Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

М. И. Белишев, Д. В. Кориков

N-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ФАКТОРИЗАЦИЯ DN-ОПЕРАТОРА

Введение. • N-преобразование было введено в [1] по аналогии с M-преобразованием, играющим ключевую роль в решении трехмерной обратной задаче для динамической системы Максвелла [3, 2]. N- и M-преобразования на трехмерном многообразии Ω со слоением коразмерности 1 применяются к компонентам разложения Гельмгольца-Вейля векторного поля на градиенты и роторы, переводя последние в продольные и касательные (по отношению к слоению) поля, соответственно. Однако, в отличие от M-преобразования, N-преобразование пока не нашло применения в обратных задачах. В настоящей статье изучаются фундаментальные свойства последнего - изометричность и полнота. Также обсуждается (в форме гипотезы) возможное применение для решения задачи Кальдерона такого свойства этого преобразования, как факторизация ДН-оператора многообразия Ω.

• Пусть (Ω, g) – гладкое компактное трехмерное риманово многообразие с гладким краем Γ, $\tau(x) := \operatorname{dist}(x, \Gamma)$, $x \in \Omega$. Обозначим $\Omega^\tau := \{x \in \Omega \,|\, \tau(x) < \tau\}$ и $\Gamma^\tau := \{x \in \Omega \,|\, \tau(x) = \tau\}$, где $\tau \geqslant 0$, и представим Ω в виде слоения $\Omega = \cup_{\tau \geqslant 0} \Gamma^\tau$.

Пусть $\mathscr{P} := \{h = \nabla p \,|\, p \in H^1(\Omega)\}$ – пространство потенциальных векторных полей. Введем пространство продольных (параллельных $\nabla\tau$) полей $\mathscr{L}_\lambda := \{v = \varkappa \nabla\tau \,|\, \varkappa \in L_2(\Omega)\}$. N-преобразование является изометрией из $\mathscr{P}$ в $\mathscr{L}_\lambda$ и строится послойно (в соответствии с $\Omega = \cup_{\tau \geqslant 0} \Gamma^\tau$) из скачков проекций $P^\tau h\big|_{\Gamma^{\tau-0}}$ потенциального векторного поля на подпространства $\mathscr{P}^\tau := \{h \in \mathscr{P} \mid \operatorname{supp} h \subset \overline{\Omega^\tau}\}$:

$$Nh := (P^\tau h)\big|_{\Gamma^{\tau-0}} \qquad \text{на} \quad \Gamma^\tau, \ \ \tau > 0$$

Ключевые слова: разложение Гельмгольца-Вейля трехмерных векторных полей, подпространство потенциальных полей, гармонические поля, N-преобразование, DN-оператор и его факторизация.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение No. 075-15-2025-344 от 29/04/2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН).

(см. [1]). Чтобы избавить изложение от сложностей технического характера, далее мы считаем, что Ω диффеоморфно шару в $\mathbb{R}^3$, особенность слоения $\Omega = \cup_{\tau\geqslant 0}\Gamma^\tau$ состоит из одной точки. В этом случае оператор N унитарен.

• Введем подпространство $\mathscr{H} := \{h \in \mathscr{P} \mid h = \nabla p,\ \Delta p = 0 \ \text{ в } \ \Omega\}$ (где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на (Ω, g)) гармонических потенциальных полей. Мы показываем, что элементы $N\mathscr{H} \subset \mathscr{L}_\lambda$ имеют вид $v = \varkappa\nabla\tau$, где $\varkappa$ удовлетворяет эволюционному уравнению первого порядка параболического типа в $\Gamma \times (0, T)$ (в полугеодезических координатах (γ, τ) с базой Γ) с данными Коши $\varkappa\big|_\Gamma = \varkappa_0$. Введем оператор (пропагатор) $V : \varkappa_0 \mapsto \varkappa\big|_{\Gamma\times[0,T]}$, решающий вышеуказанную задачу Коши.

• ДН-оператор Λ ассоциируется с эллиптической задачей Дирихле

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{в } \ \Omega \setminus \Gamma; \\ p = f & \text{на } \ \Gamma, \end{cases}$$

с решением $p = p^f(x)$ и определяется правилом

$$\Lambda f := \partial_\nu p^f = -\langle \nabla p^f, \nabla\tau\rangle \qquad \text{на } \ \Gamma,$$

где ν – единичный вектор внешней нормали на крае.

Мы доказываем, что N-преобразование определяет факторизацию $\Lambda^{-1} = V^*V$ и обсуждаем возможные приложения этой факторизации в задаче электроимпедансной томографии о восстановлении (Ω, g) по Λ.

Многообразие и координаты. • Пусть (M, g) – гладкое[1] *трехмерное* риманово многообразие с краем Γ. Введем (поточечное) скалярное произведение $\langle a, b\rangle := g(a, b)$ векторных полей a, b (сечений $T\Omega$) и обозначим через Δ оператор Лапласа–Бельтрами на (M, g). Пусть $\Omega \Subset M$ – шар радиуса T с центром в точке $c \in \Omega$, $\Gamma := \partial\Omega$. Предположим, что $T < r_c^{\text{inj}}$, где r_c^{inj} – радиус инъективности, так что отображение $\exp_c$ является гладким на Ω.

Положим $\tau(x) := \operatorname{dist}(x, \Gamma)$, $\Omega^\tau := \{x \in \Omega \mid \tau(x) < \tau\}$, $\Gamma^\tau := \{x \in \Omega \mid \tau(x) = \tau\}$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Полугеодезические координаты $x \mapsto (\gamma, \tau) : \tau = \tau(x), \gamma = \gamma(x)$, где $\gamma(x) \in \Gamma$ и $\operatorname{dist}(x, \gamma(x)) = \tau(x)$, корректно

[1]Здесь и далее под гладкостью подразумевается C^∞-гладкость.

определены и регулярны на $\dot\Omega := \Omega \setminus \{c\}$. Обозначим через $x(\gamma,\tau) \in \dot\Omega$ точку с полугеодезическими координатами $(\gamma,\tau) \in \Gamma \times [0,T)$.

Пусть γ^1, γ^2 – локальные координаты на Γ в окрестности $\gamma(x)$ и $\partial_\tau, \partial_{\gamma^1}, \partial_{\gamma^2}$ – соответствующие базисные векторные поля в $\dot\Omega$. Элементы длины и объема в полугеодезических координатах суть

$$ds^2 = d\tau + g_{ij}(\gamma,\tau) d\gamma^i d\gamma^j; \qquad dx = g^{\frac12}(\gamma,\tau)\, d\tau\, d\gamma^1 d\gamma^2, \quad g := \det\{g_{ij}\},$$

Любое векторное поле h в $\dot\Omega$ можно представить в виде

$$h = h_\lambda + h_\theta; \quad h_\lambda := \langle h, \partial_\tau\rangle \partial_\tau, \quad h_\theta := h - h_\lambda \tag{1}$$

где h_λ и h_θ называются продольными (параллельными ∂_τ) и поперечными компонентами h, причем $\langle h_\lambda(x), h_\theta(x)\rangle = 0$, $x \in \dot\Omega$. Отметим, что $\nu := -\partial_\tau\big|_\Gamma$ это поле внешних нормалей к краю.

• В полугеодезических координатах в $\dot\Omega$ дифференциальные операторы векторного анализа имеют вид

$$\nabla p = (\partial_\tau p)\partial_\tau + \left(g^{ij}\partial_{\gamma^j} p\right)\partial_{\gamma^i}; \ \operatorname{div} h = g^{-\frac12}\partial_\tau(g^{\frac12}h^0) + g^{-\frac12}\partial_{\gamma^i}(g^{\frac12}h^i), \tag{2}$$

где $h = h^0\partial_\tau + h^i\partial_{\gamma^i}$ – гладкое векторное поле и $\{g^{ij}\} := \{g_{ij}\}^{-1}$. Будем называть $\nabla_\lambda := (\partial_\tau \cdot)\,\partial_\tau$ и $\nabla_\theta := (g^{ij}\partial_{\gamma^j}\cdot)\,\partial_{\gamma^i}$ продольной и поперечной частями градиента. Аналогично, операторы $\operatorname{div}_\lambda := g^{-\frac12}\partial_\tau(g^{\frac12}\langle\cdot,\partial_\tau\rangle)$ и $\operatorname{div}_\theta := g^{-\frac12}\partial_{\gamma^i}(g^{\frac12}\langle\cdot,\partial_{\gamma^i}\rangle$ будут называться продольной и поперечной частями дивергенции; тем самым, выполнено

$$\nabla p \ = \ \nabla_\lambda p + \nabla_\theta p, \quad \operatorname{div} h = \operatorname{div}_\lambda h_\lambda + \operatorname{div}_\theta h_\theta \qquad \text{в} \ \ \dot\Omega \tag{3}$$

где h_λ, h_θ определены в (1).

Подпространства и проекторы. • Пусть $\mathscr{L}$ – пространство квадратично интегрируемых векторных полей,

$$\begin{aligned}(a,b)_{\mathscr{L}} := \int_\Omega \langle a,b\rangle\, dx &= \int_{\Gamma\times[0,T)} \left[a^0b^0 + g_{ij}a^ib^j\right]\, g^{\frac12}\ d\gamma^1 d\gamma^2\, d\tau \\ &= \int_0^T d\tau \int_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau\, \langle a,b\rangle\big|_{\Gamma^\tau},\end{aligned} \tag{4}$$

где $a = a^0\partial_\tau + a^i\partial_{\gamma^i}$, $b = b^0\partial_\tau + b^i\partial_{\gamma^i}$ и $d\Gamma^\tau = g^{\frac12}(\gamma,\tau)\, d\gamma^1 d\gamma^2 = \left[\frac{g(\gamma,\tau)}{g(\gamma,0)}\right]^{\frac12} d\Gamma$ – элемент площади на Γ^τ, а $d\Gamma$ – элемент площади на

Г. Последнее равенство в (4) соответствует слоениям

$$\Omega = \bigcup_{0\leqslant\tau\leqslant T} \Gamma^\tau, \qquad L_2(\Omega) = \oplus \int\limits_{[0,T]} L_2(\Gamma^\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Поскольку Ω диффеоморна шару $\mathbb{R}^3$, разложение Гельмгольца–Вейля на потенциальные и соленоидальные поля в Ω имеет вид

$$\mathscr{L} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{S}_0, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &:= \{\nabla p \,|\, p \in H^1(\Omega)\},\\ \mathscr{S}_0 &:= \{h \in \mathscr{L} \,|\, \operatorname{div} h = 0 \text{ в } \Omega,\ \langle h, \nu\rangle = 0 \text{ на } \Gamma\}\\ &= \overline{\{h \in \mathscr{L} \,|\, \operatorname{div} h = 0 \text{ в } \Omega,\ \operatorname{supp} h \subset \Omega \setminus \Gamma\}}.\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (6) может быть представлено в виде

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0 \oplus \mathscr{H}, \tag{7}$$

где

$$\mathscr{P}_0 := \{\nabla p \,|\, p \in H^1_0(\Omega)\} = \overline{\{\nabla p \,|\, \operatorname{supp} p \subset \Omega \setminus \Gamma\}}$$

и

$$\mathscr{H} := \{\nabla p \,|\, \Delta p = 0 \text{ в } \Omega\}$$

(см., напрмер, [6]). Будем называть $\mathscr{H}$ подпространством гармонических потенциальных полей.

- Ортогональное разложение, отвечающее представлению (1), имеет вид

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\lambda \oplus \mathscr{L}_\theta,$$

где $\mathscr{L}_\lambda := \{h \in \mathscr{L} \,|\, h_\theta = 0\}$ and $\mathscr{L}_\theta := \{h \in \mathscr{L} \,|\, h_\lambda = 0\}$ – пространства продольных и поперечных полей, соответственно.

- Положим

$$\mathscr{P}^\tau := \{h \in \mathscr{P} \,|\, \operatorname{supp} h \subset \overline{\Omega^\tau}\}, \quad 0 < \tau \leqslant T; \quad \mathscr{P}^0 := \{0\},\ \mathscr{P}^T = \mathscr{P},$$

и $\mathscr{P}^\tau_\perp := \mathscr{P} \ominus \mathscr{P}^\tau$. Для поля $h = \nabla p \in \mathscr{P}^\tau$ имеем $\nabla p = 0$ в $\Omega \setminus \Omega^\tau$, откуда $p = \text{const}$ вне Ω^τ; далее будем считать, что $p\big|_{\Omega\setminus\Omega^\tau} = 0$. Пусть P^τ и $P^\tau_\perp$ – ортопроекторы в $\mathscr{P}$ на первое и второе слагаемое разложения $\mathscr{P} = \mathscr{P}^\tau \oplus \mathscr{P}^\tau_\perp$, соответственно.

Лемма 1. *Для гладкого поля $h = \nabla p \in \mathscr{P}$ справедливы представления $P^\tau h = \nabla p^\tau$ и $P^\tau_\perp h = \nabla p^\tau_\perp$ с потенциалами, удовлетворяющими краевым задачам*

$$\begin{cases} \Delta p^\tau = \operatorname{div} h & \text{в } \operatorname{int}\Omega^\tau; \\ p^\tau = 0 & \text{на } \Gamma^\tau; \\ \partial_\tau p^\tau = \partial_\tau p & \text{на } \Gamma; \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta p^\tau_\perp = 0 & \text{в } \operatorname{int}\Omega^\tau; \\ p^\tau_\perp = p & \text{на } \Gamma^\tau; \\ \partial_\tau p^\tau_\perp = 0 & \text{на } \Gamma; \end{cases} \tag{8}$$

и равенствам $p^\tau\big|_{\Omega\setminus\Omega^\tau} = 0$, $p^\tau_\perp\big|_{\Omega\setminus\Omega^\tau} = p$.

Доказательство. Соотношения $h = \nabla p = \nabla p^\tau + \nabla p^\tau_\perp$, $\nabla p^\tau \in \mathscr{P}^\tau$ и $(\nabla p^\tau, \nabla p^\tau_\perp)_{\mathscr{L}} = 0$ следуют непосредственно из определений p^τ, $p^\tau_\perp$ и эквивалентны утверждению леммы. □

Тем самым разложение $h = P^\tau h + P^\tau_\perp h$ принимает вид $\nabla p = \nabla p^\tau + \nabla p^\tau_\perp$, где потенциалы являются решениями краевых задач (8).

N-преобразование. • Зафиксируем $\tau \in (0, T)$ и гладкое векторное поле $h = \nabla p \in \mathscr{P}$. Поле $P^\tau h\big|_{\Gamma^\tau} := P^\tau h\big|_{\Gamma^{\tau-0}}$ ортогонально поверхности Γ^τ. В самом деле, на Γ^τ выполнены равенства $p = p^\tau_\perp$ и $\nabla_\theta p = \nabla_\theta\, p^\tau_\perp$, поэтому для $P^\tau h = h - P^\tau_\perp h$ имеем

$$\begin{aligned} P^\tau h\big|_{\Gamma^\tau} &= (\nabla p - \nabla p^\tau_\perp)\,\big|_{\Gamma^\tau} = (\partial_\tau p\,\partial_\tau + \nabla_\theta p - \partial_\tau p^\tau_\perp\,\partial_\tau - \nabla_\theta p^\tau_\perp)\,\big|_{\Gamma^\tau} \\ &= (\partial_\tau p - \partial_\tau p^\tau_\perp)\,\partial_\tau\big|_{\Gamma^\tau}. \end{aligned} \tag{9}$$

Преобразование $N : \mathscr{P} \to \mathscr{L}_\lambda$ определяется послойно (относительно слоения (5)) правилом

$$Nh\big|_{\Gamma^\tau} := P^\tau h\big|_{\Gamma^\tau}, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T \tag{10}$$

(напомним, что $P^0 = \mathbb{O}$ и $P^T = \mathbb{I}$) на гладких полях h. Как показано в [1], преобразование N изометрично и потому допускает продолжение по непрерывности с гладких h на все пространство $\mathscr{P}$; продолженный оператор является унитарным из $\mathscr{P}$ на $\mathscr{L}_\lambda$. Доказательство этих свойств по сути повторяет доказательство, представленное в [1], и для удобства читателя приведено в Приложении.

• При $0 < \tau < T$ определим оператор $\Pi^\tau : L_2(\Gamma^\tau) \to L_2(\Gamma^\tau)$ на $\operatorname{Dom}\Pi^\tau = H^1(\Gamma^\tau)$ правилом $\Pi^\tau f := \partial_\tau u^f$, где u^f – решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \operatorname{int}\Omega^\tau; \\ u = f & \text{на } \Gamma^\tau; \\ \partial_\tau u = 0 & \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{11}$$

Напомним хорошо известные факты об операторе Π^τ (ДН-операторе, отвечающем задаче (11)).

Предложение 1. *Оператор Π^τ является ПДО порядка 1 с главным символом $\sigma^\tau(k) = [g^{ij}\big|_{\Gamma^\tau} k_i k_j]^{\frac{1}{2}}$. Справедливы соотношения $\Pi^\tau = \Pi^{\tau\,*} \geqslant \mathbb{O}$, $\operatorname{Ker}\Pi^\tau = \{\text{const}\}$.*

Семейство операторов Π^τ ($\tau \in [0,T)$) определяет послойный (см. (5)) оператор Π в пространстве $L_2(\Omega)$ с областью определения $\operatorname{Dom}\Pi = \oplus \int\limits_{[0,T]} H^1(\Gamma^\tau)\, d\tau$,

$$(\Pi\varkappa)\big|_{\Gamma^\tau} := \Pi^\tau(\varkappa\big|_{\Gamma^\tau}), \qquad 0 < \tau < T.$$

Проверка следующих фактов элементарна.

Предложение 2. *Справедливы соотношения $\Pi = \Pi^* \geqslant \mathbb{O}$, $\operatorname{Ker}\Pi = \mathscr{C}$, $\operatorname{Ran}\Pi \perp \mathscr{C}$, где $\mathscr{C}$ есть множество всех квадратично интегрируемых фукнций, постоянных на каждом слое Γ^τ.*

Из (9) и (10) следует, что

$$Nh = N\nabla p = (\partial_\tau p - \Pi p)\, \partial_\tau. \tag{12}$$

• Зафиксируем $\tau \in [0,T)$. Слой Γ^τ есть двумерное риманово многообразие (поверхность) с метрикой $g^\tau = g\big|_{\Gamma^\tau}$, индуцированной метрикой g на Ω. Гладкие элементы пространства $\mathscr{L}^\tau := \vec{L}_2(\Gamma^\tau)$ можно отождествить со следами поперечных полей в Ω:

$$\mathscr{L}^\tau = \overline{\{a\big|_{\Gamma^\tau} \mid a \text{ гладкое}, \ a \in \mathscr{L}_\theta\}}.$$

Введем подпространство $\mathscr{P}_{\Gamma^\tau} := \{\nabla^\tau\phi \mid \phi \in H^1(\Gamma^\tau)\}$ потенциальных полей на Γ^τ, где ∇^τ есть внутренний градиент на Γ^τ.

Положим

$$\dot{L}_2(\Gamma^\tau) := \{\phi \in L_2(\Gamma^\tau) \mid (\phi, 1) = \int\limits_{\Gamma^\tau} \phi\, d\Gamma^\tau = 0\}, \qquad 0 \leqslant \tau < T. \tag{13}$$

Операции векторного анализа $\nabla^\tau : \dot{L}_2(\Gamma^\tau) \cap H^1(\Gamma^\tau) \to \mathscr{P}_{\Gamma^\tau}$ и $\operatorname{div}^\tau = -\nabla^{\tau\,*} : \mathscr{P}_{\Gamma^\tau} \cap H^1(\Gamma^\tau; T\Gamma^\tau) \to \dot{L}_2(\Gamma^\tau)$ инъективны.

Введем пространства

$$\dot{L}_2(\Omega) := \oplus \int\limits_{[0,T]} \dot{L}_2(\Gamma^\tau)\, d\tau = L_2(\Omega) \ominus \mathscr{C} = \overline{\operatorname{Ran}\Pi}$$

и $\mathscr{Q}_\theta := \oplus \int\limits_{[0,T]} \mathscr{P}_{\Gamma^\tau}\, d\tau \subset \mathscr{L}_\theta$. Замкнутые (неограниченные) операторы

$$\nabla_\theta\big|_{\dot L_2(\Omega)} = \oplus \int\limits_{[0,T]} \nabla^\tau\, d\tau : \dot L_2(\Omega) \to \mathscr{Q}_\theta$$

и

$$\operatorname{div}_\theta\big|_{\mathscr{Q}_\theta} = \oplus \int\limits_{[0,T]} \operatorname{div}^\tau\, d\tau : \mathscr{Q}_\theta \to \dot L_2(\Omega)$$

инъективны. Тем самым корректно определены операторы $\nabla_\theta^{-1} : \mathscr{Q}_\theta \to \dot L_2(\Omega)$ и $\operatorname{div}_\theta^{-1} : \dot L_2(\Omega) \to \mathscr{Q}_\theta$, удовлетворяющие равенствам

$$\nabla_\theta^{-1}\nabla_\theta = \mathrm{id}, \qquad (\nabla_\theta^{-1})^* = -\operatorname{div}_\theta^{-1} \tag{14}$$

на $\dot L_2(\Omega)$ и $\mathscr{Q}_\theta$, соответственно.

• Мы используем соотношения (14) для вывода следующего представления.

Лемма 2. *Пусть $\varkappa$ – гладкая функция на $\dot\Omega$ и $v = \varkappa\,\partial_\tau \in \mathscr{L}_\lambda$. Тогда для $N^* : \mathscr{L}_\lambda \to \mathscr{P}$ справедливо представление*

$$N^* v \;=\; P_{\mathscr{P}}\left[\varkappa\,\partial_\tau \;+\; \operatorname{div}_\theta^{-1}\Pi\varkappa\right], \tag{15}$$

где $P_{\mathscr{P}}$ есть ортопроектор на подпространство $\mathscr{P}$ из (6)*. Справедливо равенство*

$$\operatorname{div} N^* v \;=\; \operatorname{div}(\varkappa\,\partial_\tau) + \Pi\varkappa. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть p и $\varkappa$ – гладкие функции, $h = \nabla p \in \mathscr{P}$ и $v = \varkappa\partial_\tau \in \mathscr{L}_\lambda$. Обозначим через $\dot p$ проекцию p на $\dot L_2(\Omega) = \overline{\operatorname{Ran}\Pi}$ в $L_2(\Omega)$. Тогда $\nabla_\theta p = \nabla_\theta \dot p$ и

$$\begin{aligned}
(Nh, v)_{\mathscr{L}} &\overset{\text{см. (12)}}{=} (\partial_\tau p\,\partial_\tau, \varkappa\,\partial_\tau)_{\mathscr{L}} - (\Pi p\,\partial_\tau, \varkappa\,\partial_\tau)_{\mathscr{L}} \\
&\overset{\operatorname{Ker}\Pi=\mathscr{C}}{=} (\partial_\tau p, \varkappa)_{L_2(\Omega)} - (\Pi\dot p, \varkappa)_{L_2(\Omega)} \\
&= (\partial_\tau p\,\partial_\tau, \varkappa\partial_\tau)_{\mathscr{L}_\lambda} - (\nabla_\theta^{-1}\nabla_\theta p, \Pi\varkappa)_{L_2(\Omega)} \\
&\overset{(14)}{=} (\partial_\tau p\,\partial_\tau, \varkappa\partial_\tau)_{\mathscr{L}_\lambda} + (\nabla_\theta p, \operatorname{div}_\theta^{-1}\Pi\varkappa)_{\mathscr{L}_\theta} \\
&= (\partial_\tau p\,\partial_\tau + \nabla_\theta p, \varkappa\partial_\tau + \operatorname{div}_\theta^{-1}\Pi\varkappa)_{\mathscr{L}} = (\nabla p, \varkappa\partial_\tau + \operatorname{div}_\theta^{-1}\Pi\varkappa)_{\mathscr{L}} \\
&= (P_{\mathscr{P}} h, \varkappa\partial_\tau + \operatorname{div}_\theta^{-1}\Pi\varkappa)_{\mathscr{L}} \\
&= (h, P_{\mathscr{P}}[\varkappa\partial_\tau + \operatorname{div}_\theta^{-1}\Pi\varkappa])_{\mathscr{L}} = (h, N^* v)_{\mathscr{L}}.
\end{aligned}$$

Поскольку гладкие элементы h плотны $\mathscr{P}$, из последнего равенства вытекает представление (15) для всех гладких $\varkappa$. Из Предложения 1 следует, что композиция $\operatorname{div}_\theta^{-1}\Pi\varkappa$ допускает продолжение до непрерывного оператора в $\mathscr{L}_\lambda$; тем самым (15) выполнено для всех $\varkappa \in L_\lambda$.

Обозначим $a := \varkappa\partial_\tau + \operatorname{div}_\theta^{-1}\Pi\varkappa$, тогда из разложения $a = P_{\mathscr{P}}a + P_{\mathscr{S}}a$ (см. (6)) и равенств $P_{\mathscr{P}}a = a - P_{\mathscr{S}}a$, $\operatorname{div} P_{\mathscr{S}}a = 0$ находим

$$\operatorname{div} N^*v = \operatorname{div} P_{\mathscr{P}}a = \operatorname{div} a - \operatorname{div} P_{\mathscr{S}}a = \operatorname{div} a = \operatorname{div}\,(\varkappa\partial_\tau + \operatorname{div}_\theta^{-1}\Pi\varkappa)$$
$$\overset{(3)}{=} \operatorname{div}\varkappa\partial_\tau + \operatorname{div}_\theta\operatorname{div}_\theta^{-1}\Pi\varkappa = \operatorname{div}_\lambda(\varkappa\partial_\tau) + \Pi\varkappa. \qquad \square$$

• Пусть $h = \nabla p$ и $\operatorname{div} h = 0$, то есть потенциал p гармоничен в Ω. Пусть также $v = \varkappa\,\partial_\tau = Nh$. Тогда $\operatorname{div} N^*v = \operatorname{div} N^*Nh = \operatorname{div} h = \Delta p = 0$, откуда в силу формулы (16) следует, что

$$\operatorname{div}(\varkappa\partial_\tau) + \Pi\varkappa = 0 \qquad \text{в} \quad \operatorname{int}\Omega. \tag{17}$$

Факторизация ДН-оператора. • Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{в} \quad \operatorname{int}\Omega; \\ p = f & \text{на} \quad \Gamma; \end{cases}$$

пусть $p = p^f(x)$ – её решение, тогда $\operatorname{div}\nabla p^f = \Delta p^f = 0$ в Ω. Введем разрешающий оператор $W : L_2(\Gamma) \to \mathscr{H} \subset \mathscr{P}$ (см. (7)) правилом $Wf := \nabla p^f$.

ДН-оператор $\Lambda : L_2(\Gamma) \to \mathrm{L}_2(\Gamma)$, $\operatorname{Dom}\Lambda = H^1(\Gamma)$ определяется формулой

$$\Lambda f := \nu p^f \qquad \text{на} \quad \Gamma,$$

где $\nu = -\partial_\tau\big|_\Gamma$ – внешняя нормаль к Γ. Поскольку

$$(\nabla p^f, \nabla p^g)_{\mathscr{H}} = (Wf, Wg)_{\mathscr{H}} = \int_\Omega \langle \nabla p^f, \nabla p^g\rangle\, dx$$
$$= \int_\Gamma (\nu p^f)\, p^g\, d\Gamma = \int_\Gamma \Lambda f\, g\, d\Gamma, \tag{18}$$

имеем $\Lambda = \Lambda^* = W^*W \geqslant \mathbb{O}$, $\operatorname{Ran}\Lambda = \dot{L}_2(\Gamma)$ (см. (13)) и $\operatorname{Ker}\Lambda = \{\mathrm{const}\}$.

• Пусть $N\nabla p^f = \varkappa^f\,\partial_\tau \in \mathscr{L}_\lambda$. Тогда $\operatorname{div}(\varkappa^f\partial_\tau) + \Pi\varkappa^f \overset{(17)}{=} 0$, то есть $g^{-\frac12}\partial_\tau(g^{\frac12}\varkappa^f) + \Pi\varkappa^f = 0$ в полугеодезических координатах (см. (2) и

(3)). Кроме того, из равенства $\partial_\tau p^\tau_\perp\big|_\Gamma \overset{(8)}{=} 0$ следует, что

$$(\varkappa^f\,\partial_\tau)\big|_\Gamma = N\nabla p^f\big|_\Gamma \overset{(9)}{=} \partial_\tau p^f \partial_\tau\big|_\Gamma = -\Lambda f\,\partial_\tau\big|_\Gamma,$$

откуда $\varkappa^f = -\Lambda f$ на Γ. Таким образом, функция $\varkappa = \varkappa^f(x(\gamma,\tau))$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} g^{-\frac12}\partial_\tau(g^{\frac12}\varkappa) + \Pi\varkappa = 0 & \text{в } \Gamma\times(0,T);\\ \varkappa\big|_{\tau=0} = -\Lambda f; \end{cases}. \tag{19}$$

Пусть V – оператор (пропагатор) $V : \varkappa\big|_\Gamma \mapsto \varkappa\big|_{\Gamma\times(0,T)}$, решающий задачу Коши (19) [7, 5, 8]. Поскольку $\operatorname{Ran}\Lambda = \dot L_2(\Gamma)$, оператор V действует из $\dot L_2(\Gamma)$ в $N\mathscr{H} \subset \mathscr{L}_\lambda$.

- Ввиду изометричности N-преобразования и формулы (18) имеем

$$\begin{aligned}(\Lambda f, g)_{L_2(\Gamma)} &= (\nabla p^f, \nabla p^g)_{\mathscr{H}} = (N\nabla p^f, N\nabla p^g)_{\mathscr{L}_\lambda} = (\varkappa^f\partial_\tau, \varkappa^g\partial_\tau)_{\mathscr{L}_\lambda}\\ &= (\varkappa^f, \varkappa^g)_{L_2(\Omega)} = (V\varkappa^f\big|_{\tau=0}, V\varkappa^g\big|_{\tau=0})_{L_2(\Omega)} = (V\Lambda f, V\Lambda g)_{L_2(\Omega)}\\ &= (\Lambda V^*V\Lambda f, g)_{L_2(\Gamma)},\end{aligned}$$

откуда $\Lambda = \Lambda V^*V\Lambda$ и

$$\Lambda^{-1} = V^*V. \tag{20}$$

Таким образом, оператор $V : \dot L_2(\Gamma) \to N\mathscr{H}$ доставляет факторизацию Λ^{-1}.

Пример: верхнее полупространство. • Пусть $\Omega = \overline{\mathbb{R}^3_+} = \{(x,z)\mid x = (x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2,\ z\geqslant 0\}$, $\Gamma = \{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}^2\}$. Гармонический потенциал $p = p^f$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{в } \operatorname{int}\Omega;\\ p = f & \text{на } \Gamma;\\ p\to 0 & \text{при } |x| + z\to\infty; \end{cases}.$$

Применяя преобразование Фурье F по x,

$$\tilde u(k,z) = (Fu(\cdot,z))(k) := (2\pi)^{-\frac32}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\langle k,x\rangle}u(x,z)\,dx,$$

находим

$$\begin{cases} \tilde p_{zz} + |k|\,\tilde p = 0, & z>0;\\ \tilde p = \tilde f, & z=0;\\ \tilde p\to 0, & |k|+z\to\infty. \end{cases}$$

Таким образом

$$\tilde{p}\,(k,z) \,=\, e^{-|k|z}\,\tilde{f}(k), \qquad k\in\mathbb{R}^2,\ z\geqslant 0,$$

а $\tilde{\Lambda} := F\Lambda F^*$ совпадает с оператором умножения на $|k|$.

• Применяя преобразование Фурье к решению $p_\perp$ второй задачи в (8), получаем

$$\begin{cases} (\tilde{p}^\tau_\perp)_{zz} + |k|^2(\tilde{p}^\tau_\perp) = 0, & z>0;\\ (\tilde{p}^\tau_\perp) = \tilde{p}, & z=\tau;\\ (\tilde{p}^\tau_\perp)_z = 0, & z=0; \end{cases}$$

откуда

$$\tilde{p}^\tau_\perp(k,z) = \frac{\cosh|k|z}{\cosh|k|\tau}\,\tilde{p}(k,z), \qquad 0\leqslant z\leqslant\tau.$$

Таким образом, для оператора $\tilde{\Pi}^\tau := F\Pi^\tau F^*$ выполнено

$$\tilde{\Pi}^\tau\tilde{p}(\cdot,\tau) = (\tilde{p}^\tau_\perp)_z(\cdot,\tau) = (|k|\,\tanh|k|\tau)\,\tilde{p}(\cdot,\tau), \qquad \tau\geqslant 0.$$

• После преобразования Фурье задача (19) принимает вид

$$\begin{cases} \tilde{\varkappa}_\tau + (|k|\,\tanh|k|\tau)\tilde{\varkappa} = 0, & \tau>0;\\ \tilde{\varkappa} = -\widetilde{\Lambda f} = -\tilde{\Lambda}\tilde{f} = -|k|\tilde{f}, & z=0; \end{cases} \tag{21}$$

её решение находится явно:

$$\tilde{\varkappa}(k,\tau) = e^{-\int\limits_0^\tau |k|\,\tanh|k|\eta\,d\eta}\,\tilde{\varkappa}(k,0) = \frac{\tilde{\varkappa}(k,0)}{\cosh|k|\tau} = -\frac{|k|}{\cosh|k|\tau}\,\tilde{f}(k).$$

Таким образом, оператор, решающий задачу (21), действует из $L_2(\{k\in\mathbb{R}^2\})$ в $L_2\left(\{k\in\mathbb{R}^2\}\times\{z\geqslant 0\}\right)$ по правилу

$$(\tilde{V}\tilde{\varkappa}_0)(k,z) \,=\, \frac{\tilde{\varkappa}_0(k)}{\cosh|k|z}, \qquad k\in\mathbb{R}^2,\ z\geqslant 0.$$

Тогда сопряженный оператор $\tilde{V}^* : L_2\left(\mathbb{R}^2\times\{z\geqslant 0\}\right)\to L_2(\{k\in\mathbb{R}^2\})$ имеет вид

$$(\tilde{V}^*\phi)(k) \,=\, \int\limits_0^\infty \frac{\phi(k,z)}{\cosh|k|z}\,dz, \qquad k\in\mathbb{R}^2.$$

В результате получаем

$$(\tilde{V}^*\tilde{V}\tilde{\varkappa}_0)(k) \,=\, \int\limits_0^\infty \frac{dz}{\cosh|k|z}\frac{\tilde{\varkappa}_0(k)}{\cosh|k|z} = \tilde{\varkappa}_0(k)\int\limits_0^\infty \frac{dz}{\cosh^2|k|z} = \frac{\tilde{\varkappa}_0(k)}{|k|}.$$

Тем самым $\tilde{V}^*\tilde{V} = \tilde{\Lambda}^{-1}$ в полном соответствии с (20).

Пример: единичный шар. Пусть $\Omega = \mathbb{B} =: \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leqslant 1\}$; тогда $\Gamma^\tau := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1 - \tau\}$ и $\Gamma = \Gamma^0 = \mathbb{S}^2$. Введем сферические координаты (r, ϑ, φ); тогда $\partial_\tau = -\partial_r$. Пусть u_{lm}^τ – решение задача (11), где $f(\vartheta, \varphi) = Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ – сферическая функция. Тогда, как легко видеть,

$$u_{lm}^\tau = \frac{(l+1)r^l + lr^{-(l+1)}}{(l+1)\rho^l + l\rho^{-(l+1)}} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \qquad (\rho := 1 - \tau).$$

Отсюда

$$\Pi^\tau Y_l^m = -\partial_r u_{lm}^\tau|_{r=\rho} = \frac{l(l+1)}{\rho} \frac{1 - \rho^{2l+1}}{l + (l+1)\rho^{2l+1}} Y_l^m(\vartheta, \varphi).$$

В частности, при $f = Y_l^m$ на $\mathbb{S}^2$ имеем $p^f = r^l f$, $\Lambda f = lf$ и

$$N\nabla p^f = -l\,\lambda_l(\rho)\, f\, \partial_\tau; \qquad Vf = \lambda_l(\rho)\, f \qquad (f = Y_l^m),$$

где

$$\lambda_l(\rho) := -\frac{(2l+1)\rho^{l-1}}{l + (l+1)\rho^{2l+1}}.$$

Отметим, что поле $N\nabla p^f$ ($f \in H^{1/2}(\Gamma)$) гладкое в $\mathbb{B}\backslash\{0\}$, но, вообще говоря, имеет разные пределы вдоль разных направлений при $x \to 0$.

Обозначим через $\mathfrak{P}_l$ проектор в $L_2(\mathbb{S}^2)$ на собственное подпространство оператора Лапласа-Бельтрами $\Delta_{\mathbb{S}^2}$, отвечающее собственному значению $l(l+1)$. Тогда из формул выше следует, что

$$[Vf](\cdot, \tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l(1-\tau)\, \mathfrak{P}_l f, \quad V^*\phi = \int_0^1 \sum_{l=1}^{\infty} [\mathfrak{P}_l \phi](\cdot, 1-\rho)\lambda_l(\rho)\rho^2 d\rho.$$

Отсюда получаем

$$V^*Vf = \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\int_0^1 \lambda_l^2(\rho)\rho^2 d\rho \Big) \mathfrak{P}_l f = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1} \mathfrak{P}_l f = \Lambda^{-1} f,$$

что опять совпадает с формулой (20).

Замечания и открытые вопросы. • Отметим, что оператор Π в задаче Коши (19), является послойным ПДО, причем его симавол определяет метрику g в полугеодезических координатах (см. Предложение 1). Для простоты рассмотрим случай, когда $\Omega = \mathbb{R}^3_+$ является полупространством с метрикой

$$ds^2 = (dx^3)^2 + \sum_{ij=1,2} g_{ij}(x^1, x^2, x^3)\, dx^i dx^j,$$

которая гладкая и совпадает с евклидовой вне достаточно большого шара $|x| < N$. Тогда из общей теории параболических ПДО [7, 5] следует, что оператор эволюции $V^\tau : \varkappa(\cdot, 0) \mapsto (V\varkappa)(\cdot, \tau)$ параболической задачи (19) является сглаживающим ПДО при любом $\tau > 0$.

• Не исключено, что рассуждения выше приведут к подходу к трехмерной задаче электроимпедансной томографии. Именно, если будет найдены характеристические условия, выделяющие единственным образом факторизацию (20) среди всех возможных факторизаций оператора "Нейман-в-Дирихле" Λ^{-1}, то станет возможным восстановить метрику g в полугеодезических координатах по схеме $\Lambda \mapsto V \mapsto \Pi \mapsto \Pi^\tau \mapsto g\big|_{\Gamma^\tau}$, $\tau > 0$ (см. Предложение 1).

Сводя задачу ЭИТ к определению $\Lambda \mapsto V$, мы приходим к известной ситуации в теории обратных задач, когда требуется восстановить оператор V по его модулю $|V| := \sqrt{V^*V} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}$. Отметим, что для динамических гиперболических (динамических) обратных задач свойством оператора V, выделяющим каноническую факторизацию $\Lambda^{-1} = V^*V$, является его треугольность, которая выражает в операторных терминах такой фундаментальный физический факт, как конечность скорости распространения возмущений [4]. Можно предположить, что существует аналогичный физический факт, обеспечивающий единственность факторизации в (статической) задаче ЭИТ. Возможно, этот факт имеет отношение к комплексной геометрической оптике.

Приложение

Напомним, что Ω диффеоморфно шару в $\mathbb{R}^3$. Доказательство следующего фундаментального свойства N-преобразования по сути повторяет аналогичные рассуждения из [1].

Теорема 1. *N-преобразование является унитарным оператором, действующим из $\mathscr{P}$ на $\mathscr{L}_\lambda$.*

Доказательство. • Покажем, что N-преобразование изометрично. Для гладких полей $h = \nabla p$ и $g = \nabla q$ имеем

$$\frac{d}{d\tau}\,(P^\tau h, P^\tau g)_{\mathscr{L}_\lambda}$$
$$= \frac{d}{d\tau}\int\limits_{\Omega^\tau} dx\,\langle P^\tau h, P^\tau g\rangle = \frac{d}{d\tau}\int\limits_0^\tau ds \int\limits_{\Gamma^s} d\Gamma^s \langle h - \nabla p_\perp^\tau, g - \nabla q_\perp^\tau\rangle = I^\tau + II^\tau,$$

где $I^\tau := \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau\,\langle h - \nabla p_\perp^\tau, g - \nabla q_\perp^\tau\rangle = \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau\,\langle Nh, Ng\rangle$ и

$$\begin{aligned}
II^\tau &:= \int\limits_0^\tau ds \int\limits_{\Gamma^s} d\Gamma^s \left[\langle -\nabla\frac{\partial p_\perp^\tau}{\partial\tau},\, g - \nabla q_\perp^\tau\rangle + \langle h - \nabla p_\perp^\tau,\, -\nabla\frac{\partial q_\perp^\tau}{\partial\tau}\rangle\right] \\
&= \int\limits_0^\tau ds \int\limits_{\Gamma^s} d\Gamma^s \left[\langle -\nabla\frac{\partial p_\perp^\tau}{\partial\tau},\, \nabla(q - q_\perp^\tau)\rangle + \langle \nabla(p - p_\perp^\tau),\, -\nabla\frac{\partial q_\perp^\tau}{\partial\tau}\rangle\right] \\
&= \int\limits_{\Omega^\tau} dx \left[\Delta\frac{\partial p_\perp^\tau}{\partial\tau}\,(q - q_\perp^\tau) + (p - p_\perp^\tau)\,\Delta\frac{\partial q_\perp^\tau}{\partial\tau}\right] \\
&- \int\limits_{\Gamma} d\Gamma \left[\frac{\partial(\partial_\nu p_\perp^\tau)}{\partial\tau}\,(q - q_\perp^\tau) + (p - p_\perp^\tau)\,\frac{\partial(\partial_\nu q_\perp^\tau)}{\partial\tau}\right] \\
&- \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau \left[\frac{\partial(\partial_\nu p_\perp^\tau)}{\partial\tau}\,(q - q_\perp^\tau) + (p - p_\perp^\tau)\,\frac{\partial(\partial_\nu q_\perp^\tau)}{\partial\tau}\right] =: \int\limits_{\Omega^\tau} - \int\limits_{\Gamma^\tau} - \int\limits_{\Gamma},
\end{aligned}$$

где ν – внешняя нормаль к $\partial\Omega^\tau = \Gamma \cup \Gamma^\tau$. Из уравнения второй краевой задачи в (8) следует, что $\Delta\frac{\partial p_\perp^\tau}{\partial\tau} = \frac{\partial\Delta p_\perp^\tau}{\partial\tau} = \Delta\frac{\partial q_\perp^\tau}{\partial\tau} = \frac{\partial\Delta q_\perp^\tau}{\partial\tau} = 0$ в $\operatorname{int}\Omega^\tau$, откуда $\int\limits_{\Omega^\tau} = 0$. Аналогично, граничные условия на Γ^τ и Γ в той же задаче дают $\int\limits_{\Gamma^\tau} = 0$ и $\int\limits_{\Gamma} = 0$ соответственно. В результате получаем $II^\tau = 0$ и

$$\frac{d}{d\tau}\,(P^\tau h, P^\tau g)_{\mathscr{L}_\lambda} = \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau\,\langle Nh, Ng\rangle, \qquad 0 < \tau < T.$$

Интегрируя последнее равенство по τ с учетом $P^0 = \mathbb{O}$ и $P^T = \mathbb{I}$, выводим

$$(h,g)_{\mathscr{P}} = \int_0^T d\tau \int_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau \, \langle Nh, Ng\rangle = \int_\Omega dx \, \langle Nh, Ng\rangle = (Nh, Ng)_{\mathscr{L}_\lambda},$$

откуда следует изометричность N на гладких полях. Поэтому N продолжается до изометрического оператора (обозначаемого тем же символом N), действующего из $\mathscr{P}$ в $\mathscr{L}_\lambda$.

• Далее мы используем следующие простые факты:
1. Зафиксируем $0 < \tau < T$. Любое поле $h = \nabla p \in \mathscr{P}^\tau$ параллельно $\nabla\tau$ ввиду равенства $p\big|_{\Gamma^\tau} = \mathrm{const} = 0$. Ввиду (8) отсюда следует, что $p^\tau_\perp = 0$ в Ω^τ. Теперь формула (9) дает

$$Nh = h \qquad \text{на } \Gamma^\tau. \tag{22}$$

2. Для любой гладкой функции ψ на Γ^τ $(0 < \tau < T)$ существует такое поле $h \in \mathscr{P}^\tau$, что $h\big|_{\Gamma^{\tau-0}} = \psi\partial_\tau$. Действительно, выберем такую гладкую в Ω^τ функцию u, что $u = 0$ и $\partial_\tau u = \psi$ на Γ^τ и определим искомое поле равенствами $h\big|_{\Omega^\tau} = \nabla u$ и $h\big|_{\Omega\setminus\Omega^\tau} = 0$.

• Теперь докажем, что $\operatorname{Ran} N = \mathscr{L}_\lambda$.

Непосредственно из определения (10) N-преобразования следует, что

$$NP^\tau = X^\tau N, \qquad 0 < \tau < T,$$

где X^τ срезает поле на Ω^τ:

$$X^\tau v = \begin{cases} v & \text{in } \Omega^\tau; \\ 0, & \text{in } \Omega\setminus\Omega^\tau; \end{cases}.$$

Как следствие, $P^\tau N^* = N^* X^\tau$, откуда

$$X^\tau \operatorname{Ker} N^* \subset \operatorname{Ker} N^*, \qquad 0 < \tau < T. \tag{23}$$

Предположим, что $v = \varkappa\partial_\tau$, $v \perp \operatorname{Ran} N$, то есть $v \in \operatorname{Ker} N^*$. Тогда из (23) следует, что $X^\tau v \in \operatorname{Ker} N^*$ и

$$0 \overset{(23)}{=} (h, N^* X^\tau v)_{\mathscr{P}} = (Nh, X^\tau v)_{\mathscr{L}_\lambda} = \int_{\Omega^\tau} \langle Nh, v\rangle \, dx = \int_0^\tau ds \int_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau \langle Nh, v\rangle$$

для всех $h \in \mathscr{P}$ и $0 < \tau < T$. Дифференцируя по τ, находим

$$\int\limits_{\Gamma^\tau} \langle Nh, v\rangle \, d\Gamma^\tau \;=\; 0, \qquad \text{п.в. } \tau \in (0,T). \tag{24}$$

Зафиксируем $\tau = \sigma$. Выберем такую гладкую функцию ψ на Γ^τ и такое поле $h \in \mathscr{P}^\sigma$, что выполнено $h\big|_{\Gamma^\sigma} = \psi\partial_\tau$ (последнее возможно ввиду **2.**). При таком выборе предыдущая формула дает

$$\int\limits_{\Gamma^\sigma} \langle Nh, v\rangle \, d\Gamma^\sigma \overset{(22)}{=} \int\limits_{\Gamma^\sigma} \langle h, v\rangle \, d\Gamma^\sigma = \int\limits_{\Gamma^\sigma} \psi \varkappa \, d\Gamma^\sigma \overset{(24)}{=} 0. \tag{25}$$

Поскольку ψ произвольна, из (25) следует, что $\varkappa = 0$ на Γ^σ при почти всех $\sigma \in (0,T)$. Отсюда $\varkappa = 0$ и $v = 0$ в Ω. Таким образом, $\operatorname{Ker} N^* = \mathscr{L}_\lambda \ominus \operatorname{Ran} N = \{0\}$, то есть $\operatorname{Ran} N = \mathscr{L}_\lambda$. Итак, преобразование $N : \mathscr{P} \to \mathscr{L}_\lambda$ изометрично и сюръективно, то есть является унитарным оператором. □

Список литературы

1. М. И. Белишев, *Об унитарном преобразовании в пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, связанном с разложением Вейля.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **275** (2001) . 25–40.
2. M. I. Belishev, *New notions and constructions of the boundary control method.* — Inverse Problems and Imaging **16**, No. 6 (2022), 1447–1471. doi:10.3934/ipi.2022040.
3. М. И. Белишев, А. К. Гласман, *Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (BC-метод).* — Алгебра и анализ, **12**, No. 2 (2000), 131–187.
4. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Треугольная факторизация и функциональные модели операторов и систем.* — Алгебра и анализ **36**, No. 5 (2024), 101–127.
5. T. Krainer, BW. Schulze, *On the Inverse of Parabolic Systems of Partial Differential Equations of General Form in an Infinite Space-Time Cylinder.* — In: S. Albeverio, M. Demuth, E. Schrohe, BW. Schulze (eds) Parabolicity, Volterra Calculus, and Conical Singularities. *Operator Theory: Advances and Applications*, vol 138., Birkhäuser, Basel (2002).
6. G. Schwarz, *Hodge decomposition - a method for solving boundary value problems.* Lecture Notes Math. **1607**. Springer–Verlag, Berlin (1995).
7. C. Tsutsumi, *The fundamental solution for a parabolic pseudo-differential operator and parametrices for degenerate operators.* — Proc. Japan Acad **51**, No. 2 (1975), 103–108.
8. К. Иосида, *Функциональный анализ.* Мир, Москва (1967).

Belishev M. I., Korikov D. V. N-transform and factorization of the DN-map.

Let (Ω, g) be a smooth compact 3D Riemannian manifold with the smooth boundary Γ, $\tau(x) := \operatorname{dist}(x, \Gamma)$, $x \in \Omega$; $\Omega^\tau := \{x \in \Omega \,|\, \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \tau\}$, $\Gamma^\tau := \{x \in \Omega \,|\, \operatorname{dist}(x, \Gamma) = \tau\}$, $\tau \geqslant 0$. For the sake of technical simplicity, we deal with Ω diffeomorphic to a ball in $\mathbb{R}^3$.

Let $\mathscr{P} := \{\nabla p \,|\, p \in H^1(\Omega)\}$ be the space of the potential vector fields, and let $\mathscr{L}_\lambda := \{\varkappa \nabla \tau \,|\, \varkappa \in L_2(\Omega)\}$ be the space of the vector fields parallel to $\nabla\tau$. The N-transform is a map from $\mathscr{P}$ to $\mathscr{L}_\lambda$ defined layer-wise (in accordance with $\Omega = \cup_{\tau \geqslant 0} \Gamma^\tau$) by

$$Nh\,\big|_{\Gamma^\tau} := (P^\tau h)\big|_{\Gamma^{\tau-0}}, \quad \tau > 0,$$

where P^τ are the projections in $\mathscr{P}$ onto the subspaces $\mathscr{P}^\tau := \{h \in \mathscr{P} \,|\, \operatorname{supp} h \subset \overline{\Omega^\tau}\}$. We show that N is a unitary operator.

Let $p = p^f(x)$ be a solution to the Dirichlet problem: $\Delta_g p = 0$ in $\Omega \setminus \Gamma$, $p = f$ on Γ. The DN-map Λ is defined by $\Lambda f := -\langle \nabla p^f, \nabla \tau \rangle$ on Γ. We show that the N-transform provides a certain factorization $\Lambda^{-1} = V^* V$ and discuss its possible usefulness for determination of (Ω, g) from Λ.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru
E-mail: thecakeisalie@list.ru

Поступило 23 июня 2026 г.