$ – оператор в $\dot{\mathscr{F}}^T$, заменяющий t на $T-t$. Рассмотрим $\dot W^T_{\mathrm{mod}} := \dot Y^T\dot V^T\dot Y_0^T : \dot{\mathscr{F}}^T \to \dot{\mathscr{H}}^T_{\mathrm{mod}}$. Оператор $\dot S^{*\,T}_{\mathrm{mod}}$ в модельном пространстве

$\dot{\mathscr{H}}^T_{\mathrm{mod}}$, определённый своим графиком

$$\operatorname{graph}\dot{S}^{*\,T}_{\mathrm{mod}} := \{(\dot{W}^T_{\mathrm{mod}} f, -\dot{W}^T_{\mathrm{mod}} f'') \mid f \in H^2([0,T];\dot{\mathscr{K}}), f(T) = f'(T) = 0\},$$

имеет вид $\dot{S}^{*\,T}_{\mathrm{mod}} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \dot{Q}^T_{\mathrm{mod}}(\tau)$ с операторнозначной функцией $\dot{Q}^T_{\mathrm{mod}}(\tau) = (\dot{Q}^T_{\mathrm{mod}}(\tau))^*$, которая не зависит от T: $\dot{Q}^T_{\mathrm{mod}} = \dot{Q}_{\mathrm{mod}}|_{[0,T]}$, где $\dot{Q}_{\mathrm{mod}} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{B}(\dot{\mathscr{K}}))$.

5. Применяя это построение для всех $T > 0$, получаем модельное пространство $\dot{\mathscr{H}}_{\mathrm{mod}} = L_2(\mathbb{R}_+; \dot{\mathscr{K}})$ и оператор Шрёдингера $\dot{S}^*_{\mathrm{mod}} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \dot{Q}_{\mathrm{mod}}(\tau)$ на его максимальной области определения, который является волновой функциональной моделью $\dot{S}^*$ [2, теорема 4.5]. Соответственно, минимальный оператор Шрёдингера $\dot{S}_{\mathrm{mod}}$ с тем же потенциалом является моделью $\dot{S}$.

6. Выбирая ортонормированный базис $\dot{k}_1, \ldots, \dot{k}_n$ в $\dot{\mathscr{K}}$ и рассматривая унитарные операторы $\dot{\mu} \in \mathfrak{U}(\mathbb{C}^n; \dot{K})$, $\dot{\mu} : v \mapsto \sum\limits_{l=1}^{n} v_l \dot{k}_l$ и соответствующий $\widehat{\dot{\mu}} \in \mathfrak{U}(\mathscr{H}; \dot{\mathscr{H}}_{\mathrm{mod}})$, мы производим ещё одно унитарное преобразование

$$\widetilde{S}_{\mathrm{mod}} := \widehat{\dot{\mu}}^*\, \dot{S}_{\mathrm{mod}} \widehat{\dot{\mu}} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \widetilde{Q}_{\mathrm{mod}}(\tau),$$

где $\widetilde{Q}_{\mathrm{mod}}(\tau) = \dot{\mu}^* \dot{Q}_{\mathrm{mod}}(\tau)\dot{\mu}$. Этот оператор называется *координатной волновой функциональной моделью* $\dot{S}$. Он зависит от выбора базиса в $\dot{\mathscr{K}}$. Построение модели обосновано в [2] теоремами 4.5 и 5.1. Ключевым фактом является то, что по второй теореме оператор Шрёдингера удовлетворяет условиям 1–5 из [2], которые сформулированы в унитарно-эквивалентной форме; следовательно, $\dot{S}$ также им удовлетворяет.

Теорема 2. *Пусть $\dot{S}$ — унитарная копия минимального оператора Шрёдингера $S_{\min}(Q)$ с эрмитовым матричнозначным потенциалом $Q \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; M^n_{\mathbb{C}})$, для которого оператор полуограничен снизу. Тогда координатные волновые функциональные модели $\dot{S}$ имеют вид $S_{\min}(Q_\theta)$ с $\theta \in \mathfrak{U}(n)$.*

Доказательство. Результат следует из факта, доказанного в [2]: координатная волновая функциональная модель положительно определённого $S_{\min}(Q)$ с эрмитовым матричнозначным потенциалом $Q \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; M^n_{\mathbb{C}})$ является минимальным оператором Шрёдингера, который эквивалентен по форме $S_{\min}(Q)$. Можно проследить построение волновой функциональной модели для $S_{\min}(Q)$, которое производится

дословно так же, как и для $\dot S$ (нужно лишь убрать точки в обозначениях). В частности, имеем:

$$\begin{aligned}
\mathscr{K} &= \Psi^*\dot{\mathscr{K}},\\
\mathscr{H}_{\mathrm{mod}} &= \widehat{\Psi}^*\dot{\mathscr{H}}_{\mathrm{mod}} = L_2(\mathbb{R}_+;\mathscr{K}) \text{ (где } (\widehat{\Psi}y)(\tau) = \Psi(y(\tau)),\ \tau\geqslant 0),\\
\mathscr{F}^T &= (\widehat{\Psi}^T)^*\dot{\mathscr{F}}^T = L_2([0,T];\mathscr{K}) \text{ (где } (\widehat{\Psi}^T y)(\tau) = \Psi(y(\tau)),\ \tau\in[0,T]),\\
W^T &= \Psi^*\dot W^T\widehat{\Psi}^T,\\
C^T &= (\widehat{\Psi}^T)^*\dot C^T\widehat{\Psi}^T,\ \ V^T = (\widehat{\Psi}^T)^*\dot V^T\widehat{\Psi}^T,\ \ W^T_{\mathrm{mod}} = (\widehat{\Psi}^T)^*\dot W_{\mathrm{mod}}\widehat{\Psi}^T,\\
S^{*\,T}_{\mathrm{mod}} &= (\widehat{\Psi}^T)^*\dot S^{*\,T}_{\mathrm{mod}}\widehat{\Psi}^T,\ \ S^*_{\mathrm{mod}} = (\widehat{\Psi})^*\dot S^*_{\mathrm{mod}}\widehat{\Psi},\\
Q_{\mathrm{mod}}(\tau) &= \Psi^*\dot Q_{\mathrm{mod}}(\tau)\Psi.
\end{aligned}$$

В [2] было показано, что $Q_{\mathrm{mod}}(\tau) = \phi Q(\tau)\phi^*$, где $\phi = \lambda(\lambda^*\lambda)^{-\frac12}$, $\lambda : \mathbb{C}^n \to \mathscr{K}$ — изоморфизм, следовательно $\phi\in\mathfrak{U}(\mathbb{C}^n;\mathscr{K})$. Тогда

$$\dot Q_{\mathrm{mod}}(\tau) = \Psi Q_{\mathrm{mod}}(\tau)\Psi^* = \dot\phi Q(\tau)\dot\phi^*,$$

где $\dot\phi = \Psi\phi\in\mathfrak{U}(\mathbb{C}^n;\dot{\mathscr{K}})$, и

$$\widetilde S_{\mathrm{mod}} = \widehat{\dot\mu}^*\dot S_{\mathrm{mod}}\widehat{\dot\mu} = -\frac{d^2}{dx^2} + \dot\mu^*\dot\phi Q(x)\dot\phi^*\dot\mu = -\frac{d^2}{dx^2} + \theta Q(x)\theta^* = S_{\min}(Q_\theta)$$

с матрицей $\theta := \dot\mu^*\dot\phi\in\mathfrak{U}(\mathbb{C}^n;\mathbb{C}^n) = \mathfrak{U}(n)$, соответствующей выбору базиса. Таким образом, $\widetilde S_{\mathrm{mod}}$ принимает вид, эквивалентный по форме исходному $S_{\min}(Q)$.

В случае, когда $S_{\min}(Q)$ лишь полуограничен снизу, нужно добавить к нему γI с достаточно большим $\gamma > 0$, чтобы получить положительно определённый оператор. Затем можно выполнить описанное выше построение модели и вычесть γI из результата, что даст модель $\dot S$ требуемого вида. □

Поскольку унитарная эквивалентность двух операторов означает, что они имеют одну и ту же копию, мы немедленно получаем следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть два эрмитовых матричнозначных потенциала $Q_1, Q_2\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;M^n_{\mathbb{C}})$ таковы, что минимальные операторы Шрёдингера $S_{\min}(Q_1)$ и $S_{\min}(Q_2)$ полуограничены снизу. Если $S_{\min}(Q_1)$ и $S_{\min}(Q_2)$ унитарно эквивалентны, то они эквивалентны по форме.*

Наконец, мы можем сформулировать полученные результаты в терминах свойства автомодельности.

Теорема 3. *Полуограниченные снизу минимальные операторы Шрёдингера $S_{\min}(Q)$ с эрмитовыми матричнозначными потенциалами $Q \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; M_{\mathbb{C}}^n)$ являются автомодельными.*

Замечание. *В отличие от симметрических минимальных операторов Шрёдингера, самосопряжённые операторы Шрёдингера не обладают свойством автомодельности. Например, для скалярных потенциалов эквивалентность по форме означает равенство, однако существуют унитарно эквивалентные операторы, имеющие разные потенциалы.*

В дальнейшем тексте мы предполагаем $n = 2$.

§3. Свойство автомодельности минимальных операторов Дирака

В этом параграфе мы доказываем теорему 1. Удобно сформулировать её в более явном виде.

Теорема 4. *В неисключительном случае минимальный оператор Дирака $D_{\min}(p)$ с потенциалом $p \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$ может быть восстановлен по своей унитарной копии $\dot{D}$ однозначно с точностью до эквивалентности по форме.*

Доказательство.

- Область определения квадрата $D_{\min}(p)$ может быть описана следующим образом:

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom} D^2_{\min}(p) &= \{y \in \operatorname{Dom} D_{\min}(p) \mid D_{\min}(p)y \in \operatorname{Dom} D_{\min}(p)\}\\ &= \{y \in \mathscr{H} \mid y, (i\sigma_3 y' + Py) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2),\\ &\quad (i\sigma_3 y' + Py), (-y'' + (i\sigma_3 P' + P^2)y) \in \mathscr{H},\\ &\quad y(0) = 0, i\sigma_3 y'(0) + P(0)y(0) = 0\},\end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^2 y &= i\sigma_3 \left(i\sigma_3 y' + Py\right)' + P\left(i\sigma_3 y' + Py\right)\\ &= -y'' + i\underbrace{\left(\sigma_3 P + P\sigma_3\right)}_{=0} y' + \left(i\sigma_3 P' + P^2\right) y = -y'' + \left(i\sigma_3 P' + P^2\right) y.\end{aligned}$$

Эти условия эквивалентны $y \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2), \mathscr{D}y, \mathscr{D}^2y \in \mathscr{H}, y(0) = y'(0) = 0$. Тогда для потенциала

$$Q := i\sigma_3 P' + P^2 = \begin{pmatrix} |p|^2 & ip' \\ -i\overline{p'} & |p|^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$D^2_{\min}(p)$ является сужением максимального оператора Шрёдингера $S_{\max}(Q)$ на линеал

$$\operatorname{Dom} D^2_{\min}(p) = \{y \in \operatorname{Dom} S_{\max}(Q) \mid \mathscr{D}y \in \mathscr{H}, y(0) = y'(0) = 0\}.$$

Аналогично имеем

$$\operatorname{Dom} D^2(p) = \{y \in \operatorname{Dom} S_{\max}(Q) \mid \mathscr{D}y \in \mathscr{H}, y_1(0) + y_2(0) = 0, \\ iy_1'(0) - iy_2'(0) + \overline{p(0)}y_1(0) + p(0)y_2(0) = 0\}.$$

Поскольку оператор $D^2(p)$ самосопряжён, включение $D^2(p) \subset S_{\max}(Q)$ означает, что $S_{\min}(Q) \subset D^2(p)$, и, следовательно, для всякого $y \in \operatorname{Dom} S_{\min}(Q)$ имеем $\mathscr{D}y \in \mathscr{H}$, поэтому $S_{\min}(Q) \subset D^2_{\min}(p)$. Отсюда следует, что оператор $S_{\min}(Q)$, как сужение $D^2(p)$, неотрицателен, и по теореме Повзнера — Вингольца [3] выполняется (1) (граничные условия на бесконечности отсутствуют), следовательно, области определения $S_{\min}(Q)$ и $D^2_{\min}(p)$ совпадают, и тогда

$$D^2_{\min}(p) = S_{\min}(Q).$$

Имея копию $\dot{D}$ оператора $D_{\min}(p)$ с $p \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$, можно взять её квадрат $\dot{S} = \dot{D}^2$, который является копией $S_{\min}(Q)$ — неотрицательного минимального оператора Шрёдингера, к которому применима теорема 3. Построение координатной волновой модели $\dot{S}$ даёт оператор $S_{\min}(Q_\theta)$ с некоторым (неизвестным) $\theta \in \mathfrak{U}(2)$. Имея Q_θ, мы восстанавливаем оператор Дирака, который эквивалентен по форме $D_{\min}(p)$. Заметим, что зная Q_θ, можно сразу получить $|p|$ и $|p'|$ из его следа и определителя: $|p| = \sqrt{\frac{\operatorname{tr} Q_\theta}{2}}$ и $|p'| = \frac{\operatorname{tr}^2 Q_\theta - 4\det Q_\theta}{2}$, но этого недостаточно для восстановления p.

- Произвольная матрица $\theta \in \mathfrak{U}(2)$ имеет вид

$$\theta = \theta_{\alpha\beta\gamma\varphi} = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi e^{i\gamma} \\ -\sin\varphi e^{i\beta} & \cos\varphi e^{i(\beta+\gamma)} \end{pmatrix} \\ = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix}$$

с некоторыми $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и единственным $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (что видно из непосредственного анализа).

Поскольку

$$Q(x) = |p(x)|^2 I + \begin{pmatrix} 0 & ip'(x) \\ \overline{ip'(x)} & 0 \end{pmatrix},$$

имеем

$$Q_\theta(x) = \theta Q(x) \theta^{-1} = |p(x)|^2 I + \begin{pmatrix} r(x) & z(x) \\ \overline{z(x)} & -r(x) \end{pmatrix},$$

где

$$r(x) := (ip'(x)e^{-i\gamma} + \overline{ip'(x)}e^{i\gamma}) \sin\varphi \cos\varphi \in \mathbb{R},$$
$$z(x) := ip'(x)e^{-i(\gamma+\beta)} \cos^2\varphi - \overline{ip'(x)}e^{i(\gamma-\beta)} \sin^2\varphi \in \mathbb{C}.$$

Если взять $\theta_1 = \theta_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\varphi_1} \in \mathfrak{U}(2)$, то $\theta_2 := \theta_1\theta \in \mathfrak{U}(2)$ и, следовательно, $\theta_2 = \theta_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\varphi_2}$ с некоторыми $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\varphi_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда

$$\theta_1 Q_\theta(x) \theta_1^* = \theta_2 Q(x) \theta_2^* = Q_{\theta_2}(x) = |p(x)|^2 I + \begin{pmatrix} r_2(x) & z_2(x) \\ \overline{z_2(x)} & -r_2(x) \end{pmatrix}$$

с

$$r_2(x) = (ip'(x)e^{-i\gamma_2} + \overline{ip'(x)}e^{i\gamma_2}) \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 \in \mathbb{R},$$
$$z_2(x) = ip'(x)e^{-i(\gamma_2+\beta_2)} \cos^2\varphi_2 - \overline{ip'(x)}e^{i(\gamma_2-\beta_2)} \sin^2\varphi_2 \in \mathbb{C}.$$

- Найдём такое θ_1, что $r_2(x) \equiv 0$.

Лемма 1. *Если $r_2(x) \equiv 0$, то либо $z_2(x) \equiv p'(x)e^{i\delta}$, либо $z_2(x) = \overline{p'(x)}e^{i\delta}$ с некоторым $\delta \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. $r_2(x) \equiv 0$ может иметь место в двух случаях: $\sin\varphi_2 \cos\varphi_2 = 0$ или $ip'(x)e^{-i\gamma_2} + \overline{ip'(x)}e^{i\gamma_2} \equiv 0$. В первом случае $\varphi_2 = 0$ или $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, и тогда $z_2(x) = ip'(x)e^{-i(\gamma_2+\beta_2)}$ или $z_2(x) = -\overline{ip'(x)}e^{i(\gamma_2-\beta_2)}$. Во втором случае $\overline{p'(x)} \equiv p(x)e^{-2i\gamma_2}$, и $z_2(x) = ip'(x)e^{-i(\gamma_2+\beta_2)} \cos^2\varphi_2 + ip'(x)e^{i(\gamma_2-\beta_2-2\gamma_2)} \sin^2\varphi_2 = ip'(x)e^{-i(\gamma_2+\beta_2)}$. □

Вычисление приводит к следующему:

$$\theta_1 Q_\theta(x) \theta_1^* = |p(x)|^2 I + \theta_1 \begin{pmatrix} r(x) & z(x) \\ \overline{z(x)} & -r(x) \end{pmatrix} \theta_1^* = |p(x)|^2 I + \begin{pmatrix} r_2(x) & z_2(x) \\ \overline{z_2(x)} & -r_2(x) \end{pmatrix},$$

$$r_2(x) := \cos(2\varphi_1) r(x) + \sin(2\varphi_1) \cos\gamma_1 \operatorname{Re} z(x) + \sin(2\varphi_1) \sin\gamma_2 \operatorname{Im} z(x),$$
$$z_2(x) := -\sin(2\varphi_1) r(x) + \cos^2\varphi_1 e^{-i\gamma_1} z(x) - \sin^2\varphi_1 e^{i\gamma_1} \overline{z(x)}. \quad (6)$$

Равенство

$$\cos(2\varphi_1)r(x) + \sin(2\varphi_1)\cos\gamma_1 \operatorname{Re} z(x) + \sin(2\varphi_1)\sin\gamma_2 \operatorname{Im} z(x) \equiv 0$$

означает, что три вещественнозначные функции $r, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ (известные из Q_θ) линейно зависимы. Можно найти коэффициенты в их нетривиальной нулевой линейной комбинации и затем получить z_2 с помощью следующей процедуры.

1. Если $r(x) \equiv \operatorname{Re} z(x) \equiv \operatorname{Im} z(x) \equiv 0$, то тривиально $z_2(x) \equiv 0$ и ничего более не требуется.

2. Если существует такой $x_1 \geqslant 0$, что $(r(x_1), \operatorname{Re}(x_1), \operatorname{Im}(x_1)) \neq 0$, и для всякого $x \geqslant 0$ выполняется

$$(r(x), \operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(x)) \in \operatorname{span}\{(r(x_1), \operatorname{Re}(x_1), \operatorname{Im}(x_1))\}$$

(в $\mathbb{R}^3$), то можно взять ненулевой вектор $(c_1, c_2, c_3) \perp (r(x_1), \operatorname{Re}(x_1), \operatorname{Im}(x_1))$, и тогда будет выполняться $c_1 r(x) + c_2 \operatorname{Re} z(x) + c_3 \operatorname{Im} z(x) \equiv 0$.

3. Если существуют такие $x_1, x_2 \geqslant 0$, что $(r(x_1), \operatorname{Re}(x_1), \operatorname{Im}(x_1)) \neq 0$ и

$$(r(x_2), \operatorname{Re}(x_2), \operatorname{Im}(x_2)) \notin \operatorname{span}\{(r(x_1), \operatorname{Re}(x_1), \operatorname{Im}(x_1))\},$$

то для всякого $x \geqslant 0$ должно выполняться

$$(r(x), \operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(x)) \in \operatorname{span}\{(r(x_1), \operatorname{Re}(x_1), \operatorname{Im}(x_1)), (r(x_2), \operatorname{Re}(x_2), \operatorname{Im}(x_2))\}$$

(иначе r, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ были бы линейно независимыми функциями). Тогда можно взять ненулевой вектор

$$(c_1, c_2, c_3) \perp \operatorname{span}\{(r(x_1), \operatorname{Re}(x_1), \operatorname{Im}(x_1)), (r(x_2), \operatorname{Re}(x_2), \operatorname{Im}(x_2))\},$$

и тогда $c_1 r(x) + c_2 \operatorname{Re} z(x) + c_3 \operatorname{Im} z(x) \equiv 0$.

В результате мы видим, что коэффициенты c_1, c_2, c_3 всегда можно найти. Тогда сферические углы точки $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ дают искомые $\gamma_1 \in [0, 2\pi)$ и $2\varphi_1 \in [0, \pi]$, которые в свою очередь дают z_2 по формуле (6).

• В итоге мы знаем $|p(x)|$ и получили такую функцию $z_2(x)$, что $z_2(x) \equiv p'(x)e^{i\delta}$ или $z_2(x) \equiv \overline{p'(x)}e^{i\delta}$ с $\delta \in \mathbb{R}$, по лемме 1. Обозначим $\widehat{p}(x) := p(x)e^{i\delta}$ в первом случае и $\widehat{p}(x) := \overline{p(x)}e^{i\delta}$ во втором. Нам нужно найти $\widehat{p}$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} |\widehat{p}| &= |p|, \\ \widehat{p}' &= z_2, \end{aligned} \tag{7}$$

и определить, какому из потенциалов, p или $\overline{p}$, эквивалентен $\widehat{p}$ (заметим, что p и $\overline{p}$ не могут быть эквивалентными, поскольку мы рассматриваем неисключительный случай). Рассмотрим различные возможности.

1. Если $|p(0)| = 0$, то $\widehat{p}(x) = \int\limits_0^x z_2(t)dt$.

2. Если $|p(0)| \neq 0$ и $z_2 \equiv 0$, то $\widehat{p}(x) = |p(0)|e^{ia}$ с некоторым $a \in \mathbb{R}$.

3. Если $|p(0)| \neq 0$ и существует такой $x_0 \geqslant 0$, что $\int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt \neq 0$, то обозначим $\varkappa_0 := \arg \widehat{p}(0)$ и $\varkappa(x) := \arg \int\limits_0^x z_2(t)dt$. Имеем:

$$|p(x_0)|^2 = |\widehat{p}(x_0)|^2 = \left| |p(0)|e^{i\varkappa_0} + \int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt \right|^2$$
$$= |p(0)|^2 + \left| \int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt \right|^2 + 2|p(0)| \operatorname{Re}\left(e^{-i\varkappa_0} \int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt \right),$$

тогда

$$\cos\varkappa_0 \operatorname{Re} \int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt + \sin\varkappa_0 \operatorname{Im} \int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt$$
$$= \frac{|p(x_0)|^2 - |p(0)|^2 - \left| \int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt \right|^2}{2|p(0)|}$$

и

$$\cos(\varkappa_0 - \varkappa(x_0)) = \frac{|p(x_0)|^2 - |p(0)|^2 - \left| \int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt \right|^2}{2|p(0)| \left| \int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt \right|}.$$

3а. Если существуют такие $x_1, x_2 \geqslant 0$, что $\varkappa(x_1) \neq \varkappa(x_2) (\operatorname{mod} \pi)$ и

$\int\limits_0^{x_1} z_2(t)dt$, $\int\limits_0^{x_2} z_2(t)dt \neq 0$, то $\varkappa_0$ может быть определено из системы уравнений

$$\cos(\varkappa_0 - \varkappa(x_1)) = \frac{|p(x_1)|^2 - |p(0)|^2 - \left|\int\limits_0^{x_1} z_2(t)dt\right|^2}{2|p(0)|\left|\int\limits_0^{x_1} z_2(t)dt\right|},$$

$$\cos(\varkappa_0 - \varkappa(x_2)) = \frac{|p(x_2)|^2 - |p(0)|^2 - \left|\int\limits_0^{x_2} z_2(t)dt\right|^2}{2|p(0)|\left|\int\limits_0^{x_2} z_2(t)dt\right|},$$

которая является невырожденной системой линейных уравнений на $\cos\varkappa_0$ и $\sin\varkappa_0$.

3b. Если такой пары точек не существует, то $\arg\int\limits_0^x z_2(t)dt \equiv 0$ (поскольку эта функция непрерывна, она должна быть постоянной и, следовательно, нулевой), что означает, что z_2 вещественнозначна и

$$\varkappa_0 \in \left\{ \pm\arccos\left(\frac{|p(x_0)|^2 - |p(0)|^2 - \left|\int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt\right|^2}{2|p(0)|\left|\int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt\right|} \right) \right\}.$$

Оба варианта выбора знака приводят к решениям системы (7)

$$\widehat{p}(x) = |p(0)|e^{i\varkappa_0} + \int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt, \quad \overline{\widehat{p}(x)} = |p(0)|e^{-i\varkappa_0} + \int\limits_0^{x_0} z_2(t)dt.$$

Поскольку z_2 вещественнозначна, изменение знака $\varkappa_0$ приводит к комплексному сопряжению $\widehat{p}$, что даёт другое решение. Таким образом, мы нашли единственное решение системы (7) в случаях **1**, **2**, **3a** и оба её решения (комплексно сопряжённые друг другу) в случае **3b**. Это означает, что мы восстановили минимальный оператор Дирака $D_{\min}(p)$ с точностью до эквивалентности по форме, поскольку один (и только один) из операторов $D_{\min}(\widehat{p})$ и $D_{\min}(\overline{\widehat{p}})$ унитарно эквивалентен $\dot{D}$, и этот оператор также должен быть эквивалентен по форме $D_{\min}(p)$. □

Отметим непосредственное следствие полученного результата, аналогичное случаю оператора Шрёдингера.

Следствие 2. *Пусть* $p_1, p_2 \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$. *Если два минимальных оператора Дирака* $D_{\min}(p_1)$ *и* $D_{\min}(p_2)$ *унитарно эквивалентны и случай не является исключительным, то они эквивалентны по форме.*

Список литературы

1. M. I. Belishev, *A unitary invariant of a semi-bounded operator in reconstructin of manifolds.* — J. Operator Theory, **69(2)** (2013), 299–326.
2. M. I. Belishev, S. A. Simonov, *A model and characterization of a class of symmetric semibounded operators.* — J. Operator Theory **96**, No. 1 (2026), 257–275.
3. S. Clark, F. Gesztesy, *On Povzner–Wienholtz-type self-adjointness results for matrix-valued Sturm–Liouville operators.* — Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **133(4)** (2003), 747–758.
4. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Автомодельность одномерного оператора Дирака.* — Функц. анализ и прил. Принято к печати.
5. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель метрического пространства с мерой и ее приложение.* — Матем. сб., **211(4)** (2020), 44–62.
6. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Треугольная факторизация и функциональные модели операторов и систем.* — Алгебра и анализ, **36(5)** (2024), 101–127.
7. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения.* — М., Наука, 1967.
8. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Теория расширений симметрических операторов и краевые задачи.* — Киев, Труды института математики НАН Украины, 2017.

Belishev M. I., Simonov S. A. Self-modeling property of minimal matrix Schrödinger and Dirac operators on the half-line.

Let $\mathscr{E}$ be a Hilbert space, $\mathscr{H} = L_2(X, \mu; \mathscr{E})$ be the Hilbert space of the $\mathscr{E}$-valued functions on X. Each unitary operator $\theta : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ determines the unitary operator $\widehat{\theta} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ as $(\widehat{\theta}y)(x) = \theta[y(x)]$, $y \in \mathscr{H}$. We say that operators L and L' in $\mathscr{H}$ are *shape equivalent* if there is θ such that $L' = \widehat{\theta} L \widehat{\theta}^*$ holds. In applications, shape equivalence preserves the structure of a class of matrix differential operators.

We call an operator $\dot{L}$, which acts in an (abstract) Hilbert space $\dot{\mathscr{H}}$ and is unitarily equivalent to L, a (unitary) copy of L and say that L is a model of $\dot{L}$. We say L to be *self-modeling* if it is determined by any of its copies $\dot{L}$ up to shape equivalence. The main result of the paper is that minimal

Schrödinger and Dirac operators on the half-line are self-modeling. The motivation comes from inverse problems of mathematical physics.

Санкт-Петербургское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
Санкт-Петербург, 191023
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 1 сентября 2026 г.

Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27, Санкт-Петербург, 191023,
Академический университет им. Ж. И. Алферова,
ул. Хлопина, д. 8, к. 3, лит. А,
Санкт-Петербург 194021,
Институт математики,
Университет ИТМО,
Кронверкский пр., д. 49, лит. А,
Санкт-Петербург 197101
E-mail: sergey.a.simonov@gmail.com