Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

М. И. Белишев

АКУСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ СО ЗНАКОНЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

§1. Введение

• Задача рассеяния наклонных плоских волн в слоисто-неоднородной среде в адекватных переменных имеет вид

$$pu_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad x > 0, \ \ \infty < t < \infty; \tag{1}$$

$$u = \delta(c_0 t - x) + r(c_0 t + x), \qquad x < 0; \tag{2}$$

где δ – дельта-функция Дирака (падающая волна), r – отраженная волна,

$$p = p(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{\sin^2 \alpha}{c_0^2(x)}, \qquad x \geqslant 0,$$

где $c_0 = \mathrm{const} > 0$ и $c(\cdot)$ есть скорость звука в однородном и неоднородном полупространствах $x < 0$ и $x > 0$ соответственно, α – угол падения в исходных переменных. В дальнейшем мы полагаем $c_0 = 1$. Особенность этой задачи в том, что *весовая функция* p может менять знак. Это отвечает возможному наличию в среде высокоскоростных слоев и полному внутреннему отражению от них. В результате уравнение (1) оказывается уравнением смешанного типа и постановка задачи требует уточнения [5]. С этой целью мы рассматриваем спектральную (частотную) версию

$$y'' + \omega^2 py = 0, \qquad x > 0, \ \ -\infty < \omega < \infty;$$

$$y = e^{i\omega x} + \tilde{r}(\omega)\, e^{-i\omega x}, \qquad x < 0;$$

и изучаем спектральную задачу I

$$y'' + \lambda py = 0, \qquad x > 0, \ \ \lambda \in \mathbb{C}; \tag{3}$$

$$y'(0) = 1; \tag{4}$$

с вещественным $p \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Чтобы исключить дополнительные тривиальные рассмотрения, мы принимаем условие: существует $\varepsilon_0 > 0$,

Ключевые слова: задача рассеяния для уравнения $pu_{tt} - u_{xx} = 0$ со знакопеременным p, спектральная версия, круги и функции Вейля.

такое, что $\int_0^\varepsilon |p(x)|\,dx > 0$ выполнено для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Более никаких ограничений на p, его знак и/или обращение в ноль при $x > 0$, как и поведение при $x \to \infty$, не накладывается. Решение y входит в класс $\{y, y' \in AC^{\mathrm{loc}}[0,\infty)\}$.

• Как показано в [2, 10, 11], существует единственное решение задачи (3), (4), удовлетворяющее условию $y'(\cdot,\lambda) \in L_2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Наш главный результат состоит в том, что мы даем независимое доказательство этого факта, использующее т.н. *вторые круги Вейля*, которые вводятся в ходе доказательства. Мы показываем, что поведение стандартных (первых) кругов Вейля уравнения (3) может быть весьма нерегулярным, в то время как вторые круги всегда сходятся к предельной точке.

Текущий интерес к задачам для уравнений смешанного типа (1) стимулируется приложениями: см., например, работу [13] и библиографию в ней.

§2. Задачи на конечном интервале

2.1. Вспомогательные результаты. Здесь выводятся соотношения, относящиеся к задачам на конечных интервалах $(0,l)$. Позже они используются при предельном переходе $l \to \infty$.

• Фиксируем $l > 0$, рассмотрим уравнение

$$y'' + \lambda p y = 0, \qquad 0 < x < l, \ \ \lambda \in \mathbb{C}; \tag{5}$$

и введем две фундаментальных системы его решений φ, ψ и ρ, χ, определяемых условиями:

$$\varphi(0,\lambda) = \psi'(0,\lambda) = \rho(l,\lambda) = \chi'(l,\lambda) = 1; \tag{6}$$

$$\varphi'(0,\lambda) = \psi(0,\lambda) = \rho'(l,\lambda) = \chi(l,\lambda) = 1; \tag{7}$$

с Вронскианами $W\{\varphi,\psi\} = W\{\rho,\chi\} = 1$. Как легко проверить, соотношения $\rho(x,\lambda) = \psi'(l,\lambda)\,\varphi(x,\lambda) - \varphi'(l,\lambda)\,\psi(x,\lambda)$ и $\chi(x,\lambda) = -\psi(l,\lambda)\,\varphi(x,\lambda) + \varphi(l,\lambda)\,\psi(x,\lambda)$ выполнены при $0 < x < l$; из них следует:

$$\rho(0,\lambda) = \psi'(l,\lambda), \qquad \rho'(0,\lambda) = -\varphi'(l,\lambda); \tag{8}$$

$$\chi(0,\lambda) = -\psi(l,\lambda), \qquad \chi'(0,\lambda) = \varphi(l,\lambda). \tag{9}$$

• Пусть функция y есть решение уравнения (5). Умножая уравнение на комплексно-сопряженное $\overline{y}$ и интегрируя по частям по $(0,l)$, легко получим

$$y\,\overline{y}'\big|_0^l = \|y'\|_l^2 - \overline{\lambda}\,(py, y)_l, \tag{10}$$

где $\|\cdot\|_l$ и $(u,v)_l$ суть норма и скалярное произведение в $L_2((0,l);\mathbb{C})$. Отделяя мнимую часть, имеем:

$$\operatorname{Im}\left[y\,\overline{y}'\big|_0^l\right] = \operatorname{Im}\lambda\,(py,y)_l. \tag{11}$$

Умножая (10) на λ и отделяя мнимую часть, получаем:

$$\operatorname{Im}\left[\lambda\,y\,\overline{y}'\big|_0^l\right] = \operatorname{Im}\lambda\,\|y'\|_l^2. \tag{12}$$

Применяя (11) и (12) к фундаментальным решениям, используя условия (6) и (7) и связи (8), (9), легко получить соотношения:

$$\operatorname{Im}[\varphi(l,\lambda)\,\overline{\varphi}'(l,\lambda)] = \operatorname{Im}\lambda\,(p\varphi,\varphi)_l\,; \tag{13}$$

$$\operatorname{Im}[\lambda\,\varphi(l,\lambda)\,\overline{\varphi}'(l,\lambda)] = \operatorname{Im}\lambda\,\|\varphi'(\cdot,\lambda)\|_l^2\,; \tag{14}$$

$$\operatorname{Im}[\psi(l,\lambda)\,\overline{\psi}'(l,\lambda)] = \operatorname{Im}\lambda\,(p\psi,\psi)_l\,; \tag{15}$$

$$\operatorname{Im}[\lambda\,\psi(l,\lambda)\,\overline{\psi}'(l,\lambda)] = \operatorname{Im}\lambda\,\|\psi'(\cdot,\lambda)\|_l^2\,; \tag{16}$$

$$\operatorname{Im}[\lambda\,\rho(0,\lambda)\,\overline{\rho}'(0,\lambda)] = -\operatorname{Im}\lambda\,\|\rho'(\cdot,\lambda)\|_l^2\,; \tag{17}$$

$$\operatorname{Im}[\lambda\,\chi(0,\lambda)\,\overline{\chi}'(0,\lambda)] = -\operatorname{Im}\lambda\,\|\chi'(\cdot,\lambda)\|_l^2. \tag{18}$$

Используя соотношения (8), (9) и переходя к решениям φ и ψ в левых частях (17), (18), получим:

$$\operatorname{Im}[\lambda\,\psi'(l,\lambda)\,\overline{\varphi}'(l,\lambda)] = \operatorname{Im}\lambda\,\|\rho'(\cdot,\lambda)\|_l^2\,; \tag{19}$$

$$\operatorname{Im}[\lambda\,\psi(0,\lambda)\,\overline{\varphi}(0,\lambda)] = \operatorname{Im}\lambda\,\|\chi'(\cdot,\lambda)\|_l^2\,. \tag{20}$$

Если использовать тот же прием, предварительно разделив (17), (18) на $|\rho'(0,\lambda)|^2$ и $|\chi'(0,\lambda)|^2$ соответственно, получим

$$\operatorname{Im}\left[\lambda\,\frac{\psi'(l,\lambda)}{\varphi'(l,\lambda)}\right] = \operatorname{Im}\lambda\,\left\|\frac{\rho'(\cdot,\lambda)}{\rho'(0,\lambda)}\right\|_l^2\,; \tag{21}$$

$$\operatorname{Im}\left[\lambda\,\frac{\psi(l,\lambda)}{\varphi(l,\lambda)}\right] = \operatorname{Im}\lambda\,\left\|\frac{\chi'(\cdot,\lambda)}{\chi'(0,\lambda)}\right\|_l^2\,. \tag{22}$$

- Для функций на $[0,l]$ обозначим

$$\langle f,g\rangle_l := \lambda f(l)\,\overline{g}'(l) - \overline{\lambda} f'(l)\,\overline{g}(l), \qquad [f,g]_l := f(l)\,\overline{g}'(l) - f'(l)\,\overline{g}(l).$$

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$\lambda\langle\psi,\varphi\rangle_l = 2i\,\lambda\,(\psi',\varphi')_l\ \mathrm{Im}\,\lambda - |\lambda|^2; \tag{23}$$

$$\langle\varphi,\varphi\rangle_l = 2i\,\|\varphi'\|_l^2\ \mathrm{Im}\,\lambda; \tag{24}$$

$$[\psi,\varphi]_l = 2i\ \mathrm{Im}\,\lambda\,(p\psi,\varphi)_l - 1; \tag{25}$$

$$[\varphi,\varphi]_l = 2i\ \mathrm{Im}\,\lambda\,(p\varphi,\varphi)_l. \tag{26}$$

Доказательство. Умножая $\psi'' + \lambda p\psi = 0$ на $\overline{\varphi}$ и интегрируя по частям по $[0,l]$, имеем $\psi'\overline{\varphi}\big|_{x=l} - 1 = (\psi',\varphi')_l - \lambda\,(p\psi,\varphi)_l$. Далее, умножая на $\overline{\lambda}$, получаем $\overline{\lambda}\,\psi'\overline{\varphi}\big|_{x=l} = \overline{\lambda} + \overline{\lambda}\,(\psi',\varphi')_l - |\lambda|^2(p\psi,\varphi)_l$.

Умножая $\varphi'' + \lambda p\varphi = 0$ на $\overline{\psi}$ и интегрируя по частям, находим $\varphi'\overline{\psi}\big|_{x=l} = (\varphi',\psi')_l - \lambda(p\varphi,\psi)$. Комплексное сопряжение и умножение на λ ведут к $\lambda\,\psi\overline{\varphi}'\big|_l = \lambda\,(\psi',\varphi')_l - |\lambda|^2\,(p\psi,\varphi)_l$.

Составляя разность $(\lambda\,\psi\overline{\varphi}' - \overline{\lambda}\,\psi'\overline{\varphi})\big|_{x=l} = (\lambda - \overline{\lambda})(\psi',\varphi')_l - \overline{\lambda}$ и умножая ее на λ, приходим к (23).

Поскольку $\langle\varphi,\varphi\rangle_l = (\lambda\,\varphi\overline{\varphi}' - \overline{\lambda}\,\varphi'\overline{\varphi})\big|_{x=l} = 2i\ \mathrm{Im}(\lambda\,\varphi\overline{\varphi}')\big|_{x=l}$, соотношение (14)ведет к (24).

Вполне аналогичные рассмотрения ведут к (25) и (26). □

2.2. Первые круги Вейля. • Решения φ и ψ удовлетворяют интегральным уравнениям при $x \geqslant 0$:

$$\varphi(x,\lambda) = 1 - \lambda\int_0^x (x-s)\,p(s)\,\varphi(s,\lambda)\,ds; \tag{27}$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -\lambda\int_0^x p(s)\,\varphi(s,\lambda)\,ds; \tag{28}$$

$$\psi(x,\lambda) = x - \lambda\int_0^x (x-s)\,p(s)\,\psi(s,\lambda)\,ds; \tag{29}$$

$$\psi'(x,\lambda) = 1 - \lambda\int_0^x p(s)\,\psi(s,\lambda)\,ds\,. \tag{30}$$

Стандартным анализом их итераций устанавливаются следующие факты [8]. Мы говорим, что комплексно-значная функция $f = f(z)$ вещественна, если $\mathrm{Im}\,z = 0$ влечет $\mathrm{Im}\,f(z) = 0$.

1. Для любого фиксированного $x \geqslant 0$, функции $\varphi(x,\lambda)$, $\varphi'(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$, $\psi'(x,\lambda)$ являются вещественными целыми функциями по $\lambda \in \mathbb{C}$ порядка $\leqslant \frac{1}{2}$, удовлетворяющими равенствам $\varphi(x,0) = \psi'(x,0) = 1$ и $\varphi'(x,0) = 0,\ \psi(x,0) = x$.

2. Как видно из (14) и (16), при каждом $x \geqslant 0$ нули функций $\varphi(x,\cdot)$, $\varphi'(x,\cdot)$, $\psi(x,\cdot)$, $\psi'(x,\cdot)$ лежат на вещественной оси $\mathbb{R}[\lambda]$. Это, в частности, ведет к представлению

$$\varphi(x,\lambda) = \prod_{\substack{j=-\infty;\\ j\neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j(x)}\right), \tag{31}$$

в котором вещественные $\lambda_j(x)$ $(j = \pm 1, \pm 2, \dots)$ суть корни $\varphi(x,\cdot)$, пронумерованные так, что выполнено $j\lambda_j > 0$. Аналогичные представления справедливы для φ', ψ и ψ'.

3, Обозначим $\mathbb{C}_\pm := \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$. Функция $f = f(z)$ принадлежит классу $\mathscr{R}$ (является $\mathscr{R}$-функцией) если она голоморфна в $\mathbb{C}_\pm$, удовлетворяет условию $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$, и выполнено $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ [7].

Как видно из соотношений (21) и (22), имеют место включения $\lambda \frac{\psi'(l,\lambda)}{\varphi'(l,\lambda)}, \lambda \frac{\psi(l,\lambda)}{\varphi(l,\lambda)} \in \mathscr{R}$. Как следствие, все нули функций $\varphi(l,\lambda)$ $\varphi'(l,\lambda)$, $\psi(l,\lambda)$ и $\psi'(l,\lambda)$ суть вещественные и простые (порядка 1), за возможным исключением $\lambda = 0$ для $\varphi'(l,\lambda)$. Последний имеет порядок 1 если $\int_0^l p(s)\,ds \neq 0$ и порядок 2 если $\int_0^l p(s)\,ds = 0$, что легко видно из (28) при $\lambda \to 0$.

Замечание 1. Простой анализ уравнений (27)–(30) показывает: если $p_n \underset{n\to\infty}{\to} p$ в $L_1(0,l)$, то соответствующие $\varphi_n(x,\lambda)$ $\varphi_n'(x,\lambda)$, $\psi_n(x,\lambda)$ и $\psi_n'(x,\lambda)$ сходятся к $\varphi(x,\lambda)$, $\varphi'(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ и $\psi'(x,\lambda)$ соответственно, равномерно по $x \in [0,l]$ и $\lambda \in E$, где $E \Subset \mathbb{C}$ есть произвольный компакт.

• Фиксируем $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Для каждого $l > 0$ введем семейство I_l^β задач вида

$$\begin{cases} y'' + \lambda p y = 0 \qquad x \in (0,l); \\ y'(0) = 1, \quad \beta y'(l) + y(l) = 0; \end{cases}, \tag{32}$$

где $\beta \in \mathbb{C}$ – параметр. Их решения суть

$$y := w_{l\beta}(x,\lambda) \;=\; -\,\mu(\lambda,l,\beta)\,\varphi(x,\lambda) + \psi(x,\lambda),$$

где функция μ определяется из второго граничного условия: (32):

$$\mu(\lambda,l,\beta) \;=\; \frac{\psi'(l,\lambda)\,\beta + \psi(l,\lambda)}{\varphi'(l,\lambda)\,\beta + \varphi(l,\lambda)} \;=:\; A_l^\lambda \beta\,. \tag{33}$$

Также примем $\mu(\lambda,l,\infty) := \frac{\psi'(l,\lambda)}{\varphi'(l,\lambda)}$.

• Следуя [8], сопоставим (33) дробно-линейное преобразование

$$A^\lambda_\beta : \mathbb{C}[\beta] \to \mathbb{C}[\mu], \qquad \mu := A^\lambda_l \beta.$$

Мы опускаем доказательства следующих свойств: они устанавливаются по той же схеме, что и в [1, 8] в случае $p \geqslant 0$.

Отображение A^λ_β невырождено, его определитель есть $\psi'\varphi - \psi\varphi' = W\{\varphi, \psi\} = 1$.

Если $(p\varphi, \varphi)_l \neq 0$, то $A^\lambda_l \mathbb{R}[\beta] =: \Gamma^1_l$ есть окружность $\mathbb{C}[\mu]$ радиуса $r_l = |[\varphi, \varphi]_l|^{-1} = (2 \operatorname{Im} \lambda\, |(p\varphi, \varphi)_l|)^{-1}$ с центром $\mu_0 = |[\varphi, \varphi]_l|^{-1}[\psi, \varphi]_l$ (см. (26)).

Если $(p\varphi, \varphi)_l > 0$, то область $A^\lambda_l \mathbb{C}[\beta] =: K^1_\lambda = \{\mu \mid |\mu - \mu_0| < r_l\}$ есть круг, $\partial K^1_l = \Gamma^1_l$. Этот круг – непосредственный аналог стандартных кругов Вейля.

Если $(p\varphi, \varphi)_l < 0$, то $K^1_l = \{\mu \mid |\mu - \mu_0| > r_l\}$ есть внешность круга, $\partial K^1_l = \Gamma^1_l$.

Если $(p\varphi, \varphi)_l = 0$, то Γ^1_l является прямой, а K^1_l – полуплоскостью, $\partial K^1_l = \Gamma^1_l$.

Допуская некоторую неточность в терминах, во всех трех перечисленных случаях мы называем Γ^1_l и K^1_l *первой окружностью* и *первым кругом Вейля* соответственно.

2.3. Вторые круги Вейля. • Параллельно мы рассматриваем семейство задач $\mathit{\Pi}^\zeta_l$ вида

$$\begin{cases} y'' + \lambda p y = 0 \qquad x \in (0, l); \\ y'(0) = \lambda, \quad \zeta y'(l) + \lambda\, y(l) = 0; \end{cases},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}_+$ фиксировано и $\zeta \in \mathbb{C}$ – параметр. Их решения суть

$$y := u_{l\zeta}(x, \lambda) = -\nu(\lambda, l, \zeta)\, \varphi(x, \lambda) + \lambda\, \psi(x, \lambda),$$

где

$$\nu(\lambda, l, \zeta) = \lambda \frac{\psi'(l, \lambda)\zeta + \lambda\psi(l, \lambda)}{\varphi'(l, \lambda)\zeta + \lambda\varphi(l, \lambda)} =: B^\lambda_l \zeta, \quad \nu(\lambda, l, \infty) := \lambda \frac{\psi'(l, \lambda)}{\varphi'(l, \lambda)}. \tag{34}$$

Функции μ и ν связаны соотношениями

$$\mu(\lambda, l, \beta) \;=\; \frac{1}{\lambda}\, \nu(\lambda, l, \lambda\beta); \tag{35}$$

$$\nu(\lambda, l, \zeta) \;=\; \lambda\, \mu(\lambda, l, \frac{\zeta}{\lambda}); \tag{36}$$

и $\nu(\lambda, l, \infty) = \lambda\,\mu(\lambda, l, \infty)$, что ведет к связи отображений:

$$A_l^\lambda \,=\, \Lambda^{-1} B_l^\lambda\, \Lambda; \qquad B_l^\lambda \,=\, \Lambda A_l^\lambda\, \Lambda^{-1},$$

(Λ есть умножение на λ) и решений:

$$w_{l\beta}(x,\lambda) \,=\, \frac{1}{\lambda}\, u_{l\ \lambda\beta}(x,\lambda); \qquad u_{l\zeta}(x,\lambda) \,=\, \lambda\, w_{l\ \frac{\zeta}{\lambda}}(x,\lambda);$$

при $0 \leqslant x \leqslant l$.

• Мы опускаем доказательство следующих свойств преобразования B_l^λ. Они устанавливаются по той же схеме, что свойства A_l^λ [1, 8].

Отображение $B_l^\lambda : \mathbb{C}[\zeta] \to \mathbb{C}[\nu]$ – дробно-линейное с определителем $\lambda^2\psi'\varphi - \lambda^2\psi\varphi' = \lambda^2 \neq 0$.

Кривая $B_l^\lambda \mathbb{R}[\zeta] =: \Gamma_l^2 \subset \mathbb{C}[\nu]$ есть окружность радиуса $R_l = |\lambda|^2 |\langle\varphi,\varphi\rangle_l^{-1}|$ с центром $\nu_0 = \lambda\,\langle\varphi,\varphi\rangle_l^{-1}\langle\psi,\varphi\rangle_l$, а $B_l^\lambda \mathbb{C}_+ =: K_l^2 = \{\nu \mid |\nu - \nu_0| < R_l\}$ – круг, $\Gamma_l^2 := \partial K_l^2$. Мы называем K_l^2 и Γ_l^2 *вторым кругом* и *второй окружностью Вейля.*

Лемма 2. *Имеет место вложение $K_l^2 \Subset \mathbb{C}_+$, т.е. второй круг Вейля содержится в открытой верхней полуплоскости вместе с замыканием.*

Доказательство. Используя (23) и (24), представим радиус и центр K_l^2 в виде:

$$R_l \,=\, \frac{|\lambda|^2}{2\,\operatorname{Im}\lambda\,\|\varphi'\|_l^2}\,, \qquad \nu_0 \,=\, \frac{(\lambda\,\psi',\varphi')_l}{\|\varphi'\|_l^2} \,+\, iR_l\,. \tag{37}$$

Для доказательства вложения достаточно проверить, что $\operatorname{Im}\nu_0 > R_l$. Обращаясь к (19), имеем

$$\operatorname{Im}(\lambda\psi',\varphi')_l = \int_0^l \operatorname{Im}[\lambda\psi'(s,\lambda)\overline{\varphi}'(s,\lambda)]\,ds = \operatorname{Im}\lambda \int_0^l ds \int_0^s |\rho'(\tau,\lambda)|^2\,d\tau > 0.$$

Значит, выполнено $\operatorname{Im}\nu_0 = \|\varphi'\|_l^{-2}\operatorname{Im}(\lambda\,\psi',\varphi')_l + R_l > R_l$, так что вложение действительно имеет место. □

• Как следует из последнего результата, при каждом $\lambda \in \mathbb{C}_+$ и $l > 0$, функция ν входит в класс $\mathscr{R}[\zeta]$ (является $\mathscr{R}$-функцией по ζ). В самом деле, она аналитична по ζ (см. (34)) и при каждом $\zeta \in \mathbb{C}_+$ выполнено $\nu(\lambda, l, \zeta) \in K_l^2 \subset \mathbb{C}_+[\nu]$, т.е. $\operatorname{Im}\nu(\lambda, l, \zeta) > 0$.

Рассматривая зависимость ν от λ, вспомним, что функции φ, φ', ψ, ψ' суть целые по λ. Значит, при каждом $\zeta \in \mathbb{C}$, функция ν мероморфна по $\lambda \in \mathbb{C}$.

Если фиксировать $\zeta \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$, то выполнено $\operatorname{Im} \nu(\lambda, l, \zeta) > 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Это означает, что $\nu \in \mathscr{R}[\lambda]$ при каждом $\zeta \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$.

При каждом $\beta \in [0, \infty]$ имеем $\lambda\mu \in \mathscr{R}[\lambda]$. В самом деле, согласно (35), $\lambda \in \mathbb{C}_+$ влечет $\operatorname{Im}[\lambda\, \mu(\lambda, l, \beta)] = \operatorname{Im} \nu(\lambda, l, \lambda\beta) > 0$ так как $\lambda\beta \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ при таком β. Также отметим, что из (21) и (22) следует $\lambda\mu\big|_{\zeta=0,\infty} \in \mathscr{R}[\lambda]$.

• Следующий результат доставляет необходимые и достаточные условия принадлежности точки второму кругу Вейля. Мы фиксируем $l > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, выбираем $\nu \in \mathbb{C}$ и рассматриваем решение $y_\nu(x, \lambda) = -\nu\, \varphi(x, \lambda) + \lambda\, \psi(x, \lambda)$.

Лемма 3. *Соотношение $\nu \in K_l^2$ выполнено в том и только в том случае, если справедливо неравенство $\|y'_\nu\|_l^2 < |\lambda|^2 \frac{\operatorname{Im} \nu}{\operatorname{Im} \lambda}$.*

Доказательство. Выведем уравнение окружности Γ_l^2 в ν-плоскости. Обращая отображение B_l^λ, имеем

$$\zeta = \left(B_l^\lambda\right)^{-1} \nu \,=\, \lambda\, \frac{\lambda\, \psi(l, \lambda) - \nu\, \varphi(l, \lambda)}{-\lambda\, \psi'(l, \lambda) + \nu\, \varphi'(l, \lambda)}\,. \tag{38}$$

Так как $\Gamma_l^2 = B_l^\lambda\, \mathbb{R}[\zeta]$, условие $\nu \in \Gamma_l^2$ эквивалентно $\zeta = \left(B_l^\lambda\right)^{-1} \nu \in \mathbb{R}$ или $\left(B_l^\lambda\right)^{-1} \nu - \overline{\left(B_l^\lambda\right)^{-1} \nu} = 0$. Согласно (38), это есть

$$\lambda\, \frac{\lambda\, \psi(l, \lambda) - \nu\, \varphi(l, \lambda)}{-\lambda\, \psi'(l, \lambda) + \nu\, \varphi'(l, \lambda)} - \overline{\lambda}\, \frac{\overline{\lambda}\, \overline{\psi}(l, \lambda) - \overline{\nu}\, \overline{\varphi}(l, \lambda)}{-\overline{\lambda}\, \overline{\psi}'(l, \lambda) + \overline{\nu}\, \overline{\varphi}'(l, \lambda)} = 0\,.$$

Приводя к общему знаменателю и вспоминая определение y_ν, придем к равенству $\langle y_\nu, y_\nu \rangle_l = 0$. Расписывая последнее подробно и приводя подобные члены, получаем

$$\langle \varphi, \varphi \rangle_l\, |\nu|^2 - i2\, \operatorname{Im}(\overline{\lambda}\, \langle \varphi, \psi \rangle_l\, \nu) + |\lambda|^2\, \langle \psi, \psi \rangle_l = 0\,.$$

В силу (14), для $\lambda \in \mathbb{C}_+$ выполнено $\langle \varphi, \varphi \rangle_l = i2 \operatorname{Im}(\lambda\, \varphi(l, \lambda)\, \overline{\varphi}'(l, \lambda)) \neq 0$, что ведет к (вещественному) соотношению

$$\frac{\langle y_\nu, y_\nu \rangle_l}{\langle \varphi, \varphi \rangle_l} = |\nu|^2 - \frac{\operatorname{Im}(\overline{\lambda}\, \langle \varphi, \psi \rangle_l\, \nu)}{\operatorname{Im}(\lambda\, \varphi\, \overline{\varphi}'\big|_l)} + |\lambda|^2\, \frac{\langle \psi, \psi \rangle_l}{\langle \varphi, \varphi \rangle_l} = 0\,. \tag{39}$$

Это есть искомое уравнение: точка $\nu \in \Gamma_l^2$ если и только если выполнено (39).

Из последнего заключаем, что $\nu \in K_l^2$ равносильно $\frac{\langle y_\nu, y_\nu\rangle_l}{\langle \varphi,\varphi\rangle_l} < 0$. Затем преобразуем $\langle y_\nu, y_\nu\rangle_l$, используя (12) и учитывая равенство $\operatorname{Im}(\lambda\, y_\nu(0,\lambda)\,\overline{y}'_n u(0,\lambda)) = -|\lambda|^2 \operatorname{Im}\nu$:

$$\begin{aligned}\langle y_\nu, y_\nu\rangle_l &= i2\operatorname{Im}(\lambda y_\nu(l,\lambda)\overline{y}'_\nu(l,\lambda))\\ &= i2\left(\operatorname{Im}\lambda\|y'_\nu\|_l^2 + \operatorname{Im}(\lambda y_\nu(0,\lambda)\overline{y}'_\nu(0,\lambda))\right) = i2\left(\operatorname{Im}\lambda\,\|y'_\nu\|_l^2 - |\lambda|^2\operatorname{Im}\nu\right).\end{aligned}$$

Согласно (24), условие $\nu \in K_l^2$ принимает вид

$$\frac{\langle y_\nu, y_\nu\rangle_l}{\langle \varphi,\varphi\rangle_l} = \frac{\operatorname{Im}\lambda\,\|y'_\nu\|_l^2 - |\lambda|^2\operatorname{Im}\nu}{\operatorname{Im}\lambda\,\|\varphi'\|_l^2} < 0\,,$$

что доказывает лемму. □

• Следующий факт является простым следствием предыдущих результатов и анализа интегральных уравнений (27)–(30).

Замечание 2. Пусть $E \Subset \mathbb{C}_+[\lambda]$ и $p_n \to p$ в $L_1(0,l)$. Тогда для центров и радиусов вторых кругов Вейля K_l^2 выполнено $\nu_0^n \to \nu_0$ и $R_l^n \to R_l$ равномерно по $\lambda \in E$. В этом смысле K_l^2 зависят от p непрерывно.

§3. Предельный переход

Пусть теперь $l \to \infty$. Изучим поведение и существование пределов функций μ, ν и решений w, u.

3.1. Гнездование. • Следующее свойство называют *гнездованием* вторых кругов и окружностей Вейля.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}_+$ фиксировано и выполнено $0 < l_1 < l_2 < \infty$. Тогда имеет место вложение $K_{l_1}^2 \ni K_{l_2}^2$. Множество $\nu = \nu(\lambda) := \bigcap\limits_{l>0} K_l^2$ есть точка в $\mathbb{C}_+$.*

Доказательство. 1. Наряду с $\Pi_{l_1}^\zeta$ и $\Pi_{l_2}^\zeta$, рассмотрим задачу $\Pi_{l_1\,l_2}^\zeta$

$$\begin{cases} y'' + \lambda p y = 0 \qquad x \in (l_1, l_2);\\ y'(l_1) = \lambda, \quad \zeta y'(l_2) + \lambda\, y(l_2) = 0; \end{cases},$$

(с тем же комплексным ζ). Используя решения $\tilde\varphi, \tilde\psi$, удовлетворяющие условиям $\tilde\varphi(l_1,\lambda) = \tilde\psi'(l_1,\lambda) = 1$ и $\tilde\varphi'(l_1,\lambda) = \tilde\psi(l_1,\lambda) = 0$, определим

$$u_{l_1\,l_2\,\zeta}(x,\lambda) = -\nu(\lambda,l_1,l_2,\zeta)\,\tilde\varphi(x,\lambda) + \lambda\,\psi(x,\lambda);$$
$$\nu(\lambda,l_1,l_2,\zeta) = \lambda\,\frac{\tilde\psi'(l_2,\lambda)\zeta + \lambda\,\tilde\psi(l_2,\lambda)}{\tilde\varphi'(l_2,\lambda)\zeta + \lambda\,\tilde\varphi(l_2,\lambda)} =: B^\lambda_{l_1 l_2}\zeta\,.$$

Легко проверить, что свойства функции $\nu(\lambda,l_1,l_2,\zeta)$ вполне аналогичны свойствам $\nu(\lambda,l,\zeta)$; в частности, отображение $B^\lambda_{l_1 l_2}$ переводит $\mathbb{C}_+[\zeta]$ в круг $K^2_{l_1 l_2} \subset \mathbb{C}_+[\nu]$. Связи между $\tilde\varphi$ и $\tilde\psi$ вполне аналогичные (8), (9), ведут к связям между ν-функциями всех трех задач:

$$\nu(\lambda,l_2,\zeta) = \lambda\,\frac{\psi'(l_1,\lambda)\nu(\lambda,l_1,l_2,\zeta) + \lambda\,\tilde\psi(l_1,\lambda)}{\varphi'(l_2,\lambda)\nu(\lambda,l_1,l_2,\zeta) + \lambda\,\varphi(l_1,\lambda)} =: B^\lambda_{l_1}\nu(\lambda,l_1,l_2,\zeta)\,,$$

что приводит к

$$B^\lambda_{l_2} = B^\lambda_{l_1}\,B^\lambda_{l_1 l_2}\,.$$

Из последнего следует $K^2_{l_2} = B^\lambda_{l_2}\mathbb{C}_+[\zeta] = B^\lambda_{l_1}B^\lambda_{l_1 l_2}\mathbb{C}_+[\zeta] = B^\lambda_{l_1}K^2_{l_1 l_2} \subset B^\lambda_{l_1}\mathbb{C}_+[\zeta] = K^2_{l_1}$, так что выполнено $K^2_{l_2} \subset K^2_{l_1}$.

Согласно (13), (14), если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ то с необходимостью $\varphi'(x,\lambda) \neq 0$, $x \geqslant 0$. Поэтому имеем $\|\varphi'\|^2_{l_2} > \|\varphi'\|^2_{l_1}$, что ведет к $R_{l_1} > R_{l_2}$ в силу (37). Следовательно, выполнено $K^2_{l_1} \ni K^2_{l_2}$.

2. Покажем, что $R_l \underset{l\to\infty}{\to} 0$. Для этого, следуя схеме [2], выведем соотношение $\|\varphi'\|^2_\infty := \int\limits_0^\infty |\varphi'(x,\lambda)|^2\,dx = \infty$.

Пусть $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Полагая $l = x$ в (14), имеем

$$|\lambda|\,|\varphi(x,\lambda)|\,|\varphi'(x,\lambda)| = |\lambda|\,\varphi(x,\lambda)\,\overline{\varphi}'(x,\lambda)| \geqslant |\operatorname{Im}(\lambda\,\varphi(x,\lambda)\,\overline{\varphi}'(x,\lambda))| =$$
$$= |\operatorname{Im}\lambda|\,\|\varphi'\|^2_x\,.$$

Из этого следует

$$|\varphi'(x,\lambda)|^2 \geqslant \left|\frac{\operatorname{Im}\lambda}{\lambda}\right|^2 \frac{\|\varphi'\|^4_x}{|\varphi(x,\lambda)|^2} \geqslant \frac{\gamma^2(c)}{|\varphi(x,\lambda)|^2}\,, \tag{40}$$

где $c = \text{const}$, $0 < c < x$; $\gamma(c) := \left|\frac{\operatorname{Im}\lambda}{\lambda}\right| \|\varphi'\|^2_c$.

Теперь установим представление для $|\varphi(x,\lambda)|^2$. Записывая $(|\varphi(x,\lambda)|^2)' = (\varphi(x,\lambda)\overline{\varphi}(x,\lambda))' = t(x)$, где $t(x) = \operatorname{Re}(\varphi(x,\lambda)\overline{\varphi}'(x,\lambda))$ и

интегрируя с учетом $\varphi(0,\lambda)=1$, получим

$$|\varphi(x,\lambda)|^2 \;=\; 1+2\int\limits_0^x t(s)\,ds \;\leqslant 1+2\int\limits_0^x |t(s)|\,ds. \tag{41}$$

Подставив (41) в (40), имеем

$$|\varphi'(x,\lambda)|^2 \;\geqslant\; \frac{\gamma^2(c)}{1+2\int\limits_0^x |t(s)|\,ds}\,. \tag{42}$$

С другой стороны, ввиду $|\varphi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)|\geqslant|\operatorname{Re}(\varphi(x,\lambda)\overline{\varphi}'(x,\lambda))|=|t(x)|$, выполнено $|\varphi'(x,\lambda)|^2\geqslant|\varphi(x,\lambda)|^{-2}|t(x)|^2$, и (41) ведет к

$$|\varphi'(x,\lambda)|^2 \;\geqslant\; \frac{|t(x)|^2}{1+2\int\limits_0^x |t(s)|\,ds}\,. \tag{43}$$

Прибавляя (42) к (43), имеем

$$\begin{aligned} 2|\varphi'(x,\lambda)|^2 &\geqslant \frac{\gamma^2(c)+|t(x)|^2}{1+2\int\limits_0^x |t(s)|\,ds} \geqslant \gamma(c)\frac{2|t(x)|}{1+2\int\limits_0^x |t(s)|\,ds} \\ &= \gamma(c)\left(1+2\int\limits_0^x |t(s)|\,ds\right)'\,, \quad x>c\,. \end{aligned}$$

Интегрирование дает

$$\int\limits_c^l |\varphi'(x,\lambda)|^2\,dx \;\geqslant\; \frac{\gamma(c)}{2}\,\ln\left(\frac{1+2\int\limits_c^l |t(s)|\,ds}{\theta(s)}\right), \tag{44}$$

где $\theta(c)=1+2\int\limits_0^c |t(s)|\,ds$.

Покажем, что предположение $\|\varphi'\|_\infty^2<\infty$ ведет к противоречию. Принимая его, в силу (42) нам придется заключить, что $\int\limits_0^x |t(s)|\,ds\to\infty$ при $x\to\infty$. Но в этом случае выполнено $\int\limits_c^l |\varphi'(x,\lambda)|^2\,dx\to\infty$ в силу (44), т.е. $\|\varphi'\|_\infty^2=\infty$, что ведет к противоречию.

Таким образом, $\|\varphi'\|_l^2 \underset{l\to\infty}{\to} \infty$ выполнено и влечет $R_l \underset{l\to\infty}{\to} 0$. Теорема доказана $\square$

Добавим, что (42) и (44) ведут к оценке

$$\int_c^l |\varphi'(x,\lambda)|^2\,dx \geqslant \frac{\gamma(c)}{2}\,\ln\left(2\,\frac{\gamma(c)}{\theta(c)}\,(l-c)+1\right),$$

которая позволяет оценить скорость убывания $R_l \to 0$ при $l \to \infty$.

Предложение 1. *Простой анализ показывает, что $R_l = R_l(\lambda)$ стремится к 0 равномерно по $\lambda \in E$ на любом компакте $E \Subset \mathbb{C}_+$.*

• Если $p \geqslant 0$, то первые круги Вейля K_l^1 также обладают свойством гнездования: они стягиваются либо к предельному кругу, либо к предельной точке в $\mathbb{C}_+[\mu]$ [8]. В общем случае, если p меняет знак, поведение K_l^1 может быть весьма нерегулярным. Приведем пример.

Возьмем $\lambda = i$. Как видно из (31), выполнено $|\varphi(x,i)| > 1$, а радиус круга K_l^1 есть $r_l = (2|\varkappa(l)|)^{-1}$, где $\varkappa(l) = \int_0^l p(s)\,|\varphi(s,i)|^2\,ds$. Выберем последовательность $l_1, l_2, \cdots \to \infty$ и подберем $p\big|_{(0,l_1)} = p_1 = \mathrm{const} > 0$ так, чтобы выполнялось $\varkappa(l_1) > 0$, затем $p\big|_{(l_1,l_2)} = p_2 = \mathrm{const} < 0$ так, чтобы $\varkappa(l_1) < 0$ (что возможно благодаря $|\varphi(x,i)| > 1$), и так далее, подбирая p_k так, чтобы при переход от l_{k-1} к l_k приводил к перемене знака $\varkappa(l)$. По построению, для таких $p:\ p\big|_{l_{k-1},l_k} = p_k$ области K_{2k-1}^1 окажутся кругами, а K_{2k}^1 внешностями кругов в μ-плоскости, так что никакой сходимости первых кругов не будет. Надлежащим выбором p их можно заставить пульсировать, разворачиваться в полуплоскость и т.п..

3.2. Функции $\mu = \mu(\lambda)$ и $\nu = \nu(\lambda)$. • Для функций (33) и (34) ассоциированных с задачами I_l^β и $\mathit{\Pi}_l^\zeta$, результат теоремы 1 означает, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ существует $\lim\limits_{l\to\infty} \nu(\lambda,l,\zeta) =: \nu(\lambda)$ (равномерно по $\zeta \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$) и $\lim\limits_{l\to\infty} \mu(\lambda,l,\beta) =: \mu(\lambda)$ (равномерно по $\beta \in [0,\infty]$), причем предельные функции связаны соотношением $\nu(\lambda) = \lambda\,\mu(\lambda)$ (см. (35), (36)). Равномерность по λ, отмеченная в Замечании 2, позволяет заключить, что $\nu(\lambda,l,\zeta) \to \nu(\lambda)$ равномерно по $\zeta \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ и $\lambda \in E \Subset \mathbb{C}_+$. Кроме того, $\mu(\lambda,l,\beta) \to \mu(\lambda) = \frac{\nu(\lambda)}{\lambda}$ равномерно по $\beta \in [0,\infty]$ и $\lambda \in E$.

Лемма 4. *Функция ν входит в класс $\mathscr{R}$.*

Доказательство. Так как функция ν есть предел $\mathscr{R}$-функций, для нее выполнено $\operatorname{Im}\nu(\lambda) \geqslant 0$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, и остается установить ее аналитичность в $\mathbb{C}_+[\lambda]$.

Сходимость аналитических функций $\nu(l,\lambda,\zeta) \to \nu(\lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathbb{C}_+$ имеет место и, по теореме Видали, достаточно проверить, что семейство $\{\nu(\lambda,l,\zeta)\}$ равномерно ограничено на любом компакте $E \Subset \mathbb{C}_+[\lambda]$.

Фиксируем l_0, выберем произвольно компакт E, и рассмотрим множество $G_{l_0} = \cup_{\lambda\in E} K^2_{l_0}(\lambda) \subset \mathbb{C}_+[\nu]$. Легко видеть, что оно ограничено равномерно по $\beta \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$. Когда l увеличивается, множества G_l, как и круги K^2_l, образуют гнездящуюся последовательность: $G_{l_1} \supset G_{l_2}$ при $l_1 < l_2$. Поскольку $\nu(\lambda,l,\zeta) \in G_{l_0}$, семейство $\{\nu(\lambda,L,\zeta)\}_{l>l_0}$ равномерно ограничено на E. □

Как следствие, для функции $\mu = \mu(\lambda)$ имеем $\lambda\,\mu \in \mathscr{R}$.

• Любая $\mathscr{R}$-функция имеет верхние предельные значения на вещественной оси из класса Шварца $\mathscr{S}'$ умеренно растущих распределений [12]. Таким образом, если $\lambda = \sigma + i\tau$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, то для каждого τ выполнено $\nu(\sigma+i\tau)$, $\mu(\sigma+i\tau) \in \mathscr{S}'[\sigma]$ и существуют пределы $\nu(\sigma+i0)$, $\mu(\sigma+i0)$ того же класса (предельный переход в $\mathscr{S}'$).

• Несложный анализ доказательства теоремы 1 с учетом замечаний 1 и 2 позволяет установить следующий факт, который мы приводим без доказательства.

Замечание 3. Пусть $p_n \in L_1^{\mathrm{loc}}$ и $p_n\big|_{(0,l)} \to p\big|_{(0,l)}$ при $n \to \infty$ в $L_1(0,l)$ выполнено при всех $l > 0$. Тогда для соответствующих функций ν_n, ν и μ_n, μ выполнено $\nu_n(\lambda) \to \nu(\lambda)$ и $\mu_n(\lambda) \to \mu(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in E \Subset \mathbb{C}_+$.

3.3. Решение w. • Мы называем функцию μ функцией Вейля задачи I и вводим ее решение $w(x,\lambda) := -\mu(\lambda)\,\varphi(x,\lambda) + \psi(x,\lambda)$, $x \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Ключевой результат нашей работы состоит в следующем.

Теорема 2. *Решение w есть единственное решение задачи I, удовлетворяющее условию $w'(\cdot,\lambda) \in L_2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$ при $\lambda \in \mathbb{C}_+$.*

Доказательство. Пусть $u(x,\lambda) := -\nu(\lambda)\,\varphi(x,\lambda) + \lambda\,\psi(x,\lambda) = \lambda\,w(x,\lambda)$. Поскольку предельная точка $\nu(\lambda)$ лежит во всех кругах K^2_l, лемма 3

дает оценку $\|u'\|_l^2 < |\lambda|^2 \frac{\operatorname{Im}\nu}{\operatorname{Im}\lambda}$ для всех $l > 0$. Поэтому имеем

$$\|w'\|_\infty^2 \leqslant \frac{\operatorname{Im}\nu}{\operatorname{Im}\lambda}. \tag{45}$$

В то же время, как показано в части 2 доказательства теоремы 1, выполняются соотношения $\|\varphi'\|_\infty^2 = \int\limits_0^\infty |\varphi'(x,\lambda)|^2\,dx = \infty$. Ввиду $W[u,\varphi] = \lambda \neq 0$ решения u и w линейно независимы. Поэтому w есть единственное решение задачи I, имеющее производную $w'(\cdot,\lambda) \in L_2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$. $\square$

• Применяя соображения, вполне аналогичные используемым в предыдущих замечаниях, можно показать, что решение w задачи I непрерывно зависит от ее данных в следующем смысле.

Замечание 4. Пусть $w_n(\cdot,\lambda)$ есть решение задачи I, отвечающее $p_n \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и пусть $p_n\big|_{(0,l)} \to p\big|_{(0,l)}$ в $L_1(0,l)$ при каждом $l > 0$. Тогда $w_n(x,\lambda) \to w(x,\lambda)$ равномерно по $x \in [0,l]$ и $\lambda \in E \Subset \mathbb{C}_+$.

• Следующий результат описывает поведение $w(\cdot,\lambda)$ как функции от λ.

Лемма 5. *При каждом $x \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\lambda > 0$, функции $w(x,\lambda)$ и $w'(x,\lambda)$ удовлетворяют в $\mathbb{C}_+[\lambda]$ неравенствам*

$$|w(x,\lambda)| \leqslant M\,(1+|\lambda|^2)(\operatorname{Im}\lambda)^{-2}; \tag{46}$$

$$|w'(x,\lambda)| \leqslant N\,(1+|\lambda|^2)\left(1+|\lambda|^{\frac12}+|\lambda|\right)(\operatorname{Im}\lambda)^{-2}; \tag{47}$$

с M и N, зависящими от x.

Доказательство. Используя (45) в равенстве

$$w(x,\lambda) = w(0,\lambda) + \int\limits_0^x w'(s,\lambda)\,ds = -\mu(\lambda) + \int\limits_0^x w'(s,\lambda)\,ds,$$

имеем

$$|w(x,\lambda)| \leqslant |\mu(\lambda)| + \left|\int\limits_0^x w'(s,\lambda)\,ds\right| \leqslant |\mu(\lambda)| + \sqrt{x}\,\|w'\|_\infty$$

$$\leqslant \left|\frac{\nu(\lambda)}{\lambda}\right| + \sqrt{x}\,\left(\frac{\operatorname{Im}\nu(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}\right)^{\frac12}. \tag{48}$$

В то же время, как $\mathscr{R}$-функция, функция ν удовлетворяет стандартной оценке $|\nu| \leqslant C\,(1+|\lambda|^2)(\operatorname{Im}\lambda)^{-1}$ при $\lambda \in \mathbb{C}_+$: см. [12]. Комбинируя последнюю с (48), имеем

$$|w(x,\lambda)| \leqslant \frac{1+|\lambda|^2}{(\operatorname{Im}\lambda)^2} + \sqrt{x}\,\frac{(1+|\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{Im}\lambda}$$
$$\leqslant \frac{1+|\lambda|^2}{(\operatorname{Im}\lambda)^2}\left[1+\sqrt{x}\,\frac{\operatorname{Im}\lambda}{(1+|\lambda|^2)^{\frac{1}{22}}}\right] \leqslant M(x)\,\frac{1+|\lambda|^2}{(\operatorname{Im}\lambda)^2},$$

так что (46) выполняется.

Оценка (47) легко следует из использованной выше оценки для ν, (46) и неравенств

$$|w'(x,\lambda)| = \left|w'(0,\lambda) + \int_0^x w''(s,\lambda)\,ds\right| = \left|1-\lambda\int_0^x p(s)\,w(s,\lambda)\,ds\right|$$
$$= \left|1-\lambda\left[w(x,\lambda)\int_0^x p(s)\,ds - \int_0^x w'(x,s)\left(\int_0^s p(\xi)\,d\xi\right)ds\right]\right|$$
$$\leqslant 1+|\lambda|\left(|w(x,\lambda)|\int_0^x |p(s)|\,ds + \|w'\|_x\left\|\int_0^x p(\xi)\,d\xi\right\|_x\right)$$
$$\leqslant N(x)\,(1+|\lambda|\,|w(x,\lambda)| + \|w'\|_\infty)$$
$$\overset{\text{см. (45)}}{\leqslant} N(x)\left[1+|\lambda|\,|w(x,\lambda)| + \left(\frac{\nu(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\leqslant N(x)\left[1+|\lambda|\,\frac{1+|\lambda|^2}{(\operatorname{Im}\lambda)^2} + \frac{(1+|\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}}{(\operatorname{Im}\lambda)^{\frac{3}{2}}}\right]$$
$$= N(x)\,\frac{1+|\lambda|^2}{(\operatorname{Im}\lambda)^2}\left[\frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{1+|\lambda|^2} + |\lambda| + \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^{\frac{1}{2}}}{(1+|\lambda|^2)^{3\overline{2}}}\right]$$
$$= N(x)\,\frac{1+|\lambda|^2}{(\operatorname{Im}\lambda)^2}\left[1+|\lambda|+|\lambda|^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad \square$$

• Решение $w = -\mu\,\varphi + \psi$, как функция от $\lambda = \sigma + i\tau$, $\tau > 0$, имеет верхние граничные значения $w(\cdot, \sigma + i0)$ на $\mathbb{R}[\sigma]$. В самом деле, μ обладает такими значениями, а φ и ψ суть целые функции. Поэтому,

при каждом $x \geqslant 0$, можно понимать $w(x, \sigma + i0)$ по крайней мере как распределение класса $\mathscr{D}'[\sigma]$.

Итак, мы приходим к следующему результату о постановке и разрешимости задачи I:

Теорема 3. *При каждом $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ задача I имеет единственное решение $w(x,\lambda) = -\mu(\lambda)\varphi(x,\lambda) + \psi(x,\lambda)$, которое удовлетворяет $w'(\cdot,\lambda) \in L_2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и понимается как $w(\cdot, \sigma + i0)$ при $\lambda = \sigma \in \mathbb{R}$. При каждом $x \geqslant 0$ значение $w(x,\cdot)$ есть распределение класса $\mathscr{D}'[\sigma]$.*

Как нетрудно проверить, такое обобщение на знаконеопределенные весовые функции $p \in L_1^{\mathrm{loc}}(0,\infty)$ осмысленно и резонно в свете "принципа соответствия: если $p(x) \underset{x\to\infty}{\to} p(\infty)$ достаточно быстро, то w совпадает (с точностью до постоянного множителя) с решением Йоста, определяемым асимптотикой

$$y(x,\lambda) \underset{x\to\infty}{\sim} \begin{cases} e^{i\sqrt{\lambda}\sqrt{p(\infty)}\,x}, & p(\infty) \geqslant 0; \\ e^{-\sqrt{|\lambda|}\sqrt{|p(\infty)|}\,x}, & p(\infty) < 0; \end{cases}, \qquad \operatorname{Im}\lambda,\ \operatorname{Im}\sqrt{\lambda} \geqslant 0$$

[9, 4, 3]. Также можно показать, что в адекватном смысле замечаний 1–4 решение w зависит от p непрерывно.

- Теперь имеется возможность поставить задачу рассеяния:

$$\begin{aligned} &y'' + \omega^2 p y = 0, && x > 0,\ \ \omega \in \mathbb{C}; \\ &y = e^{i\omega x} + \tilde{r}(\omega)\, e^{-i\omega x}, && x < 0; \end{aligned}$$

и дать ее обоснованное решение, полагая $y\big|_{x\geqslant 0} = s\,w$: стандартные условия сшивания при $x = 0$ ведут к

$$y(x,\omega) = \begin{cases} \tilde{s}(\omega)\, w(x,\omega^2), & x \geqslant 0\,; \\ e^{i\omega x} + \tilde{r}(\omega)\, e^{-i\omega x}, & x < 0\,; \end{cases}, \qquad -\infty < \omega < \infty\,,$$

где

$$\tilde{r}(\omega) = \frac{i\omega\,\mu(\omega^2) + 1}{i\omega\,\mu(\omega^2) - 1}, \quad \tilde{s} = \frac{2i\omega}{1 - i\omega\,\mu(\omega^2)}\,.$$

Соответственно, задача во временной области

$$\begin{aligned} &p u_{tt} - u_{xx} = 0, && x > 0,\ \ \infty < t < \infty; \\ &u = \delta(t - x) + r(t + x), && x < 0\,. \end{aligned}$$

приобретает решение:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\,t\,\omega}\,y(x,\omega)\,d\omega,\quad -\infty<t<\infty,\ \ x\in\mathbb{R},$$

где правая часть понимается как преобразование Фурье распределения $\mathscr{D}'[\omega]$.

• Имея корректную постановку прямой задачи, можно поставить соответствующую обратную: по заданному $r\big|_{\mathbb{R}}$ определить $p\big|_{\mathbb{R}_+}$. В такой общей постановке задача еще не решена. Известные частичные результаты см. в [4, 3, 6].

Список литературы

1. Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, Москва, (1968).
2. F. V. Atkinson, W. N. Everitt, K. S. Ong, *On the m-coefficient of Weyl for a differential equation with an indefinite weight function.* — Proceedings of the London Mathematical Society, **29**, No. 2 (1974), 368–384.
3. М. И. Белишев, *Некоторые сингулярные обратные задачи теории распространения волн*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Ленинград (1978).
4. М. И. Белишев, *Обратная задача рассеяния плоских волн для одного класса слоистых сред.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **78**, No 9 (1978), 30–54.
5. М. И. Белишев, *Единая постановка задачи об отражении плоской волны от слоисто-неоднородного полупространства с произвольным профилем коэффициента преломления.* — Акустический Журнал **29**, вып. 5 (1983), 704–706.
6. М. И. Белишев, *Обратная спектральная индефинитная задача для уравнения* $y"+\lambda p(x)y=0$ *на промежутке.* — Функциональный анализ и его приложения **21**, No 2 (1987), 68–69.
7. И. С. Кац, М. Г. Крейн, *R-функции. Дополнение I в кн. Ф.Аткинсон "Дискретные и непрерывные граничные задачи".* Мир, Москва (1968).
8. И. С. Кац, М. Г. Крейн, *О спектральных функциях струны. Дополнение II в кн. Ф.Аткинсон "Дискретные и непрерывные граничные задачи".* Мир, Москва (1968).
9. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы.* Наука, Главная Редакция Физико-Математической Литературы, Москва (1969).
10. A. Pleijel, *Some remarks about limit poins and limil circle theory.* — Arkiv för Matematik, **7**, No.6 (1969), 543–550.
11. A.Pleijel, *Complementary remarks about limit poins and limil circle theory.* — Arkiv för Matematik, **8**, No.1 (1970), 46–47.
12. В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике.* Москва, Наука (1979).

13. Г. Л. Заворохин, А. А. Мацковский, *Об аналитических свойствах решений дисперсионного уравнения среды Эйри.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **533** (2024), 101–113.

Belishev M. I. An acoustic scattering problem with a sign-indefinite weight function.

The acoustic problem of the oblique plane wave scattering in the inhomogeneous layered medium, in the relevant variables, is of the form

$$\begin{aligned} &pu_{tt} - u_{xx} = 0, && x > 0,\ \ \infty < t < \infty; \\ &u = \delta(c_0 t - x) + r(c_0 t + x), && x < 0; \end{aligned}$$

$p = p(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{\sin^2\alpha}{c_0^2(x)},\ \ x \geqslant 0$, where $c_0 = \mathrm{const} > 0$ and $c(\cdot)$ is the sound speed in the homogeneous and inhomogeneous half-spaces $x < 0$ and $x > 0$ respectively, and α is the incident angle in the original variables. The *waight function* $p \in L_1^{\mathrm{loc}}(0, \infty)$ may change sign, what corresponds to the total interior reflrction from the high-velocity layers in $x > 0$. We povide a rigorows setup of this problem, which requires no restrictions on p, its sign and/or vanishing for $x > 0$, and behavior as $x \to \infty$.

С. Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова Российской академии наук,
наб. Фонтанки 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 26 января 2026 г.