Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

,

М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко

О СХОДИМОСТИ МОДУЛЕЙ И ФАЗ ОПЕРАТОРОВ И РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА ОБРАЗ ОПЕРАТОРА

О работе

• Заметка содержит несколько лемм и теорему, которые так или иначе связаны с проблемой треугольной факторизации операторов [5, 3] и, в частности, с устойчивостью факторизации [2]. Леммы касаются сходимости модулей и фаз операторов при различных типах сходимости операторов. Теорема доставляет регуляризацию проектирования на образ оператора в случае, когда оператор не является изоморфизмом. Эти результаты носят преимущественно технический характер, но мы надеемся, что они представляют некоторый самостоятельный интерес и будут полезны для дальнейшего изучения устойчивости треугольной факторизации. Назначение и будущая цель работы – усиление результатов [1, 2].

Термины и обозначения

Если не указано иное, операторы предполагаются ограниченными.

Оператор C в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ является неотрицательным, если выполнено $(Cf, f) \geqslant 0,\ f \in \mathscr{H}$, положительным, если $(Cf, f) > 0,\ 0 \neq f \in \mathscr{H}$, и положительно определенным, если $(Cf, f) \geqslant c\,\|f\|^2$, $f \in \mathscr{H}$ с константой $c > 0$. Мы пишем $C \geqslant \mathbb{O}$, $C > \mathbb{O}$, и $C \geqslant c\,\mathbb{I}$ соответственно.

Пусть $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ суть гильбертовы пространства, $A, A_j : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ $(j = 1, 2, \cdots \to \infty)$ – операторы. Равномерная (по норме), сильная и слабая сходимости обозначаются: $A_j \overset{\mathrm{u}}{\to} A$, $A_j \overset{\mathrm{s}}{\to} A$, и $A_j \overset{\mathrm{w}}{\to} A$, что означает, что $\|A_j - A\| = \max\limits_{\|f\|=1} \|(A_j - A)f\| \to 0$, $\|(A_j - A)f\| \to 0$ и $((A_j - A)f, h) \to 0$ выполняются соответственно для всех $f \in \mathscr{F}$ и $h \in \mathscr{H}$.

Ключевые слова: сходимость модулей и фаз операторов, регуляризация проектирования на образ оператора.

Обозначим через $|A| := \sqrt{A^*A} \geqslant \mathbb{O}$, $|A| : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ *модуль* оператора и используем полярное разложение $A = \Phi|A|$ с *фазой* оператора $\Phi : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$. Фаза Φ изометрически отображает $\overline{\operatorname{Ran}|A|} \subset \mathscr{F}$ на $\overline{\operatorname{Ran} A} \subset \mathscr{H}$ и аннулирует $\mathscr{F} \ominus \overline{\operatorname{Ran}|A|}$. Сопряженный оператор Φ^* изометрически отображает $\overline{\operatorname{Ran} A} \subset \mathscr{H}$ на $\overline{\operatorname{Ran}|A|} \subset \mathscr{F}$ и аннулирует $\mathscr{H} \ominus \overline{\operatorname{Ran} A}$.

Операторы $\Phi^*\Phi$ и $\Phi\Phi^*$ являются проекторами в $\mathscr{F}$ на $\overline{\operatorname{Ran}|A|}$ и в $\mathscr{H}$ на $\overline{\operatorname{Ran} A}$ соответственно. Если $\overline{\operatorname{Ran}|A|} = \mathscr{F}$ и $\overline{\operatorname{Ran} A} = \mathscr{H}$, то Φ – унитарный оператор и выполнено $\Phi^*\Phi = \mathbb{I}_{\mathscr{F}}$, $\Phi\Phi^* = \mathbb{I}_{\mathscr{H}}$.

О сходимости квадратных корней из положительных операторов

Как известно (см., например, [4]), сходимость $C_j \xrightarrow{\text{u}} C$ при $j \to \infty$ влечет $\sqrt{C_j} \xrightarrow{\text{u}} \sqrt{C}$. Докажем, что то же верно для сильной сходимости.

Лемма 1. *Пусть C_j и C суть положительные операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\sqrt{C_j}$ и $\sqrt{C}$ – их положительные квадратные корни и выполнено $C_j \xrightarrow{\text{s}} C$. Тогда имеет место сходимость $\sqrt{C_j} \xrightarrow{\text{s}} \sqrt{C}$.*

Доказательство. 1. Начнём с известных фактов. Для оператора $A = A^* = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda\, dE_\lambda$ и ограниченной функции φ имеем:

$$\|\varphi(A)f\| = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda f \right\| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}} |\varphi|\, \|f\|. \tag{1}$$

Также отметим, что $C_j \xrightarrow{\text{s}} C$ ведет $(C_j)^n \xrightarrow{\text{s}} C^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого многочлена $P_{2m}(z)$, содержащего только четные степени $z^0, z^2, z^4, \ldots, z^{2m}$, выполнено

$$P_{2m}(\sqrt{C_j}) \xrightarrow{\text{s}} P_{2m}(\sqrt{C}), \qquad j \to \infty. \tag{2}$$

2. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем $f \in \mathscr{H}$, выберем полином с условием

$$|\sqrt{|\lambda|} - P_{2m}(\lambda)| < \varepsilon, \qquad -\gamma \leqslant \lambda \leqslant \gamma, \tag{3}$$

и обозначим $\widetilde{P}_m(z) := P_{2m}(\sqrt{z})$. Используя спектральное представление для C_j и C, имеем

$$\delta^j := \|(\sqrt{C_j} - \sqrt{C})f\| \leqslant \|[\sqrt{C_j} - \widetilde{P}_m(C_j)]f\| + \|[\sqrt{C} - \widetilde{P}_m(C)]f\| + \|[\widetilde{P}_m(C_j) - \widetilde{P}_m(C)]f\| := I^j + II + III^j,$$

где

$$I^j = \left\| \int\limits_{[0,\gamma]} [\sqrt{\lambda} - P_{2m}(\lambda)]\, d\, E^j_\lambda f \right\| \leqslant \varepsilon \|f\|$$

равномерно по j и

$$II = \left\| \int\limits_{[0,\gamma]} [\sqrt{\lambda} - P_{2m}(\lambda)]\, d\, E_\lambda f \right\| \leqslant \varepsilon \|f\|$$

выполнено в силу (1) и (3).

Оставляя полином $\widetilde{P}_m(\cdot) = P_{2m}(\sqrt{\cdot})$ фиксированным и устремляя $j \to \infty$, обеспечим произвольную малость III^j благодаря (2). Таким образом, выполнено $\delta^j \to 0$, что доказывает Лемму. □

Общие леммы об операторной сходимости

• Следующая лемма усиливает один из результатов работы [1]. Напомним, что сопряжение $A \mapsto A^*$ не является непрерывным в топологии сильной сходимости операторов.

Лемма 2. *Пусть $A = \Phi|A|$ и $A_j = \Phi_j|A_j|$ суть полярные разложения операторов $A_j, A : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$.* **1.** *Если $A_j \xrightarrow{\text{s}} A$ и $A_j^* \xrightarrow{\text{s}} A^*$, то выполняется $|A_j| \xrightarrow{\text{s}} |A|$.* **2.** *Если, кроме того, A инъективен, то выполнено $\Phi_j \xrightarrow{\text{s}} \Phi$ и $\Phi_j^* \xrightarrow{\text{w}} \Phi^*$.*

Доказательство. 1. Для произвольного $f \in \mathscr{F}$, представляя

$$\|(|A_j|^2 - |A|^2)f\| = \|A_j^*(A_j - A)f + (A_j^* - A^*)Af\| \leqslant \|A_j^*\|\|(A_j - A)f\| + \|(A_j^* - A^*)Af\|$$

и используя сходимость $A_j^* \xrightarrow{\text{s}} A^*$, заключаем, что выполнено $\|(|A_j|^2 - |A|^2)f\| \to 0$, т.е. $|A_j|^2 \xrightarrow{\text{s}} |A|^2$. В силу Леммы 1, последнее влечет $|A_j| \xrightarrow{\text{s}} |A|$.

2. Представляя

$$(\Phi_j - \Phi)|A| = A_j - A - \Phi_j(|A_j| - |A|),$$

имеем

$$\|(\Phi_j - \Phi)|A|f\| \leqslant \|(A_j - A)f\| + \|(|A_j| - |A|)f\| \to 0.$$

Инъективность A влечет инъективность $|A|$, из чего следует $\overline{\operatorname{Ran}|A|} = \mathscr{F} \ominus \operatorname{Ker}|A| = \mathscr{F}$. Поскольку $\operatorname{Ran}|A|$ плотен в $\mathscr{F}$ и $\|\Phi_j\|$ равномерно ограничены, мы приходим к $\Phi_j \xrightarrow{\mathrm{s}} \Phi$.

Представляя

$$|A|(\Phi_j^* - \Phi^*) = A_j^* - A^* - (|A_j| - |A|)\Phi_j^*$$

и произвольно выбирая $f \in \mathscr{F}$, $h \in \mathscr{H}$, имеем

$$((\Phi_j^* - \Phi^*)h, |A|f) = ((A_j^* - A^*)h, f) + (\Phi_j^* h, (|A_j| - |A|)f) \to 0.$$

Последнее, с учетом $\overline{\operatorname{Ran}|A|} = \mathscr{F}$, легко ведет к $\Phi_j^* \xrightarrow{\mathrm{w}} \Phi^*$. □

Утверждение **1** приводится в [6] в качестве упражнения. Утверждение **2** найти в литературе нам не удалось.

Замечание 1. *Если в предположениях доказанной Леммы все фазы* Φ_j *и* Φ *являются унитарными, то выполнено* $\Phi_j^* \xrightarrow{\mathrm{s}} \Phi^*$, *поскольку для унитарных операторов сильная и слабая сходимости эквивалентны. Такой случай встречается в приложениях* [1].

• Для линеала $\mathscr{G}$, через $P_{\mathscr{G}}$ мы обозначаем проектор на $\overline{\mathscr{G}}$. Пусть A есть оператор из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{H}$, $A = \Phi|A|$ - его полярное разложение. Тогда выполнены соотношения $\Phi^*\Phi = P_{|A|\mathscr{F}}$ и $\Phi\Phi^* = P_{A\mathscr{F}}$.

Если $\mathscr{M} \subset \mathscr{F}$ - подпространство, то справедливо равенство $P_{A\mathscr{M}} = \Phi P_{|A|\mathscr{M}}\Phi^*$. Для проверки достаточно установить, что его правая часть обладает всеми характеристическими свойствами проектора на $\overline{A\mathscr{M}}$, которые суть $P_{A\mathscr{M}} = P_{A\mathscr{M}}^* = P_{A\mathscr{M}}^2$ и $\operatorname{Ran} P_{A\mathscr{M}} = \overline{A\mathscr{M}}$. Как пример такой проверки, см. ниже доказательство Леммы 4.

Пусть $A_j \to A$ – какая-либо из сходимостей. Мы говорим, что она *регулярна на подпространстве* $\mathscr{M} \subset \mathscr{F}$ (и пишем $A_j \xrightarrow{\cdot,\mathrm{r}} A$), если выполнено $P_{A_j\mathscr{M}} \xrightarrow{\mathrm{s}} P_{A\mathscr{M}}$ [2]. Случай $\mathscr{M} = \mathscr{F} = \mathscr{H}$, $A_j = j^{-1}\mathbb{I} \xrightarrow{\mathrm{u}} \mathbb{O} = A$, $P_{A_j\mathscr{F}} = \mathbb{I} \not\to \mathbb{O} = P_A$ дает тривиальный пример нерегулярной сходимости. Более содержательные примеры см. в [2].

Лемма 3. *Пусть* $A_j = \Phi_j|A_j|$ *и* $A = \Phi|A|$ *суть полярные разложения операторов* $A_j, A : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ *и* $A_j \overset{\mathrm{s}}{\to} A$, $\Phi_j^* \overset{\mathrm{s}}{\to} \Phi^*$. *Пусть* A *инъективен. Предположим, что* $A_j \overset{\mathrm{s,r}}{\to} A$ *выполняется на подпространстве* $\mathscr{M} \subset \mathscr{F}$. *Тогда имеет место сходимость* $|A_j| \overset{\mathrm{s,r}}{\to} |A|$ *на* $\mathscr{M}$.

Доказательство. Регулярность $A_j \overset{\mathrm{s}}{\to} A$ на $\mathscr{M}$ означает, что выполнено

$$P_{A_j\mathscr{M}} = P_{\Phi_j|A_j|\mathscr{M}} = \Phi_j P_{|A_j|\mathscr{M}} \Phi_j^* \overset{\mathrm{s}}{\to} P_{A\mathscr{M}} = P_{\Phi|A|\mathscr{M}} = \Phi P_{|A|\mathscr{M}} \Phi^*.$$

Таким образом, для произвольного $h \in \mathscr{H}$ имеем

$$\Phi_j P_{|A_j|\mathscr{M}} \Phi_j^* h - \Phi P_{|A|\mathscr{M}} \Phi^* h = o_j$$

с $\|o_j\| \to 0$. Умножая на Φ_j^* и учитывая $\Phi_j^* \Phi_j = P_{|A_j|\mathscr{M}}$, получаем

$$P_{|A_j|\mathscr{M}} \Phi_j^* h - \Phi_j^* \Phi P_{|A|\mathscr{M}} \Phi^* h = o_j'.$$

Из представлений

$$P_{|A_j|\mathscr{M}} \Phi_j^* h = P_{|A_j|\mathscr{M}} \Phi^* h + o_j'',$$
$$\Phi_j^* \Phi P_{|A|\mathscr{M}} \Phi^* h = \Phi^* \Phi P_{|A|\mathscr{M}} \Phi^* h + o_j''' = P_{|A|\mathscr{M}} \Phi^* h + o_j''',$$

видно, что $P_{|A_j|\mathscr{M}} \Phi^* h - P_{|A|\mathscr{M}} \Phi^* h = \widetilde{o}_j$, так что выполнено

$$\|(P_{|A_j|\mathscr{M}} - P_{|A|\mathscr{M}}) \Phi^* h\| \to 0, \qquad h \in \mathscr{H},$$

т.е. $P_{|A_j|\mathscr{M}} \overset{\mathrm{s}}{\to} P_{|A|\mathscr{M}}$ выполнено на образе $\Phi^* \mathscr{H} = \operatorname{Ran} \Phi^*$, который плотен в $\overline{\operatorname{Ran} \Phi^*} = \mathscr{F} \ominus \operatorname{Ker} \Phi = \mathscr{F} \ominus \operatorname{Ker} A = \mathscr{F}$ по инъективности A. Подводя итог, приходим к $P_{|A_j|\mathscr{M}} \overset{\mathrm{s}}{\to} P_{|A|\mathscr{M}}$ в $\mathscr{F}$. □

- Приведем результат вспомогательного характера.

Предложение 1. *Пусть* $A_j = \Phi_j|A_j|$ *и* $A = \Phi|A|$ *суть полярные разложения операторов* $A_j, A : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ *и имеют место сходимости* $A_j \overset{\mathrm{s}}{\to} A$, $\Phi_j^* \overset{\mathrm{s}}{\to} \Phi^*$. *Пусть* A *инъективен. Предположим, что* $A_j \overset{\mathrm{s,r}}{\to} A$ *на подпространстве* $\mathscr{M} \subset \mathscr{F}$. *Тогда имеет место сходимость* $|A_j| \overset{\mathrm{s,r}}{\to} |A|$ *на* $\mathscr{M}$.

Доказательство. Для $h = Wf \in W\mathscr{M}$, с учетом $PWf = Wf$ and $P_j W_j f = W_j f$, имеем

$$\begin{aligned}(P_j - P)h &= P_j W f - W f = P_j(W - W_j)f + P_j W_j f - W f \\ &= P_j(W - W_j)f + W_j f - W f = (P_j - \mathbb{I})(W - W_j)f \underset{\alpha\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

так как образ $W\mathscr{M}$ плотен в $\overline{W\mathscr{M}}$, приходим к нужному результату. □

Регуляризация

• Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{M} \subset \mathscr{H}$ – гильбертово пространство и его (замкнутое) подпространство: T – самосопряженный изоморфизм: $T^* = T$ и $\|Tf\| \geqslant c\,\|f\|$, $c > 0$. Пусть X и P суть проекторы в $\mathscr{H}$ на $\mathscr{M}$ и $T\mathscr{M}$ соответственно. Через $e : \mathscr{M} \to \mathscr{H}$ мы обозначаем (естественное) вложение $\mathscr{M} \hookrightarrow \mathscr{H}$, так что выполнено $e^* : \mathscr{H} \to \mathscr{M}$, $e^*e = \mathbb{I}_{\mathscr{M}}$ и $ee^* = X$.

Лемма 4. *Справедливо представление*

$$P \,=\, Te\left[e^*\,T^2e\right]^{-1}e^*T.$$

Доказательство. Проверим, что оператор $P' := Te\left[e^*\,T^2e\right]^{-1}e^*T$ обладает всеми характеристическими свойствами проектора на $T\mathscr{M}$.

Соотношения $P' = P'^*$ и $P'^{\,2} = P'$ легко следуют из вида правой части и показывают, что P' является ортогональным проектором в $\mathscr{H}$.

Для любого $y \in \mathscr{H}$ справедливо соотношение $P'y = Tm$ с $m = e\left[e^*\,T^2e\right]^{-1}e^*Ty \in \mathscr{M}$, что ведет к $\operatorname{Ran} P' \subset T\mathscr{M}$.

Для любого $m \in \mathscr{M}$ справедливо соотношение $m = Xm = ee^*m$. Представляя $Tm = (Te\left[e^*\,T^2e\right]^{-1}e^*T)\,Tee^*m = P'Tm$, мы видим, что выполнено $\operatorname{Ran} P' \supset T\mathscr{M}$. Следовательно, имеем $\operatorname{Ran} P' = T\mathscr{M}$.

Таким образом, P' проектирует на $T\mathscr{M}$, т.е. совпадает с P. □

• В лемме 4 заменим $\|Tf\| \geqslant c\,\|f\|$ на $(Tf, f) > 0$, $f \neq 0$ и обозначим $T_\varepsilon = T + \varepsilon\,\mathbb{I}$, $\varepsilon > 0$. При этом T_ε является изоморфизмом (регуляризацией T), но $T = \text{u-}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon$ может не быть изоморфизмом. Пусть P_ε проектирует на $T_\varepsilon\mathscr{M}$, так что выполнено

$$P_\varepsilon \,=\, T_\varepsilon\,e\left[e^*\,T_\varepsilon^2e\right]^{-1}e^*T_\varepsilon.$$

Пусть P проектирует на $\overline{T\mathscr{M}}$.

Теорема 1. *Сходимость $P_\varepsilon \overset{\text{s}}{\to} P$ имеет место при $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M} \subset \mathscr{H}$ есть подпространство, T – положительный оператор.

Рассмотрим подпространства $\mathscr{N} = \overline{T\mathscr{M}}$, $\mathscr{N}_\varepsilon = \overline{(T+\varepsilon I)\mathscr{M}} = (T + \varepsilon I)\mathscr{M}$ и проеторы P, P_ε на них. По Предложению 1 имеем

$$P_\varepsilon x \underset{\varepsilon\to 0}{\to} Px, \quad x \in \mathscr{N}.$$

Покажем, что сходимость имеет место и для $x \in \mathscr{H} \ominus \mathscr{N}$. Для этого достаточно доказать, что $P_\varepsilon x \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. что

$$\left(x, \frac{(T+\varepsilon\mathbb{I})y}{\|(T+\varepsilon\mathbb{I})y\|}\right) \to 0, \quad y \in \mathscr{M}$$

выполнено равномерно по y. Поскольку $(x, Ty) = 0$, это значит показать, что выполняется

$$\left(x, \frac{\varepsilon y}{\|(T+\varepsilon\mathbb{I})y\|}\right) \to 0, \quad y \in \mathscr{M}.$$

По положительности T имеем

$$\varepsilon(T+\varepsilon\mathbb{I})^{-1} = \int\limits_{[0,\|T\|]} \frac{\varepsilon}{\lambda+\varepsilon}\, dE_\lambda^T \overset{\text{s}}{\to} \mathbb{O},$$

что ведет к

$$\left(x, \frac{\varepsilon y}{\|(T+\varepsilon\mathbb{I})y\|}\right) = \left(x, \frac{\varepsilon(T+\varepsilon\mathbb{I})^{-1} z_\varepsilon}{\|z_\varepsilon\|}\right) = \left(\varepsilon(T+\varepsilon\mathbb{I})^{-1}x, \frac{z_\varepsilon}{\|z_\varepsilon\|}\right) \to 0\,.$$

Итак, получаем $P_\varepsilon \overset{\text{s}}{\to} P$ на $\overline{TM}$ и $P_\varepsilon \overset{\text{s}}{\to} \mathbb{O}$ на $\mathscr{H} \ominus \overline{TM}$, т.е. $P_\varepsilon \overset{\text{s}}{\to} P$ на $\mathscr{H}$. □

Авторы приносят благодарность проф. В. В. Капустину за полезные консультации.

Список литературы

1. M. I. Belishev, *On a stability of time-optimal version of the Boundary Control method.* `arXiv:` 2604.02957v1 [math-ph] 3 Apr 2026.
2. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об устойчивости треугольной факторизации ограниченных операторов.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ, **541** (2025), 7–15.
3. K. R. Davidson, *Nest algebras.* — Pitman Research Notes in Mathematics Series (1988), ISSN 0269-3674;191. ISBN 0-582-01993-1.
4. Yu. B. Farforovskaya, L. Nikolskaia, *An inequality for commutators of normal operators.* — Acta Sci. Math. (Szeged), **71** (2005), 751–765.
5. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* — Москва, Наука, 1967.
6. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики (том* 1*).* — Мир, Москва, 1977.

Belishev M. I., Vakulenko A. F. On convergence of modules and phases of operators and regularization of projecting onto image of operator.

Let $A_j, A : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ be bounded operators, $A_j = \Phi_j|A_j|, A = \Phi|A|$ be their polar decompositions. Let $A_j \to A$ hold in one of the operator topologies. We present several lemmas on the convergence of $|A_j| \to |A|$ and $\Phi_j \to \Phi$. We prove a theorem on the regularization of the projection onto the image of an operator in the case where the operator is not an isomorphism. These topics are related to questions arising in connection with the problem of triangular factorization of operators. We hope that our results are of some independent interest and will be useful for further study of the stability of triangular factorization.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru
E-mail: vak@pdmi.ras.ru

Поступило 13 июля 2026 г.