Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

Н. И. Андронов

ПОДЧИНЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Введение

1. Исследуется одномерный оператор Шредингера

$$H\psi(x) = -\psi''(x) + v(x)\psi(x) \tag{1}$$

на положительной полуоси с потенциалом

$$v(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda_\ell \delta(x - x_\ell), \tag{2}$$

где $\{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{R}_+$ – такой набор занумерованных по возрастанию точек, что

$$x_0 \geqslant d > 0, \qquad x_{\ell+1} - x_\ell \geqslant d > 0 \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

и все $\lambda_\ell > 0$. Первое из условий (3) означает, что барьеры отделены от левого конца полуоси; оно используется при построении спектральной функции (п. 3.2). Второе условие обеспечивает самосопряженность оператора [1]. В нуле ставится условие общего вида

$$\cos(\alpha)\psi(0) + \sin(\alpha)\psi'(0) = 0, \quad \alpha \in [0, \pi). \tag{4}$$

Ключевые слова: подчиненные решения, оператор Шредингера, бесконечное число потенциальных барьеров, абсолютно непрерывный спектр.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект No. 22-11-00092-П), https://rscf.ru/project/22-11-00092/.

Оператор (1) самосопряжен на области определения [1]

$$\mathcal{D} = \Big\{\psi \in W_2^1(0,\infty) : \cos(\alpha)\psi(0) + \sin(\alpha)\psi'(0) = 0,$$
$$\psi\big|_{(x_\ell, x_{\ell+1})} \in W_2^2(x_\ell, x_{\ell+1}) \ \ \forall \ell \geqslant -1,$$
$$\sum_{\ell \geqslant -1} \big\|\psi''\big\|^2_{L_2(x_\ell, x_{\ell+1})} < \infty,$$
$$\psi'(x_\ell + 0) - \psi'(x_\ell - 0) = \lambda_\ell \psi(x_\ell) \ \ \forall \ell \in \mathbb{Z}_+\Big\} \quad (5)$$

(здесь и далее $x_{-1} = 0$, так что первый интервал есть $(0, x_0)$) и действует на $(x_\ell, x_{\ell+1})$ как $-\frac{d^2}{dx^2}$. Наш интерес к операторам с δ-взаимодействиями связан с работой [2], о чем мы подробнее поговорим в п. 3.

2. Теория подчиненных решений. Потенциал $v \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$ будем называть *регулярным*; для оператора Шредингера с регулярным потенциалом в [4] разработана теория подчиненных решений. Она позволяет изучать спектральные свойства оператора по поведению решений соответствующего уравнения Шредингера на бесконечности. В этой работе мы распространяем теорию подчиненных решений на операторы (1) с потенциалом (2), действуя по тому же плану, что и авторы [4]. Отметим, что для операторов с δ-взаимодействиями на полуоси ранее были получены результаты с помощью теории подчиненных решений [5, 6]; спектр операторов с сингулярными потенциалами изучался также в работах Пожарского [7, 8], но строгого обоснования теории подчиненных решений для сингулярных потенциалов в литературе, по-видимому, нет.

Напомним основные конструкции спектральной теории и теории подчиненных решений. Для одномерных самосопряженных операторов Шредингера можно ввести скалярную спектральную меру μ и разложить её на абсолютно непрерывную $\mu_{a.c}$, сингулярно непрерывную $\mu_{s.c.}$ и точечную μ_p компоненты (см. [9, глава II, §1]). Подмножество $S \subset \mathbb{R}$ называется *минимальным носителем* меры τ на $\mathbb{R}$, если выполнены условия:
(i) $\tau(\mathbb{R} \setminus S) = 0$;
(ii) если $S_1 \subset S$ и $\tau(S_1) = 0$, то $dx(S_1) = 0$, где dx – мера Лебега.

Множество всех минимальных носителей данной меры τ образует класс эквивалентности по отношению

$$\mathcal{M}' \sim \mathcal{M} \iff \tau(\mathcal{M}' \triangle \mathcal{M}) = dx(\mathcal{M}' \triangle \mathcal{M}) = 0, \quad (6)$$

где $A \triangle B = A \cup B \setminus A \cap B$ – симметрическая разность.

Решение ψ_s уравнения

$$H\psi(x) = E\psi(x), \quad x > 0, \tag{7}$$

называется *подчиненным*, если для любого другого решения ψ, линейно независимого с ψ_s, выполнено

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int\limits_0^x |\psi_s(t)|^2 dt}{\int\limits_0^x |\psi(t)|^2 dt} = 0.$$

Ниже, говоря о граничном условии, будем подразумевать условие (4). Для регулярных потенциалов в [4] доказана

Теорема 1. *Множества $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}'_{a.c.}$, $\mathcal{M}'_{s.}$, $\mathcal{M}'_{s.c.}$ и $\mathcal{M}'_{p.}$, определенные ниже, являются минимальными носителями мер μ, $\mu_{a.c.}$, $\mu_{s.}$, $\mu_{s.c.}$ и $\mu_{p.}$ оператора* (1) *с граничным условием* (4):

(i) $\mathcal{M}' = \mathbb{R} \setminus \{E \in \mathbb{R} : \exists\, \psi_s,\ \psi_s$ *не удовлетворяет граничному условию*$\}$;

(ii) $\mathcal{M}'_{a.c.} = \{E \in \mathbb{R} : \nexists\, \psi_s\}$;

(iii) $\mathcal{M}'_{s.} = \{E \in \mathbb{R} : \exists\, \psi_s,\ \psi_s$ *удовлетворяет граничному условию*$\}$;

(iv) $\mathcal{M}'_{s.c.} = \{E \in \mathbb{R} :,\ \exists\, \psi_s,\ \psi_s$ *удовлетворяет граничному условию*, $\psi_s \notin L_2(0, \infty)\}$;

(v) $\mathcal{M}'_{p.} = \{E \in \mathbb{R} : \exists\, \psi_s,\ \psi_s$ *удовлетворяет граничному условию*, $\psi_s \in L_2(0, \infty)\}$.

В этой работе мы доказываем теорему 1 для оператора (1) с потенциалом (2) и применяем её к исследованию спектра оператора из [2], подробно обсуждаемого в §3.

Для обоснования применимости результатов Гилберта и Пирсона [4] в нашем случае мы проделываем следующие шаги. В §2 воспроизводится схема доказательства [4] и отмечаются места, требующие дополнительной проверки при переходе к потенциалу (2). В §3 по плану [9] коротко описывается построение спектральной функции и функции Вейля; чувствительные к потенциалу места снова выделяются. Эти места проверяются в §4, чем завершается доказательство теоремы 1 для сингулярных потенциалов.

3. Спектр оператора с разбегающимися барьерами.

В работе Пирсона [3] исследовали оператор Шредингера на полуоси с условием Дирихле в нуле и с потенциалом

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} W(x - a_i), \quad a_i = (i-1)a + \sum_{j=1}^{i} N_j,$$

где $a > 0$, $\{N_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонно возрастающая последовательность, а $W \in L_1(0, a)$, причем, считаем $W \equiv 0$ вне $(0, a)$, в результате потенциал состоит из неперекрывающихся одинаковых барьеров. Пирсон показал, что, если числа N_j растут достаточно быстро, то спектр при $E > 0$ сингулярно непрерывен.

Однако пример Пирсона не позволяет: а) явно указать, как именно должны расти числа N_j; б) иследовать поведение (обобщенных) собственных функций. С целью продвинуться в этих двух вопросах в работе [2] было начато исследование оператора (1) с потенциалом (2) и

$$\lambda_\ell = \lambda > 0 \ \ \forall \ell \in \mathbb{Z}_+, \quad x_\ell = \frac{a\ell^2}{2} + b\ell + c, \tag{8}$$

где $a \in (0, 1)$, $b \in [0, 1)$, $c > 0$ – параметры. По сути данный оператор отличается от примера Пирсона тем, что мы заменили W на дельта-функции. Расстония между $\{x_\ell\}$ растут линейно, поэтому есть надежды, что у оператора есть сингулярно непрерывный спектр; в этой работе мы доказываем, что абсолютно непрерывный спектр отсутствует (теорема 2).

Данный оператор особенно интересен тем, что его исследование приводит к разностному уравнению с почти периодическими коэффициентами [2], которое можно изучать перенормировочным подходом, возникшим в теории почти периодических операторов и предложенным в работах Буслаева и Федотова (см обзор [10]). Последнее указывает на возможные богатые самоподобные спектральные свойства.

С помощью построения последовательности Вейля, нетрудно получить, что спектр занимает всю положительную полуось. В работе доказана теорема.

Теорема 2. *Для фиксированных $c > 0$, $\lambda > 0$ и почти всех пар $(a, b) \in (0, 1) \times [0, 1)$ оператор (1) с потенциалом (2) и граничным условием (4), удовлетворяющими условиям (8), не имеет абсолютно непрерывного спектра:*

$$\sigma_{a.c.} = \varnothing.$$

Кратко опишем идеи доказательства теоремы 2. Как показано в [2], уравнение (7) сводится к разностному уравнению

$$F_{\ell+1} = \mathcal{M}(\omega\ell + \theta, \nu)\, F_\ell, \quad \mathcal{M}(x,\nu) = \begin{pmatrix} 2\nu \sin \pi x & -e^{-i\pi x} \\ e^{i\pi x} & 0 \end{pmatrix}$$

см. (11); параметры ω, ν и θ выражаются через a, b и E явными формулами (см. (10)). Для таких уравнений поведение решений на бесконечности описывается показателем Ляпунова (см. [11, п. 9.2]). Используя идею Эрмана [12], мы доказываем, что показатель Ляпунова оценивается снизу положительной константой (теорема 3). Так же как при доказательстве теоремы Исии и Пастура (см. [11, п. 9.3]) с помощью теоремы Фубини и теоремы Рюэля (см. [11, п. 9.3]) мы получаем, что для почти всех a и b при почти всех $E > 0$ одно решение разностного уравнения экспоненциально убывает, а линейно независимые с ним экспоненциально растут. С помощью связи с исходным уравнением получаем, что для него подчиненное решение существует для почти всех a и b, и из пункта (ii) теоремы 1 вытекает $\sigma_{a.c.} = \varnothing$. [1]

§1. Отсутствие абсолютно непрерывного спектра при квадратичном расположении барьеров

В качестве приложения теоремы 1 рассмотрим частный случай оператора (1) с граничным условием (4), удовлетворяющий условиям (8) (постоянные $\lambda_\ell = \lambda > 0$, квадратичное расположение точек), исследовавшийся в [2]. Покажем, что для почти всех пар (a, b) абсолютно непрерывный спектр отсутствует.

1.1. Матрица монодромии и показатель Ляпунова. На интервалах $(x_\ell, x_{\ell+1})$ решение уравнения (7) имеет вид

$$\psi(x) = A_\ell e^{ikx} + B_\ell e^{-ikx}, \quad x \in (x_\ell, x_{\ell+1}), \tag{9}$$

где $k = \sqrt{E} > 0$. Следуя [2], положим

$$\omega = \frac{a\sqrt{E}}{\pi}, \quad \nu = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4E}}, \quad \theta = \frac{\omega}{2} + \frac{b\sqrt{E}}{\pi} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{2\sqrt{E}} + \frac{1}{2}. \tag{10}$$

[1] Некая необычность нашей ситуации состоит в том, что параметры в разностном уравнении не независимы, а зависят от спектрального параметра исходного дифференциального уравнения (см. (10)).

Рассмотрим разностное уравнение для векторно-значной функции $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^2$

$$F_{\ell+1} = \mathcal{M}(\omega\ell + \theta, \nu)\, F_\ell, \tag{11}$$

где

$$\mathcal{M}(x,\nu) = \begin{pmatrix} 2\nu \sin \pi x & -e^{-i\pi x} \\ e^{i\pi x} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det \mathcal{M}(x,\nu) = 1. \tag{12}$$

Коэффициенты A_ℓ и B_ℓ из (9) выражаются через первую компоненту $F_\ell^{(1)}$ векторного решения уравнения (11) формулами

$$A_\ell = e^{-\frac{i\pi\omega\ell^2}{2} - i\pi\ell\left(\omega + \frac{bk}{\pi}\right)} F_\ell^{(1)}, \tag{13}$$

$$B_\ell = \left(\frac{2ik}{\lambda}(A_{\ell+1} - A_\ell) - A_\ell \right) e^{2ikx_\ell}. \tag{14}$$

Любое векторное решение уравнения (11) выражается через фундаментальное матричное решение $\mathcal{F}_\ell(\omega,\nu,\theta)$, определяемое условиями

$$\mathcal{F}_{\ell+1}(\omega,\nu,\theta) = \mathcal{M}(\omega\ell + \theta, \nu)\, \mathcal{F}_\ell(\omega,\nu,\theta), \qquad \mathcal{F}_0(\omega,\nu,\theta) = I.$$

Мы рассматриваем иррациональные значения ω. Положим

$$\gamma(\omega,\nu,\theta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \|\mathcal{F}_N(\omega,\nu,\theta)\|, \tag{15}$$

если предел существует. Временно будем считать, что θ независимый параметр, тогда из общих конструкций (см. книгу [11, п. 9.3, теорема 9.10]) такой предел существует для почти всех θ и не зависит от θ. Общее для почти всех θ значение этого предела называется показателем Ляпунова. Однако у нас все параметры в формуле (10) зависят от a, b и E, из-за чего потребуется дополнительный анализ.

1.2. Оценка показателя Ляпунова снизу. В этом части мы докажем теорему.

Теорема 3. *Показатель Ляпунова не меньше* $\ln \nu$.

Сначала мы получим оценку снизу для среднего значения $\frac{1}{N} \ln \|\mathcal{F}_N(\omega,\nu,\theta)\|$ по θ; доказано следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Для всех* $E > 0$ *и* $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{N} \ln \|\mathcal{F}_N(\omega,\nu,\theta)\|\, d\theta \geqslant \ln \nu. \tag{16}$$

Замечание 1.1. Правая часть (16) положительна при всех $E > 0$: поскольку $\nu = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4E}} > 1$, а λ и E положительны.

Доказательство предложения 1.1. Из (11) и (12) имеем

$$\mathcal{F}_N(\omega, \nu, \theta) = \mathcal{M}(\theta + (N-1)\omega, \nu) \cdots \mathcal{M}(\theta + \omega, \nu)\, \mathcal{M}(\theta, \nu), \tag{17}$$

$$\mathcal{M}(x, \nu) = \begin{pmatrix} -i\nu e^{i\pi x} + i\nu e^{-i\pi x} & -e^{-i\pi x} \\ e^{i\pi x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя идеям из [12], положим $z = e^{i\pi\theta}$. Тогда

$$\mathcal{M}(\theta + n\omega, \nu) = \begin{pmatrix} -i\nu z\, e^{i\pi n\omega} + i\nu z^{-1} e^{-i\pi n\omega} & -z^{-1} e^{-i\pi n\omega} \\ z\, e^{i\pi n\omega} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку при $|z| = 1$ умножение всех элементов матрицы на z не меняет нормы, выражение (17) имеет ту же норму, что и

$$\left\| \begin{pmatrix} -i\nu z^2 e^{i\pi(N-1)\omega} + i\nu e^{-i\pi(N-1)\omega} & -e^{-i\pi(N-1)\omega} \\ z^2 e^{i\pi(N-1)\omega} & 0 \end{pmatrix} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \begin{pmatrix} -i\nu z^2 + i\nu & -1 \\ z^2 & 0 \end{pmatrix} \right\|, \tag{18}$$

где в качестве матричной нормы используется норма Гильберта–Шмидта. Выражение (18) является субгармонической функцией переменной $z \in \mathbb{C}$ (см., например, [11, п. 10.2]). А поскольку при изменении θ от 0 до 2 точка $z = e^{i\pi\theta}$ пробегает единичную окружность, по свойству среднего значения от субгармонической функции (см. [11, п. 10.2]) получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^2 \ln \|\mathcal{F}_N(\omega, \nu, \theta)\|\, d\theta \geqslant \ln \|\mathcal{F}_N\|_{z=0}. \tag{19}$$

При $z = 0$ каждый сомножитель в формуле (18) принимает вид

$$\begin{pmatrix} i\nu e^{-i\pi n\omega} & -e^{-i\pi n\omega} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\mathcal{F}_N(\omega, \nu, \theta) = \nu^{N-1} e^{-i\pi N\omega} \begin{pmatrix} i\nu & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\|\mathcal{F}_N\|_{z=0} = \nu^{N-1} \sqrt{\nu^2 + 1} \geqslant \nu^N.$$

Откуда вытекает доказательство предложения 1.1. □

Доказательство теоремы 3. Как мы отмечали в конце п. 1.1 показатель Ляпунова это общее значение предела (15) для почти всех θ, поэтому, взяв среднее по θ в формуле (15), мы получим для показателя Ляпунова выражение

$$\Upsilon(\omega,\nu)=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\|\mathcal{F}_N(\omega,\nu,\theta)\|\right)d\theta. \tag{20}$$

Поскольку нормы матриц M из формулы (17) равномерно ограничены по θ сверху, а снизу ограничены единицей (так как $\det M=1$), то и выражение $\frac{1}{N}\ln\|\mathcal{F}_N(\omega,\nu,\theta)\|$ равномерно ограничено по θ. В результате для подинтегрального выражения в правой части равенства (20) существует суммируемая мажоранта. Это позволяет применить теорему Лебега, чтобы поменять в (20) предел и интеграл местами. А тогда из (20) и предложения 1.1 вытекает требуемое утверждение теоремы. □

1.3. Оценка показателя Ляпунова для почти всех параметров. Мы воспользуемся полученной оценкой, чтобы оценить предел (15) для почти всех значений параметров (a,b,E) исходной задачи. При этом речь пойдет про множество "плохих" параметров ω, ν, θ, для которых предел (15) не существует или не совпадает с показателем Ляпунова. Сначала мы докажем, что множество "плохих" параметров (ω,ν,θ) имеет нулевую меру, применив теорему Фубини, подобно тому, как это сделано при доказательстве теоремы Исси–Пастура в книге [11, п. 9.3, теорема 9.13]. Затем с помощью теоремы о замене переменных мы покажем, что множество параметров (a,b,E) исходной задачи, для которых предел (15) не существует или не совпадает с показателем Ляпунова, имеет нулевую меру. Иногда ниже мы будем вместо $\gamma(\omega,\nu,\theta)$ писать $\gamma(a,b,E)$, подчеркивая зависимость параметров (ω,ν,θ) от (a,b,E) (формула (10)). В итоге мы докажем теорему.

Теорема 4. *Пусть $c>0$ и $\lambda>0$ фиксированы. Тогда для почти всех пар $(a,b)\in(0,1)\times[0,1)$ при почти всех $E>0$ предел* (15) *существует и удовлетворяет неравенству*

$$\gamma\big(a,b,E\big)\geqslant\ln\nu(E)>0.$$

Доказательство. 1. Из-за 1-периодичности $\|\mathcal{F}_N(\omega,\nu,\theta)\|$ по θ, параметр θ можно считать точкой окружности $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Пусть $|\cdot|$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^k$ (размерность k ясна из контекста).

Рассмотрим в пространстве $X = \mathbb{R} \times (1, +\infty) \times \mathbb{R}$ с мерой Лебега $d\omega\, d\nu\, d\theta$ множество

$$\mathrm{Bad} = \big\{(\omega, \nu, \theta) \in X : \text{ предел } \gamma(\omega, \nu, \theta) \text{ не существует или не равен показателю Ляпунова при заданных } \omega \text{ и } \nu\big\}.$$

Функции $(\omega, \nu, \theta) \mapsto \frac{1}{N} \ln \|\mathcal{F}_N(\omega, \nu, \theta)\|$ непрерывны, поэтому их верхний и нижний пределы при $N \to \infty$ – измеримые по Лебегу функции на X (см., например, [17], теорема 1.14), поэтому множество, где эти пределы совпадают (или не совпадают), измеримо по Лебегу. Поскольку для почти всех θ значение предела (15) совпадает с показателем Ляпунова, то последний выражается формулой

$$\Upsilon(\omega, \nu) = \frac{1}{2} \int_0^2 \gamma(\omega, \nu, \theta) d\theta,$$

откуда по теореме Фубини вытекает, что показатель Ляпунова – измеримая функция. В результате множество Bad измеримо по Лебегу. Покажем, что $|\mathrm{Bad}| = 0$.

2. Поскольку показатель Ляпунова существует и одинаков для почти всех θ при каждом $\nu > 1$ и каждом иррациональном ω сечение

$$\mathrm{Bad}_{\omega,\nu} = \{\theta \in \mathbb{R} : \ (\omega, \nu, \theta) \in \mathrm{Bad}\}$$

имеет нулевую меру. По теореме Фубини–Тонелли (см., например, [15, §§35–36], или [16, п. 19.3])

$$|\mathrm{Bad}| = \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{Bad}_{\omega,\nu}|\, d\omega\, d\nu = 0.$$

Подчеркнём, что здесь существенна измеримость множества Bad, установленная в §1.

3. Вспомним, что ω, ν и θ зависят от параметров (a, b, E) исходной задачи по формулам (10). Рассмотрим открытое множество $U = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, +\infty)$ с мерой Лебега $da\, db\, dE$ и гладкое отображение

$$\Psi : U \to X, \qquad \Psi(a, b, E) = \big(\omega(a, E), \nu(E), \theta(a, b, E)\big),$$

заданное формулами (10). Множество $\Psi^{-1}(\mathrm{Bad})$ борелевское как прообраз борелевского множества при непрерывном отображении (см. [17,

п. 1.11 и теорема 1.12(b)]). Покажем, что мера этого прообраза равна нулю:

$$|\Psi^{-1}(\mathrm{Bad})| = 0.$$

Отображение Ψ инъективно: по тройке $(\omega, \nu, \theta) \in \Psi(U)$ параметры восстанавливаются однозначно формулами

$$E = \frac{\lambda^2}{4(\nu^2-1)}, \qquad a = \frac{\pi\omega}{\sqrt{E}},$$
$$b = \frac{\pi}{\sqrt{E}}\left(\theta - \frac{\omega}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{2\sqrt{E}} - \frac{1}{2}\right).$$

Якобиан отображения Ψ вычисляется из (10)

$$J(a,b,E) = \det\frac{\partial(\omega,\nu,\theta)}{\partial(a,b,E)} = -\frac{\partial\nu}{\partial E}\cdot\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial a} & \frac{\partial\omega}{\partial b} \\ \frac{\partial\theta}{\partial a} & \frac{\partial\theta}{\partial b}\end{pmatrix} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\nu E} > 0$$

при всех $E > 0$ и $\lambda \neq 0$. Таким образом, Ψ – инъективное гладкое отображение с невырожденным якобианом; Ψ – диффеоморфизм. По формуле замены переменных в интеграле Лебега (см., например, [17, теорема 7.26])

$$|\Psi^{-1}(\mathrm{Bad})| = \int\limits_{\Psi^{-1}(\mathrm{Bad})} da\,db\,dE = \int\limits_{\mathrm{Bad}\cap\Psi(U)} \frac{d\omega\,d\nu\,d\theta}{J\big(\Psi^{-1}(\omega,\nu,\theta)\big)} = 0,$$

поскольку $|\mathrm{Bad}| = 0$. Откуда снова по теореме Фубини получается, что для почти всех пар (a,b) сечение

$$\big\{E>0:\ (a,b,E)\in\Psi^{-1}(\mathrm{Bad})\big\} = \big\{E>0:\ \gamma\big(E,\theta(E,b)\big)\ \text{не существует или}\ \gamma\big(E,\theta(E,b)\big) < \ln\nu(E)\big\}$$

имеет нулевую меру Лебега. □

1.4. Отсутствие абсолютно непрерывного спектра. Зафиксируем пару (a,b), для которой выполнено заключение теоремы 4. Тогда для почти всех $E > 0$ предел (15) существует и

$$\gamma\big(a,b,E\big) \geqslant \ln\nu(E) > 0.$$

По теореме Рюэля (см., например, [11], п. 9.3) одно решение (с точностью до постоянного множителя) разностного уравнения (11) экспоненциально убывает, а линейно независимые с ним экспоненциально

растут. Возвращаясь от векторного решения уравнения (7) к решениям исходного уравнения (7), получаем существование подчиненного решения уравнения (7) для почти всех $E > 0$.

По пункту (ii) теоремы 1 минимальный носитель абсолютно непрерывной части спектральной меры состоит из тех E, при которых подчиненного решения нет. Следовательно, для выбранной пары (a, b) минимальный носитель абсолютно непрерывной части имеет лебегову меру нуль. Значит, абсолютно непрерывная часть спектральной меры отсутствует. Тем самым доказана теорема 2.

§2. Схема доказательства Гилберт–Пирсона

Здесь мы кратко опишем путь, который прошли авторы [4], доказывая теорему 1 для регулярных потенциалов, и укажем места, требующие дополнительной проверки при доказательстве теоремы 1 для оператора (1) с потенциалом (2).

2.1. Носители спектральной меры и граничные значения функции Вейля. В §2 работы [4] излагаются общие факты спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и приводится связь носителей спектральной меры с граничными значениями функции Вейля на вещественной оси. Здесь мы кратко воспроизводим результаты, указывая факты, которые требуется проверить для оператора (1) с потенциалом (2).

1. Пусть оператор $H(\alpha)$ определен равенством $Hu = -\frac{d^2u}{dx^2} + V(x)u$ с вещественным V; его область определения состоит из u таких, что:

(i) $u, Hu \in L_2[0, \infty)$;
(ii) u, u' абсолютно непрерывны на каждом ограниченном отрезке из $[0, \infty)$;
(iii) $\cos\alpha\, u(0) + \sin\alpha\, u'(0) = 0$ для некоторого фиксированного $\alpha \in [0, \pi)$.

Если для оператора $H(\alpha)$ реализуется случай предельной точки на бесконечности, то $H(\alpha)$ является самосопряженным для каждого $\alpha \in [0, \pi)$.

Во введении мы уже отметили, что оператор (1) с потенциалом (2) является самосопряженным оператором с областью определения (5). В п. 4.1 мы проверим, что для него реализуется случай предельной точки на бесконечности.

2. С каждым таким оператором $H(\alpha)$ связана монотонно возрастающая спектральная функция $\rho_\alpha(\lambda)$, единственная с точностью до аддитивной постоянной. Спектр $H(\alpha)$ есть дополнение к множеству точек, в некоторой окрестности которых $\rho_\alpha(\lambda)$ постоянна. Единственное разложение $\rho_\alpha(\lambda)$ на абсолютно непрерывную, сингулярно непрерывную и чисто точечную части позволяет аналогично определить абсолютно непрерывный, сингулярно непрерывный и точечный спектры.

В п. 3.2 мы построим спектральную функцию ρ для оператора (1) с потенциалом (2).

3. Пусть $u_1(r,z,\alpha)$ и $u_2(r,z,\alpha)$ – решения уравнения $Hu = zu$, удовлетворяющие условиям

$$u_1(0,z,\alpha) = -\sin\alpha, \quad u_1'(0,z,\alpha) = \cos\alpha,$$
$$u_2(0,z,\alpha) = \cos\alpha, \quad u_2'(0,z,\alpha) = \sin\alpha.$$

и пусть

$$u_m(r,z,\alpha) = u_2(r,z,\alpha) + m(z,\alpha)u_1(r,z,\alpha). \tag{21}$$

Определим функцию m условием

$$\int_0^\infty |u_m(r,z,\alpha)|^2\,dr < \infty$$

для всех $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Функция m называется функцией Вейля; она аналитична в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ и имеет положительную мнимую часть в верхней полуплоскости.

Если $\|\cdot\|$ обозначает норму в $L_2[0,\infty)$, то $u_m(r,z,\alpha)$ также удовлетворяет соотношению

$$\|u_m(r,z,\alpha)\|^2 = \frac{\operatorname{Im} m(z,\alpha)}{\operatorname{Im} z} \tag{22}$$

для всех $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Если $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,\pi)$ – два различных граничных условия, то соответствующие функции $m(z,\alpha_1)$ и $m(z,\alpha_2)$ связаны формулой

$$m(z,\alpha_2) = \frac{1 + \operatorname{ctg}\gamma\, m(z,\alpha_1)}{\operatorname{ctg}\gamma - m(z,\alpha_1)}, \tag{23}$$

где $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$. В п. 3.3 мы построим функцию Вейля и докажем формулу (22) и для оператора (1) с потенциалом (2). Доказательство формулы (23) является частью упражнения 8 главы 9 книги [18] и без изменений переносится на случай оператора (1) с потенциалом (2).

4. Функция Вейля m связана со спектральной функцией ρ_α формулой

$$m(z,\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_\alpha(\lambda)}{\lambda - z} + \operatorname{ctg}\alpha, \tag{24}$$

что выполняется для любого $z \in \mathbb{C}_+$ и всех $\alpha \in (0,\pi)$. Подчеркнём, что при $\alpha = 0$ формула (24) теряет смысл: в этом случае $\operatorname{ctg}\alpha$ не определен, а функция m определена и ограничена. Поэтому случай $\alpha = 0$ нужно рассмотреть отдельно. При всех $\alpha \in [0,\pi)$ справедливо регуляризованное представление (см. [20, п. 2.3])

$$m(z,\alpha) = c_\alpha + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\rho_\alpha(\lambda),$$

$$c_\alpha \in \mathbb{R}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_\alpha(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty, \tag{25}$$

которое при $\alpha \in (0,\pi)$, когда $\int d\rho_\alpha(\lambda)/(1+|\lambda|) < \infty$, равносильно (24). Из (25) получается та же мнимая часть функции m, что и из (24), а в дальнейшем нужна именно она; поэтому случай $\alpha = 0$ отдельно прослеживать не требуется. В п. 3.4 мы докажем формулу (25) для оператора (1) с потенциалом (2).

5. Из формулы (22) следует, что $\operatorname{Im} m(z,\alpha)$ положительна при $z \in \mathbb{C}_+$, а значит m является функцией Герглоца. Пусть

$$\mu((\lambda_1,\lambda_2]) = \rho(\lambda_2) - \rho(\lambda_1)$$

– мера Бореля–Стилтьеса сегмента $(\lambda_1,\lambda_2]$, порождаемая ρ. По формуле (25) μ есть мера из представления Герглоца функции m; при $\alpha \in (0,\pi)$ функция m является, с точностью до вещественной постоянной, преобразованием Бореля меры μ (см. [19, глава 11]). Свойства меры μ читаются по граничным значениям $\operatorname{Im} m$. Существенно, что для всех формулируемых ниже утверждений нужна лишь мнимая часть m, а она одинакова для регуляризованного и нерегуляризованного представлений:

$$\operatorname{Im} m(x+iy,\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, d\rho_\alpha(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2}, \qquad y > 0.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть μ – борелевская мера на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty$, а*

$$F(z) = c + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) d\mu(\lambda), \qquad c \in \mathbb{R},$$

– отвечающая ей функция Герглоца. Тогда:

(i) $\pi^{-1}\mathrm{Im}\, F(E+i\epsilon)\, dE \to d\mu$ *слабо в том смысле, что*

$$\int \pi^{-1} f(E) \mathrm{Im}\, F(E+i\epsilon)\, dE \to \int f(E)\, d\mu(E)$$

для всех непрерывных функций f с компактным носителем.

(ii) μ_{sing} *сосредоточена на множестве* $\{E \mid \lim_{\epsilon\downarrow 0} \mathrm{Im}\, F(E+i\epsilon) = \infty\}$.

(iii) $\mu(\{E_0\}) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \epsilon \mathrm{Im}\, F(E_0+i\epsilon)$. *Более того, для любого* $E_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \epsilon \mathrm{Re}\, F(E_0+i\epsilon) = 0.$$

(iv) $d\mu_{ac}(E) = \pi^{-1}\mathrm{Im}\, F(E+i0)\, dE$.

Теорема 5 устанавливает связь носителей компонент μ с граничными значениями $\mathrm{Im}\, m(z,\alpha)$ на вещественной оси. Из нее автоматически получаются следующие, приведенные у Гилберт–Пирсона, результаты. Пусть $E' = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{Im}\, m_+(x) \text{ существует}\}$.

Предложение 2.1. *Множества $\mathcal{M}, \mathcal{M}_{a.c.}, \mathcal{M}_s, \mathcal{M}_{s.c.}$ и $\mathcal{M}_{p.p.}$, определенные ниже, являются минимальными носителями мер $\mu, \mu_{a.c.}, \mu_s$, $\mu_{s.c.}$ и $\mu_{p.p.}$*

(i) $\mathcal{M} = \{x \in E' : 0 < \mathrm{Im}\, m_+(x) \leqslant \infty\}$;
(ii) $\mathcal{M}_{a.c.} = \{x \in E' : 0 < \mathrm{Im}\, m_+(x) < \infty\}$;
(iii) $\mathcal{M}_s = \{x \in E' : \mathrm{Im}\, m_+(x) = \infty\}$;
(iv) $\mathcal{M}_{s.c.} = \{x \in E' : \mathrm{Im}\, m_+(x) = \infty,\ \mu(\{x\}) = 0\}$;
(v) $\mathcal{M}_{p.p.} = \{x \in E' : \mathrm{Im}\, m_+(x) = \infty,\ \mu(\{x\}) > 0\}$.

6. Пусть $E_{a.c.}(\alpha), E_s(\alpha)$ обозначают классы эквивалентности минимальных носителей абсолютно непрерывной и сингулярной частей меры μ_α. Из предложения 2.1 и формулы (23) вытекает лемма.

Лемма 2.1. (1) $E_{a.c.}(\alpha_1) = E_{a.c.}(\alpha_2)$ *для всех граничных условий* α_1 *и* α_2.

(2) *Если* $\mu_s^{(\alpha_1)}(\mathbb{R}), \mu_s^{(\alpha_2)}(\mathbb{R}) > 0$, *то* $E_s(\alpha_1) \neq E_s(\alpha_2)$ *для любых* $\alpha_2 \not\equiv \alpha_1 \pmod{\pi}$; *более того, для каждой пары различных граничных условий* $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ *существуют* $\mathcal{M}(\alpha_1) \in E_s(\alpha_1)$ *и* $\mathcal{M}(\alpha_2) \in E_s(\alpha_2)$ *такие, что* $\mathcal{M}(\alpha_1) \cap \mathcal{M}(\alpha_2) = \varnothing$.

Следствие 2.1. *Множество* $S = \{x \in \mathbb{R}$ *таких, что не существует такого* α, *для которого* $\operatorname{Im} m_+(x, \alpha)$ *существует и равна нулю*$\}$ *принадлежит классу* $E_{a.c.}$.

Для доказательства достаточно проверить, что $S \sim \mathcal{M}_{a.c.}$. Из формулы (23) следует, что $dx(\mathcal{M}_{a.c.} \setminus S) = 0$. А поскольку нормальный предел m существует почти всюду, то верно и $dx(S \setminus \mathcal{M}_{a.c.}) = 0$.

2.2. Понятие подчиненного решения. В п. 3 работы [4] вводится понятие подчиненного решения и обсуждаются его свойства. Здесь мы коротко излагаем результаты, перечисляя факты, которые требуется проверить для оператора (1) с потенциалом (2).

1. Во введении мы дали определение подчиненного решения $\psi_s(\cdot, z)$. Очевидно, что для каждого фиксированного значения спектрального параметра $z \in \mathbb{C}$ может существовать не более одного линейно независимого подчиненного решения. Пусть $\phi(r, z)$ и $\psi(r, z)$ – линейно независимые решения уравнения $H(\alpha)u = zu$, и пусть $\theta(r, z)$ — решение уравнения $H(\alpha)u = zu$, удовлетворяющее условиям $\theta(0, z) = \xi$ и $\theta'(0, z) = \eta$, не зависящим от z. Тогда из формулы вариации произвольной постоянной (см. [9, глава 3, теорема 6.4]) для любых z_1, z_2 следует соотношение

$$\theta(r, z_2) = \theta(r, z_1) + (z_2 - z_1) \int_0^r \frac{\phi(t, z_1)\psi(r, z_1) - \phi(r, z_1)\psi(t, z_1)}{W(\phi, \psi)} \theta(t, z_2)\, dt \tag{26}$$

где $W(\phi, \psi) = \phi'\psi - \phi\psi'$ – вронскиан. Его постоянство для решений уравнения с оператором (1) с потенциалом (2) проверяется в п. 4.2, а формула (26) – в п. 4.6.

2. Пусть u_m, u_1, u_2 – решения, определенные в предыдущем параграфе (формула (21)). Для тех $x \in \mathbb{R}$, где значение $m_+(x)$ существует и конечно, определим $u_{m_+}(r, x) = u_2(r, x) + m_+(x)u_1(r, x)$. Пусть

$u_{(k)}(r,z) = u_2(r,z) + ku_1(r,z)$, $k \in \mathbb{C}$. Из формулы (26) с помощью элементарных неравенств треугольника и Коши–Буняковского и непрерывности m по спектральному параметру в [4] получаются следующие леммы. Всюду ниже $z = x + iy$, $z_j = x + iy_j$ и $\|f\|_N^2 = \int\limits_0^N |f(r)|^2\,dr$.

Лемма 2.2. *Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{R}^+$ фиксированы. Если*

$$\gamma(k) = 4|y|\|u_{(k)}(r,z)\|_N\|u_1(r,z)\|_N,$$

то при $y_1, y_2 > 0$ и достаточно малых $|y|$ выполняются оценки:

(i) $|\|u_1(r,z_2)\|_N - \|u_1(r,z_1)\|_N| \leqslant \gamma(1)\|u_1(r,z_1)\|_N$;

(ii)

$$|\|u_m(r,z_2)\|_N - \|u_m(r,z_1)\|_N| \leqslant \gamma(m)\|u_m(r,z_1)\|_N + |m(z_2) - m(z_1)|\|u_1(r,z_1)\|_N;$$

(iii) *Если $m_+(x)$ существует конечно и $k \neq m_+(x)$, то*

$$|\|u_{(k)}(r,x)\|_N - \|u_{(k)}(r,z)\|_N| \leqslant \gamma(k)\|u_{(k)}(r,x)\|_N;$$

(iv) *При тех же условиях*

$$|\|u_m(r,z)\|_N - \|u_{m_+}(r,x)\|_N| \leqslant \gamma(m)\|u_{m_+}(r,x)\|_N + 2\frac{|m(z) - m_+(x)|}{|m_+(x) - k|}\big(\|u_{(k)}(r,z)\|_N + \|u_{m_+}(r,z)\|_N\big).$$

Если $m_+(x)$ существует конечно, неравенства остаются верными при $y_1 = 0$ или $y_2 = 0$.

Лемма 2.3. *Если $N < \infty$ и $x \in \mathbb{R}$ фиксированы, то нормы $\|u_1(r,z)\|_N$ и $\|u_{(k)}(r,z)\|_N$ непрерывны по $\operatorname{Im} z > 0$.*

Для оператора (1) с потенциалом (2) достаточно проверить формулу (26). Леммы выше получаются из нее автоматически, и их доказательство никак не зависит от потенциала.

2.3. Достаточные условия существования подчиненных решений. Здесь мы коротко излагаем результаты §4 работы [4], все они опираются на уже приведенные утверждения и формулы и не требуют перепроверки для оператора (1) с потенциалом (2).

1. Для фиксированного $x \in \mathbb{R}$ свяжем $\varepsilon, y' > 0$ соотношением

$$\varepsilon = \sup_{0<y\leqslant y'} |m(z) - m_+(x)| + y', \tag{27}$$

и определим $N(y')$ условием

$$|y'|^{1/2}\|u_1(r,z')\|_{N(y')}=1, \tag{28}$$

где $z=x+iy$ и $z'=x+iy'$. Отметим, что при $z'\in\mathbb{C}_+$ решение $u_1(r,z')$ удовлетворяет граничному условию в нуле и потому не принадлежит $L_2(0,\infty)$: иначе z' было бы невещественным собственным значением самосопряженного оператора $H(\alpha)$. Следовательно, $\|u_1(r,z')\|_N\to\infty$ при $N\to\infty$, и условие (28) корректно определяет $N(y')$. С помощью формулы (22) и лемм 2.2 и 2.3 получают

Лемма 2.4. *Пусть $x\in\mathbb{R}$ фиксировано и $m(z)$ сходится к конечному вещественному пределу $m(x)$ при $y\downarrow 0$. Если ε, y' и $N(y')$ связаны соотношениями* (27) *и* (28)*, то*

(i) $\frac{\|u_m(r,x)\|_{N(\varepsilon)}}{\|u_1(r,x)\|_{N(\varepsilon)}}<\varepsilon$ *при достаточно малых ε.*

Кроме того,

(ii) *$N(y')$ зависит от ε непрерывно.*
(iii) *$N(y')\to\infty$ при $\varepsilon\downarrow 0$.*

Пункт (i) сначала проверяется для $z\in\mathbb{C}_+$: $\|u_1(r,z)\|_{N(\varepsilon)}$ выражается из формулы (28), $\|u_m(r,z)\|_{N(\varepsilon)}$ – из (22). Их отношение будет меньше ε. Затем с помощью леммы 2.2 переходят к требуемой оценке для $z=x\in\mathbb{R}$.

2. С помощью леммы 2.4 и формулы (23) получаются достаточные условия существования подчиненного решения уравнения $Hu=xu$ в вещественной точке x.

Следствие 2.2. *Пусть $x\in\mathbb{R}$ фиксировано. Тогда*

(i) *если $m(z)$ сходится к конечному вещественному пределу при $\operatorname{Im} z\downarrow 0$, то $u_m(r,x)$ является подчиненным решением уравнения $Hu=xu$;*
(ii) *если $|m(z)|\to\infty$ при $y\downarrow 0$, то $u_1(r,x)$ является подчиненным решением уравнения $Hu=xu$.*

2.4. Необходимые условия существования подчиненных решений. Здесь мы коротко излагаем результаты п. 5 работы [4], все они опираются на уже приведенные утверждения и формулы и не требуют перепроверки для оператора (1) с потенциалом (2).

Лемма 2.5. *Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{C}$ фиксированы, и пусть $m(z)$ сходится к конечному пределу $m_+(x)$ при $y \downarrow 0$. Предположим также, что $k \neq m_+(x)$ и $\operatorname{Im} m_+(x) = l_x > 0$. Тогда для достаточно больших N выполняются следующие утверждения:*

(i) *Существует константа $K \in \mathbb{R}^+$, не зависящая от x, такая что*
$$\frac{\|u_{m_+}(r,x)\|_N}{\|u_1(r,x)\|_N} \leqslant K \operatorname{Im} m_+(x).$$

(ii) *Существует константа $M \in \mathbb{R}^+$, которая зависит от k и x, такая что*
$$\frac{\|u_{m_+}(r,x)\|_N}{\|u_{(k)}(r,x)\|_N} \leqslant M \operatorname{Im} m_+(x),$$
где $u_{(k)}(r,x) = u_2(r,x) + k u_1(r,x)$.

Замечание 2.1. Подчиненное решение в вещественной точке x всегда является скалярным кратным некоторого вещественного решения.

Следствие 2.3. *Если подчиненное решение уравнения $Hu = xu$ существует в вещественной точке x, то при $\operatorname{Im} z \downarrow 0$ выполняется одно из двух: либо $m(z)$ сходится к конечному вещественному пределу, либо $|m(z)| \to \infty$.*

2.5. Подчиненность и спектр. Здесь мы коротко излагаем результаты последнего параграфа [4], все они опираются на уже приведенные утверждения и формулы и не требуют перепроверки для оператора (1) с потенциалом (2).

1. Объединяя следствия 2.2 и 2.3, получают следующую теорему существования.

Теорема 6. *Подчиненное решение уравнения $Hu = xu$ существует в вещественной точке x тогда и только тогда, когда при $y \downarrow 0$ либо $m(z)$ сходится к конечному вещественному пределу (в этом случае подчиненным является $u_m(r,x)$), либо $|m(z)| \to \infty$ (в этом случае подчиненным является $u_1(r,x)$).*

Если для некоторого граничного условия α выполнено
$$\lim_{y \downarrow 0} |m(z,\alpha)| = \infty,$$
то по формуле (23) для любого $\alpha_2 \not\equiv \alpha \pmod{\pi}$ предел $m(x,\alpha_2)$ конечный и вещественный. Это позволяет сформулировать теорему 6 иначе.

Теорема 7. *Подчиненное решение уравнения $Hu = xu$ существует в вещественной точке x тогда и только тогда, когда существует граничное условие α такое, что $m(z,\alpha)$ сходится к конечному вещественному пределу $m(x,\alpha)$ при $y \downarrow 0$, и в этом случае подчиненным решением является $u_m(r,x,\alpha) = u_2(r,x,\alpha) + m(x,\alpha)u_1(r,x,\alpha)$.*

2. Наконец доказывается main теорема 1. Так как ее пункт (v) хорошо известен, а (iii) и (v) влекут (iv), и (ii) и (iii) влекут (i), достаточно доказать лишь (ii) и (iii):
(ii) Сразу вытекает из следствия 2.1 и теоремы 7.
(iii) Достаточно доказать, что $\mathcal{M}'_{\mathrm{s.}} \sim \mathcal{M}_{\mathrm{s.}}$ (из предложения 2.1). По следствию 2.2(ii), $\mathcal{M}_{\mathrm{s.}} \subseteq \mathcal{M}'_{\mathrm{s.}}$; и более того, если $x \in \mathcal{M}'_{\mathrm{s.}}$, то $u_1(r,x)$ – подчиненное решение уравнения $Hu = xu$, значит по теореме 6 $x \in \mathcal{M}_{\mathrm{s.}}$. Таким образом $\mathcal{M}'_{\mathrm{s.}} = \mathcal{M}_{\mathrm{s.}}$ и теорема 1 доказана.

Результаты этого параграфа автоматически переносятся на оператор (1) с потенциалом (2).

§3. Спектральная функция и функция Вейля для оператора с δ-потенциалом

В предыдущем параграфе мы отметили факты, которые необходимо проверить для оператора (1) с потенциалом (2), чтобы распространить на него результаты работы [4]. В этом параграфе мы разберем большую их часть: действуя по плану, разработанному в [9] для регулярных потенциалов, построим спектральную функцию ρ и функцию Вейля m и докажем формулы (22), (24) и (25). Случай предельной точки, постоянство вронскиана $W(\phi,\psi)$ и формула (26) проверяются в §4.

Всюду в этом параграфе мы пользуемся нормировкой решений, принятой в [4] и в п. 2.1: через $\varphi(x,E)$ и $\theta(x,E)$ обозначаются решения уравнения (7) с начальными данными

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0) &= -\sin\alpha, \quad \varphi'(0) = \cos\alpha, \\ \theta(0) &= \cos\alpha, \qquad \theta'(0) = \sin\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

так что $\varphi = u_1$, $\theta = u_2$ в обозначениях формулы (21); решение φ удовлетворяет граничному условию (4), а θ – нет. Вронскиан этих решений (его постоянство для оператора с δ-потенциалом проверяется в п. 4.2) равен

$$W(\varphi,\theta) = \varphi'\theta - \varphi\theta' = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{30}$$

В [9] используется другая нормировка ($\varphi(0) = \sin\alpha$, $\varphi'(0) = -\cos\alpha$), отличающаяся знаком φ; при переходе к ней функция Вейля меняет знак, $m \mapsto -m$, что следует учитывать при сравнении формул.

3.1. Оператор Шредингера на конечном отрезке. В §6 главы I книги [9] оператор Шредингера $H(\alpha)$ с регулярным потенциалом (определенный в п. 2.1) сужают на конечный отрезок $(0, \Pi)$ с произвольным $\Pi > 0$. Для этого оператора на отрезке строится резольвента и доказывается равенство Парсеваля. Здесь мы кратко изложим результаты этого параграфа и выделим места, которые необходимо проверить для оператора (1) с потенциалом (2).

1. Пусть оператор $H_\Pi(\alpha, \beta)$ определен равенством $H_\Pi u = -\frac{d^2u}{dx^2} + V(x)u$ с вещественным V; его область определения состоит из u таких, что:

(i) $u, H_\Pi u \in L_2(0, \Pi)$;
(ii) u, u' абсолютно непрерывны на $[0, \Pi]$;
(iii) $\cos\alpha\, u(0) + \sin\alpha\, u'(0) = 0$ для некоторого фиксированного $\alpha \in [0, \pi)$;
(iv) $\cos\beta\, u(\Pi) + \sin\beta\, u'(\Pi) = 0$ для некоторого фиксированного $\beta \in [0, \pi)$.

Строится функция Грина для задачи

$$\begin{cases} H_\Pi\psi - E\psi = f, \quad x \in (0, \Pi), \\ \cos\alpha\,\psi(0) + \sin\alpha\,\psi'(0) = 0, \\ \cos\beta\,\psi(\Pi) + \sin\beta\,\psi'(\Pi) = 0, \end{cases} \tag{31}$$

то есть ядро резольвенты $R_E = (H_\Pi - E)^{-1}$. Здесь и далее под резольвентой оператора A понимается $R_z = (A - z)^{-1}$.

Вводятся решения φ и v уравнения Шредингера $H_\Pi\psi = E\psi$, удовлетворяющие на левом и правом концах $[0, \Pi]$ условиям

$$\varphi(0) = -\sin\alpha, \quad \varphi'(0) = \cos\alpha, \quad v(\Pi) = -\sin\beta, \quad v'(\Pi) = \cos\beta; \tag{32}$$

решение φ – то же, что в (29). Решение φ удовлетворяет граничному условию в точке 0, а v – в точке Π.

В случае оператора (1) с потенциалом (2) мы предполагаем, что $\Pi > 0$ таково, что ни одна из точек x_ℓ из (2) не совпадает с Π. Пусть N – максимальный номер точек x_ℓ, лежащей внутри интервала $(0, \Pi)$.

Вместо оператора H_Π мы рассматриваем оператор $\widetilde{H}_\Pi$, который действует на интервалах $(x_\ell, x_{\ell+1})$ как $-\frac{d^2}{dx^2}$ и задан на функциях ψ таких, что

- $\psi \in W_2^1(0,\Pi)$, $\psi\big|_{(x_\ell,x_{\ell+1})} \in W_2^2(x_\ell, x_{\ell+1})$ $\forall \ell = -1, 0, \dots, N$, где $x_{-1} = 0$, $x_{N+1} = \Pi$;
- ψ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \cos\alpha\,\psi(0) + \sin\alpha\,\psi'(0) = 0, \\ \cos\beta\,\psi(\Pi) + \sin\beta\,\psi'(\Pi) = 0; \end{aligned} \tag{33}$$

- в точках x_ℓ, $\ell = 0, \dots, N$, выполнено

$$\psi'(x_\ell + 0) - \psi'(x_\ell - 0) = \lambda_\ell \psi(x_\ell). \tag{34}$$

Оператор $\widetilde{H}_\Pi$ является самосопряженным [1]. Решение уравнения $\widetilde{H}_\Pi\psi = E\psi$ на интервалах $(x_\ell, x_{\ell+1})$ имеет вид (9) при $\ell = -1, 0, \dots, N$, где $k = \sqrt{E}$. Для уравнения, соответствующего оператору $\widetilde{H}_\Pi$, точно так же вводятся решения φ и v с данными (32).

2. Ядро функции Грина задачи (31) определяется стандартной формулой

$$G(x,t,E) = \begin{cases} \frac{1}{W}\varphi(x,E)v(t,E), & x \leqslant t, \\ \frac{1}{W}\varphi(t,E)v(x,E), & t \leqslant x, \end{cases} \tag{35}$$

где $W = W(\varphi, v) = \varphi' v - \varphi v'$ – вронскиан решений φ и v; хорошо известно, что он постоянен.

Поскольку производная решений уравнения $\widetilde{H}_\Pi\psi = E\psi$ имеет скачки (34), то в п. 4.2 мы проверяем, что вронскиан $W(\varphi, v)$ постоянен и в этом случае. В п. 4.3 проверяется, что для оператора $\widetilde{H}_\Pi$ ядро функции Грина задается такой же формулой (35), как в регулярном случае.

3. Если $E_{n,\Pi}$ – собственное значение, то $\varphi_n(x) = \varphi(x, E_{n,\Pi})$ – собственная функция оператора H_Π, отвечающая $E_{n,\Pi}$. Пусть

$$\alpha_{n,\Pi}^2 = \int_0^\Pi |\varphi_n(x)|^2 dx, \ \alpha_{n,\Pi} > 0. \tag{36}$$

Тогда $v_n(x) = \varphi_n(x)/\alpha_{n,\Pi}$ – нормированная собственная функция задачи (31).

Можно предполагать, что 0 не является собственным значением (иначе достаточно сдвинуть спектральный параметр). В [9] (гл. I, §6)

доказана формула

$$G(x,t,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)v_n(t)}{E_{n,\Pi}}, \tag{37}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно, таким образом ядро G непрерывно. (В [9] эта формула записана со знаком минус, поскольку там уравнение в (31) записывается в виде $\psi''+(E-V)\psi=f$; при нашем соглашении $G(x,t,0)$ есть ядро оператора $H_\Pi^{-1}=\sum_n E_{n,\Pi}^{-1}\,v_n\otimes v_n$.)

Для обоснования формулы (37) для оператора $\widetilde{H}_\Pi$ в п. 4.4 мы найдем асимптотику собственных значений и нормированных собственных функций оператора $\widetilde{H}_\Pi$: $E_{n,\Pi}\asymp n^2$ и $\sup_x|v_n(x)|\leqslant C(\Pi)$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (37). В результате и для $\widetilde{H}_\Pi$ ядро $G(x,t,0)$ тоже будет непрерывно.

4. В [9, глава I, §6] доказаны следующие теоремы.

Теорема 8 (о разложении)**.** *Если $f(x)$ имеет вторую производную и удовлетворяет краевым условиям* (31)*, то $f(x)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nv_n(x),\quad a_n=\int_0^\Pi f(x)v_n(x)\,dx.$$

Теорема 9. *Для каждой функции $f(x)\in L_2(0,\Pi)$ имеет место равенство Парсеваля*

$$\int_0^\Pi f^2(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2.$$

Из теоремы 9 и формулы (36) вытекает формула

$$\int_0^\Pi f^2(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{n,\Pi}^2}\left(\int_0^\Pi f(x)\varphi_n(x)\,dx\right)^2. \tag{38}$$

Для оператора $\widetilde{H}_\Pi$ эти теоремы остаются верными, только в условии теоремы 8 надо брать f из области определения оператора $\widetilde{H}_\Pi$. В

доказательстве теоремы 9 для $\widetilde{H}_\Pi$ используется, что область определения $\widetilde{H}_\Pi$ плотна в L_2:

$$L_2(0,\Pi) = \bigoplus_{\ell=-1}^{N} L_2(x_\ell, x_{\ell+1}),$$

а функции из $C_0^\infty(x_\ell, x_{\ell+1})$, продолженные нулём, принадлежат области определения $\widetilde{H}_\Pi$ и плотны в $L_2(x_\ell, x_{\ell+1})$; поэтому область определения $\widetilde{H}_\Pi$ плотна в $L_2(0,\Pi)$. Во всем остальном доказательства теорем 8 и 9 для оператора $\widetilde{H}_\Pi$ дословно повторяют [9].

3.2. Скалярная спектральная функция ρ. В §1 главы II книги [9] определяется скалярная спектральная функция ρ и доказывается равенство Парсеваля на оси. Здесь мы кратко изложим результаты этого параграфа, они опираются на уже приведенные утверждения и формулы и не требуют перепроверки для оператора (1) с потенциалом (2).

Пусть

$$\rho_\Pi(E) = \sum_{0<E_{n,\Pi}\leqslant E} \frac{1}{\alpha_{n,\Pi}^2}, \quad E>0, \qquad \rho_\Pi(E) = -\sum_{E<E_{n,\Pi}\leqslant 0} \frac{1}{\alpha_{n,\Pi}^2}, \quad E<0,$$

где $\alpha_{n,\Pi}$ определено в (36). Тогда формула (38) принимает вид

$$\int_0^\Pi f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(E)\,d\rho_\Pi(E),$$

где

$$F(E) = \int_0^\Pi f(x)\varphi(x,E)\,dx.$$

Лемма 3.1. *Для любого $N>0$ существует константа $A=A(N)$ не зависящая от Π такая, что*

$$\bigvee_{-N}^{N}\{\rho_\Pi(E)\} := \rho_\Pi(N) - \rho_\Pi(-N) < A.$$

Доказательство леммы в [9] состоит в применении равенства Парсеваля к специально подобранной функции f_h, сосредоточенной на малом отрезке $[0,h]$, и использует явное поведение $\varphi(x,E)$ при $x\in[0,h]$ равномерно по $E\in[-N,N]$; случаи $\sin\alpha\neq 0$ и $\sin\alpha = 0$ (в последнем

$\varphi(x,E) = x + O(x^3)$) разбираются в [9] по отдельности. Для оператора (1) с потенциалом (2) это рассуждение переносится без изменений, если взять $h < x_0$: в силу условия (3) на отрезке $[0,h]$ потенциал отсутствует, и $\varphi(x,E)$ там совпадает с решением свободного уравнения, $\varphi(x,E) = -\sin\alpha\cos\sqrt{E}x + \cos\alpha\,\frac{\sin\sqrt{E}x}{\sqrt{E}}$. Именно здесь используется первое из условий (3).

Итак, $\{\rho_\Pi\}$ – равномерно ограниченное на каждом отрезке $[-N,N]$ семейство неубывающих функций. По теореме Хелли о выборе существует последовательность $\Pi_k \to \infty$ такая, что $\rho_{\Pi_k}(E) \to \rho(E)$ при $k \to \infty$ во всех точках, кроме, быть может, счетного множества точек разрыва предельной неубывающей функции ρ. Это и есть искомая скалярная спектральная функция.

Теорема 10. *Пусть $f(x) \in L_2(0,\infty)$. Существуют не зависящая от функции f монотонно возрастающая функция ρ и функция $F \in L_2(\mathbb{R}, d\rho)$ (обобщенное преобразование Фурье функции f) такие, что имеет место равенство*

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(E)\,d\rho(E),$$

где $F(E) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\varphi(x,E)\,dx$, а предел понимается в смысле сходимости в $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$.

Теорема 10 выводится из теоремы 9 предельным переходом $\Pi_k \to \infty$: сначала для финитных функций, затем для произвольных $f \in L_2(0,\infty)$; вид потенциала в этом рассуждении не используется.

3.3. Функция Вейля. В §2 главы II книги [9] определяется функция Вейля m и доказывается формула (22). Здесь мы кратко изложим результаты этого параграфа, они опираются на уже приведенные утверждения и формулы и не требуют перепроверки для оператора (1) с потенциалом (2).

Рассмотрим решения φ и θ уравнения (7) с начальными данными (29). При фиксированном Π и $E \in \mathbb{C}_+$ рассматривается линейная комбинация $\theta(x) + \ell\varphi(x)$ этих фундаментальных решений. Она удовлетворяет граничному условию на правом конце задачи (31), если

$$\ell = -\frac{\theta(\Pi)\operatorname{ctg}\beta + \theta'(\Pi)}{\varphi(\Pi)\operatorname{ctg}\beta + \varphi'(\Pi)}. \tag{39}$$

Знаменатель не обращается в нуль: иначе φ была бы собственной функцией задачи (31) с невещественным собственным значением $E \in \mathbb{C}_+$. При изменении параметра β от 0 до π комплексное число ℓ описывает окружность C_Π, ограничивающую круг B_Π в комплексной плоскости. Далее доказывается, что при $\Pi' > \Pi$ выполняется вложение $B_{\Pi'} \subset B_\Pi$. При $\Pi \to \infty$ возможно два случая: последовательность кругов стягивается либо к предельной точке (случай предельной точки), либо к предельному кругу (случай предельного круга). Функция Вейля $m(E)$ определяется как предельное значение ℓ: в случае предельной точки это единственное предельное значение, в случае предельного круга – любая точка предельной окружности.

Доказывается формула

$$\int_0^\infty |\theta(x) + m\varphi(x)|^2 dx \leqslant \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} E}. \tag{40}$$

Знак в правой части соответствует нормировке (29): например, для свободного оператора с условием Дирихле

$$\theta + m\varphi = \cos\sqrt{E}x + m\,\frac{\sin\sqrt{E}x}{\sqrt{E}} = e^{i\sqrt{E}x}$$

при $m = i\sqrt{E}$, и $\operatorname{Im} m > 0$ при $E \in \mathbb{C}_+$. В нормировке [9] функция m имеет противоположный знак, и в (40) справа стоит $-\operatorname{Im} m/\operatorname{Im} E$. На самом деле в (40) верно равенство, мы установим это в п. 3.4. Из (40) вытекает теорема.

Теорема 11. *Для всех невещественных значений E функция*

$$\psi(x, E) = \theta(x, E) + m(E)\varphi(x, E) \tag{41}$$

является решением уравнения (7)*, с интегрируемым квадратом на интервале* $[0, \infty)$.

Тем самым установлено существование функции Вейля; в обозначениях п. 2.1 $\psi = u_m$. Её единственность вытекает из случая предельной точки, который будет доказан в п. 4.1.

3.4. Интегральное представление резольвенты. В §3 главы II книги [9] доказывается формула, выражающая резольвенту оператора $H(\alpha)$ через интеграл, в который входит обобщенное преобразование

Фурье $f \in L_2(0,\infty)$. Здесь мы кратко изложим результаты этого параграфа и выделим места, которые необходимо проверить для оператора (1) с потенциалом (2). Сформулируем основной результат. Пусть $\operatorname{Im} z \neq 0$, а $R_z = (H(\alpha) - z)^{-1}$ – резольвента оператора $H(\alpha)$.

Теорема 12. *Пусть $f(x) \in L_2(0,\infty)$. Тогда*

$$R_z f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,E)F(E)}{E-z}\, d\rho(E), \tag{42}$$

где F – обобщенное преобразование Фурье функции f из теоремы 10.

Доказательство теоремы проводится с помощью предельного перехода в формуле

$$R_{z,\Pi} f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,E)F_\Pi(E)}{E-z}\, d\rho_\Pi(E), \quad F_\Pi(E) = \int_0^\Pi f(y)\varphi(y,E)dy, \tag{43}$$

которая вытекает из спектральной теоремы для оператора H_Π: $R_{z,\Pi} = (H_\Pi - z)^{-1} = \sum_n (E_{n,\Pi} - z)^{-1}\, v_n \otimes v_n$.

Для предельного перехода в левой части (43) используется представление

$$\begin{gathered} R_{z,\Pi} f = \int_0^\Pi G_\Pi(x,y;z) f(y)\, dy, \\ G_\Pi(x,y;z) = \begin{cases} \psi_\Pi(x,z)\varphi(y,z), & y \leqslant x, \\ \varphi(x,z)\psi_\Pi(y,z), & y > x, \end{cases} \end{gathered} \tag{44}$$

где $\psi_\Pi = \theta + \ell\varphi$, а ℓ определено формулой (39). Функция ψ_Π удовлетворяет граничному условию в точке Π из задачи (31), а вронскиан $W(\varphi,\psi_\Pi) = W(\varphi,\theta) = 1$ в силу (30), поэтому (44) мгновенно вытекает из (35) с $v = \psi_\Pi$.

Для предельного перехода в правой части (43) используется теорема Хелли, чтобы ее применить необходимо оценить интеграл

$$\int_0^n f_n(x)\varphi_{m,\Pi}(x)dx, \tag{45}$$

где f_n – гладкая функция, обращающаяся в нуль вне отрезка $[0, n]$, а $\varphi_{m,\Pi} = \varphi(\cdot, E_{m,\Pi})$. В регулярном случае для этого используется равенство, получающееся с помощью интегрирования по частям,

$$\int_0^n f_n(x)\varphi_{m,\Pi}(x)\,dx = \frac{-1}{E_{m,\Pi}} \int_0^n (f_n''(x) - V(x)f_n(x))\varphi_{m,\Pi}(x)\,dx. \qquad (46)$$

Для оператора (1) с потенциалом (2) гладкая функция f_n не удовлетворяет условиям (34) и не принадлежит области определения оператора, поэтому при интегрировании по частям возникают внеинтегральные члены в точках x_ℓ. Формула интегрирования по частям для этого случая выведена в п. 4.5 (формула (57)); она дает вместо (46) равенство

$$\int_0^n f_n(x)\varphi_{m,\Pi}(x)\,dx = \frac{-1}{E_{m,\Pi}} \left(\int_0^n f_n''(x)\varphi_{m,\Pi}(x)\,dx - \sum_{x_\ell < n} \lambda_\ell f_n(x_\ell)\varphi_{m,\Pi}(x_\ell) \right), \qquad (47)$$

в котором сумма конечна и, в силу равномерной ограниченности нормированных собственных функций (п. 4.4), оценивается так же, как интеграл. В остальном анализ практически дословно повторяет доказательство из [9].

В §4 главы II работы [9] доказаны формулы (22) и (24), их доказательства не требуют перепроверки для оператора (1) с потенциалом (2). Из формул (41) и (42) вытекает (22). В формуле (40) всегда достигается равенство, что доказывает формулу (22).

§4. Свойства решений уравнения Шредингера с δ-потенциалом

В этом параграфе мы проверим, что для оператора (1) с потенциалом (2) реализуется случай предельной точки, покажем, что вронскиан решений соответствующего уравнения Шредингера постоянен, докажем, что ядро функции Грина для оператора $\widetilde{H}_\Pi$ задается формулой (35), проверим формулу (26) и докажем формулу интегрирования по частям.

4.1. Случай предельной точки. Пусть H – оператор (1) с потенциалом (2). Покажем, что у соответствующего уравнения Шредингера может быть не более одного линейно независимого решения из $L_2(0,\infty)$.

В §2 главы II книги [9] доказана теорема 2.2, которая утверждает: если для некоторого числа E_0 существует два линейно независимых решения уравнения $H\psi = E_0\psi$, принадлежащих $L_2(0,\infty)$, то для любого E для уравнения $H\psi = E\psi$ существует два линейно независимых решения из $L_2(0,\infty)$. Эта теорема без труда переносится на случай оператора (1) с потенциалом (2). Чувствительным к потенциалу местом в доказательстве является лишь формула вариации произвольной постоянной (26), которую мы докажем для оператора (1) с потенциалом (2) в п. 4.6.

Если мы докажем, что при $E = 0$ существует лишь одно линейно независимое решение из $L_2(0,\infty)$, то для оператора реализуется случай предельной точки. Предположим противное: пусть при $E = 0$ существуют два линейно независимых решения f и g из $L_2(0,\infty)$. На каждом интервале $(x_\ell, x_{\ell+1})$ решения уравнения с $E = 0$ линейны; пусть на (x_n, x_{n+1})

$$f(x) = Ax + B, \quad g(x) = Cx + D.$$

Подберём константы G_1, G_2, не равные нулю одновременно, так, что $G_1A + G_2C = 0$; тогда $u = G_1f + G_2g$ – решение из $L_2(0,\infty)$, постоянное на (x_n, x_{n+1}): $u \equiv h$. Напомним, что в (2) все $\lambda_\ell > 0$, поэтому по формуле (34) производная решения имеет в точках x_ℓ jump того же знака, что и значение решения. Если $h \neq 0$, то при $x > x_n$ решение u сохраняет знак, а $|u|$ не убывает, что противоречит $u \in L_2(0,\infty)$. Если же $h = 0$, то u вместе с производной обращается в нуль на (x_n, x_{n+1}) и по единственности решения задачи Коши $u \equiv 0$ всюду, то есть решения f и g линейно зависимы – снова противоречие. Итак, для оператора (1) с потенциалом (2) реализуется случай предельной точки.

4.2. Постоянство вронскиана. Пусть y_1 и y_2 – два решения уравнения Шредингера, соответствующего оператору (1) с потенциалом (2). Покажем, что вронскиан $W(y_1, y_2) = y_1'y_2 - y_1y_2'$ не зависит от x. Вне точек x_ℓ функции y_1 и y_2 удовлетворяют уравнению Шредингера без потенциала, для которого постоянство вронскиана хорошо известно; таким образом, $W(x)$ постоянен на каждом интервале $(x_\ell, x_{\ell+1})$. Покажем, что $W(x)$ непрерывен в точках x_ℓ. В этих точках решения y_1

и y_2 непрерывны и удовлетворяют условию (34), поэтому

$$\begin{aligned} W(x_\ell+0) &= y_1'(x_\ell+0)y_2(x_\ell) - y_1(x_\ell)y_2'(x_\ell+0) \\ &= y_1'(x_\ell-0)y_2(x_\ell) - y_1(x_\ell)y_2'(x_\ell-0) \\ &\quad + \lambda_\ell y_1(x_\ell)y_2(x_\ell) - y_1(x_\ell)\lambda_\ell y_2(x_\ell) \\ &= y_1'(x_\ell-0)y_2(x_\ell) - y_1(x_\ell)y_2'(x_\ell-0) = W(x_\ell-0). \end{aligned}$$

Таким образом, доопределив вронскиан $W(y_1, y_2)$ по непрерывности в точках x_ℓ, получаем $W(x) = W(0)$ при всех $x > 0$.

4.3. Функция Грина оператора на отрезке. Пусть функция G определена формулой (35). Покажем, что функция

$$y(x,E) = \int_0^\Pi G(x,t,E)f(t)\,dt$$

является решением задачи (31) для оператора (1) с потенциалом (2). Имеем

$$y(x,E) = \frac{1}{W}\left(v(x,E)\int_0^x \varphi(t,E)f(t)\,dt + \varphi(x,E)\int_x^\Pi v(t,E)f(t)\,dt\right).$$

Отсюда очевидно, что краевые условия при $x = 0$ и $x = \Pi$ выполнены и между точками x_ℓ решение удовлетворяет уравнению Шредингера без потенциала. Нам остается проверить, что в точках x_ℓ решение непрерывно, а производная имеет скачок (34).

Дифференцируя $y(x,E)$, получаем

$$\begin{aligned} y'(x,E) = \frac{1}{W}\Bigg(&v'(x,E)\int_0^x \varphi(t,E)f(t)\,dt + v(x,E)\varphi(x,E)f(x) \\ &+\varphi'(x,E)\int_x^\Pi v(t,E)f(t)\,dt - \varphi(x,E)v(x,E)f(x)\Bigg). \end{aligned} \quad (48)$$

Отсюда

$$y'(x_\ell+0,E)-y'(x_\ell-0,E)$$
$$=\frac{1}{W}\left(v'(x_\ell+0,E)-v'(x_\ell-0,E)\right)\int\limits_0^{x_\ell}\varphi(t,E)f(t)\,dt$$
$$+\frac{1}{W}\left(\varphi'(x_\ell+0,E)-\varphi'(x_\ell-0,E)\right)\int\limits_{x_\ell}^{\Pi}v(t,E)f(t)\,dt$$

что ввиду условий (34) для решений φ и v совпадает с $\lambda_\ell y(x_\ell)$.

4.4. Вид решения и асимптотика при вещественном E. Мы покажем, что у задачи Штурма–Лиувилля на отрезке $[0,\Pi]$ для оператора $\widetilde{H}_\Pi$, определенного в п. 3.1, собственные числа растут квадратично по номеру, а нормированные собственные функции равномерно ограничены. Отсюда следует сходимость ряда (37). Отдельного внимания требует случай $\alpha=0$, в котором главный член асимптотики решения φ обращается в нуль.

Пусть $E=k^2$, $k>0$. На каждом интервале $(x_\ell,x_{\ell+1})$, $\ell=-1,0,\dots,N$, решение $\varphi(x,E)$ с начальными данными (29) имеет вид (9). На первом интервале $(0,x_0)$ из начальных данных находим

$$\varphi(x,E)=-\sin\alpha\cos kx+\frac{\cos\alpha}{k}\sin kx, \tag{49}$$
$$A_{-1}=\frac{1}{2}\left(-\sin\alpha+\frac{\cos\alpha}{ik}\right),\quad B_{-1}=\frac{1}{2}\left(-\sin\alpha-\frac{\cos\alpha}{ik}\right). \tag{50}$$

Условия непрерывности решения и скачка производной (34) в точке x_ℓ дают разностное уравнение для коэффициентов

$$\begin{pmatrix}A_\ell\\B_\ell\end{pmatrix}=\left[I+\frac{\lambda_\ell}{2ik}\begin{pmatrix}1&e^{-2ikx_\ell}\\-e^{2ikx_\ell}&-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}A_{\ell-1}\\B_{\ell-1}\end{pmatrix},\quad \ell=0,\dots,N. \tag{51}$$

Норма матрицы в квадратных скобках не превосходит $1+\lambda_\ell/k$, поэтому при фиксированном Π (и, следовательно, фиксированном N) произведение матриц (51) имеет вид $I+O(1/k)$ равномерно по $\ell\leqslant N$, и

$$\begin{pmatrix}A_\ell\\B_\ell\end{pmatrix}=\left\{I+O\left(\frac{1}{k}\right)\right\}\begin{pmatrix}A_{-1}\\B_{-1}\end{pmatrix},\quad \ell=-1,0,\dots,N.$$

Так как $|A_{-1}| + |B_{-1}| = O(|\sin\alpha| + 1/k)$, отсюда на каждом интервале $(x_\ell, x_{\ell+1})$ при $k \to \infty$ получаем

$$\varphi(x,E) = -\sin\alpha\cos kx + \frac{\cos\alpha}{k}\sin kx + O\left(\frac{|\sin\alpha|}{k} + \frac{1}{k^2}\right), \qquad (52)$$

$$\varphi'(x,E) = k\sin\alpha\sin kx + \cos\alpha\cos kx + O\left(|\sin\alpha| + \frac{1}{k}\right). \qquad (53)$$

При $\sin\alpha \neq 0$ главные члены здесь суть $-\sin\alpha\cos kx$ и $k\sin\alpha\sin kx$, а при $\alpha = 0$ – $\frac{\sin kx}{k}$ и $\cos kx$.

Чтобы $\varphi(\cdot, E)$ являлась собственной функцией задачи на отрезке, она должна удовлетворять последнему условию в (31):

$$\cos\beta\,\varphi(\Pi,E) + \sin\beta\,\varphi'(\Pi,E) = 0.$$

Подставляя в него выражения из формулы (52) и деля на главный коэффициент, получаем уравнение $\sin k\Pi + O(\frac{1}{k}) = 0$, если $\sin\alpha\sin\beta \neq 0$ или $\alpha = \beta = 0$, и уравнение $\cos k\Pi + O(\frac{1}{k}) = 0$, если ровно одно из чисел $\sin\alpha$, $\sin\beta$ равно нулю. Поэтому для собственных чисел $E_{n,\Pi} = k_n^2$ при $n \to \infty$ верна формула

$$k_n = \frac{\pi(n+\delta)}{\Pi} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad E_{n,\Pi} = \left(\frac{\pi(n+\delta)}{\Pi}\right)^2 + O(1), \qquad (54)$$

где $\delta = 0$ в первом случае и $\delta = \frac{1}{2}$ во втором. В частности, $E_{n,\Pi} \geqslant cn^2$ при больших n.

Найдем асимптотику нормирующих множителей (36). Если $\sin\alpha \neq 0$, то из (52) $\varphi_n^2 = \sin^2\alpha\cos^2 k_n x + O(1/k_n)$ и

$$\alpha_{n,\Pi}^2 = \int_0^\Pi \varphi_n^2\,dx = \frac{\Pi}{2}\sin^2\alpha + O\left(\frac{1}{k_n}\right),$$

так что $v_n = \varphi_n/\alpha_{n,\Pi} = \pm\sqrt{2/\Pi}\cos k_n x + O(1/k_n)$. Если $\alpha = 0$, то $\varphi_n^2 = \frac{\sin^2 k_n x}{k_n^2} + O(1/k_n^3)$,

$$\alpha_{n,\Pi}^2 = \frac{\Pi}{2k_n^2} + O\left(\frac{1}{k_n^3}\right),$$

и $v_n = \sqrt{2/\Pi}\sin k_n x + O(1/k_n)$. В обоих случаях нормированные собственные функции равномерно ограничены: $\sup_{x\in[0,\Pi]} |v_n(x)| \leqslant C(\Pi)$ при всех n. Вместе с (54) это обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость ряда (37).

Отметим, что при $\alpha = 0$ множители $1/\alpha_{n,\Pi}^2 \sim 2k_n^2/\Pi$ растут, и функция $\rho_\Pi(E) = \sum_{0<E_{n,\Pi}\leqslant E} \alpha_{n,\Pi}^{-2}$ ведет себя при $E \to +\infty$ как $\frac{2}{3\pi}E^{3/2}$, тогда как при $\sin\alpha \neq 0$ она растет как $\frac{2}{\pi \sin^2\alpha}E^{1/2}$. Это и есть источник различия между формулами (24) и (25), отмеченного в п. 2.1.

4.5. Формула интегрирования по частям. Пусть $\Pi > 0$ не совпадает ни с одной из точек x_ℓ, а функции f и g непрерывны на $[0,\Pi]$, дважды дифференцируемы на каждом интервале $(x_\ell, x_{\ell+1})$ и имеют односторонние пределы производных в точках x_ℓ (таковы, в частности, функции из области определения (5) и решения уравнения (7)). Пусть P – максимальный номер точек x_ℓ, лежащей внутри интервала $(0,\Pi)$; положим $x_{-1} = 0$, $x_{P+1} = \Pi$. Разобьем интеграл $\int\limits_0^\Pi f(x)g''(x)\,dx$ в сумму интегралов по интервалам $(x_\ell, x_{\ell+1})$ и на каждом из них дважды проинтегрируем по частям. Ввиду непрерывности f и g внеинтегральные члены в узле x_ℓ, $\ell = 0,\dots,P$, дают вклад

$$-f(x_\ell)\Big(g'(x_\ell+0) - g'(x_\ell-0)\Big) + \Big(f'(x_\ell+0) - f'(x_\ell-0)\Big)g(x_\ell).$$

Таким образом, в общем случае

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\Pi f(x)g''(x)dx &= f(\Pi)g'(\Pi) - f'(\Pi)g(\Pi) - f(0)g'(0) + f'(0)g(0)\\ &+ \int\limits_0^\Pi f''(x)g(x)dx - \sum_{\ell=0}^{P} f(x_\ell)\Big(g'(x_\ell+0) - g'(x_\ell-0)\Big)\\ &+ \sum_{\ell=0}^{P}\Big(f'(x_\ell+0) - f'(x_\ell-0)\Big)g(x_\ell). \quad (55)\end{aligned}$$

Если обе функции f и g удовлетворяют условиям (34) (например, обе принадлежат области определения (5) или являются решениями уравнения (7), возможно, с разными значениями E), то скачки производных пропорциональны значениям функций с одним и тем же коэффициентом λ_ℓ, и вклады точек $x = x_\ell$ в (55) взаимно уничтожаются. В

этом случае справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_0^{\Pi} f(x)g''(x)dx = f(\Pi)g'(\Pi) - f'(\Pi)g(\Pi) - f(0)g'(0) + f'(0)g(0) + \int_0^{\Pi} f''(x)g(x)dx. \quad (56)$$

В случае $\Pi = +\infty$ в формуле не будет слагаемых с Π (при условии, что соответствующие внеинтегральные члены стремятся к нулю).

Подчеркнём, что если условиям (34) удовлетворяет лишь одна из функций, формула (56) не имеет места: например, если $f \in C^2[0,\Pi]$ (производная f непрерывна в точках x_ℓ), а g удовлетворяет (34), то из (55) получаем

$$\int_0^{\Pi} f(x)g''(x)dx = f(\Pi)g'(\Pi) - f'(\Pi)g(\Pi) - f(0)g'(0) + f'(0)g(0) + \int_0^{\Pi} f''(x)g(x)dx - \sum_{\ell=0}^{P} \lambda_\ell f(x_\ell)g(x_\ell). \quad (57)$$

Последняя сумма – это в точности вклад потенциала (2): формула (57) означает, что $\int_0^{\Pi} f\,(Hg)\,dx = \int_0^{\Pi} (Hf)\,g\,dx$ с учетом внеинтегральных членов, где $Hf = -f'' + \sum_\ell \lambda_\ell f(x_\ell)\delta(x - x_\ell)$ понимается в смысле обобщенных функций. Именно формула (57) используется в п. 3.4 при выводе (47).

4.6. Вариация произвольной постоянной. Докажем формулу (26). В п. 4.2 мы показали, что $W(\phi,\psi) = \phi'\psi - \phi\psi'$ постоянен; не умаляя общности, будем считать, что $W(\phi,\psi) = 1$. Положим

$$K(r,t) = \phi(t,z_1)\psi(r,z_1) - \phi(r,z_1)\psi(t,z_1), \quad (58)$$

$$y(r) = \theta(r,z_1) + (z_2 - z_1)\int_0^r K(r,t)\,\theta(t,z_2)\,dt, \quad (59)$$

и проверим, что y является решением уравнения $Hy = z_2 y$, где H – оператор (1) с потенциалом (2), с теми же начальными данными $y(0) =$

ξ, $y'(0)=\eta$, что и $\theta(\cdot,z_2)$. В силу единственности решения задачи Коши (решение однозначно продолжается через каждую точку x_ℓ условиями непрерывности и (34)) отсюда будет следовать $y=\theta(\cdot,z_2)$, то есть формула (26).

Пусть r не совпадает ни с одной из точек x_ℓ из (2). Так как $K(r,r)=0$, дифференцирование по верхнему пределу не дает вклада, и

$$y'(r)=\theta'(r,z_1)+(z_2-z_1)\int_0^r \big(\phi(t,z_1)\psi'(r,z_1) - \phi'(r,z_1)\psi(t,z_1)\big)\theta(t,z_2)\,dt. \tag{60}$$

Дифференцируя еще раз, на верхнем пределе получаем $\phi(r)\psi'(r)-\phi'(r)\psi(r)=-W(\phi,\psi)=-1$, а под интегралом пользуемся тем, что между точками x_ℓ функции ϕ и ψ удовлетворяют уравнению без потенциала:

$$\phi''=-z_1\phi, \qquad \psi''=-z_1\psi.$$

$$y''(r)=\theta''(r,z_1)-(z_2-z_1)\theta(r,z_2)-z_1\cdot\underbrace{(z_2-z_1)\int_0^r K(r,t)\theta(t,z_2)\,dt}_{y(r)-\theta(r,z_1)}$$

$$=-z_1\theta(r,z_1)-(z_2-z_1)\theta(r,z_2)-z_1\big(y(r)-\theta(r,z_1)\big)=-(z_2-z_1)\theta(r,z_2)-z_1y(r).$$

Здесь использовано, что $-\theta''(r,z_1)=z_1\theta(r,z_1)$. Итак, между точками x_ℓ

$$-y''(r)=z_1y(r)+(z_2-z_1)\theta(r,z_2). \tag{61}$$

Проверим начальные данные и условия в точках x_ℓ. При $r=0$ интегралы в (58) и (60) обращаются в нуль, поэтому $y(0)=\theta(0,z_1)=\xi$, $y'(0)=\theta'(0,z_1)=\eta$. Функция y непрерывна на $[0,\infty)$, так как непрерывны $\theta(\cdot,z_1)$ и интеграл в (58). Далее, из (60) и условий (34) для решений ϕ и ψ получаем

$$y'(x_\ell+0)-y'(x_\ell-0)=\lambda_\ell\theta(x_\ell,z_1) + (z_2-z_1)\int_0^{x_\ell}\big(\phi(t,z_1)\lambda_\ell\psi(x_\ell,z_1)-\lambda_\ell\phi(x_\ell,z_1)\psi(t,z_1)\big)\theta(t,z_2)\,dt$$

$$= \lambda_\ell \left(\theta(x_\ell, z_1) + (z_2 - z_1) \int_0^{x_\ell} K(x_\ell, t)\, \theta(t, z_2)\, dt \right) = \lambda_\ell y(x_\ell),$$

то есть y удовлетворяет условиям (34).

Осталось сравнить y с $\theta(\cdot, z_2)$. Функция $\theta(\cdot, z_2)$ удовлетворяет тому же уравнению (61), поскольку

$$-\theta''(\cdot, z_2) = z_2\theta(\cdot, z_2) = z_1\theta(\cdot, z_2) + (z_2 - z_1)\theta(\cdot, z_2).$$

Поэтому разность $w = y - \theta(\cdot, z_2)$ удовлетворяет между точками x_ℓ однородному уравнению $-w'' = z_1 w$, условиям (34) и нулевым начальным данным $w(0) = w'(0) = 0$, откуда $w \equiv 0$. Следовательно, $y = \theta(\cdot, z_2)$, что и составляет содержание формулы (26).

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю А. А. Федотову за постановку задачи, регулярные обсуждения результатов и постоянную помощь на всех этапах исследования.

Список литературы

1. С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёэг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике,* Москва, “Мир”, 1991.
2. N. I. Andronov, A. A. Fedotov, *On a Schrödinger equation with potential barriers the distances between which increase.* — Math. Notes **118**, No. 3 (2025), 647–665.
3. D.B. Pearson, *Singular continuous measures in scattering theory.* — Commun. Math. Phys. **60**, No. 1 (1978), 13–36.
4. D.J. Gilbert, D.B. Pearson, *On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators.* — J. Math. Anal. Appl. **128**, No. 1 (1987), 30–56.
5. C. Shubin Christ, G. Stolz, *Spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions.* — J. Math. Anal. Appl. **184**, No. 3 (1994), 491–516.
6. V. Lotoreichik, S. Simonov, *Spectral analysis of the half-line Kronig–Penney model with Wigner–von Neumann perturbations.* — Rep. Math. Phys. **74**, No. 1 (2014), 45–72.
7. А. А. Пожарский, *Об операторах типа Ванье–Штарка с сингулярными потенциалами.* — Алгебра и анализ **14**, No. 1 (2002), 158–193; St. Petersburg Math. J. **14**, No. 1 (2003), 119–145.
8. А. А. Пожарский, *О природе спектра Штарка–Ванье.* — Алгебра и анализ **16**, No. 3 (2004), 171–200; St. Petersburg Math. J. **16**, No. 3 (2005), 561–581.
9. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы)*, Москва, “Наука”, 1970. 671 с.
10. V. Buslaev, A. Fedotov, *On the difference equations with periodic coefficients.* — Advances Theor. and Math. Phys. **5**, No. 6 (2001), 1105–1168.

11. Cycon, Hans L., et al. Schrödinger operators: with applications to quantum mechanics and global geometry. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1987.
12. M.-R. Herman, *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnol'd et de Moser sur le tore de dimension 2.* — Comment. Math. Helv. **58**, No. 3 (1983), 453–502.
13. К. Исии, *Localization of eigenstates and transport phenomena in the one-dimensional disordered system.* — Prog. Theor. Phys. Suppl. **53** (1973), 77–138.
14. L. A. Pastur, *Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation.* — Comm. Math. Phys. **75**, No. 2 (1980), 179–196.
15. П.Халмош, *Теория меры*, М., ИЛ, 1953.
16. H. L. Royden, P. M. *Fitzpatrick Real Analysis*, 4th ed., Pearson, 2010.
17. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1987.
18. Э. А. Coddington, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, М., Изд-во ЛКИ, 2007.
19. B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, American Mathematical Soc., 2005. – №. 120.
20. M. S. P. Eastham, H. Kalf, *Schrödinger-type Operators with Continuous Spectra*, Research Notes in Math. Vol. 65, Pitman Adv. Publ., Boston/London, 1982.

Andronov N. I. On subordinate solutions for the Schrödinger operator with a potential equal to a sum of delta functions.

In this paper, we prove that the spectrum of the Schrödinger operator on the half line with a potential equal to the sum of δ-functions, the distances between the support points of which grow linearly with the indices of the terms, contains no absolutely continuous component. To this end, the results of D. J. Gilbert and D. B. Pearson from the theory of subordinate solutions are generalized to the case of the Schrödinger operator with a potential equal to the sum of δ-functions concentrated on a countable set of points.

С.-Петербургский
Государственный Университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nickandronick@gmail.com

Поступило 30 сентября 2026 г.