Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 553, 2026 г.

В. М. Бабич, А. П. Киселев, М. В. Перель, А. Б. Плаченов

ГАУССОВЫ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ И ПАКЕТЫ В ЛЕНИНГРАДЕ И САНКТ-ПЕТЕРБУРГЕ. ОБЗОР

§1. Введение

Локализованное, или сосредоточенное – для нас это синонимы – распространение энергии вызывает интерес человечества с древних времен. Попытки построения явных формул для локализованных решений уравнений электродинамики и их простой модели – волнового уравнения – можно проследить по крайней мере с начала 20 века (см., например, классическую книгу Г. Бейтмена [1]). Первые содержательные результаты по локализованным решениям были получены в начале 1960х годов, когда появилась серьезная прикладная мотивация, связанная с развитием лазерной техники. В работах, относившихся к теоретической оптике, началось изучение первых *приближенных* решений, обладающие сильной локализацией – *гауссовых пучков*. Их целью было описание полей в оптических резонаторах. Позже возникла и другая мотивация рассмотрения гауссовых пучков, связанная с направленной передачей энергии на большие расстояния.

Первые шаги были сделаны в середине 1960х годов в США и СССР. Подробный обзор ранних американских исследований, данный их активным участником Э. Сигменом [2,3], естественно, гораздо менее полон в отношении советских работ. В СССР исследования локализованных волновых решений велись преимущественно в Ленинграде и Москве.

В Ленинграде сформировались несколько групп, получивших по этой тематике значительные результаты. Нам ближе всего деятельность исследователей математической направленности, группировавшихся вокруг дифракционного семинара ЛОМИ (Ленинградского отделения математического института им. В. А. Стеклова АН СССР).

Ключевые слова: Гауссовы пучки, гауссовы волновые пакеты, параксиальные решения, точные решения, суммирование гауссовых пучков, квазифотоны, вейвлет-анализ, резонаторы.

Семинаром руководили В. М. Бабич и В. С. Булдырев [4], и его участниками были прежде всего их ученики и сотрудники. Эта группа, правда, с сильно изменившимся личным составом, продолжает исследования локализованных решений и по сей день. Для нее, особенно на ранних этапах, было характерно рассмотрение волн в неоднородных средах с самой общей пространственной зависимостью параметров, нередко без внимания к простым частным случаям.

Отметим также исследования группы, работавшей в Государственном Оптическом институте (ГОИ), в особенности, Н. Н. Розанова, а также Ю. А. Ананьева [5, 6] и их сотрудников. Некоторые исторические сведения о работах, выполненных в ГОИ, можно найти в недавней статье Розанова, Архипова и Архипова [7]. Ряд исследований, преимущественно для нелинейного случая, выполнен в 1960е – 1970е годы группой Э. Е. Фрадкина в ЛГУ. Нелинейные явления активно изучаются сейчас группой Н. Н. Розанова, а также в Университете ИТМО С. А. Козловым с сотрудниками.

В настоящем обзоре мы подробно опишем результаты, полученные в Ленинграде–Санкт-Петербурге, фокусируясь преимущественно на исследованиях участников семинара ЛОМИ (теперь ПОМИ) и уделяя гораздо меньше внимания деятельности других исследовательских групп. Мы ограничимся историей развития теории гауссовых пучков и их обобщений в линейной теории, при этом совсем не касаясь исследования нелинейных процессов (среди участников семинара этими вопросами занимались, в частности, И. А. Молотков и С. А. Вакуленко [8]). Мы стремимся выделить важные оригинальные идеи и результаты, не следуя буквально за фактическим ходом исследований.

Перечислим в порядке русского алфавита ленинградских–петербургских ученых, внесших вклад в теорию гауссовых пучков: Ю. А. Ананьев, В. М. Бабич, А. С. Благовещенский, М. И. Белишев, В. Ф. Бойцов, В. С. Булдырев, Е. А. Городницкий, В. Э. Грикуров, А. П. Качалов, Н. Я. Кирпичникова, А. П. Киселев, В. Н. Кудашов, В. В. Куйдин, В. Ф. Лазуткин, А. И. Ланин, В. Е. Номофилов, Т. Ф. Панкратова, М. В. Перель, А. Б. Плаченов, М. М. Попов, А. М. Радин, Н. Н. Розанов, М. С. Сидоренко, А. М. Тагирджанов, В. В. Улин, И. В. Фиалковский. Этот список не полон.

§2. Специфика и хронология исследований в Ленинграде–Санкт-Петербурге

В начале 1960х годов из результатов численного моделирования и из анализа точных решений задач резонаторного типа стало ясно, что уравнения, описывающие высокочастотные монохроматические волновые процессы, имеют решения, гауссовски сосредоточенные вблизи лучей. Наиболее удобным способом их описания оказался метод параболического уравнения, допускающий (как выяснилось, прежде всего, благодаря ленинградским работам) обобщения на неоднородные (в том числе, достаточно сложные) среды и построение высших приближений. Мысль о полезности в этих вопросах метода параболического уравнения ясно высказал москвич Вайнштейн [9], а первое успешное ее применение (в скалярной задаче) принадлежит американцу Когельнику [10]. Ленинградские исследования первоначально были направлены в основном на распространение этих результатов на неоднородные среды, построение высших приближений и обобщений на разные уравнения математической физики – прежде всего, электродинамики и теории упругости.

Исследования сосредоточенных решений вдохновлялись на начальном этапе резонаторными задачами, где требовалось удовлетворить некоторым граничным условиям. Нахождение собственных частот представлялось тогда многим исследователям главной задачей, а построение формул для собственных функций – второстепенной. С этой точки зрения эквивалентом теории, базирующейся на гауссовых пучках, казался *лучевой метод в малом*, имеющий дело только с геометрией лучей, без интереса к описанию волнового поля. Он, однако, позволял правильно определить собственные частоты довольно сложных резонаторов, найти геометрические условия их устойчивости и т.д. Оказалось, что там, где применим лучевой метод в малом, естественно возникает и соответствующее параболическое уравнение, допускающее явное решение. В Ленинграде активно развивались оба похода. Так, М.М. Попов одновременно опубликовал две работы, посвященные близким вопросам, но использующие разные подходы [11, 12].

Другой причиной внимания к гауссовым пучкам стал интерес к направленной передаче энергии. Здесь возникал вопрос о пригодности теории на больших расстояниях и о нестационарных обобщениях, в частности, для построения сильно локализованных волновых пакетов. Эти темы также разрабатывались в Ленинграде–Санкт-Петербурге.

Наконец, в Ленинграде зародилась идея использования гауссовых пучков и пакетов как средства для вычисления полей в присутствии каустик, основанная на разложении высокочастотного поля в интеграл по пучкам. Эта идея получила дальнейшее развитие в рамках вейвлет-анализа.

В 1960-е годы в Ленинграде построены приближенные гармонические по времени сосредоточенные решения для неоднородных сред, в частности, для электродинамики и теории упругости. Получены яркие результаты по теории резонаторов, в том числе, установлена роль устойчивости лучей, предложены алгоритмы нахождения собственных частот и собственных функций (точнее, квазимод) многозеркальных многослойных резонаторов, исследована проблема "малых знаменателей".

Как уже было сказано выше, своеобразие ленинградских исследований выражалось в интересе группы Бабича–Булдырева к рассмотрению сред с переменной скоростью распространения. Участники дифракционного семинара ЛОМИ редко упускали возможность построения высших приближений, зато часто пренебрегали рассмотрением простых частных случаев. Поэтому многие их результаты были впоследствии переоткрыты в упрощенной форме. Так, в статье Бабича [13] о спектре лапласиана на замкнутом римановом многообразии (работа подробно изложена в [4]) уже присутствуют и гауссовы пучки с произвольным астигматизмом, и высшие моды.

Изучение гауссовых пучков (начиная с посвященной двумерному случаю работы Булдырева [14]) первоначально велись в Ленинграде параллельно и, до некоторой степени, единообразно с рассмотрением волн шепчущей галереи (см. [4, 14]).

В 1970-е годы асимптотическая теория локализованных решений перенесена на векторные задачи, в особенности, на теорию упругости, и на задачи квантовой механики. Развита теория гауссовых решений для поверхностных волн. Построены двумерные аналоги гауссовых пучков – волновые пленки.

В 1980е и 1990е годы построены приближенные нестационарные решения (квазифотоны и пространственно-временны́е пучки), начал систематически развиваться метод суммирования гауссовых пучков, сперва для гармонического по времени режима, а потом и с использованием нестационарных пучков и пакетов. Построены первые точные решения волнового уравнения, имеющие гауссовскую локализацию.

В XXI веке систематически строились точные решения для пучков и пакетов (п. 10), велись исследования по теории высших мод для однородных сред, происходило масштабное применение метода суммирования, возникли его приложения к теории вейвлетов.

Бóльшая часть обзора посвящена различным вариантам приближенной теории гауссовски локализованных волн. В п. 10 рассмотрены точные решения волнового уравнения, обладающие гауссовской локализацией. В п. 11 и 12 рассмотрены интегральные представления волновых полей: суммирование гауссовых пучков и разложения, основанные на аппарате непрерывного вейвлет-анализа. В Приложении рассмотрена самая простая задача, где монохроматический гауссов пучок получается в результате элементарного разделения переменных – это задача о прыгающем мячике в эллипсе.

§3. Простейший случай: параксиальные монохроматические пучки в однородной среде

Гауссов пучок – это решение уравнения, описывающего волновой процесс, которое гауссовски сосредоточено в окрестности луча. Сначала мы опишем построение приближенных гауссовых пучков в простейшем случае однородной среды, когда лучи – прямые линии. Дальше будут рассмотрены различные обобщения и модификации этих результатов.

3.1. Параболическое уравнение Леонтовича. Первые результаты по гауссовым пучкам были получены в монохроматическом случае для однородной среды методом параболического уравнения. Метод параболического уравнения был предложен в качестве универсального подхода к описанию разнообразных высокочастотных параксиальных волновых процессов москвичом Леонтовичем и проиллюстрирован им на учебном примере [15]. Первое содержательное применение методу нашли Леонтович и Фок [16, 17] в трудной задаче дифракции Френеля на гладком выпуклом теле[1]. Использование метода параболического уравнения для построения локализованных решений относится к 1960м годам (см. п. 3.6). Метод продолжает оставаться важным (хотя уже и не единственным) средством построения гауссовски локализованных решений уравнений теории распространения волн.

[1]Дальнейшее развитие классических работ [17] по дифракции на гладких выпуклых препятствиях описано в обзоре [18]

Пусть волновой процесс описывается трехмерным (скалярным линейным) волновым уравнением

$$\Box U := U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0, \tag{1}$$

где $U = U(x, y, z, t)$, а c – скорость распространения волн. В этом пункте предполагается, что $c = \text{const}$. Переход к монохроматическому (гармоническому по времени) режиму осуществляется подстановкой

$$U = e^{-i\omega t} V, \quad V = V(x, y, z; \omega) \tag{2}$$

(ω – угловая частота), приводящей к трехмерному уравнению Гельмгольца

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} V = 0. \tag{3}$$

Выберем за преимущественное направление распространения волн направление оси z и выделим осциллирующий множитель

$$V = e^{ikz} W = e^{i\frac{\omega}{c} z} W, \tag{4}$$

где

$$k = \omega / c \tag{5}$$

– волновое число. Координату z будем называть продольной, а x и y – поперечными. Мы стремимся описать высокочастотный волновой процесс, сосредоточенный в окрестности оси z, которая называется *осью пучка*; в Ленинграде укоренился альтернативный термин *опорный луч*. Поскольку в (4) выделена основная осцилляция в продольном направлении, предполагается, что в точном уравнении

$$W_{xx} + W_{yy} + 2ikW_z + W_{zz} = 0$$

можно пренебречь членом W_{zz} [2]. Отбросив W_{zz}, приходим к знаменитому *параболическому уравнению* Леонтовича

$$W_{xx} + W_{yy} + 2ikW_z = 0. \tag{6}$$

[2]Детальное сравнение W_{zz} с другими членами для случая гауссова пучка выполнено Грикуровым и Киселевым [19]. Отброшенный член может быть учтен при построении высших приближений. Для простейшего решения, рассмотренного в настоящем пункте, это проделано в [19], о более сложных случаях (неоднородная среда и др.) см., например, [4].

Подстановку (4) (как и ее естественное обобщение на неоднородную среду) естественно называть *анзацем Леонтовича–Фока*. Волновые поля, описываемые таким образом, называют *параксиальными*, поскольку они распространяются преимущественно вдоль оси z.

Странное, с современной точки зрения, название, выбранное Леонтовичем для уравнения (6), перешло и в англоязычную литературу, однако упоминания в этом контексте Леонтовича и Фока нерусскоговорящими авторами довольно редки. В английской литературе уравнение (6) нередко называют *параксиальным волновым уравнением*.

Более формально к уравнению (6) можно прийти, положив $W = W(\sqrt{\omega}x, \sqrt{\omega}y, z)$, $\omega \to \infty$, и приравняв к нулю коэффициент при старшей степени ω. Построение высших приближений (по-видимому, впервые предпринятое в ленинградских работах 1960х годов) основано на анзаце

$$W = W_0(\sqrt{\omega}x, \sqrt{\omega}y, z) + \frac{1}{i\omega}W_1(\sqrt{\omega}x, \sqrt{\omega}y, z) + \dots . \tag{7}$$

Эта конструкция естественным образом обобщается на неоднородные среды, рассмотрению которых посвящена значительная часть исследований группы Бабича–Булдырева.

3.2. Осесимметрическая фундаментальная мода. Возникшие (по крайне мере, в контексте оптики) в 1960-е годы простейшие решения, описывающие пучки с гауссовской локализацией, получаются в результате комплексного сдвига $z \mapsto z - ia$, (где $a > 0$ – произвольно выбранная постоянная) в известном из учебников по уравнениям математической физики решении $\widetilde{W} = \frac{1}{z}\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$ уравнения (6). Таким образом, мы приходим к решению параболического уравнения

$$W = W^0 = \frac{1}{z - ia}\exp\left\{ik\frac{x^2+y^2}{2(z-ia)}\right\} \tag{8}$$

и получаем соответствующее приближенное *параксиальное монохроматическое* решение уравнения (1)

$$G = \frac{1}{z - ia}\exp\left\{ik\left[z - ct + \frac{x^2+y^2}{2(z-ia)}\right]\right\}. \tag{9}$$

Поскольку абсолютная величина экспоненты в (9) равна

$$\exp\{-ka(x^2+y^2)/(z^2+a^2)\},$$

это решение гауссовски локализовано около оси z. Оно называется *осесимметрической фундаментальной гауссовой модой*. Параметр a называют длиной Релея, за ширину пучка в самом узком сечении $z = 0$ – перетяжке – принимают $\sqrt{a/k}$. Пучок узок, если $ka \gg 1$.

Для случая двух пространственных переменных (x, z) параболическое уравнение имеет вид

$$W_{xx} + 2ikW_z = 0, \tag{10}$$

а аналогичное (9) решение –

$$g = \frac{1}{\sqrt{z - ia}} \exp ik \left\{ z - ct + \frac{x^2}{2(z - ia)} \right\}. \tag{11}$$

3.3. Астигматическая фундаментальная мода. Более общим гауссовски локализованным решением параболического уравнения является *фундаментальная астигматическая мода*,

$$G = \sqrt{\det \mathbf{\Gamma}} \exp ik \left\{ z - ct + \frac{1}{2} \langle \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} \rangle \right\}, \tag{12}$$

причем $\boldsymbol{\rho} = (x, y)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}(z)$ – симметричная матрица 2×2 с положительной мнимой частью, $\mathrm{Im}\mathbf{\Gamma} > 0$ [3], $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{g}}$ – двумерное скалярное произведение, $^{\mathrm{T}}$ – транспонирование, а $^{-}$ – комплексное сопряжение. В осесимметрическом случае (9) матрица $\mathbf{\Gamma}$ (с точностью до множителя, специальным образом зависящего от z) единичная. Ряд удобных формул, связывающих значения $\mathbf{\Gamma}(z)$ при различных значениях z, приведен Плаченовым, Кудашовым и Радиным в работе [20].

Случай диагональной $\mathbf{\Gamma}$, когда

$$G = \frac{1}{\sqrt{(z - ia_1)(z - ia_2)}} \exp ik \left\{ z - ct + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{z - ia_1} + \frac{y^2}{z - ia_2} \right) \right\}, \tag{13}$$

соответствует *простому астигматизму*. Здесь $a_{1,2}$ – постоянные с положительными вещественными частями.

3.4. Высшие моды. Решения параболического уравнения (6), имеющие вид

$$W = \mathrm{H}W^0, \quad \mathrm{H} = \mathrm{H}(x, y, z) \neq \mathrm{const}, \tag{14}$$

где W^0 даётся формулой (8), порождают *высшие (параксиальные) моды* – приближенные решения уравнения (1), согласно формулам (2) и

[3] Матрицу $\mathbf{\Gamma}(z)$ можно произвольно выбрать при каком-нибудь z.

(4). Им посвящена огромная литература. Функции H мы называем соответствующими *амплитудами*. Простейшие высшие моды, в которых амплитуды выражаются через многочлены Эрмита и Лагерра, встречаются уже в работах [21–23].

3.5. Большие продольные расстояния. Построения, основанные на методе параболического уравнения, требуют модификации для больших продольных расстояний, где естественно выделять в (4) не e^{ikz}, а осциллирующие множители $e^{\pm ikR}$, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, отвечающие приходящим и уходящим сферическим волнам

$$G \approx \pm \frac{\exp(\pm ikR)}{R} \mathcal{F}_{\pm}(\chi, \varphi), \quad z \to \pm\infty, \quad \frac{|\boldsymbol{\rho}|}{R} \ll 1. \tag{15}$$

Здесь χ и φ, $0 \le \chi \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$ – угловые сферические координаты,

$$x = R\sin\chi\cos\varphi, \quad y = R\sin\chi\sin\varphi, \quad z = R\cos\chi. \tag{16}$$

Диаграммы направленности $\mathcal{F}_+$ и $\mathcal{F}_-$ гауссовски локализованы вблизи направлений соответственно положительной и отрицательной полуосей z. В осесимметрическом случае (9)

$$\mathcal{F}_+ \approx \exp(-ka\chi^2/2), \qquad \mathcal{F}_- \approx -\exp(-ka(\pi - \chi)^2/2). \tag{17}$$

Диаграммы для фундаментальной моды в случае простого астигматизма приведены Грикуровым и Киселевым [19,24], для общего астигматизма – Киселевым и Плаченовым [25].

3.6. Исторические замечания. Первым известным примером решения уравнения Гельмгольца, имеющего, как впоследствии выяснилось, гауссовскую поперечную локализацию, можно считать поля типа прыгающего мячика – точные решения краевой задачи в эллипсе, рассмотренные в 1960 году Келлером и Рубинау [26]. В пионерских работах Булдырева [14] и Вайнштейна [27, 28], основанных на методе параболического уравнения, решения, эквивалентные приведенным в п. 3, были представлены в форме, естественно возникавшей при анализе точного решения. Анализ точного решения двумерной задачи об эллипсе, доведенный до выражения (11), приведен в Приложении.

Параболическое уравнение (6) совпадает по форме с квантовомеханическим уравнением для свободной частицы. Решение (8) известно в квантовомеханическом контексте, по крайней мере, с 1920х годов, как *гауссов пакет* (например, [29]) – ниже этот термин имеет совсем

другой смысл, см. пп. 9.2 и 10.2.2. Употребляется также термин *когерентное состояние*. В известной работе Шрёдингера [30] локализованное решение возникало в задаче, где рассматривался случай потенциала, квадратичного по поперечным координатам – потенциальная яма. Однако уже в ранних ленинградских работах, см., например, книгу Бабича и Булдырева [4], выяснилось, что присутствие квадратичного по поперечным переменным потенциала и его знак не имеют значения для существования таких решений.

В 1960е годы было установлено, что аналогичные выражения, где роль времени играет продольная координата, и их разнообразные обобщения описывают локализованные решения уравнения Гельмгольца, Максвелла и т.д. Сперва речь шла об асимптотических решениях, позже были найдены и соответствующие точные решения, как для нестационарного режима, так и для монохроматического.

Приближенное решение уравнения Гельмгольца (9) построил в удобной форме (способом, изложенным в п. 3.1) американец Когельник в статье [10], где, по-видимому, впервые, возник термин *гауссов пучок*. Там имеется ясная отсылка к методу параболического уравнения Леонтовича [15, 16]. Мысль об описании поля в резонаторе методом параболичесого уравнения была ранее отчетливо выражена москвичем Вайнштейном в статье [9], где дело осложнено, однако, использованием сфероидальных координат. В вышедшей чуть позже статье Булдырева [14] гауссов пучок для двумерного случая присутствует, но выписан в неудобной форме, основанной на точном решении (см. Приложение). В заслуженно знаменитой статье Когельника и Ли [21, 22], опубликованной одновременно в двух американских журналах (есть еще и ее русский перевод [23]), ссылок на [15, 16] уже нет.

В числе первых попыток написать для однородной среды астигматическое решение (12) в резонаторном контексте отметим работы Попова [31, 32] и Бойцова [33] – последний исходил из интегрального уравнения. Чуть позже, в немного другой форме, Арно и Когельник [34] пришли к аналогу (12), рассматривая прохождение осесимметрического пучка через линзы. Для неоднородной среды подобные решения нашел, ещё до Арно и Когельника, в рамках метода параболического уравнения Бабич [13], изучавший очень общую задачу – построение локализованных вблизи геодезической собственных функций

оператора Лапласа на римановом многообразии произвольной размерности $m \geq 2$. Эта работа, в которой построены и высшие приближения, подробно изложена в [4]. В контексте исследования собственных функций трехмерного многозеркального резонатора с неоднородным заполнением астигматические пучки вводил Попов [12], см. также [4]. Такие решения обсуждались (примерно в то же время) и в квантово-механическом контексте [35, 36].

§4. Классический лучевой метод, [4]

4.1. Лучевой анзац. Лучи – это линии, в окрестности которых (и, по-видимому, только в их окрестности, если нет границ раздела сред) возможна локализация волнового процесса, описываемого уравнением (1). В случае постоянной скорости лучи – прямые. Поскольку теория гауссовых пучков базируется на понятии луча, мы напомним основы лучевого метода описания высокочастотных волн. Рассмотрим волновое уравнение (1) с переменной, вообще говоря, но гладкой скоростью $c = c(x, y, z)$. Фундаментальную роль в теории высокочастотных волн играют асимптотические разложения вида

$$V = e^{i\omega\tau(x,y,z)}\mathscr{W}, \tag{18}$$

$$\mathscr{W} \sim \mathscr{W}_0(x, y, z) + \frac{1}{-i\omega}\mathscr{W}_1(x, y, z) + ..., \qquad \omega \to \infty. \tag{19}$$

Эйконал τ имеет смысл геометрического времени пробега волны вдоль луча. Здесь функция (18) удовлетворяет уравнению (3), в котором $c = c(x, y, z)$ – гладкая функция координат. Для ленинградской школы было принято характеризовать неоднородную изотропную среду скоростью распространения волн, а не показателем преломления.

Использование размерного параметра – частоты ω – удобно для математического формализма; в действительности, разложение ведется по безразмерным параметрам, (см. например, 10ю главу монографии [4]).

Подставляя *лучевой анзац* (18),(19) в уравнение (3) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $i\omega$, получаем *уравнение эйконала* для τ

$$(\nabla\tau)^2 = 1/c^2(x, y, z) \tag{20}$$

и *уравнения переноса* для амплитудных функций $\mathscr{W}_0$, $\mathscr{W}_1$, ... Для главного члена

$$2\nabla\tau\,\nabla\mathscr{W}_0 + \mathscr{W}_0\Delta\tau = 0, \tag{21}$$

где $\Delta\mathscr{W} := \mathscr{W}_{xx} + \mathscr{W}_{yy} + \mathscr{W}_{zz}$ – традиционное обозначение оператора Лапласа.

4.2. Эйконал и амплитудные функции. Эйконал $\tau(x, y, z)$ можно найти с помощью классических вариационных соображений (например, [4]). Рассмотрим интеграл вдоль гладкой кривой, соединяющей точки $M_0 \in \mathbb{R}^3$ и $M \in \mathbb{R}^3$

$$\int_{M_0}^{M} ds/c(x, y, z). \tag{22}$$

Здесь ds – дифференциал длины дуги. Физический смысл интеграла Ферма (22) – время, за которое точка, вышедшая из M_0 и бегущая со скоростью $c(x, y, z)$ дойдет до M. Зафиксировав точки M_0 и M и разыскивая соединяющую их кривую из условия минимальности времени пробега, придем к стандартной задаче вариационного исчисления. Ее решения – экстремали интеграла (22) – в нашем случае называются *лучами*.

Важны прежде всего регулярные *поля лучей*, т. е. такие семейства лучей, что через каждую точку рассматриваемой области проходит ровно один луч. Задание интеграла (22) вдоль луча, которое мы обозначим через $\tau(M)$, определяет точку M однозначно (но если среда неоднородна, то, вообще говоря, не во всем пространстве, а только в окрестности M_0). Примером (в достаточно малой окрестности M_0, а для однородной среды – во всем пространстве) является центральное поле, отвечающее точечному источнику в точке M_0, из которой лучи выходят во всех направлениях. Определим эйконал формулой (22), причем интеграл берется вдоль этого луча. Пусть параметры (η, ζ) (например, сферические углы) характеризуют направление выхода луча из M_0. Задавая *лучевые координаты* (τ, η, ζ), мы однозначно определим точку M.

Другим примером служит поле лучей, связанное с гладкой поверхностью S, см., например, [4, 37]. Здесь лучевыми координатами (η, ζ), характеризующими луч, служат какие-либо координаты на S.

Эти построения дают поля лучей, регулярные в некоторой окрестности, соответственно, точки M_0 и поверхности S. На достаточно больших расстояниях регулярность может нарушаться и возникают каустики, поле вблизи которых описывается более сложными конструкциями. Одной из них является метод суммирования гауссовых пучков, см. п. 11.

Уравнение (21) (как и каждое из уравнений для высших приближений) оказываются обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка по τ и решается в квадратурах. Для старшего члена

$$\mathscr{W}_0 = \chi(\eta,\zeta)\sqrt{c/J}, \qquad J = |[\partial\mathbf{R}/\partial\eta \times \partial\mathbf{R}/\partial\zeta]|\,. \tag{23}$$

Здесь $\mathbf{R} = (x, y, z)$ – радиус-вектор точки, а $\chi(\eta, \zeta)$ – произвольная гладкая функция ("постоянная интегрирования" при интегрировании вдоль луча). Для нахождения $\chi(\eta, \zeta)$ нужна дополнительная информация, например, значение функции $\mathscr{W}_0$ на некоторой поверхности. Вблизи точек, где геометрическое расхождение J обращается в нуль, лучевая конструкция непригодна. Это точки каустик.

Построение высших приближений происходит аналогично. Точно так же строятся лучевые решения в двумерном случае. Подробное изложение затронутых вопросов имеется во многих руководствах, например [4].

Из многочисленных обобщений конструкции (18) отметим ее пространственно-временную версию, см. п. 9.1, которая потребуется нам при асимптотическом описании гауссовых импульсов. Если луч встречается с отражающей или преломляющей границей, то высокочастотное волновое поле по одну сторону границы представляется суммой лучевых разложений падающей и отраженной волн, а по другую (если граница прозрачна) – в виде лучевого разложения преломленной волны. Направления лучей, уходящих от границы, и их амплитуды на границе определяется из решения соответствующей задачи о падении плоской волны на плоскую границу однородных полупространств, возникающей при локальном замораживании скоростей и распрямлении границы. Процедурам пересчета геометрического расхождения на границах раздела посвящена обширная литература (см., например, книги [4, 37, 38] и ссылки в них).

§5. Параксиальные пучки в неоднородной среде. Двумерный случай

Опишем основные оригинальные идеи подхода ленинградской школы к построению гауссовых пучков применительно к простому случаю двух пространственных переменных, что позволит рассмотреть громоздкий трехмерный случай более кратко.

Для ленинградского подхода характерен интерес к плавно-неоднородным средам, что требует более серьезного математического аппарата, чем необходим для сред однородных. Основные математические объекты возникают при внимательном рассмотрении формул лучевого метода.

5.1. Лучевой метод в малом. Под *лучевым методом в малом* в настоящем обзоре понимается упрощенная версия лучевого метода, в которой рассмотрения ограничиваются малой окрестностью фиксированного опорного луча. В книге [4] этот метод трактуется более широко, что позволяет, в частности, рассматривать лучи, расположенные в малой окрестности границы области и многократно переотражённые от неё под малыми углами.

Метод активно разрабатывался в Ленинграде, как для построения гауссовых пучков [4, 12, 13], так для нахождения собственных частот резонаторов без изучения их собственных функций [31, 32]. Первоначально гауссовы пучки рассматривались параллельно с волнами шепчущей галереи в качестве асимптотик собственных функций оператора Лапласа в гладкой области, например [14]. Они назывались тогда *функциями типа прыгающего мячика*. Детальное рассмотрение лучевого поля в окрестности фиксированного опорного луча дает очень полезные, а в случае неоднородной среды – необходимые инструменты для описания локализованных в окрестности этого луча решений. Это теория лучей первого приближения, которая для случая неоднородной среды нетривиальна.

Важной частью этой теории является изучение эйконала.

5.1.1. *Эйконал вблизи опорного луча.* Допустим, как это характерно для ленинградской группы, произвольную плавную неоднородность среды, т. е. гладкую зависимость скорости от двух переменных x и z, и положим в (18) $\mathscr{W} = \mathscr{W}(x, z)$. Выберем на плоскости (x, z) опорный луч $\ell \subset \mathbb{R}^2$ и введем в его окрестности локальные координаты (s, n), где s – длина дуги ℓ, отсчитанная от фиксированной ее точки s_0, а

n – расстояние от ℓ по нормали с учетом знака. Вблизи ℓ разложим скорость $c = c(s,n)$ по степеням n:

$$c(s,n) = c_0(s) + c_1(s)n + \frac{1}{2}c_2(s)n^2 + ..., \tag{24}$$

где $c_j(s) = \partial^j c(s,n)/\partial n^j\big|_\ell$, $j = 0,1,2,\ldots$. Соответственно, представим эйконал (см. (22)) в виде

$$\tau = \tau(s,n) = \tau_0(s) + \frac{1}{2}\Gamma(s)n^2 + ... \tag{25}$$

причем

$$\tau_0 = \int_{s_0}^{s} d\mathrm{s}/c_0(\mathrm{s})\,, \tag{26}$$

где интеграл берется вдоль луча. Линейный по n член в (25) отсутствует потому, что ℓ – луч, см., например, [39].

Из уравнения эйконала, принимающего в координатах (n,s) вид $(\tau_n)^2 + (1 + nc_1/c_0)^{-2}(\tau_s)^2 = c^{-2}$, вытекает уравнение Риккати для $\Gamma(s)$:

$$\Gamma^2(s) + \frac{\Gamma'(s)}{c_0(s)} + \frac{\Psi(s)}{c_0^2(s)} = 0\,, \tag{27}$$

где

$$\Psi(s) = \frac{c_2(s)}{c_0(s)}\,, \tag{28}$$

штрих обозначает производную по s. Стандартной подстановкой

$$\Gamma(s) = \frac{q'(s)}{c_0(s)q(s)} \tag{29}$$

оно сводится к линейному уравнению [39]

$$q''(s) - \frac{c_0'(s)}{c_0(s)}q'(s) + \Psi(s)q(s) = 0\,. \tag{30}$$

Оказывается, что (30) совпадает с уравнением Якоби[4], вещественные решения которого $n = q(s)$ приближенно описывают лучи, близкие к ℓ – *лучи первого приближения*. Тогда $q'(s)$ имеет смысл тангенса угла между лучом и ℓ, а отношение $q'(s)/q(s)$ – кривизны фронта $\tau = \mathrm{const}$.

Для однородной среды решения уравнения (30), очевидно, линейны по s. Это сооветствует тому, что в этом случае лучи – прямые, и

[4]Это уравнение можно получить как уравнение Эйлера для экстремалей функционала Ферма, близких к ℓ, см., например, [37].

либо параллельны, либо пересекаются, образуя каустики там, где $q(s)$ обращается в нуль.

5.1.2. *Гамильтонова система и ее фундаментальная матрица.* Любое решение уравнения (30) определяется начальными условиями $q(s_0) = q_0$, $q'(s_0) = q_1$, задающими некоторый луч первого приближения. Удобно принять, что мы зафиксировали значение $\Gamma(s_0)$, тогда из (29) следует, что $q'(s_0) = \Gamma(s_0)c_0(s_0)q(s_0)$. Этим выделяется *поле лучей первого приближения* – однопараметрическое семейство решений уравнения (30), отличающихся друг от друга множителем. Через каждую точку (s, n) в окрестности опорного луча проходит ровно один луч из этого семейства, если $q(s) \neq 0$.

Для рассмотрения периодических решений в п. 5.4 будет удобно использование гамильтонова формализма [4, 12, 13]. Положим $p(s) = q'(s)/c_0(s)$ и перепишем уравнение (30) в виде гамильтоновой системы с гамильтонианом $\frac{1}{2}\left(c_0(s)p^2 + \Psi(s)q^2/c_0(s)\right)$:

$$q'(s) = c_0(s)p(s)\,,\ p'(s) = -\frac{\Psi(s)}{c_0(s)}q(s)\,. \tag{31}$$

По любым двум линейно независимым решениям системы (31) $(q_1(s), p_1(s))^{\mathrm{T}}$ и $(q_2(s), p_2(s))^{\mathrm{T}}$ построим её фундаментальную матрицу

$$\Pi(s) = \begin{pmatrix} q_1(s) & q_2(s) \\ p_1(s) & p_2(s) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Теперь произвольное решение системы (31) выражается через начальные данные по формуле

$$\begin{pmatrix} q(s) \\ p(s) \end{pmatrix} = T(s_0, s)\begin{pmatrix} q(s_0) \\ p(s_0) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где матрица

$$T(s_0, s) = \Pi(s)\Pi^{-1}(s_0) \tag{34}$$

в физической литературе именуется *лучевой матрицей*. В частности, для однородной среды

$$T(s_0, s) = \begin{pmatrix} 1 & c\cdot(s - s_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Если задано значение $\Gamma(s_0)$, то $p(s_0) = \Gamma(s_0)q(s_0)$. При произвольном значении s справедливо равенство

$$\Gamma(s) = p(s)q^{-1}(s)\,. \tag{36}$$

5.1.3. *Амплитудный множитель.* Перейдём к рассмотрению амплитудного множителя $\mathscr{W}_0 = \mathscr{W}_0(s,n)$ в двумерном случае. Из (25) и (26) видно, что при малых n приближенно

$$(2/c_0)\mathscr{W}_0' + \left[(1/c_0)' + q'/c_0 q\right]\mathscr{W}_0 = 0. \tag{37}$$

При $n = O\left(\omega^{-1/2}\right)$, удерживая в разложении эйконала по поперечной координате квадратичные члены и пренебрегая зависимостью амплитудного множителя от n, для двумерного аналога поля (18) получаем

$$V(s,n) \sim \mathscr{W}_0(s,0)e^{i\omega\left[\tau_0(s)+\frac{1}{2}\Gamma(s)n^2\right]}, \tag{38}$$

где, как нетрудно показать,

$$\mathscr{W}_0(s,0) = \sqrt{c_0(s)}A(s), \quad A(s) = A(s_0)\sqrt{\frac{q(s_0)}{q(s)}}. \tag{39}$$

Этот результат согласуется с двумерным аналогом формулы (23), в которой роль геометрического расхождения J играет $q(s)$.

Формула (38) (равно как и (29)) теряет силу в окрестности точек, в которых функция $q(s)$ обращается в нуль. Эти точки – точки фокусировки лучей первого приближения, в малой окрестности которых исходное поле лучей также теряет регулярность, образуя каустику. Здесь и далее каустику мы понимаем в широком смысле (включая сюда, например, и фокус). В окрестности каустик лучевой метод в исходном своем виде неприменим и для описания поля требуются иные средства (см. п. 11).

В важном случае однородной среды, когда $c_0(s) = c$, $c_2(s) = 0$, лучи – прямые, $p(s)$ постоянная, а $q(s)$ – линейная функция, она всегда (если лучи не параллельны) обращается в нуль при некотором s. Это отвечает каустике рассматриваемого поля лучей. Для неоднородной среды появление каустик столь же типично.

Отметим, что в случае однородной среды подкоренное выражение в (39) можно записать в виде $\Gamma(s)/\Gamma_0$, поскольку множители c и p постоянны.

5.1.4. *Отражение от границы.* Пусть среда, в которой происходит распространение волны, ограничена кривой S, на которой поставлено одно из классических краевых условий – для определённости, условие Дирихле. В этом случае решение задачи представляется в виде

суперпозиции падающего и отражённого поля, каждое из которых задается своим лучевым разложением, причём лучи отражаются от S по правилу "угол падения равен углу отражения".

Пусть в точке пересечения падающего опорного луча с границей она имеет радиус кривизны $\mathfrak{R}$, а угол падения равен α. Из элементарных геометрических соображений следует, что значения функций Γ, отвечающих падающему (i) и отражённому (r) лучу, связаны в точке отражения равенством

$$\Gamma_r = \Gamma_i - \frac{2}{c_0 \mathfrak{R} \cos\alpha}\,. \tag{40}$$

Значение $\mathfrak{R}$ положительно, если центр кривизны зеркала находится внутри области, и отрицательно в противном случае, c_0 берётся в точке отражения опорного луча. Значения амплитуд падающей и отражённой волны отличаются знаком.

Начальные данные гамильтоновой системы для отражённой волны в точке отражения выражаются (из геометрических соображений) через соответствующие значения для падающей волны по формуле

$$\begin{pmatrix} q_r \\ p_r \end{pmatrix} = T_S \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где

$$T_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{c_0 \mathfrak{R} \cos\alpha} & 1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

При этом предполагается, что вектор нормали к отражённому лучу получается из соответствующего вектора для падающего зеркальным отражением от касательной к S в точке отражения. В этом случае его ориентация относительно направления луча меняется на противоположную.

5.2. Параболическое уравнение. Фундаментальная мода. Переходим наконец к изложению оригинальных достижений ленинградской школы. Выберем на плоскости (x, z) опорный луч ℓ и введем координаты (s, n) (см. п. 5.1).

Мы будем искать решение в окрестности ℓ в виде обобщенного анзаца Леонтовича–Фока

$$V = \exp(i\omega\tau_0) W, \tag{43}$$

выделяя в экспоненте значение эйконала на самом опорном луче. Сравнивая (43) с (18), мы видим, что для лучевого решения (18) $W =$

$e^{i\omega(\tau(s,n)-\tau_0(s))}\mathscr{W}$, и в окрестности опорного луча в главном приближении

$$W = \exp\left\{i\frac{\omega}{2}\Gamma(s)n^2\right\}\mathscr{W}_0 = \exp\left\{i\frac{\omega}{2}\Gamma(s)n^2\right\}\sqrt{c_0(s)}A(s) \qquad (44)$$

с тем же вещественным Γ и тем же $A(s)$, что и в решении (38), полученном лучевым методом в малом.

Теперь, однако, наша цель – построение решений, *локализованных около опорного луча*. Подстановка анзаца (43) в уравнение (3) дает, в главном приближении, параболическое уравнение [39]

$$W_{nn} + \frac{2i\omega}{c_0(s)}W_s + i\omega\left(\frac{1}{c_0(s)}\right)'W - \frac{\omega^2}{c_0^2(s)}\Psi(s)n^2W = 0\,, \qquad (45)$$

где $\Psi(s)$ – функция (28). Это уравнение допускает разделение переменных. Подстановка

$$W = \sqrt{c_0(s)}\,\widetilde{W}, \qquad (46)$$

избавляет от третьего слагаемого:

$$\widetilde{W}_{nn} + \frac{2i\omega}{c_0(s)}\widetilde{W}_s - \frac{\omega^2}{c_0^2(s)}\Psi(s)n^2\widetilde{W} = 0. \qquad (47)$$

Будем сначала разыскивать решение $\widetilde{W}$, по аналогии со случаем однородной среды и с формулой (44), в виде гауссовой фундаментальной моды

$$\widetilde{W} = \exp\left\{i\frac{\omega}{2}\Gamma(s)n^2\right\}A(s) \qquad (48)$$

с неизвестными $\Gamma(s)$ и $A(s)$, причём, в отличие от (44), для локализации решения потребуем выполнение условия

$$\operatorname{Im}\Gamma > 0\,. \qquad (49)$$

В дальнейшем мы рассмотрим также высшие моды, в которых допускается зависимость амплитуды от поперечной координаты, $A = A(s,n)$.

При подстановке (48) в (47) приходим к встречавшемуся у нас в связи с лучевым методом в малом уравнению Риккати (27) и уравнению для амплитуды

$$c_0(s)A(s)\Gamma(s) + 2A'(s) = 0\,. \qquad (50)$$

Для построения локализованных в окрестности опорного луча решений волнового уравнения, нам необходимо рассматривать комплексные их решения. Решение уравнения Риккати (27) даётся формулой

(29) или (36), в которой $(q(s), p(s))$ – комплексное решение гамильтоновой системы (31), снова, как и в лучевом методе в малом, удовлетворяющее начальным условиям $p(s_0) = \Gamma(s_0)q(s_0)$ с произвольным ненулевым $q(s_0)$, но уже с комплексным $\Gamma(s_0)$, удовлетворяющим условию локализованности (49). Вопрос о выборе подходящего комплексного решения (30) разобран в [4, 39]. Там показано, что если условие (49) выполнено при некотором $s = s_0$, то оно выполняется и при всех s. Этот нетривиальный результат восходит к работе Бабича [13].

Подстановка (29) в (50) приводит к известной из лучевого метода в малом формуле (39) для $A(s)$, но с невещественным $q(s)$. Вследствие невещественности $q(s)$ знаменатели в (39) и (29) в нуль не обращаются, и решение (43) остаётся регулярным при всех значениях s.

Для $c = \text{const}$, положив $s = z$, $n = x$ и $q = z - ia$, приходим к формуле (11).

Отметим, что в неоднородных средах возможны ситуации, когда ширина гауссова пучка остаётся ограниченной. Так, в случае $c_0(s) = \text{const}$, $c_1(s) = 0$, $c_2(s) = \text{const} > 0$ (двумерный рефракционный волновод с постоянными параметрами) уравнение Риккати (27) допускает постоянное решение

$$\Gamma = i\sqrt{c_2/c_0^3}\,. \tag{51}$$

Соответствующее решение уравнения (30) имеет вид

$$q(s) = \exp\left(i\sqrt{c_2/c_0}s\right)\,. \tag{52}$$

Функция (43) в этом случае является полным аналогом квантовомеханического основного состояния для частицы в одномерной квадратичной потенциальной яме, где роль времени играет продольная координата s.

5.3. Параболическое уравнение. Высшие моды. При построении высших мод в неоднородной среде активно использовались операторы рождения, аналогичные применяемым в квантовой теории. Случай двух переменных был был рассмотрен в [39, п. 5.2]. Пусть $(q(s), p(s))$ – комплексное решение системы (31), входящее в фундаментальную моду (48), а $(\overline{q}(s), \overline{p}(s))$ – комплексно сопряженное к нему. Тогда *оператор рождения*

$$\Lambda^* = \frac{\overline{q}}{i\sqrt{\omega}}\frac{\partial}{\partial n} - \overline{p}\,\sqrt{\omega}n \tag{53}$$

перестановочен с оператором, применяемым к W в левой части уравнения (45). Поэтому выражения

$$(\Lambda^*)^m W = \mathrm{H}_m W \tag{54}$$

где m – любое целое неотрицательное число, являются решениями уравнения (45) с амплитудами H_m, полиномальными относительно n. Выражения (54) сводятся к многочленам Эрмита. Других нетривиальных высших мод в двумерном случае не известно.

Высшие моды строились и без применения операторов рождения [4,40], на основе разделения переменных в параболическом уравнении.

5.4. Локализованные решения для периодической задачи и теория резонаторов. Вопросы, возникающие в связи с резонаторами, послужили важным стимулом к построению гауссовски локализованных решений в 1960е годы. Поле в резонаторе сосредоточено вблизи его *оси* (по другой терминологии – *контура*) – замкнутой кривой, которая либо является лучом, либо состоит из нескольких состыкованных отрезков лучей, переходящих друг в друга при отражениях от зеркал в соответствии с правилами геометрической оптики. Для теории резонаторов типично рассмотрение, в монохроматическом случае, периодических локализованных решений, переходящих в себя после полного обхода контура. Важный для оптики вопрос об асимптотике собственных значений резонаторов может быть решен в рамках *лучевого метода в малом*, путем чисто геометрических рассуждений, без сколько-нибудь аккуратного исследования волновых полей. Для построения же собственных функций представляются естественными рассмотрения, основанные на методе параболического уравнения.

5.4.1. *Рефракционный резонатор.* Рассмотрим сначала простую модель резонаторной задачи, в которой ось резонатора ℓ – замкнутый контур, являющийся лучом (замкнутость объясняется неоднородностью среды). По аналогии с рефракционным волноводом (см. п. 5.2) будем такую среду называть *рефракционным резонатором*.

Ищем локализованное в окрестности ℓ решение методом параболического уравнения, см. 5.2. Из периодичности поля V вблизи оси, при обходе контура, для любой моды

$$\exp\left(i\omega\tau_0(s_0+L)\right)W(s_0+L,n) = \exp\left(i\omega\tau_0(s_0)\right)W(s_0,n), \tag{55}$$

где s_0 – координата произвольной выбранной точки на контуре, а L – его длина.

5.4.2. *Фундаментальная мода.* В случае фундаментальной моды (46), (48), отсюда следуют равенства

$$\sqrt{\frac{q(s)}{q(s+L)}}e^{i\omega[\tau_0(s+L)-\tau_0(s)]}=1 \tag{56}$$

и

$$\Gamma(s+L)=\Gamma(s)\,, \tag{57}$$

выражающие, соответственно, условие периодичности на самом контуре ℓ и условие периодичности в его окрестности.

Из равенства (57) с учётом (29) вытекает, что при полном обходе контура функции $q(s)$ и $q'(s)$ должны одновременно умножаться на некоторый множитель λ – *мультипликатор*, или *множитель Флоке*. Поэтому на тот же множитель должна умножаться и функция $p(s)=q'(s)/c_0(s)$, см. (31). Решение линейной системы (31) с периодическими коэффициентами, имеющими период L, для которых справедливы равенства $q(s+L)=\lambda q(s)$ и $p(s+L)=\lambda p(s)$, называется *решением Флоке* (или Флоке–Блоха). Из формулы (56) видно, что подкоренное выражение совпадает с λ^{-1}, откуда $|\lambda|=1$ и $\lambda=e^{i\theta}$, где $\theta\in[0,2\pi)$ - *показатель Флоке*. Тогда равенство (56) принимает вид *условия квантования*:

$$\omega\left[\tau_0(s+L)-\tau_0(s)\right]-\theta/2=2\pi N\,, \tag{58}$$

где N – большое целое число. Значения ω, удовлетворяющие (58), являются собственными частотами периодической задачи.

Равенство (33) в случае полного обхода контура, когда $s=s_0+L$, даёт:

$$\begin{pmatrix}q(s_0+L)\\p(s_0+L)\end{pmatrix}=M(s_0)\begin{pmatrix}q(s_0)\\p(s_0)\end{pmatrix}, \tag{59}$$

где

$$M(s_0)=T(s_0,s_0+L) \tag{60}$$

– лучевая матрица полного обхода резонатора (*матрица монодромии*). С другой стороны, для решения Флоке

$$\begin{pmatrix}q(s_0+L)\\p(s_0+L)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}q(s_0)\\p(s_0)\end{pmatrix}. \tag{61}$$

Отсюда следует, что вектор $(q(s_0), p(s_0))^{\mathrm{T}}$ является собственным вектором матрицы монодромии $M(s_0)$ (60), а мультипликатор λ – её собственным числом. С учётом того, что $(\bar{q}(s_0), \bar{p}(s_0))^{\mathrm{T}}$ [5] также является собственным вектором матрицы (60), отвечающим собственному числу $\bar{\lambda} = e^{-i\theta}$, отсюда вытекает необходимое (и достаточное, см. [4]) условие существования локализованных периодических решений вида (43): собственные числа матрицы монодромии по модулю равны единице, и у этой матрицы нет присоединённых векторов. Это условие известно как *условие устойчивости резонатора по первому приближению.*

Алгоритм построения периодического решения таков. Сперва ищутся собственные числа и собственные векторы матрицы монодромии. При выполнении условия устойчивости найдётся такой собственный вектор $\binom{q(s_0)}{p(s_0)}$, для которого $\mathrm{Im}(p(s_0)/q(s_0)) > 0$. Компоненты этого вектора берутся в качестве начальных данных для гамильтоновой системы, функция $\Gamma(s)$ выражается через решение этой системы по формуле (36), а амплитуда $A(s)$ – по формуле (39).

5.4.3. *Высшие моды.* Высшие моды резонатора получаются из фундаментальной моды применением оператора рождения (53). Важным обстоятельством является то, что в результате мы снова получаем решение Флоке уравнения (45), но с другим показателем: поскольку входящие в оператор множители $\bar{q}(s)$ и $\bar{q}'(s)$ при обходе контура умножаются на $\bar{\lambda} = e^{-i\theta}$, множитель Флоке также умножается на этот фактор. Поэтому условие квантования для высшей моды, получаемой m-кратным применением оператора рождения, имеет вид

$$\omega\left[\tau_0(s+L) - \tau_0(s)\right] - \left(m + \frac{1}{2}\right)\theta = 2\pi N\,. \tag{62}$$

Строго доказано, что определяемые таким образом значения ω дают асимптотику собственных чисел оператора Лапласа для соответствующих задач [13]. Вопрос о связи формально построенных таким образом выражений с собственными функциями оператора Лапласа нетривиален, см. например, [41, 42].

5.4.4. *Резонатор с зеркалами.* В двухзеркальных и многозеркальных резонаторах замкнутость контура обеспечивается не кривизной луча, а отражениями от зеркал – плоских или криволинейных – которые моделируются граничными условиями, в нашем случае Дирихле. На

[5] Напоминаем, что черта обозначает комплексное сопряжение.

каждом участке контура – плече резонатора – решение ищется в виде (43), при этом все построения п. 5.2 остаются справедливыми. Связь падающего и отражённого от зеркала поля, как и в случае лучевого метода в малом, описывается формулами (40)–(42), значение амплитуды при отражении меняет знак, а система координат – ориентацию.

В случае чётного числа зеркал условие периодичности, по-прежнему, имеет вид (55), а матрица монодромии дается формулой

$$M(s_0) = T(s_J, s_0 + L)T_{S_J} \dots T_{S_2}T(s_1, s_2)T_{S_1}T(s_0, s_1)\,, \qquad (63)$$

где J – число зеркал, s_j – координата j-го зеркала, T_{S_j} – матрица вида (42), описывающая отражение от этого зеркала. Условия устойчивости по первому приближению, процедура поиска решений как для фундаментальной, так и для высших мод, а также условия квантования фактически не отличаются от описанной выше для рефракционного резонатора.

В случае нечётного числа зеркал ситуация усложняется в связи с тем, что после полного обхода резонатора направление вектора нормали меняется на противоположное. В этом случае условие периодичноти принимает вид

$$\exp\left(i\omega\tau_0(s_0 + L)\right)W(s_0 + L, n) = \exp\left(i\omega\tau_0(s_0)\right)W(s_0, -n)\,, \qquad (64)$$

что приводит к некоторой модификации процедуры решения и окончательных результатов.

§6. Параксиальные пучки в неоднородной среде. Трехмерный случай

Аналогичные результаты для трехмерной неоднородной среды подробно изложены в книге Бабича и Булдырева [4]. Заимствованная из квантовой физики идея применения операторов рождения встречалась уже в работах [13, 43].

6.1. Лучевой метод в малом. Рассмотренная выше техника допускает обобщение на трёхмерный случай. Выберем опорный луч $\ell \subset \mathbb{R}^3$. Пусть $c_0(s) = c|_\ell$, где s – длина дуги вдоль ℓ, $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$ – единичные векторы главной нормали и бинормали к нему. Для однородной среды можно принять, что $s = z$, а $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$ – орты осей x и y. Следуя М.М. Попову (см. Бабич и Булдырев [4]) введем вблизи ℓ ортогональные

координаты s, ρ_1, ρ_2[6]. Пусть

$$\mathbf{e}_1(s) = \mathbf{n}\cos\Theta(s) - \boldsymbol{\nu}\sin\Theta(s), \quad \mathbf{e}_2(s) = \mathbf{n}\sin\Theta(s) + \boldsymbol{\nu}\cos\Theta(s) \qquad (65)$$

– ортогональные к ℓ единичные векторы. Здесь $\Theta(s) = \int\limits_0^s ds'/T(s') +$ const, причем через T обозначено кручение луча. Радиус-вектор $\mathbf{R}(M)$ точки $M \in \mathbb{R}^3$, не слишком далекой от ℓ, принимает вид

$$\mathbf{R}(M) = \mathbf{r}(s) + \rho_1\mathbf{e}_1(s) + \rho_2\mathbf{e}_2(s). \qquad (66)$$

Эйконал в окрестности опорного луча представляется в виде, аналогичном (25):

$$\tau = \tau(s, n) = \tau_0(s) + \frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\Gamma}(s)\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}\rangle + \dots, \qquad (67)$$

где $\boldsymbol{\Gamma}(s)$ – симметричная матрица размерности 2×2, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2)^{\mathrm{T}}$, а $\tau_0(s)$, по-прежнему, представляется формулой (26). Для матрицы $\boldsymbol{\Gamma}(s)$ может быть получено матричное уравнение Риккати, аналогичное (27):

$$\boldsymbol{\Gamma}^2 + \frac{1}{c_0}\boldsymbol{\Gamma}' + \frac{1}{c_0^2}\boldsymbol{\Psi} = 0\,, \qquad (68)$$

где

$$\Psi_{mp} = \frac{1}{c_0}\frac{\partial^2 c}{\partial\rho_m\partial\rho_p}\bigg|_\ell\,. \qquad (69)$$

Стандартной подстановкой,

$$\boldsymbol{\Gamma}(s) = \frac{1}{c_0(s)}\mathbf{Q}'(s)\mathbf{Q}^{-1}(s)\,, \qquad (70)$$

аналогичной (29), оно сводится к матричному уравнению

$$\mathbf{Q}''(s) - \frac{c_0'(s)}{c_0(s)}\mathbf{Q}'(s) + \boldsymbol{\Psi}(s)\mathbf{Q}(s) = \mathbf{O}\,, \qquad (71)$$

аналогичному (30). Каждый из столбцов $\mathbf{q}_\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2$ матрицы $\mathbf{Q}(s)$ удовлетворяют уравнению Якоби

$$\mathbf{q}''(s) - \frac{c_0'(s)}{c_0(s)}\mathbf{q}'(s) + \boldsymbol{\Psi}(s)\mathbf{q}(s) = \mathbf{o}\,. \qquad (72)$$

---

[6] В качестве локальных координат в методе параболического уравнения иногда используют и лучевые координаты, см., например, [19, 44]. Связь с координатами Ферми [45] обсуждается в [46].

Каждое из вещественных решений этого уравнения описывает луч первого приближения в виде $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{q}(s)$. Множество решений, удовлетворяющих условию $\mathbf{q}'(s) = c_0(s)\boldsymbol{\Gamma}(s)\mathbf{q}(s)$ для некоторого фиксированного $\boldsymbol{\Gamma}(s)$, образует поле лучей.

Положим $\mathbf{p} = \mathbf{q}'/c_0$, тогда уравнение (72) переписывается в виде гамильтоновой системы

$$\mathbf{q}'(s) = c_0(s)\mathbf{p}(s)\,, \quad \mathbf{p}'(s) = -\frac{\boldsymbol{\Psi}(s)}{c_0(s)}\mathbf{q}(s)\,, \tag{73}$$

аналогичной (31). Её решения выражаются через начальные данные с помощью формулы, аналогичной (33):

$$\begin{pmatrix}\mathbf{q}(s)\\ \mathbf{p}(s)\end{pmatrix} = \mathbf{T}(s_0, s)\begin{pmatrix}\mathbf{q}(s_0)\\ \mathbf{p}(s_0)\end{pmatrix}, \tag{74}$$

где матрица $\mathbf{T}$ размерности 4×4 выражается по формуле, аналогичной (34), через произвольную фундаментальную матрицу гамильтоновой системы.

Зафиксируем начальное значение $s = s_0$ и построим два решения $(\mathbf{q}_{1,2}(s), \mathbf{p}_{1,2}(s))$ гамильтоновой системы (73), выбрав в качестве начальных значений произвольные линейно независимые двумерные векторы $\mathbf{q}_\alpha(s_0)$ и $\mathbf{p}_\alpha(s_0) = \boldsymbol{\Gamma}(s_0)\mathbf{q}_\alpha(s_0)$, $\alpha = 1, 2$. Объединив решения системы в матрицы $\mathbf{Q}(s) = (\mathbf{q}_1(s)\,\mathbf{q}_2(s))$, $\mathbf{P}(s) = (\mathbf{p}_1(s)\,\mathbf{p}_2(s)) = \mathbf{Q}'(s)/c_0(s)$, получаем, согласно (70), что

$$\boldsymbol{\Gamma}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{Q}^{-1}(s)\,. \tag{75}$$

Амплитудный множитель в главном приближении не зависит от поперечных координат и, как нетрудно увидеть из (23) и (66), равен

$$\mathscr{W}_0(s, 0) = \sqrt{c_0(s)}A(s)\,, \quad A(s) = A(s_0)\sqrt{\frac{\det\mathbf{Q}(s_0)}{\det\mathbf{Q}(s)}}\,. \tag{76}$$

Эта формула вытекает из (23) с учётом того, что геометрическое расхождение, как можно показать, равно $J = \det\mathbf{Q}(s)$. Тогда

$$V(s, n) \sim \mathscr{W}_0(s_0, 0)\sqrt{\frac{c_0(s)\det\mathbf{Q}(s_0)}{c_0(s_0)\det\mathbf{Q}(s)}}\,e^{i\omega\left[\tau_0(s)+\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\Gamma}(s)\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}\rangle\right]}\,. \tag{77}$$

Полученные формулы теряют силу на каустиках, т.е. когда $\det\mathbf{Q}(s)$ обращается в нуль.

6.2. Метод параболического уравнения. Как и в двумерном случае, заменяя геометрическое время пробега $\frac{1}{c}z$ на τ_0, см. (26), где интеграл берется вдоль ℓ, полагая

$$V = \sqrt{c_0(s)}\exp\left(i\omega\tau_0(s)\right)\widetilde{W}\,, \tag{78}$$

приходим к параболическому уравнению

$$\frac{2i\omega}{c_0(s)}\widetilde{W}_s + \Delta_\perp\widetilde{W} - \frac{\omega^2}{c_0^2(s)}\langle\mathbf{\Psi}(s)\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}\rangle\widetilde{W} = 0\,, \tag{79}$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial\rho_1^2 + \partial^2/\partial\rho_2^2$ – лапласиан относительно поперечных к лучу переменных, а $\mathbf{\Psi}(s)$ определено в (69), см. [4]. Уравнение (79) – по квантовомеханической терминологии, уравнение с квадратичным потенциалом (зависящим от времени, роль которого играет s) – удается, как и раньше, свести к решению гамильтоновой системы.

Решение для фундаментальной моды ищем в виде

$$\widetilde{W} = A(s)\exp\left[\frac{i\omega s}{2}\langle\mathbf{\Gamma}(s)\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}\rangle\right], \tag{80}$$

$\mathbf{\Gamma}(s)$ – матрица 2×2 с положительной мнимой частью. В дальнейшем при построении высших мод мы будем допускать зависимость амплитуды также и от поперечных координат: $A = A(s,\boldsymbol{\rho})$. Из (79) вытекает матричное уравнение Риккати (68), встречавшееся нам в лучевом методе в малом. Алгоритм его решения тот же, что в п. 6.1, однако теперь приходится рассматривать комплексные решения системы (73). При этом, в отличие от лучевого метода в малом, матрица $\mathbf{Q}$ нигде не вырождается и, следовательно, решение остаётся применимым при всех s. Симметрия матрицы $\mathbf{\Gamma}(s)$ (75), как и положительность её мнимой части, сохраняются при всех s, если они имеют место при каком-нибудь $s = s_0$. Этот факт не зависит ни от свойств квадратичных членов в уравнении (79), ни вообще от их наличия. При этом, в силу невырожденности $\mathbf{Q}$, знаменатель подкоренного выражения в нуль не обращается, и формула (76) для амплитуды всегда остаётся справедливой.

Описанная процедура восходит к решению Бабичем задачи о собственных функциях оператора Лапласа на римановом многообразии [4, 13]. Здесь, по-видимому впервые, появились общие многомерные гауссовы пучки для случая уравнения с переменными коэффициентами, частными случаями которых являются (9), (12) и (14).

6.3. Высшие моды. Как и в двумерном случае, применение операторов рождения позволяет построить высшие моды, в которых амплитуда полиномиально зависит от поперечных координат. В качестве операторов рождения, действующих на функцию $\widetilde{W}$ – решение уравнения (79), можно взять

$$\Lambda^* = \frac{\langle \overline{\mathbf{q}}(s), \nabla_\perp \rangle}{i\sqrt{\omega}} - \sqrt{\omega}\langle \overline{\mathbf{p}}(s), \boldsymbol{\rho} \rangle \,, \tag{81}$$

где $\nabla_\perp = (\partial/\partial\rho_1, \partial/\partial\rho_2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{q}(s)$ и $\mathbf{p}(s) = \mathbf{q}'(s)/c_0(s)$ – произвольные решения системы (73), удовлетворяющее условию $\mathbf{p}(s) = \mathbf{\Gamma}(s)\mathbf{q}(s)$, где $\mathbf{\Gamma}(s)$ – матрица, входящая в фундаментальную моду, а $\overline{\mathbf{q}}(s)$ и $\overline{\mathbf{p}}(s)$ – им комплексно сопряжённые. Оператор (81) перестановочен с оператором, применяемым к $\widetilde{W}$ в левой части уравнения (45). Поэтому применяя (может быть, неоднократно) операторы вида (81) (необязательно с одинаковыми $(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s))$) к фундаментальной моде (78), (80), мы получаем богатый набор высших мод с амлитудами, полиномиальными по поперечным координатам [4].

Как и в двумерном случае (см. п. 5.2), в трехмерном тоже возможны нерасплывающиеся гауссовы пучки. Например, это моды рефракционного волновода, в котором скорость $c = c(x, y)$ квадратично растет с удалением от его оси. Квантовомеханический аналог этого волновода известен со времени работы Шредингера [30].

6.4. Периодический случай. Метод Бабича–Попова. Основные достижения ленинградской дифракционной школы, касающиеся резонаторных задач, связаны с рассмотрением многомерных задач. В многомерном случае периодические задачи были впервые рассмотрены Бабичем [13] (изучавшим задачу о собственных функциях оператора Лапласа на ориентируемом римановом многообразии произвольной размерности, локализованных в окрестности замкнутой геодезической) и Поповым [12] (рассматривавшим трёхмерную задачу о многозеркальных резонаторах, заполненных плавно-неоднородной средой).

Кратко опишем основные этапы построения фундаментальной моды *методом Бабича–Попова* в рефракционном резонаторе для трехмерного случая. Прежде всего, отметим, что направления базисных

векторов (65) после обхода замкнутого контура могут совпасть с первоначальными разве лишь случайно. В связи с этим условие периодичности принимают вид

$$\exp\left(i\omega\tau_0(s_0+L)\right)W(s_0+L,\boldsymbol{\rho}) = \exp\left(i\omega\tau_0(s_0)\right)W(s_0,\mathbf{C}\boldsymbol{\rho})\,, \qquad (82)$$

где $\mathbf{C}$ – матрица поворота, связывающая поперечные координаты в старом и новом базисе. Отсюда следует аналогичное (56) равенство

$$\sqrt{\frac{\det\mathbf{Q}(s_0)}{\det\mathbf{Q}(s_0+L)}}\,e^{i\omega[\tau_0(s_0+L)-\tau_0(s_0)]} = 1\,, \qquad (83)$$

а матрицы $\mathbf{\Gamma}(s_0+L)$ и $\mathbf{\Gamma}(s_0)$ связаны преобразованием подобия.

Подобно двумерному случаю, построение периодических (с точностью до поворота осей) решений уравнения Риккати опирается на решения гамильтоновой системы (73), удовлетворяющие условию

$$\begin{pmatrix}\mathbf{q}(s_0+L)\\ \mathbf{p}(s_0+L)\end{pmatrix} = \mathbf{T}(s_0,s_0+L)\begin{pmatrix}\mathbf{q}(s_0)\\ \mathbf{p}(s_0)\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\mathbf{C}\mathbf{q}(s_0)\\ \mathbf{C}\mathbf{p}(s_0)\end{pmatrix}. \qquad (84)$$

Из этого равенства следует, что $\binom{\mathbf{q}(s_0)}{\mathbf{p}(s_0)}$ – отвечающий собственному числу λ собственный вектор матрицы монодромии, принимающей теперь вид

$$\mathbf{M}(s_0) = \mathbf{T}_{\mathbf{C}}\mathbf{T}(s_0,s_0+L)\,, \qquad (85)$$

где матрица $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}$, выражающаясся через $\mathbf{C}$, связывает координаты векторов $\binom{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}$ в старом и новом базисе. Выбрав пару таких решений гамильтоновой системы и объединив столбцы их $\mathbf{q}$- и $\mathbf{p}$-компонент в матрицы $\mathbf{Q}(s)$ и $\mathbf{P}(s)$, можно, в случае невырожденности матрицы $\mathbf{Q}(s)$, построить матрицу $\mathbf{\Gamma}(s)$ (75). Бабич доказал [4,13], что эту пару можно выбрать так, чтобы матрица $\mathbf{\Gamma}(s)$ оказалась симметричной и имела положительную мнимую часть, если и только если выполнено условие устойчивости по первому приближению. Как и в двумерном случае, оно состоит в том, что все собственные числа матрицы монодромии по модулю равны единице, т.е. $\lambda_\alpha = e^{i\theta_\alpha}$, и у этой матрицы нет присоединённых векторов. Этот результат был получен для произвольной размерности. При этом, в случае общего положения, когда все собственные числа матрицы монодромии простые, такая пара единственна.

При выполнении условия устойчивости $\det \mathbf{Q}(s_0+L)/\det \mathbf{Q}(s_0) = \lambda_1\lambda_2 = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, и равенство (83) приобретает вид условий квантования

$$\omega\left[\tau_0(s+L)-\tau_0(s)\right] - \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = 2\pi N\,. \tag{86}$$

Для построения высших мод резонатора используются операторы рождения, имеющие вид (81), однако теперь допускаются только те функции $(\mathbf{q}(s),\mathbf{p}(s))$, которые являются решениями Флоке и были использованы при построении матрицы $\mathbf{\Gamma}(s)$ (в случае общего положения таких операторов два):

$$\Lambda^*_{1,2} = \frac{\langle \overline{\mathbf{q}}_{1,2}(s), \nabla_\perp\rangle}{i\sqrt{\omega}} - \sqrt{\omega}\langle \overline{\mathbf{p}}_{1,2}(s), \boldsymbol{\rho}\rangle\,. \tag{87}$$

Лишь в этом случае высшие моды периодичны. Для высшей моды, имеющей вид

$$(\Lambda^*_1)^{m_1}(\Lambda^*_2)^{m_2} W = \mathrm{H}_{m_1,m_2} W\,, \tag{88}$$

где H_{m_1,m_2} – некоторый многочлен от поперечных координат с коэффициентами, зависящими от s, условие квантования приобретает вид

$$\omega\left[\tau_0(s+L)-\tau_0(s)\right] - \left(m_1+\frac{1}{2}\right)\theta_1 - \left(m_2+\frac{1}{2}\right)\theta_2 = 2\pi N\,. \tag{89}$$

Во многом аналогичной является задача о собственных колебаниях многозеркального резонатора [12], в которой рассмотрения хотя и более громоздки, но тоже обладают математической элегантностью. Такие резонаторы рассматриваются по той же схеме, что и рефракционные, однако, как и в двумерном случае, дополнительно требуется построение матриц, аналогичных (42), описывающих преобразование четырёхмерного вектора $\binom{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}$ при отражении от зеркала. Векторы (65) для отражённого луча получаются из соответствующих векторов для падающего зеркальным отражением от плоскости, касательной к зеркалу, при этом при каждом отражении ориентация базиса меняется. Для краевого условия Дирихле значение амплитуды при отражении меняет знак. В условии периодичности (82) для чётного числа зеркал матрица $\mathbf{C}$ по-прежнему оказывается матрицей поворота, а для нечётного – матрицей отражения. Матрица монодромии имеет ту же структуру, что и в двумерном случае (63), но добавляется, как в (85), дополнительный множитель $\mathbf{T_C}$. Условие устойчивости, а также способы нахождения фундаментальной и высших мод через построение

собственных векторов матрицы монодромии, решений Флоке и операторов рождения, полностью аналогичны описанным выше. Условия квантования в случае чётного числа зеркал совпадают с (86) и (89), в случае нечётного числа они требуют некоторой модификации. Задача о многозеркальном резонаторе с неоднородным заполнением была решена Поповым [4, 12].

На этой же линии развития метода параболического уравнения находится задача о многослойном резонаторе, который устойчив лишь при выполнении очень специальных условий согласования, которые естественно получаются на основании теоремы об эквивалентности линейного представления компактной группы вещественных матриц некоторому унитарному представлению [47, 48].

6.5. Комментарии.

6.5.1. *Лучевой метод в малом и работа Келлера–Рубинау.* В книге [4], отражающей взгляды группы Бабича–Булдырева 1960-х годов, лучевой метод в малом рассматривается как способ нахождения собственных чисел резонаторных задач на основе построения замыкающихся конгруэнций лучей первого порядка. При этом параллельно рассматривались асимптотические решения типа *прыгающего мячика* – гауссовы пучки – и волны типа шепчущей галереи, т.е. поля, существенно отличные от нуля только в "тонкой" области, ограниченной каустиками лучей первого приближения. Источником вдохновения для построения локализованных решений была работа Келлера и Рубинау [26], посвященная интерпретации ВКБ асимптотик собственных функций для круга, эллипса и квадрата в рамках квантования Бора–Зоммерфельда. Термин *прыгающий мячик*, возможно, впервые введен в [26]. Построения этой работы, буквально применимые лишь в редчайших случаях, были перенесены Булдыревым на достаточно общую ситуацию в двумерном случае [4, 14]. При рассмотрениях, связанных с этими задачами, выделялись аналитической силой работы Лазуткина.

Изучение собственных чисел первоначально основывлось на лучевом методе в малом, построение асимптотик собственных функций потребовало применения метода параболического уравнения.

6.5.2. *Приложения к оптике.* Изложенный выше метод Бабича–Попова [4, 12, 13, 47, 48] построения собственных функций в резонаторных

задачах, основанный на использовании собственных векторов матрицы монодромии, в дальнейшем был неоднократно переоткрыт применительно к задачам о резонаторах с однородным заполнением (см., например, [49, 50]). До разработки этого метода более простую задачу о линейном резонаторе с двумя несферическими зеркалами, у которых главные направления кривизн не совпадают между собой, одновременно и независимо сумели решить Бойцов [33] и Попов [31]. Кудашов, Плаченов и Радин обобщали метод Бабича–Попова на резонаторы, содержащие гауссовские селектирующие элементы, а также поглощающие и усиливающие поле среды [51, 52]. Физические аспекты этих работ обсуждались в работе Розанова [53]. В работах Панкратовой [54, 55] рассматривалось распространение электромагнитных волн в многозеркальных резонаторах.

В работах Кудашова, Плаченова и Радина [56, 57] предложена альтернатива методу Бабича–Попова: уравнение для $\mathbf{\Gamma}$, вытекающее из условий периодичности, решалось чисто алгебраически, в обход процедуры нахождения собственных векторов матрицы монодромии. Для некоторых специальных типов резонаторов это позволило получить явные формулы для фундаментальной моды [58–60] в геометрических терминах.

6.5.3. *Математические аспекты.* Построение высших приближений сталкивается с серьезными трудностями, родственными известной из небесной механики *проблеме малых знаменателей*. На них впервые указал Лазуткин, отметивший в [43] важность вопроса о соизмеримости показателя Флоке с геометрическими характеристиками области. Изощрённый анализ этой проблемы, включающий в себя тонкие вопросы, связанные с соизмеримостью чисел π, θ_1 и θ_2, дан в его последующих работах [41, 42]. Лазуткиным же изучен нетривиальный вопрос о соотношении между асимптотическими формулами для собственных функций оператора Лапласа в выпуклой области, которые даются изложенными выше методами, и истинными собственными функциями [41, 42].

6.5.4. *Комплексификация эйконала.* Гауссовы пучки (в том числе, и для неоднородной среды) можно построить исходя из рассмотрения

комплексных решений уравнения эйконала. Этот подход просто изложен в монохроматическом случае для размерности 2 во втором английском издании книги Бабича и Булдырева [61], см. также [62]. Подробное изложение для общих эллиптических операторов дал, например, Номофилов [63]. Подобные приемы применялись для разных уравнений в московской группе В. П. Маслова (например, [64, 65]). На этом пути естественным образом строится фундаментальная мода гауссова пучка. Комплексификация эйконала использовалась для построения гауссовски локализованных решений во многих работах ленинградско-петербургской группы, свежим примером является [66]. На комплексификации часто не акценируют внимания, считая её рутинной процедурой.

В п. 9 мы опишем применение комплексифицированного лучевого метода к построению гауссовых волновых пакетов.

§7. Высшие моды параксиальных пучков в однородной среде

Для однородной среды можно построить также обширные классы неполиномиальных относительно поперечных координат амплитудных функций H в (14).

7.1. Лапласовские и гельмгольцевские (в том числе, смещенные) параксиальные решения. Термины *моды Лапласа–Гаусса* и *моды Гельмгольца–Гаусса* введены для гармонических по времени параксиальных решений в работе Киселева [67], где они построены разделением переменных[7]. Пусть

$$X = \frac{x}{z_*}, \quad Y = \frac{y}{z_*}, \quad z_* = z - ia, \tag{90}$$

и G – фундаментальная осесимметрическая мода (9).

Параксиальные высшие моды – решения параболического уравнения вида (14) – можно построить, разыскивая амплитуду в виде $\mathrm{H} = \mathrm{H}(X, Y)$. Тогда

$$\mathrm{H}_{XX} + \mathrm{H}_{YY} = 0, \tag{91}$$

и соответствующее выражение (4) называется *параксиальной модой Лапласа–Гаусса* [67, 68]. Примерами мод служат решения, введенные

[7] Другим способом и чуть позднее они построены мексиканцами Гутьерресом-Вегой и Бандресом [68].

в [69], которые для $\mu \neq 2\pi m$, $m = \pm 1, \pm 2,$ ... называются теперь *вихрями с дробными зарядами*,

$$\mathrm{H} = \left(\frac{\rho}{z_*}\right)^{\mu} e^{i\gamma\varphi}, \quad \mathrm{H} = \left(\frac{\rho}{z_*}\right)^{\mu} \cos\mu\varphi, \quad \mathrm{H} = \left(\frac{\rho}{z_*}\right)^{\mu} \sin\mu\varphi. \tag{92}$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arccos(x/\rho)$. Эти решения впервые возникли в работе Киселева [69], где трактовались как волны в клине, сосредоточенные вблизи его ребра, а не как решения во всем пространстве.

Разыскивая амплитуду в виде $\mathrm{H} = \mathrm{H}(X, Y, z_*)$, приходим к уравнению

$$\mathrm{H}_{XX} + \mathrm{H}_{YY} + 2ikz_*^2\mathrm{H}_{z_*} = 0. \tag{93}$$

получившему в работах [70, 71] название *вторичного параболического уравнения*. Оно имеет, в частности, решения вида

$$\mathrm{H} = \exp\left(iK^2/2kz_*\right)\Psi, \tag{94}$$

причем K – произвольная (возможно, комплексная) постоянная, а функция $\Psi = \Psi(X, Y; K)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Psi_{XX} + \Psi_{YY} + K^2\Psi = 0. \tag{95}$$

Эти моды называются модами модами *Гельмгольца–Гаусса* [67, 68]. Важным примером служат параксиальные пучки Бесселя–Гаусса (впервые найденные для $m = 0$ из других соображений итальянской группой [72]), в которых функция Ψ имеет вид

$$\Psi = J_m(K\rho/z_*)\exp\left(\pm im\varphi\right) = J_m\left(K\sqrt{X^2+Y^2}\right)\left(\frac{X+iY}{X-iY}\right)^{\pm m/2}. \tag{96}$$

Здесь $m = 0, 1, \ldots$, J_m – функция Бесселя.

Сделав в (96) комплексный сдвиг $X \mapsto X^* = X - X_0$, $Y \mapsto Y^* = Y - Y_0$, где X_0 и Y_0 – комплексные константы, получим *смещённые моды Бесселя–Гаусса*, рассмотренные в работах Киселева и Плаченова с соавторами [70, 73, 74] (в том числе, для среды с квадратичным показателем преломления, см. следующий подпункт). Частными случаями таких решений являются *асимметричные* и *некоаксиальные* пучки Гаусса–Бесселя, рассмотренные ранее в самарских и китайских работах [75] и [76] соответственно.

7.2. Гельмгольц–гауссовы пучки с квадратичной радиальной зависимостью. Кэрон и Потвлидж [77] из Глазго ввели *Бесселъ-гауссовы пучки с квадратичной радиальной зависимостью*. Входящие в них функции Бесселя имеют, в отличие от (96), аргументы вида $p(z)\rho^2$, а гауссовская зависимость от ρ иная, чем в (8). Эти пучки интересны, в частности, тем, что возникают при разложении произвольного астигматического пучка в ряд Фурье по азимутальному углу [78].

Отталкиваясь от них, Плаченов и Дьякова [79] построили класс решений параболического уравнения, в котором соответствующий "амплитудный множитель", однозначный в физическом пространстве, выражен через решение уравнения Гельмгольца на вспомогательной двулистной поверхности.

7.3. Наклонные параксиальные моды. Термин *наклонные моды* (tilted modes), получил распространение после работ израильских ученых Хадада и Меламеда [80, 81], (хотя подобные решения встречалсь еще у ленинградца Ананьева [5]). В этих работах строились решения параболического уравнения, сосредоточенные в окрестности луча, наклоненного относительно оси z. Для фундаментальной моды (как в параксиальном приближении, так и для точного решения волнового уравнения, см. п. 10.2.2) подобные решения возникали (правда, без обсуждения свойств) и в работах Киселева [67, 82], где трактовались как пучки Гельмгольца–Гаусса, в которых $\Psi = \exp(iKX)$, см. (95).

По-другому наклонные пучки получаются в результате комплексного сдвига по поперечным координатам. Этот приём был применён Плаченовым, Со и Киселевым [83] к астигматической фундаментальной моде. Интегрируя результат по параметрам сдвига, они построили разнообразные параксиальные решения с неполиномиальной поперечной зависимостью. Наклонные моды Гельмгольца–Гаусса и, в частности, Бесселя–Гаусса рассматривались Плаченовым с соавторами в работах [74, 84]. При этом сдвиг по переменным (X, Y), порождающий смещённые моды Бесселя–Гаусса, сочетался с комплексным сдвигом по исходным переменным (x, y), приводящим к наклону пучка.

Отметим, что условия параксиальности, лежащие в основе метода параболического уравнения, ограничивают этот подход малыми углами наклона. В теории точных решений волнового уравнения, см. пп. 10.2.2, 10.2.3, угол наклона может быть любым.

§8. Более сложные среды и более сложные решения в монохроматическом случае

Гауссовы пучки для уравнений изотропной электродинамики неоднородной среды построила и использовала при описании собственных колебаний кольцевого и многослойного резонаторов Панкратова [54,55]. В этих работах, по-видимому, впервые, параболическое уравнение в векторной задаче возникло как *условие разрешимости* уравнения для второго приближения.

Розанов построил выражения для гауссовых пучков электромагнитных волн в однородных средах со слабой анизотропией, дисперсией и поглощением [85,86], Булдырев – для уравнений магнитной гидродинамики [87], Кирпичникова – для объемных упругих волн в изотропной среде [88]. Бабич и Попов [89] подробно изложили построения гауссовых пучков для уравнения, описывающего акустические волны и отличающееся младшими членами от (3) с переменным $c = c(x, y, z)$. Номофилов обобщил конструкцию гауссовых пучков на эллиптические системы второго порядка [63]. Куйдин и Перель рассмотрели гауссовы пучки для двумерных уравнений Дирака, описывающих фермионы в графене [90].

Кирпичникова и Номофилов построили решения, описывающие пучки поверхностных упругих волн на поверхности неоднородного тела произвольной формы [91–93]. Эти решения гауссовски локализованы поперек поверхностного луча. Соответствующие точные решения для произвольно-слоистого упругого полупространства нашли Киселев и Роджерсон [94]. Об аналогичных решениях в негармоническом режиме говорится в п. 9. Бабич и Кравцова методом параболического уравнения построили для плавно-неоднородной среды решения типа волновой пленки квантованной толщины, гауссовски убывающие при удалении от поверхности, сотканной из лучей [4, 95]. Эти построения они перенесли на теорию упругости [96]. Используя подход, развитый в работе [13], Бабич и Данилов построили асимптотику решения уравнения Шрёдингера с гладким потенциалом, гауссовски локализованного в окрестности классической траектории [97].

В недавних работах Попова (например, [98, 99]) развивается вариант теории гауссовски сосредоточенных решений и их суммирования для волн соскальзывания и шепчущей галереи, связанных с гладкой поверхностью. Аналогичные вопросы рассматривал в нестационарном случае Бабич [66].

Киселев нашел решения параболического уравнения, которые описывают распространение гауссовых пучков вдоль ребра идеального клина произвольного раствора [69]. Сейчас такие решения известны как "вихри дробного порядка". Залипаев рассмотрел дифракцию осесимметрической фундаментальной моды на круглой апертуре [100].

Для неоднородных сред с осесимметрическим показателем преломления, квадратично зависящим от расстояния до опорного луча (оптической оси),

$$\frac{1}{c^2(x,y,z)} = [\mathfrak{n}_0^2 - (x^2+y^2)\mathfrak{n}_2]\,, \tag{97}$$

построены моды Лапласа–Гаусса и Гельмгольца–Гаусса. Для случая постоянных $\mathfrak{n}_0$ и $\mathfrak{n}_2$ это сделано в работе Киселева и Плаченова [70], а для произвольных гладких зависимостей $\mathfrak{n}_0(z)$ и $\mathfrak{n}_2(z)$ – в их работе с Со [71]. В [71], в качестве примера, рассмотрен плавный переход из волновода в антиволновод, когда пучок, оставаясь формально локализованным, резко расширяется. Этот пример демонстрирует трудности, которые могут возникать в ходе применения метода суммирования пучков, см. п. 11.

§9. Немонохроматические приближенные гауссовски локализованные решения

Обсудим нестационарные (немонохроматические) решения волнового уравнения двух типов. Первые, названные в работе [101] квазифотонами, гауссовски локализованы в окрестности заданного луча и гауссовски же локализованы в окрестности летящей по нему точки. Вторые, названные в [102, 103] *пространственно–временны́ми гауссовыми пучками* (ПВГП), тоже гауссовски локализованы около луча, но представляют собою быстро осциллирующие колебания, бегущие вдоль луча, но не локализованные близи бегущей по нему точки.

9.1. Пространственно-временной лучевой метод (ПВЛМ).

Теория квазифотонов [101] для уравнения (1) основана на *пространственно-временно́м лучевом анзаце*

$$U = e^{ip\Theta(x,y,z,t)}\left\{\mathscr{W}_0(x,y,z,t) + \frac{\mathscr{W}_1(x,y,z,t)}{ip} + ...\right\} \tag{98}$$

где $p \gg 1$ – большой параметр, не имеющий буквального смысла частоты, как было в (18). В отличие от гармонического по времени анзаца (18), здесь амплитудные функции $\mathscr{W}_0, \mathscr{W}_1, \ldots$ медленно зависят

от времени, а характер зависимости фазовой функции Θ от t не конкретизируется. Подставив (98) в (1), приходим к *пространственно-временному уравнению эйконала* (20)

$$(\nabla\Theta)^2 = {\Theta_t}^2/c^2\,,\ c = c(x,y,z), \tag{99}$$

и *пространственно-временным уравнениям переноса*:

$$2\left(\nabla\Theta\,\nabla\mathscr{W}_0 - \frac{1}{c^2}\partial\Theta/\partial t\,\partial\mathscr{W}_0/\partial t\right) + \mathscr{W}_0\Box\Theta = 0, \tag{100}$$

$2\left(\nabla\Theta\,\nabla\mathscr{W}_j - \frac{1}{c^2}\partial\Theta/\partial t\,\partial\mathscr{W}_j/\partial t\right) + \mathscr{W}_j\Box\Theta = \Box\mathscr{W}_{j-1},\ \ j = 1, 2, \ldots$. Кратко обсудим построение решений уравнения (99). Пусть $\partial\Theta/\partial t < 0$, тогда уравнение (99) эквивалентно равенству

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \mathscr{H} = 0,\ \ \mathscr{H} = c|\nabla\Theta|. \tag{101}$$

Это – вариант уравнения Гамильтона-Якоби. В основе его теории лежит каноническая система уравнений (см., например, [104, 105])

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathscr{P}_m},\ \frac{\partial\mathscr{P}_m}{dt} = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_m},\ m = 1,2,3, \tag{102}$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Анализ этой системы приводит к выводу, что если $x_m(t)$, $\mathcal{P}_m(t)$, $m = 1,2,3$, удовлетворяют (102), то параметрически заданная линия $x_m = x_m(t)$ описывает точку, движущуюся со скоростью $c(x_1, x_2, x_3)$. Эту движущуюся точку в пространстве $\mathbb{R}^3$, или, что то же, линию в пространстве $\mathbb{R}^4$, называют *пространственно-временны́м* (*ПВ*) *лучом* [105]. Отметим, что применение этого подхода к построению эйконала в гармоническом случае приводит к тем же результатам, что и использованная в п. 4.2 вариационная техника.

9.2. Квазифотоны для волнового уравнения. С помощью подхода, основанного на ПВ лучевом методе, см. п. 9.1, Бабич и Улин [101] (см. также [106]) построили асимптотическое решение уравнения (1), гауссовски сосредоточенное в окрестности ПВ луча – своеобразный четырехмерный "тауссов пучок", в котором роль опорного луча играет ПВ луч. С трехмерной точки зрения – это гауссов волновой пакет, летящий со скоростью c (вообще говоря, зависящей от пространственных координат) по обычному лучу. В работе [101] этот волновой пакет был назван *квазифотоном*. Мы приведем краткое и упрощенное изложение этой работы.

Квазифотоны были построены в [101] с помощью комплексного варианта ПВ лучевого метода. Под этим понимается разложение вида (98), в котором функция Θ не является чисто вещественной, причем и Θ, и $\mathscr{W}_j$ являются разложениями по степеням η_1, η_2, η_3,[8] где

$$\eta_m = x_m - x_m(t),\ m = 1, 2, 3. \tag{103}$$

Здесь $x_m(t)$ – опорный ПВ луч, в окрестности которого будет сосредотачиваться волновое поле. Таким образом,

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \dots,\ \ \mathscr{W}_j = \mathscr{W}_{j0} + \mathscr{W}_{j1} + \dots, \tag{104}$$

где Θ_m и $\mathscr{W}_{jm}$ – однородные многочлены степени m по η_1, η_2, η_3 с коэффициентами, зависящими от t. Для того, чтобы имела место гауссовская сосредоточенность волнового поля в окрестности опорного ПВ луча $x_m = x_m(t)$, потребуем, чтобы Θ_0 и Θ_1 были вещественными, а квадратичная форма Θ_2 относительно переменных η_m имела положительную мнимую часть.

Построение искомых разложений сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое вполне аналогично теории для гармонического случая. В [101, 105] это проделано для скорости, плавно зависящей от пространственных координат. Здесь мы наметим вывод формул для главных членов в случае $c = \mathrm{const}$. Возьмем в качестве опорного луча ось z, тогда $\eta_1 = x_1 = x$, $\eta_2 = x_2 = y$, и естественно взять $\eta_3 = x_3 - ct = z - ct$. Положим в (104)

$$\Theta_0 = z/c - t,\ \Theta_1 = 0, \tag{105}$$

причем Θ_2 ищем в виде

$$\Theta_2 = \frac{1}{2}\left(\Upsilon_1(t)\eta_1^2 + \Upsilon_2(t)\eta_2^2 + \Upsilon_3(t)\eta_3^2\right), \tag{106}$$

где $\Upsilon_m(t)$ подлежат определению. Подставив (105) и (106) в уравнение эйконала (99) и сравнив коэффициенты при квадратах η_m, получаем

$$\frac{d\Upsilon_{1,2}}{dt} = -c^2\Upsilon_{1,2}^2,\ \ \frac{d\Upsilon_3}{dt} = 0. \tag{107}$$

При этом мы требуем выполнения неравенств $\mathrm{Im}\Upsilon_m > 0$ для $m = 1, 2, 3$, откуда $\Upsilon_3 \neq 0$, и

$$\Upsilon_1 = \frac{1}{c^2 t + \mathsf{b}_1},\ \Upsilon_2 = \frac{1}{c^2 t + \mathsf{b}_2},\ \Upsilon_3 = \frac{1}{\mathsf{b}_3}. \tag{108}$$

[8]Отметим, что в работах Качалова [46, 107] обсуждались различные варианты введения локальных координат, удобных для описания квазифотона.

Здесь b_1, b_2 и b_3 – произвольные постоянные с отрицательными мнимыми частями. Далее, из (100) вытекает уравнение для амплитуды в главном порядке:

$$2\frac{d\mathscr{W}_0^{(0)}}{dt} + (\Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \Upsilon_3)\,\mathscr{W}_0^{(0)} = 0, \tag{109}$$

откуда $\mathscr{W}_0^{(0)} = \mathrm{const}/\sqrt{(c^2t + \mathsf{b}_1)(c^2t + \mathsf{b}_2)}$.

Мы получили *квазифотон*, отвечающий простому астигматизму

$$U \approx \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{(c^2t + \mathsf{b}_1)(c^2t + \mathsf{b}_2)}} \times \exp ip\left\{-t + z/c + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{c^2t + \mathsf{b}_1} + \frac{y^2}{c^2t + \mathsf{b}_2} + \frac{(z-ct)^2}{\mathsf{b}_3}\right]\right\}. \tag{110}$$

Это волновой пакет, гауссовски сосредоточенный в окрестности бегущей точки ($x = y = 0$, $z = ct$). Более общее асимптотическое решение, гауссовски убывающее при удалении от луча и от бегущей по нему точки, построено в [66].

Изложенная выше конструкция близка к построениям работы [101], где рассматривалась плавно-неоднородная среда. Квазифотоны, наряду с другими асимптотическими нестационарными решениями, рассматривались также в написанной чуть позже пространной статье американца Ральстона [108] (термин квазифотон там не употреблялся). Подобные построения для уравнения Клейна–Гордона–Фока с постоянными коэффициентами (и некоторых других) можно найти и в более ранней работе Маслова [64]. В Москве продолжаются исследования гауссовых пучков и пакетов, опирающееся на метод канонического оператора Маслова, см. например, работу [65] и ссылки в ней.

9.3. Пространственно–временны́е гауссовы пучки. Так назвал эти решения в [102] М.М. Попов, построивший, базируясь на лучевом методе, детальную теорию модулированных высокочастотных колебаний (сокращенная версия приведена в [103]). Сформулируем в упрощенном виде результаты этой работы (где рассматривалась неоднородная среда и общий астигматизм) для случая $c = \mathrm{const}$ и простого астигматизма. Рассмотрим анзац вида (98) с достаточно произвольной вещественной функцией $\Theta_0 = \Theta_0(t)$, от которой требуется монотонность, $\Theta_0'(t) = d\Theta_0(t)/dt \neq 0$. Пусть (ср. (12))

$$\Theta(x, y, z, t) = \Theta_0(z/c - t) + \frac{1}{2}\langle \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}\rangle, \tag{111}$$

причём $\operatorname{Im}\mathbf{\Gamma} > 0$. Предполагая далее для простоты, что матрица $\mathbf{\Gamma}$ диагональна, а фаза, для определенности, убывающая, т.е. $\Theta_0' < 0$, в главном порядке получаем

$$U \approx \frac{1}{\sqrt{(c^2t+b_1)(c^2t+b_2)}} \exp ip\left\{\Theta_0 - \frac{\Theta_0'}{2}\left[\frac{x^2}{c^2t+b_1}+\frac{y^2}{c^2t+b_2}\right]\right\}, \quad (112)$$

$\Theta_0 = \Theta_0(z/c-t)$, где $\operatorname{Im} b_{1,2} < 0$ – произвольные постоянные. Асимптотическое решение (112), как и более общая конструкция, данная в [102, 103], описывает модулированную волну, бегущую вдоль пространственного луча и гауссовски убывающую в поперечных направлениях.

В [109] для двумерного случая предложено обобщение анзаца (98), не предполагающее явно, что быстроосциллирующая модулирующая функция имеет вид $\exp\{ip\Theta_0(t)\}$.

9.4. Обобщения и приложения. Квазифотонное решение, построенное Бабичем и Улиным [101, 106], упрощено для случая однородной среды Киселевым и Перель [110]. Отмечено, что оно согласуется с некоторым точным решением волнового уравнения [110, 111].

Квазифотонные решения обобщены в работах Попова и Качалова на уравнения Максвелла [112, 113], на уравнения теории упругости [46, 114, 115], на гиперболические уравнения на многообразиях с анизотропными структурами [46]. Квазифотонные решения построены Бабичем с соавторами для поверхностных волн шепчущей галереи [116], для упругих поверхностных волн Релея [117], для волн на поверхности тяжелой жидкости [118]. Для двумерных уравнений Дирака с магнитным полем, описывающих фермионы в графене, гауссовы пучки построили Куйдин и Перель в [90], а квазифотоны – Перель [119]. Квазифотоны использовались при расчете движения воды на Сестрорецком фарватере [120] и в теории обратных задач [121]. Качалов обобщил теорию квазифотонов на анизотропные среды [46, 122].

Изучалось отражение–преломление ПВЛ пучков на границах [102, 103], в том числе, на движущихся [123]. Анна Кирпичникова описала отражение–преломление квазифотона на границе двух анизотропных сред [124].

§10. Точные решения волнового уравнения

10.1. Монохроматические пучки.

10.1.1. *Монохроматический "комплексный источник".* Гауссов пучок (9) не является точным решением уравнения Гельмгольца (3)[9]. Москвич Изместьев [126] и парижанин Дешамп [127] предложили простое точное решение уравнения (3), асимптотически совпадающее с гауссовым пучком (9). Они рассмотрели комплексифицированную функцию Грина уравнения (3) – далее нам удобно умножить ее на $e^{-i\omega t} = e^{-ikct}$ –

$$\mathscr{G} = \frac{\exp ik(R_* - ct)}{R_*}, \tag{113}$$

где

$$R_* = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ia)^2}, \tag{114}$$

а $a > 0$ – произвольно выбранная постоянная. Записав, не задумываясь о выборе ветви квадратного корня, фазу при $\sqrt{x^2 + y^2} \ll a$ как

$$kR_* = k\sqrt{x^2 + y^2 + (z - ia)^2} \approx k\left(z - ia + \frac{x^2 + y^2}{2(z - ia)}\right), \tag{115}$$

а амплитуду как $\frac{1}{R_*} \approx \frac{1}{z - ia}$, придем к выражению, которое отличается от (9) только не зависящим от координат множителем e^{ka}. Однако, ни при каком выборе ветви квадратного корня в (114) однородному уравнению во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ функция (113) не удовлетворяет. Она удовлетворяет уравнению с источниками на некоторых (довольно разнообразных) поверхностях – *антеннах* – которые подробно изучены в работах Тагирджанова, Благовещенского и Киселева [128, 129]. Любая из этих антенн имеет краем окружность $\{\sqrt{x^2 + y^2} = a, z = 0\}$. Тагирджановым и Киселевым [130] отмечена неинтегрируемость плотности энергии "комплексного источника" вблизи края антенны.

Работавшие тогда в Австралии Шеппард и Сагафи [131], основываясь на "комплексном источнике", предложили интересное простое решение

$$V = \frac{\sin kR_*}{R_*} \tag{116}$$

уравнения (3) во всем пространстве. При больших ka оно (для любого выбора ветви квадратного корня) представляет собою сумму гауссова пучка, бегущего вдоль оси z, и бегущей в противоположную сторону волны (правда, малой), не являющейся пучком, см. [129].

---

[9] В особенно яркой форме это продемонстрировано новозеландскими учеными в [125].

10.1.2. *Разложения по плоским волнам.* Точные решения уравнения Гельмгольца (3) во всем пространстве, асимптотически сводящиеся к гауссову пучку без "обратной волны", лишь недавно построены в виде довольно сложных суперпозиций плоских волн. В работах [132,133] сконструировано осесимметрическое решение, а в [25] – фундаментальная мода с самым общим астигматизмом.

10.2. Немонохроматические пучки и пакеты.

10.2.1. *Немонохроматический "комплексный источник".* Пучкообразные и пакетообразные решения, правда с источниками на антеннах, получаются также в результате выбора специальной формы волны в решениях волнового уравнения, к которым можно придти путем комплексификации классической (см., например, Курант и Гильберт [134]) нестационарной сферической волны

$$U = \frac{f(R_* - ct)}{R_*}. \tag{117}$$

Здесь *форма волны* f – произвольная функция комплексного переменного. Гармоническое по времени решение (114) получается отсюда при $f(s) = \exp(iks)$. Эти соображения приводят к точным решениям с осесимметрической фазой, возбуждаемым довольно разнообразными осесимметрическими антеннами, имеющими (как и в гармоническом случае, см. п. 10.1) краем окружность $\{x = y = 0, z = a\}$, см. [129].

Гауссов волновой пакет, аналогичный введенному в [110,111] в рамках теории Бейтмена (см. п. 10.2.2), детально изучен Тагирджановым и Киселевым [135]. При выборе ветви квадратного корня одним способом решение представляет собою пакет, летящий без дифракции через круглую апертуру, при другом выборе – пакет, возбуждаемый токами, распределенными по диску; если $ka \gg 1$, то эти пакеты распространяются преимущественно в одном направлении.

Обзор других гауссовски локализованных решений, основанных на анзаце (117), дан Тагирджановым и Киселевым [129]. В этой работе, в частности, отмечено, что так называемые X-волны [136] получаются из сферических волн преобразованием Лоренца (см. также [137,138]).

10.2.2. *Комплексифицированные решения Бейтмена и их обобщения – фундаментальные моды.* Для однородной среды фундаментальной моде параксиального пучка (9), полученной методом параболического

уравнения, можно сопоставить аналогичное непараксиальное решение уравнения (1). Перейдем к характеристическим переменным

$$\alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct, \tag{118}$$

и заметим, что $U_{zz} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 4U_{\alpha\beta}$. Разыскивая точное решение (1) в виде

$$U = e^{ik\alpha} \mathscr{U}(x, y, \beta), \quad k = \text{const}, \tag{119}$$

получаем для $\mathscr{U} = \mathscr{U}(x, y, \beta)$ параболическое уравнение

$$\mathscr{U}_{xx} + \mathscr{U}_{yy} + 2ik\mathscr{U}_{\beta} = 0, \tag{120}$$

которое, в отличие от (79), не опирается ни на какое приближение и является точным. Здесь k – произвольная константа (которую обычно выбирают вещественной), аналогичная волновому числу. Точное решение (focus wave mode), отвечающее осесимметричной фундаментальной моде,

$$\mathcal{G} = \frac{1}{\beta - ib} \exp ik \left\{ \alpha + \frac{x^2 + y^2}{\beta - ib} \right\}, \quad b > 0, \tag{121}$$

построено американцем Бриттингхамом [139], а его двумерный аналог, отвечающий параксиальному решению (11) – Киселевым [109].

Отметим, что фаза в (121) переходит при $2a = b$ в фазу параксиального выражения (9), если формально положить $z = ct$. Это имеет смысл для волновых полей, обладающих некоторой продольной локализацией.

Со временем стало понятно (эта мысль, по-видимому, восходит к канадцу Беланже [140], см. также книгу новозеландца Миллера [141]), что любому параксиальному пучку регулярным образом соответствует точное пучкообразное решение волнового уравнения (1). В частности, на непараксиальные решения переносится вся параксиальная теория высших мод, см., например, обзор Киселева [24]. Однако, наличие в волновом уравнении дополнительной по сравнению с параболическим уравнением (6) переменной – времени – позволяет получить и качественно другие решения, например, волновые пакеты.

Разными способами (например, интегрированием по свободному параметру k в (121) с произвольным весом) можно получить решение волнового уравнения (1) во всем пространстве

$$U = \frac{1}{\beta - ib} f(\theta), \tag{122}$$

где *форма волны* f – произвольная функция комплексного переменного, а выражение

$$\theta = \alpha + \frac{x^2 + y^2}{\beta - ib} \tag{123}$$

известно как *осесимметрическая комплексифицированная фаза Бейтмена*. На важность решений вида (122), (123) обратил внимание парижанин Ильон [142].

В обзоре Киселева [24] перечислен ряд способов выбора формы волны f, приводящих к пакетообразным решениям, гауссовски локализованным относительно поперечных координат и по-разному – относительно продольных. В частности, Киселевым и Перель построены осесимметрические волновые пакеты, гауссовски локализованные как по поперечным переменным, так и по продольной переменной $\alpha = z - ct$ [110, 111]. Простейшее из них имеет вид

$$f(\theta) = \exp[2kb(1 - \sqrt{1 - i\theta/b}], \tag{124}$$

где k и b – свободные параметры, а ветвь корня имеет положительную вещественную часть. Решение сильно локализовано вблизи оси z, если $kb \gg 1$. Асимптотика его вблизи оси z на умеренных временах и расстояниях получается разложением фазы до квадратичных членов по x, y и α. Она согласуется (см. [143]) с приближенными квазифотонными решениями, построенными в пионерской работе Бабича и Улина [101]. В [111] рассмотрены также асимптотики решения (122)–(124) на больших временах и расстояниях, имеющие вид нестационарных сферических волн с гауссовскими диаграммами направленности.

Киселев, Плаченов и Чаморро-Посада [144,145], изучали точные решения волнового уравнения вида (122) с фазовой функцией θ, отвечающей астигматическому случаю, ср. (12). Они рассмотрели соответствующие гауссовые пучки и пакеты. Последние, в случае простого астигматизма, согласуются с описанными выше квазифотонами. Формы волны с бóльшим числом свободных параметров, асимптотически имеющие вид гауссовых пакетов, приведены в [146].

10.2.3. *Комплексифицированные решения Бейтмена – высшие моды.* Непараксиальные высшие моды для осесимметрической фазы, полиномиальные по поперечным переменным, обсуждаются начиная с важной работы канадца Беланже [140], например, в [147]. Лаплас-гауссовые и Гельмгольц-гауссовы моды введены Киселевым в непараксиальном случае [82] раньше, чем в параксиальном [67, 68]. Высшие моды Лапласа–Гаусса (в том числе, решения, отвечающие гауссову пучку, бегущему вдоль ребра клина [148]), строятся для комплексифицированных решений Бейтмена при любой форме волны f, а моды Гельмгольца–Гаусса – только если форма волны имеет специальный вид $f(s) = \exp(ips)$ [82].

Работы по неполиномиальным высшим модам немногочисленны.

Киселев построил точные решения волнового уравнения, отвечающие распространению гауссовых пучков вдоль ребра идеального клина ("вихри с дробным зарядом") [148], аналогичные параксиальным, возникшим впервые в [69].

Наклонные пучки Гельмгольца–Гаусса встречались у Киселева [82]. В работах Плаченова, Киселева и Чаморро-Посады [145, 149] такие решения были получены в результате комплексного сдвига по поперечным координатам x, y. Перель и Городницкий [150–152] строили наклонные пучки и пакеты, применяя преобразование Лоренца к осесимметрическим точным решениям, которые мы обсуждали в п. 10.2.2. Оба подхода подробно изложены в [153] для случая общего астигматизма.

Отметим, что построение точных локализованных решений волнового уравнения и уравнений Максвелла, основанных на решении Бейтмена [1] продолжается, см., например, свежий обзор [154].

10.3. Более сложные среды и более сложные решения в немонохроматическом режиме. Перель и Фиалковский, основываясь на модификациях формы волны (124), нашли осесимметрическое экспоненциально локализованное решение уравнения Клейна–Гордона–Фока [155]. Обобщение астигматического комплексифицированного решения на волновое уравнение произвольной размерности, выполненное в [156], использовано Фиалковским, Перель и Плаченовым для построения локализованных астигматических решений уравнения Клейна–Гордона–Фока [157]. Перель и Фиалковский, используя выражение (122)–(123), построили локализованные решения нелинейного уравнения Клейна–Гордона–Фока [158].

10.4. Простые точные решения с негауссовской локализацией. К настоящему времени найдено несколько классов простых решений, обладающих конечной энергией, но локализованных не гауссовским образом. Упомянем найденные москвичами решения, удобные для моделирования волн цунами [159], и изучаемые в Петербурге однонаправленные малоцикловые волновые пакеты [160, 161].

§11. Суммирование гауссовых пучков и пакетов

Одним из важных достижений ленинградской дифракционной группы является метод суммирования гауссовых пучков. Он предназначен для расчета высокочастотных полей в присутствии каустик и является элементарной альтернативой методу канонического оператора Маслова (см., например, [162]), требующему от пользователя значительной математической подготовки.

11.1. О существе метода суммиирования. Какие же полезные решения дает *метод суммирования гауссовых пучков*, *СГП*? Пусть S – гладкая поверхность, и в ее окрестности задано поле лучей, некасательных к S, и соответствующее этому полю решение уравнения Гельмгольца, см. п. 4. Это решение "продолжается вдоль лучей", если не встречаются особенности поля лучей – каустики. Каустики могут иметь сложную структуру, см., например, [163]. Метод СГП позволяет описывать поле в окрестности любой каустики.

Наметим основные идеи метода СГП. Рассмотрим гармонический по времени случай. Пусть η и ζ – координаты на поверхность S, а сама поверхность описывается векторным уравнением $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\eta, \zeta)$, где $\mathbf{R} = (x, y, z)$. Пусть луч из заданного поля проходит через точку с координатами (η_0, ζ_0). Обозначим через $u_{\eta,\zeta}(s, \eta_0, \zeta_0; \omega)$ гауссов пучок, для которого этот луч является опорным, см. п. 6.2. Суммируя $u_{\eta,\zeta}(s, \eta_0, \zeta_0; \omega)$, т.е. интегрируя $u_{\eta,\zeta}(s, \eta_0, \zeta_0; \omega)$ по η и ζ с некоторым весом, будем получать новые высокочастотные решения уравнения Гельмгольца. Можно подобрать этот вес так, чтобы интеграл давал вблизи S высокочастотную асимптотику заданного лучевого решения. Хотя лучевое решение и портится на каустиках, интеграл будет описывать продолжение волнового поля по лучам. Вблизи каустик его можно находить численно (или асимптотически выражать через специальные функции; для простейшей каустики это функция Эйри).

Метод обобщен и на нестационарные высокочастотные волновые поля.

Хорошее краткое изложение метода суммирования имеется во втором английском издании книги Бабича и Булдырева [61] – это аппендикс, написанный Грикуровым по материалам его статьи [164]. Там же говорится и о связи между методом суммирования и методом канонического оператора Маслова, также нацеленным на описание полей на каустиках. Удобное для первоначального знакомства введение в метод суммирования дано Бабичем и Поповым [62]. Более детальное изложение можно найти в монографии Попова [38], ориентированной на приложения к сейсморазведке.

11.2. История метода и обзор результатов. Мысль о полезности асимптотических решений, возникающих в результате суммирования гауссовых пучков, была высказана Булдыревым и Лазуткиным при обсуждении на семинаре в ЛОМИ работы [97]. Первой публикацией, где использовалось суммирование пучков была статья [165]. Она посвящена чисто математической проблеме – описанию разрывов нестационарной функции Грина для волнового уравнения в ограниченной области. Здесь, при многократном отражении поля от границы, могут возникать сложные каустики. Нетривиальное использование суммирования в качестве метода расчета волновых полей в присутствии каустик начато Поповым с соавторами [166–171] для гармонических по времени полей. Отметим обсуждение вопроса об удачном выборе параметров пучков, по которым ведется разложение, в [172]. Метод обобщен на нестационарный случай и применен к вычислению теоретических сейсмограмм (см., в частности, работы Качалова и Попова [103, 114, 173]).

В Санкт-Петербурге продолжаются значимые работы по развитию метода суммирования. Отметим недавние применения к теории волн цунами [174] и к сейсморазведке [175].

§12. Гауссовы пакеты и вейвлет-анализ

В отличие от описанного выше метода суммирования гауссовых пучков, который по своей сути является асимптотическим, здесь речь идет о точном представлении решения в виде сходящегося интеграла.

Оно основано на непрерывном вейвлет-анализе, позволяющем представить квадратично интегрируемую функцию непрерывной суперпозицией локализованных функций – вейвлетов (по-русски еще говорят всплесков), – получаемых из одной локализованной функции, называемой *материнским вейвлетом*, посредством преобразований некоторой группы [176]. Сам по себе математический аппарат не связан с каким-либо дифференциальным уравнением.

Мысль о применении непрерывного вейвлет-анализ для аналитического представления волновых полей в виде интеграла от элементарных локализованных решений восходит к американцу Кейзеру [177]. Он использовал очень специальные элементарные решения, медленно убывающие на бесконечности. Перель, Сидоренко и Городницкий [150, 178–184] предложили интегральные представления решений волнового уравнения в терминах гауссовых пакетов, используя, в зависимости от задачи, разные группы преобразований. В случае двух пространственных переменных $\mathbf{R} = (x, z)$ волновое поле $U(\mathbf{R}, t)$ представимо интегралом:

$$\iiiint W(\boldsymbol{\nu}) u_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{R}, t)\, d\mu(\boldsymbol{\nu}) \tag{125}$$

(или суммой нескольких таких выражений). Здесь $u_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{R}, t)$ – точное решение волнового уравнения, зависящее от параметров $\boldsymbol{\nu}$, число которых в два раза превышает количество пространственных переменных, $\mu(\boldsymbol{\nu})$ – мера на пространстве параметров.

Например, для начальной задачи $U(\mathbf{R}, 0) = w(\mathbf{R})$, $U_t(\mathbf{R}, 0) = 0$, $t \geq 0$ в однородной среде $\boldsymbol{\nu} = (\omega, \alpha, x_0, z_0,)$, где $(x_0, z_0) = \mathbf{R}_0 \in \mathbb{R}^2$ – точка, в окрестности которой сосредоточено решение в начальный момент, $\alpha \in [0, 2\pi)$ – направление его распространения, а $\omega \in [0, \infty)$ – центральная частота пакета; $u_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{R}, t)$ – гауссов волновой пакет. Решение $U(\mathbf{R}, t)$ задачи содержит два слагаемых вида (125), во втором слагаемом t надо заменить на $-t$. Весовой коэффициент, с точностью до постоянного множителя, определяется вейвлет-преобразованием начальных данных $W(\boldsymbol{\nu}) = \langle w(\mathbf{R}), u_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{R}, 0)\rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение [181].

Для начально-краевой задачи в полуплоскости $z > 0$, $U|_{z=0} = f(x,t)$, в случае неоднородной среды (которую приходится предполагать однородной вблизи границы $z = 0$) в качестве элементарных решений $u_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{R},t)$ в работах [183,184] использованы точные решения волнового уравнения, имеющие квазифотонную асимптотику; единственность таких решений установлена в [185]. Параметр $\boldsymbol{\nu}$ отличается от предыдущего случая заменой z_0 на t_0, где t_0 – момент выхода локализованного решения с границы. Формула (125) удобна для работы с экспериментальными граничными данными, позволяя их обработку с помощью весового множителя. Сравнение с методом суммирования гауссовых пучков выполнено Городницким и Перель [186]. Вейвлетные представления локализованных волновых полей удачно применены в [152] к задачам сейсмической миграции в совместной работе Городницкого, Перель и американских специалистов по построению сейсмических изображений Генг и Ву.

§13. Заключение

Ленинград, а теперь Санкт-Петербург, был и остается одним из ведущих центров исследований локализованных решений уравнений математической физики.

Приложение. Двумерный гауссов пучок как результат разделения переменных в эллиптических координатах

Одним из стимулов для рассмотрения гауссовски локализованных решений было изучение точных решений задач о резонаторах, допускающих разделение переменных. Не первой в историческом контексте (см., например, у Сигмена [2]), но технически самой простой является двумерная задача о *колебаниях типа прыгающего мячика*, сосредоточенных вблизи малой полуоси эллипса, к которой мы переходим.

Уравнение Гельмгольца с двумя переменными (x,z), $V_{xx} + V_{zz} + k^2V = 0$, записывается в эллиптических координатах (ξ,η)

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\xi \sin\eta\,,\; z = a\,\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta\,, \tag{126}$$

$0 \le \xi$, $-\frac{\pi}{2} \le \eta \le \frac{\pi}{2}$, следующим образом:

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + k^2a^2(\mathrm{ch}^2\,\xi - \sin^2\eta)V = 0. \tag{127}$$

Пусть $ka \gg 1$. Разделение переменных дает решение

$$V = A(\xi)B(\eta), \tag{128}$$

где $A(\xi)$ и $B(\eta)$ удовлетворяют уравнениям

$$A_{\xi\xi} + k^2a^2(\operatorname{ch}^2\xi - \lambda)A = 0, \tag{129}$$

$$B_{\eta\eta} + k^2a^2(\lambda - \sin^2\eta)B = 0 \tag{130}$$

с произвольным пока параметром разделения λ. Выберем

$$\lambda = \frac{1}{ka}. \tag{131}$$

Приближенное решение уравнения (130) вблизи оси z, т.е. при малых η, заменяя в (130) $\sin^2\eta$ на η^2, найдем в виде

$$B(\eta) \approx \exp\left(-\frac{ka}{2}\eta^2\right). \tag{132}$$

Подставим λ в (129) и заменим функцию $A(\xi)$ ее ВКБ асимптотикой:

$$A(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{\operatorname{ch}^2\xi - \lambda}} \exp\left(ika\int\limits_0^\xi \sqrt{\operatorname{ch}^2 s - \lambda}\,ds\right).$$

Далее, пользуясь малостью λ (131), получим

$$\int\limits_0^\xi \sqrt{\operatorname{ch}^2 s - \lambda}\,ds \approx \operatorname{sh}\xi - \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^\xi \frac{ds}{\operatorname{ch} s} \approx \operatorname{sh}\xi - \frac{1}{2ka}\operatorname{arcsin}\operatorname{th}\xi.$$

С помощью (126) выразим в окрестности оси z функции ξ и η через x и z, опуская члены выше второго порядка малости. Из (126) очевидно, что $a\operatorname{sh}\xi = z/\cos\eta \approx z(1+\eta^2/2)$, $a\operatorname{ch}\xi = x/\sin\eta \approx x/\eta$, откуда

$$\eta = \frac{x}{a\operatorname{ch}\xi} = \frac{x}{a\sqrt{\operatorname{sh}^2\xi + 1}} \approx \frac{x}{\sqrt{z^2+a^2}}. \tag{133}$$

В фазе выражения AB (128) члены порядка ka в экспоненте принимают вид

$$\begin{aligned} ka(i\operatorname{sh}\xi - \frac{\eta^2}{2}) &\approx ik\left[z + \frac{\eta^2}{2}(z+ia)\right] \\ &= ik\left[z + \frac{x^2(z+ia)}{2(z^2+a^2)}\right] = ik\left[z + \frac{x^2}{2(z-ia)}\right]. \end{aligned} \tag{134}$$

Далее, с учетом того, что $\operatorname{ch}\xi = \sqrt{\operatorname{sh}^2\xi + 1} \approx \sqrt{z^2+a^2}/a$ и $z - ia = -i(a+iz) = (-i)\sqrt{z^2+a^2}\,\exp\left(i\arcsin\left(z/\sqrt{z^2+a^2}\right)\right)$, медленно меняющиеся члены в выражении для A принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\exp\left(-\frac{i}{2}\operatorname{arcsin}\operatorname{th}\xi\right)}{\sqrt[4]{\operatorname{ch}^2\xi-\lambda}} &\approx \frac{\exp\left(-\frac{i}{2}\arcsin\left(z/\sqrt{z^2+a^2}\right)\right)}{\sqrt[2]{\operatorname{ch}\xi}} \\ &= \frac{\sqrt{-ia}}{\sqrt[4]{z^2+a^2}}\exp\left(-\frac{i}{2}\arcsin\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right) = \frac{\sqrt{-ia}}{\sqrt{z-ia}}.\end{aligned} \tag{135}$$

Таким образом, из (134) и (135) вытекает, что при $ka \gg 1$ выражение (128) вблизи оси z лишь постоянным множителем отличается от двумерного гауссова пучка (11). Приведенное здесь вычисление предпринималось в ряде работ 1960х годов (см., например книги [4, 28]), но не было доведено там до конца — по-видимому, потому, что авторы еще не вполне осознавали значение анзацев, фигурирующих в п. 3. То же можно сказать и о более сложных задачах с разделяющимися переменными (см., например, [2]).

§14. Благодарности

Авторы признательны А. В. Виноградову, А. Д. Киселеву, М. М. Попову, Н. Н. Розанову и Б. Тироцци (B. Tirozzi) за обсуждения и консультации.

От соавторов

Этот обзор – последняя работа, в написании которой принял участие выдающийся математик, признанный глава Ленинградской–Санкт-Петербургской дифракционной школы Василий Михайлович Бабич, внёсший неоценимый вклад в развитие тех подходов, рассмотрению которых посвящена настоящая статья.

Список литературы

1. Г. Бейтмен, *Математическая теория распространения электромагнитных волн на основе уравнений Максвелла*. М., ГИФМЛ (1958).
2. A. E. Siegman, *Laser beams and resonators: The* 1960*s*. — IEEE J. Select. Topics Quant. Electron., **6**, No. 6 (2000), 1380–1388.
3. A. E. Siegman, *Laser beams and resonators: Beyond the* 1960*s*. — IEEE J. Select. Topics Quant. Electron., **6**, No. 6 (2000), 1389–1399.
4. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. М., Наука (1972).

5. Ю. А. Ананьев, *Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения.* М., Наука (1979).
6. Ю. А. Ананьев, *Оптические резонаторы и лазерные пучки.* М., Наука, ГИФМЛ (1990).
7. Н. Н. Розанов, Р. М. Архипов, М. В. Архипов, *О законах сохранения в электродинамике сплошных сред (к 100-летию Государственного оптического института им. С.И. Вавилова).* УФН **188**, No. 12 (2018), 1347–1353.
8. И. А. Молотков, С. А. Вакуленко, *Сосредоточенные нелинейные волны.* Ленинград, Изд-во ЛГУ (1988).
9. Л. А. Вайнштейн, *Открытые резонаторы со сферическими зеркалами.* — ЖЭТФ **45**, No. 9, 684–691 (1963).
10. H. Kogelnik, *On the propagation of Gaussian beams of light through lenslike media including those with a loss or gain variation.* — Appl. Opt., **4**, No. 12 (1965), 1562–1569.
11. М. М. Попов, *Асимптотика некоторых подпоследовательностей собственных значений краевых задач для уравнения Гельмгольца в многомерном случае.* — ДАН СССР, **184**, No. 5 (1969), 1076–1079.
12. М. М. Попов, *Собственные колебания многозеркальных резонаторов.* — Вестник ЛГУ, сер. физ. хим., No. 4 (1969), 42–54.
13. В. М. Бабич, *Собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **9** (1968), 15–63.
14. В. С. Булдырев, *Коротковолновая асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца.* – ДАН СССР, **163**, No. 4 (1965), 853–856.
15. М. А. Леонтович, *Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли.* — Изв. АН СССР. Сер. физ. **8**, No. 1 (1944), 16–22.
16. М. А. Леонтович, В. А. Фок, *Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения.* — ЖЭТФ, **16**, No. 7 (1946), 557–573.
17. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* М., Наука (1970).
18. A. P. Kiselev, E. A. Zlobina, *Parabolic-equation approach to high-frequency grazing diffraction theory: from Leontovich and Fock to nowadays.* — IEEE Conference Proceeding: Days on Diffraction, 2025, 96–106.
19. В. Э. Грикуров, А. П. Киселев, *Гауссовы пучки на больших дальностях.* — Изв. высш. уч. завед. Радиофизика, **29**, No. 3 (1986), 307–313.
20. А. Б. Плаченов, В. Н. Кудашов, А. М. Радин, *Простая формула для гауссова пучка со сложным астигматизмом в однородной среде.* — Опт. и спектр., **106**, No. 6 (2009), 998–1000.
21. H. Kogelnik, T. Li, *Laser Beams and Resonators.* — Appl. Opt., **5**, No. 10 (1966), 1550–1567.
22. H. Kogelnik, T. Li, *Laser beams and resonators.* — Proc. IEEE, **54**, No. 10, (1966) 1312–1329.
23. Х. Когельник, Т. Ли, *Резонаторы и световые пучки лазеров.* — Труды института инженеров по электронике и радиотехнике (ТИИЭР), **54**, No. 10 (1966), 95–113.

24. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: Параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор).* — Опт. и спектр., **102**, No. 4 (2007), 661–681.
25. A. P. Kiselev, A. B. Plachenov, *Astigmatic Gaussian beams: Exact solutions of the Helmholtz equation in free space.* — J. Phys. Commun., **3**, No. 11 (2019), 115004.
26. J. B. Keller, S. I. Rubinow, *Asymptotic solution of eigenvalue problems.* — Ann. Phys., **9**, No. 1, (1960), 24–75
27. В. П. Быков, Л. А. Вайнштейн, *Геометрическая оптика открытых резонаторов.* — ЖЭТФ, **47**, No. 8 (1964), 508–517.
28. Л. А. Вайнштейн, *Открытые резонаторы и открытые волноводы.* М., Советское радио (1966).
29. R. Dick, *Advanced Quantum Mechanics: Materials and Photons.* NY, Springer (2020).
30. E. Schrödinger, *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik.* — Naturwissenshaften, **14**, No. 28 (1926), 664–666.
31. М. М. Попов, *Резонаторы для лазеров с развернутыми направлениями главных кривизн. Метод параболического уравнения.* — Опт. и спектр., **25**, No. 1 (1968), 314–316.
32. М. М. Попов, *Резонаторы для лазеров с развернутыми направлениями главных кривизн.* — Опт. и спектр., **25**, No. 3 (1968), 394–400.
33. В. Ф. Бойцов, *Собственные частоты и распределения полей на зеркалах астигматического резонатора в приближении геометрической оптики.* — Опт. и спектр., **25**, No. 2 (1968), 311–316.
34. J. A. Arnaud, H. Kogelnik, *Gaussian light beams with general astigmatism.* — Appl. Opt., **8**, No. 8 (1969), 1687–1693.
35. Н. А. Черников, *Системы с гамильтонианом в виде зависящей от времени квадратичной формы от* $\mathbf{p}$ *и* $\mathbf{x}$. — ЖЭТФ, **53**, No. 3 (1967), 1006–1017.
36. A. Holz, *N-dimensional anisotropic oscillator in a uniform time-dependent electromagnetic field.* — Lett. Nuovo Cimento, **4**, No. 26 (1970), 1319–1323.
37. В. М. Бабич, А. П. Киселев, *Упругие волны. Высокочастотная теория.* СПб, БХВ-Петербург (2014).
38. M. M. Popov, *Ray Theory and Gaussian Beams for Geophysics.* Salvador-Bahia, EDUFBA (2002).
39. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* Ленинград, Изд. ЛГУ (1974).
40. В. М. Бабич, В. Ф. Лазуткин, *О собственных функциях, сосредоточенных вблизи замкнутой геодезической.* — Проблемы матем. физики, **2**, Ленингр. университет (1967), 15–25.
41. В. Ф. Лазуткин, *Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа*, Изд. ЛГУ (1981).
42. V. F. Lazutkin, *KAM Theory and Semi Classical Approximation to Eigenfunctions*, Springer-Verlag (1993).
43. В. Ф. Лазуткин, *Спектральное вырождение и "малые знаменатели" в асимптотике собственных функций типа "прыгающего мячика".* — Вестн. ЛГУ, No. 7 (1969), 23–34.

44. N. N. Zernov, V. E. Gherm, *Gaussian Beams in orthogonal full ray trajectory coordinates.* — In: 2nd URSI AT-RASC, Gran Canaria, 28 May – 1 June 2018, 1–4.
45. E. Fermi, *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* —Atti Acad. Naz. Rend. Lincei., **31** (1922), 21–23.
46. А. П. Качалов, *Квазиструи в анизотропных средах, финслерова геометрия и координаты Ферми.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **332** (2006), 48–69.
47. В. М. Бабич, *О собственных колебаниях многослойного резонатора.* — Опт. и спектр., **27**, No. 5 (1969), 804–808.
48. В. М. Бабич, *О собственных колебаниях трехмерного многослойного резонатора.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **15** (1969), 9–46.
49. И. В. Головнин, А. И. Ковригин, А. Н. Коновалов, Г. Д. Лаптев, *Описание лучевым методом распространения гауссова пучка со сложным астигматизмом и применение этого метода для расчета неплоских кольцевых резонаторов.* — Квант. электрон., **22**, No. 5 (1995), 461–463.
50. S. J. M. Habraken, G. Nienhuis, *Modes of a twisted optical cavity.* — Phys. Rev. A, **75**, No. 3 (2007), 033819.
51. В. Н. Кудашов, А. Б. Плаченов, А. М. Радин, *Фундаментальная поперечная мода трёхмерного оптического резонатора, содержащего селектирующие элементы.* — Опт. и спектр. **93**, No. 5 (2002), 843–851.
52. В. Н. Кудашов, А. Б. Плаченов, А. М. Радин, *Моды трёхмерных оптических резонаторов, содержащих селектирующие элементы.* — ЖТФ **73**, No. 11 (2003), 111–117.
53. Н. Н. Розанов, *О гауссовом пучке в усиливающей среде.* — Опт. и спектр.,
54. Т. Ф. Панкратова, *О собственных колебаниях в кольцевом резонаторе. Векторная задача.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **15** (1969), 122–141.
55. Т. Ф. Панкратова, *О собственных колебаниях трехмерного многослойного резонатора.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **17** (1970), 184–208.
56. А. Б. Плаченов, В. Н. Кудашов, А. М. Радин, *Аналитический способ построения фундаментальной моды резонатора в виде гауссова пучка со сложным астигматизмом* — Квант. электрон., **37**, No. 3 (2007), 290–298.
57. А. Б. Плаченов, В. Н. Кудашов, А. М. Радин, *Получение явных формул для фундаментальной моды резонатора в виде гауссовского пучка со сложным астигматизмом* — Радиотехн. и электрон., **52**, No. 12 (2007), 1422–1429.
58. А. Б. Плаченов, В. Н. Кудашов, А. М. Радин, *Аналитическое описание гауссова пучка в кольцевом резонаторе с некомпланарным осевым контуром и чётным числом зеркал.* — Квант. электрон., **39**, No. 3 (2009), 261–272.
59. А. Б. Плаченов, В. Н. Кудашов, А. М. Радин, *Явные формулы для фундаментальной моды линейного резонатора с эллиптическими зеркалами и построение высших мод.* — Радиотехн. и электрон., **54**, No. 11 (2009), 1300–1314.
60. А. Б. Плаченов, А. М. Радин, *Аналитическое описание гауссова пучка в кольцевом резонаторе с некомпланарным осевым контуром и нечётным числом зеркал.* — Квант. электрон., **41**, No. 1 (2011), 43–54.
61. V. M. Babich, V. S. Buldyrev, *Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory*, 2nd ed. Oxford, Alpha Science (2007).
62. В. М. Бабич, М. М. Попов, *Метод суммирования гауссовых пучков (Обзор).* — Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика, **32**, No. 12 (1989), 1447–1466.

63. В. Е. Номофилов, *Асимптотические решения системы уравнений второго порядка, сосредоточенные в окрестности луча.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **104** (1981), 170–179.
64. В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.* М., Наука (1977).
65. А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, А. И. Клевин, Б. Тироцци, *Гауссовы пакеты и пучки с фокальными точками в векторных задачах физики плазмы.* — ТМФ **196**, No. 1 (2018), 135–160.
66. В. М. Бабич, *Комментарии к выводу формул для гауссовых квазифотонов комплексным пространственно-временным лучевым методом (ПВЛМ).* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **506** (2021), 9–14.
67. А. П. Киселев, *Новые структуры параксиальных гауссовых пучков.* — Опт. и спектр., **96**, No. 4 (2004), 533–535.
68. J. C. Gutiérrez-Vega, M. A. Bandres, *Helmholtz–Gauss waves.* — JOSA A, **22**, No. 2 (2005), 289–298.
69. А. П. Киселев, *Распространение гауссовых пучков вдоль ребра клина.* — Письма в ЖТФ **10**, No. 22 (1984), 1377–1381.
70. A. P. Kiselev, A. B. Plachenov, *Laplace–Gauss and Helmholtz–Gauss paraxial modes in media with quadratic refraction index.* — JOSA A, **33**, No. 4 (2016), 663–666.
71. I. A. So, A. P. Kiselev, A. B. Plachenov, *Gaussian-type beams in longitudinally inhomogeneous, lens-like media. Gradual transition from waveguide to antiwaveguide.* — Europhys. Lett., **127**, No. 6 (2019), 64002.
72. F. Gori, G. Guattari, C. Padovani, *Bessel-Gauss beams.* — Opt. Commun., **64**, No. 6 (1987), 491–495.
73. А. Б. Плаченов, *Смещенные параксиальные пучки Бесселя—Гаусса.* I. — Опт. и спектр., **126**, No. 3 (2019), 311–318.
74. A. B. Plachenov, I. A. So, *Shifted and tilted Bessel—Gauss and Helmholtz—Gauss beams.* — Int. Conf. “Days on Diffraction 2017”, Abstracts, 114–115.
75. V. V. Kotlyar, A. A. Kovalev, R. V. Skidanov, V. A. Soifer, *Asymmetric Bessel-Gauss beams.* — JOSA A, **31**, No. 9 (2014), 1977–1983.
76. C. Huang, Y. Zheng, H. Li, *Noncoaxial Bessel–Gauss beams.* — JOSA A, **33**, No. 4 (2016), 508–512.
77. C. F. R. Caron, R. M. Potvliege, *Bessel-modulated Gaussian beams with quadratic radial dependence.* — Opt. Commun., **164**, No. 1–3 (1999), 83–93.
78. A. B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, A. P. Kiselev, *Quadratic Bessel-Gauss beams and the azimuthal angular spectra of Gaussian astigmatic beams.* — Phys. Rev. A, **102**, No. 2 (2020), 023533.
79. А. Б. Плаченов, Г. Н. Дьякова, *Пучки Гельмгольца–Гаусса с квадратичной радиальной зависимостью.* — Опт. и спектр., **130**, No. 2 (2022), 260–267.
80. Y. Hadad, T. Melamed, *Non-orthogonal domain parabolic equation and its tilted Gaussian beam solutions.* — IEEE Trans. AP, **58**, No. 4 (2010), 1164–1172.
81. Y. Hadad, T. Melamed, *Parameterization of the Tilted Gaussian Beam Waveobjects.* — PIER, **210** (2010), 65–80.

82. A. P. Kiselev, *Generalization of Bateman–Hillion progressive wave and Bessel–Gauss pulse solutions of the wave equation via a separation of variables.* — J. Phys. A: Math. Gen., **36**, No. 23 (2003), L345–L349.
83. A. B. Plachenov, I. A. So, A. P. Kiselev, *Paraxial Gaussian modes with simple astigmatic phases and nonpolynomial amplitudes.* — *IEEE Conference Proceeding: Days on Diffraction*, 2017, 264–269.
84. А. Б. Плаченов, Г. Н. Дьякова, *Смещённые и наклонные Бессель–Гауссовы и Гельмгольц–Гауссовы пучки.* — IX Межд. конф. "Фундаментальные проблемы оптики" (ФПО-16), Сборник трудов, 64–65 (2016).
85. Н. Н. Розанов, *Пучок Гаусса–Лагерра в дихроичном кристалле.* — Опт. и спектр., **90**, No. 1 (2001), 136–138.
86. Н. Н. Розанов, *Дихроичные оптические волноводы и лазеры.* — Опт. и спектр., **94**, No. 1 (2003), 90–92.
87. В. С. Булдырев, *Сосредоточение волны и метод параболического уравнения в магнитной гидродинамике.* — Проблемы матем. физики, **6** (1973), 68–75.
88. Н. Я. Кирпичникова, *О построении сосредоточенных вблизи лучей решений уравнений теории упругости для неоднородного изотропного пространства.* — Тр. МИАН СССР, **115** (1971), 103–113.
89. В. М. Бабич, М. М. Попов, *Распространение сосредоточенных звуковых пучков в трехмерной неоднородной среде.* — Акуст. журнал, **27**, No. 6 (1981), 828–835.
90. V. V. Kuydin, M. V. Perel, *Gaussian beams for 2D Dirac equation with electromagnetic field.* — *IEEE Conference Proceeding: Days on Diffraction*, 2019, 111–116.
91. Н. Я. Кирпичникова, *О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн в неоднородном упругом теле произвольной формы.* — Тр. МИАН СССР, **115** (1971), 114–130.
92. Н. Я. Кирпичникова, *Волны Релея, сосредоточенные вблизи луча на поверхноси неоднородного упругого тела.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **15** (1969), 91–114.
93. В. Е. Номофилов, *Квазистационарные волны Рэлея на поверхности неоднородного анизотропного упругого тела.* — Докл. АН СССР, **247**, No. 5 (1979), 1107–1111.
94. A. P. Kiselev, G. A. Rogerson, *Laterally dependent surface waves in an elastic medium with a general depth dependence.* — Wave Motion, **46**, No. 8 (2009), 539–547.
95. В. М. Бабич, Т. С. Кравцова, *О распространении колебаний типа волновой пленки с квантованной толщиной.* — Прикл. Матем. Мех., **31**, No. 2 (1967), 204–210.
96. В. М. Бабич, Т. С. Кравцова, *О распространении поперечных упругих колебаний типа волновой пленки с квантованной толщиной.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **17** (1970), 25–37.
97. В. М. Бабич, Ю. П. Данилов, *Построение асимптотики решения уравнения Шредингера, сосредоточенной в окрестности классической траектории.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **15** (1969), 47–65.

98. М. М. Попов, *Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа для гладких строго выпуклых поверхностей, вложенных в R^3.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **493** (2020), 301–313.
99. М. М. Попов, *Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа. Волны соскальзывания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **506** (2021), 210–222.
100. V. V. Zalipaev, *Diffraction of Gaussian beam by apertures and geometrical theory of diffraction.* — *IEEE Conference Proceeding: Days on Diffraction*, 2021, 170–176.
101. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и "квазифотоны".* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **117** (1981), 5–12.
102. М. М. Попов, *Суммирование пространственно-временных гауссовых пучков в нестационарных задачах.* — Препринт ЛОМИ Р-6-86 (1986).
103. М. М. Попов, *Суммирование пространственно-временных гауссовых пучков в задачах распространения волновых пакетов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **165** (1987), 143–158.
104. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, **4**. Ч. 2. М., Наука (1981).
105. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно–временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны.* Ленинград, Изд. ЛГУ, (1985).
106. В. М. Бабич, *Квазифотоны и пространственно-временной лучевой метод.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **342** (2007), 5–13.
107. А. П. Качалов, *Система координат при описании "квазифотона".* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **140** (1984), 73–76.
108. J. Ralston, *Gaussian beams and the propagation of singularities.* — MAA Stud. Math., **23** (1982), 246–248.
109. А. П. Киселев, *Модулированные гауссовы пучки.* — Изв. высш. уч. завед. Радиофизика, **26**, No. 8 (1983), 1014–1020.
110. А. П. Киселев, М. В. Перель, *Гауссовские волновые пакеты.* — Опт. и спектр., **86**, No. 3 (1999), 357–359.
111. A. P. Kiselev, M. V. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation.* — J. Math. Phys., **41**, No. 4 (2000), 1934–1955.
112. А. П. Качалов, *Пространственно-временные гауссовы пучки электромагнитных волн.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **186** (1990), 115–121.
113. А. П. Качалов, *Нестационарные электромагнитные гауссовы пучки в неоднородной анизотропной среде.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **264** (2000), 83–100.
114. А. П. Качалов, *Применение "квазифотонов" для расчета волновых полей в упругой среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **148** (1985), 89–103.
115. А. П. Качалов, *Двухпараметрические асимптотики для пространственно-временных гауссовых пучков в упругой среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **173** (1988), 87–95.
116. В. М. Бабич, *Пространственно-временной лучевой метод (ПВЛМ) для волн шепчущей галереи.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **506** (2021), 15–20.
117. В. М. Бабич, А. В. Поскряков, *О квазифотонах волн Релея (случай анизотропного упругого тела).* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **332** (2006), 7–18.
118. В. М. Бабич, А. И. Попов, *Квазифотоны волн на поверхности тяжелой жидкости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **379** (2010), 5–23.
119. М. В. Перель, *Квазифотоны для нестационарного 2D уравнения Дирака.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **483**, 178–188 (2019).

120. А. Е. Баранов, А. И. Попов, И. Ю. Попов, *Моделирование волн на поверхности воды, сосредоточенных в окрестности движущихся точек.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **493** (2020), 29–39.
121. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Граничное управление и квазифотоны в задаче реконструкции риманова многообразия по динамическим данным.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **203** (1992), 21–50.
122. А. П. Качалов, *Нестационарные электромагнитные гауссовы пучки в неоднородной анизотропной среде.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **264** (2000), 83—100.
123. Н.Я. Кирпичникова, М.М. Попов, *Отражение пространственно-временных лучевых амплитуд от движущейся границы.* — Записки научн. семин. ЛОМИ, **128** (1983), 72–88.
124. А.С. Кирпичникова, *Поведение гауссова пучка в анизотропной среде с границей раздела между двумя средами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **324** (2005), 77–109.
125. J. Lekner, P. Andrejic, *Nonexistence of exact solutions agreeing with the Gaussian beam on the beam axis or in the focal plane.* — Opt. Commun., **407** (2018), 22–26.
126. А. А. Изместьев, *Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве.* — Изв. высш. уч. завед. Радиофизика, **13**, No. 9 (1970), 1380–1388.
127. G. A. Deschamps, *Gaussian beam as a bundle of complex rays.* — Electron. Lett., **7**, No. 23 (1971), 684–685.
128. A. M. Tagirdzhanov, A. S. Blagovestchenskii, A. P. Kiselev, *'Complex source' wavefields: sources in real space.* — J. Phys. A: Math. Theor., **44**, No. 42 (2011), 425203.
129. А. М. Тагирджанов, А. П. Киселев, *Комплексифицированные сферические волны и их источники. Обзор.* — Опт. и спектр., **119**, No. 2 (2015), 271–281.
130. A. M. Tagirdzhanov, A. P. Kiselev, *Nonintegrability of the energy density of "complex sources" wavefields.* — IEEE Conference Proceeding: Days on Diffraction, 2019, 201–203.
131. C. J. R. Sheppard, S. Saghafi, *Beam modes beyond the paraxial approximation: A scalar treatment.* — Phys. Rev. A, **57**, No. 4 (1998), 2971–2979.
132. А. П. Киселев, *Гармонические по времени гауссовы пучки: точные решения уравнения Гельмгольца в свободном пространстве.* — Опт. и спектр., **123**, No. 6 (2017), 924–928.
133. J. Lekner, *Electromagnetic pulses, localized and causal.* — Proc. Roy. Soc. London. A, **474**, No. 2209 (2018), 20170655.
134. R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, v. 2. NY, Wiley (1989).
135. А. М. Тагирджанов, А. П. Киселев, *Гауссовский пакет на основе "комплексного источника".* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **426** (2014), 189–202.
136. J. Y. Lu, J. F. Greenleaf, *Nondiffracting X waves – exact solutions to free-space scalar wave equation and their finite aperture realizations.* — IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr., **39**, No. 1 (1992), 19–31.
137. V. V. Borisov, A. P. Kiselev, *A new class of relatively undistorted progressing waves.* — Appl. Math. Lett., **13**, No. 4 (2000), 83–86.
138. V. V. Borisov, *Generalization of the Euler-type solution to the wave equation.* — J. Phys. A: Math. Gen., **34**, No. 34 (2001), 6565–6570.

139. J. N. Brittingham, *Focus waves modes in homogeneous Maxwell's equations: Transverse electric mode.* — J. Appl. Phys., **54**, No. 3 (1983), 1179–1189.
140. P. A. Bélanger, *Packetlike solutions of the homogeneous-wave equation.* — JOSA A, **1**, No. 7 (1984), 723–724.
141. У. Миллер, мл., *Симметрия и разделение переменных.* М., Мир (1981).
142. P. Hillion, *Generalized phases and nondispersive waves.* — Acta Appl. Math., **30**, No. 1 (1993), 35–45.
143. А. П. Киселев, М. В. Перель, *О природе "квазифотонов".* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **239** (1997), 117–122.
144. A. P. Kiselev, A. B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, *Nonparaxial wave beams and packets with general astigmatism.* — Phys. Rev. A, **85**, No. 4 (2012), 043835.
145. A. P. Kiselev, A. B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, *Further generalizations of the Bateman solution. Novel wave beams and wave packets.* — In: Proc. Intern. Conf. DAYS on DIFFRACTION 2012, (IEEE, 2012), p. 124–128.
146. Д. А. Бучина, А. Б. Плаченов, *Решения волнового уравнения из класса Бейтмена—Ильона с формой волны Перель—Киселева, имеющие характер экспоненциально локализованных импульсов.* — В сб.: Сб. трудов XII международной конференции «Фундаментальные проблемы оптики – 2020», под ред. С. А. Козлова, (ИТМО, СПб, 2020), с. 7–8.
147. A. Torre, *Relativistic Laguerre polynomials and splash Pulses.* — PIER B, **13** (2009), 329–356.
148. A. P. Kiselev, *Nondispersive edge modes.* — Wave Motion, **29**, No. 2 (1999), 111–117.
149. А. Б. Плаченов, *Наклонные непараксиальные пучки и пакеты для волнового уравнения с двумя пространственными переменными.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **393** (2011), 224–233.
150. M. Perel, E. Gorodnitskiy, *Integral representations of solutions of the wave equation based on relativistic wavelets.* — J. Phys. A: Math. Theor., **45**, No. 38 (2012), 385203.
151. E. A. Gorodnitskiy, M. V. Perel, *The Poincaré wavelet transform: Implementation and interpretation.* — Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2011, IEEE, 2011, 72–77.
152. E. Gorodnitskiy, M. Perel, Y. Geng, R.-S. Wu, *Depth migration with Gaussian wave packets based on Poincaré wavelets.* — Geophys. J. Intern., **205**, No. 1 (2016), 314–331.
153. A. B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, A. P. Kiselev, *Nonparaxial tilted waveobjects.* — J. Lightwave Technol., **41**, No. 7 (2023), 2212–2224.
154. A. P. Kiselev, A. B. Plachenov, *Relatively undistorted solutions to the wave equation: A review.* — Physics, **8**, No. 3 (2026), 66.
155. М. В. Перель, И. В. Фиалковский, *Экспоненциально локализованные решения уравнения Клейна–Гордона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **275** (2001), 187–198.
156. А.П. Киселев, А.Б. Плаченов. *Точные решения m-мерного волнового уравнения из параксиальных. Дальнейшее обобщение решения Бейтмена.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **393** (2011), 167–177.

157. I. V. Fialkovsky, M. V. Perel, A. B. Plachenov, *On astigmatic exponentially localized solutions for the wave and the Klein–Gordon–Fock equations.* — J. Math. Phys., **55** (2014), 112902.
158. M. V. Perel, I. V. Fialkovsky, *Localized Solutions of the Non-Linear Klein-Gordon Equation in Many Dimensions.* — ArXiv Preprint arXiv:0712.3284.2007 https://arxiv.org/pdf/0712.3284.pdf
159. С. Ю. Доброхотов, С. Я. Секерж-Зенькович, *Один класс точных алгебраических локализованных решений многомерного волнового уравнения.* — Матем. заметки, **88**, No. 6 (2010), 942–945.
160. И. А. Со, А. Б. Плаченов, А. П. Киселев, *Однонаправленные одноцикловые и субцикловые импульсы.* — Опт. и спектр., **128**, No. 12 (2020), 1865–1867.
161. I. A. So, A. B. Plachenov, A. P. Kiselev, *Simple unidirectional finite-energy pulses.* — Phys. Rev. A, **102**, No. 6 (2020), 063529.
162. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.* М., Наука (1976).
163. В. И. Арнольд, *Теория катастроф.* – Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **5**, (1986) 219–277.
164. В. Э. Грикуров, *Равномерное описание коротковолновой асимптотики волновых полей при помощи усовершенствованного метода суммирования гауссовых пучков.* — Акустика океана, ред. Л. М. Бреховских, Л. М. Андреева, М., Наука, (1989) 46–56.
165. В. М. Бабич, Т. Ф. Панкратова, *О разрывах функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения с переменным коэффициентом.* — Проблемы матем. физики, **6**, ЛГУ, Л. (1973), 9–27.
166. М. М. Попов, *Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **104** (1981), 195–216.
167. А. П. Качалов, М. М. Попов, *Применение метода суммирования гауссовых пучков для расчета высокочастотных волновых полей.* — ДАН СССР, **258**, No. 5 (1981), 1097–1100.
168. M. M. Popov, *A new method of computation of wave fields using Gaussian beams.* — Wave Motion, **4**, No. 1 (1982), 85–97.
169. V. Červený, M. M. Popov, I. Pšenčík, *Computation of wave fields in inhomogeneous media – Gaussian beam approach.* — Geophys. J. Intern., **70**, No. 1 (1982), 109–128.
170. V. E. Grikurov, M. M. Popov, *Summation of Gaussian beams in a surface waveguide.* — Wave Motion, **5**, No. 3 (1983), 225–233.
171. A. P. Katchalov, M. M. Popov, *Gaussian beam methods and theoretical seismograms.* — Geophys. J. Int., **93**, No. 3 (1988), 465–475.
172. А. И. Ланин, М. М. Попов, *О выборе параметров в методе суммирования гауссовых пучков.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **148** (1985), 116–119.
173. А. П. Качалов, М. М. Попов, *Применение метода суммирования гауссовых пучков для расчета теоретических сейсмограмм.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **156** (1986), 73–97.
174. Т. Б. Яновская, М. А. Гейер, *Численный метод расчета поля поверхностной волны при наличии каустик.* — Изв. РАН. Физ. Земли, **47**, No. 8 (2007), 35–43.

175. M. M. Popov, N. M. Semtchenok, P. M. Popov, A. R. Verdel, *Depth migration by the Gaussian beam summation method.* — Geophysics, **75**, No. 2 (2010), S81–S93.
176. J.-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, S. T. Ali, *Two-Dimensional Wavelets and their Relatives*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004,
177. G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhäuser, Boston, 1994.
178. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *Wavelet analysis in solving the Cauchy problem for the wave equation in three-dimensional space*, in G. C. Cohen, P. Joly, E. Heikkola, P. Neittaanmäki (eds.), Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES 2003, Springer, Berlin–Heidelberg, 2003, 794–798.
179. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *Wavelet analysis for the solutions of the wave equation.* — Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2006, IEEE, 2006, 208–217.
180. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *New physical wavelet 'Gaussian wave packet'.* — J. Phys. A: Math. Theor., **40**, No. 13 (2007), 3441–3461.
181. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *Wavelet-based integral representation for solutions of the wave equation.* — J. Phys. A: Math. Theor., **42**, No. 37 (2009), 375211.
182. M. V. Perel, *Integral representation of solutions of the wave equation based on Poincaré wavelets.* — *IEEE Conference Proceeding: Days on Diffraction*, 2009, 159–161.
183. E. A. Gorodnitskiy, M. V. Perel, *The Wavelet-Based Integral Formula for the Solutions of the Wave Equation in an Inhomogeneous Medium: Convergence of Integrals.* — In: C. Constanda, B. E. J. Bodmann, P. J. Harris (eds.), *Integral Methods in Science and Engineering: Applications in Theoretical and Practical Research*, Springer, Cham, 2022, 113–125.
184. M. V. Perel, E. A. Gorodnitskiy, *Wavelet-Based Integral Formula for Solving the Wave Equation and Its Application.* — In C. Constanda, B. E. J. Bodmann, P. J. Harris (eds.), *Integral Methods in Science and Engineering: Study and Solutions of Mathematical Models*, Birkhäuser, Cham, 2026, 315–337,
185. Е. А. Городницкий, М. В. Перель, *О начально-краевой задаче для волнового уравнения на полубесконечном временном промежутке.* — Алгебра и анализ, **36**, No. 5 (2024), 128–162;
186. E. A. Gorodnitskiy, M. V. Perel, *Decompositions in Gaussian beams by wavelet methods.* — 2017 Progress in Electromagnetics Research Symposium – Spring (PIERS), IEEE, 2017, 1482–1487.

Babich V. M., Kiselev A. P., Perel M. V., Plachenov A. B. Gaussian wave beams and wave packets in Leningrad and St.Petersburg: a review.

We review theoretical studies of Gaussian-localized linear wave processes carried out in Leningrad—St.-Petersburg from the 1960s to the present. An asymptotic paraxial theory of Gaussian beams was developed, with particular emphasis on smoothly inhomogeneous media. Gaussian beams and wave packets were constructed for problems in elasticity, electrodynamics, wave propagation in graphene, and other areas. Applications of

Gaussian beams to resonator theory were considered using both the parabolic equation method and the "ray method in the small." Paraxial Gaussian wave packets, or quasiphotons, were constructed. Gaussian-localized exact solutions, both beam-like and packet-like, were obtained based on Bateman's theory and the complex-source method. New classes of higher-order modes were introduced, in particular Laplace–Gaussian and Helmholtz—Gaussian modes. Gaussian beams of surface waves, wave-film-type solutions, and other related solutions were constructed. A beam-summation method was developed for describing wave fields in the presence of caustics and was subsequently generalized within the framework of wavelet analysis.

Поступило 1 октября 2026 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия;
С.-Петербургский Государственный Университет,
Санкт-Петербург, Россия
Институт Проблем Машиновения РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: aleksei.kiselev@gmail.com

С.-Петербургский Государственный Университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: m.perel@spbu.ru

МИРЭА - Российский технологический университет,
Москва, Россия
E-mail: a_plachenov@mail.ru