Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 551, 2026 г.

С. С. Постушков

ПОРЯДОК ВТОРИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА ГЛАДКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ СФЕРЫ

Введение

Пусть X и Y – топологические пространства, $A \subseteq \mathrm{C}(X, Y)$ – подмножество в множестве непрерывных отображений из X в Y, G – абелева группа. Отображения вида $f \colon A \to G$ мы будем называть *функционалами.*

Пусть Γ – конечное открытое покрытие топологического пространства X, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ – натуральное число или ноль; введём множество

$$\Gamma(r) = \{V_1 \cup \ldots \cup V_i \,|\, 0 \leqslant i \leqslant r \text{ и } V_j \in \Gamma \text{ для всех } j\}.$$

В частности, $\Gamma(0) = \{\varnothing\}$.

Определение 1 (порядок функционала)**.** Пусть $r \in \mathbb{N}_0$, X, Y – топологические пространства, $A \subseteq \mathrm{C}(X, Y)$ – подмножество, G – абелева группа, $f \colon A \to G$ – функционал. Если для любого конечного открытого покрытия Γ пространства X существуют такие функционалы

$$f_W \colon \mathrm{C}(W, Y) \to G, \quad W \in \Gamma(r),$$

что для любого $a \in A$ выполняется равенство

$$\sum_{W \in \Gamma(r)} f_W(a|_W) = f(a),$$

то будем говорить, что *порядок* функционала f не выше r, и писать

$$\mathrm{ord}(f) \leqslant r.$$

Запольский [2] рассматривал случай $A = \mathrm{Emb}(\mathrm{S}^1, \mathbb{R}^3)$ и показал, как порядок инварианта узлов связан с порядком этого инварианта в смысле Васильева. Родственная задача рассматривалась Трефиловым [4]. Кроме того, идея порядка функционала известна в информатике, на ней основано понятие персептрона ограниченного порядка [3].

Ключевые слова: вторичный функционал, порядок функционала, произведение Масси, действие Весса–Зумино–Новикова–Виттена.

Ключевое свойство порядка заключается в том, что он ведёт себя как степень многочлена, т.е. для любых функционалов $f, g\colon A \to G$ выполнено

$$\mathrm{ord}(f+g) \leqslant \max(\mathrm{ord}(f), \mathrm{ord}(g)).$$

Более того, если функционалы f и g принимают значения в кольце, то выполнено следующее:

$$\mathrm{ord}(f \cdot g) \leqslant \mathrm{ord}(f) + \mathrm{ord}(g).$$

Далее мы будем работать с гладкими многообразиями и в качестве A брать подмножество (C^∞-)гладких отображений из одного многообразия в другое. При этом функционалы f_W будем полагать равными нулю на негладких отображениях.

Определение 2 (период)**.** Пусть M – гладкое многообразие. Тогда для замкнутой дифференциальной формы $\omega \in \Omega^k(M)$ и гладкого целочисленного сингулярного цикла $z \in \mathrm{Z}_k(M;\mathbb{Z})$ число

$$\langle \omega, z \rangle = \int\limits_z \omega$$

называется *периодом* формы ω по циклу z.

Определение 3 (сферический период)**.** Пусть N – гладкое многообразие. Тогда для гладкого отображения c из сферы S^k в многообразие N и замкнутой дифференциальной формы $\omega \in \Omega^k(N)$ число

$$\int\limits_{\mathrm{S}^k} c^*(\omega)$$

называется *сферическим периодом* формы ω по сфероиду c, где $c^*(\omega)$ – обратный образ формы ω относительно отображения c.

Замечание 1. Сферический период – частный случай периода.

Определение 4. Отображение $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^n, N)$ называется *нуль-гомотопным*, если его можно продолжить до гладкого отображения шара, т. е. существует такое отображение $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^{n+1}, N)$, что $b|_{\mathrm{S}^n} = a$. Обозначим множество нуль-гомотопных отображений из S^n в N через $\mathrm{C}^\infty_0(\mathrm{S}^n, N)$.

Обозначение. Пусть N – гладкое многообразие, а J – подгруппа в группе $\mathbb{R}$. Обозначим через $\Lambda^{n+1}_J(N)$ абелеву группу, состоящую из всех тех замкнутых дифференциальных $(n+1)$-форм на многообразии N, у которых все сферические периоды лежат в J.

Лемма 1. *Пусть* $\omega \in \Lambda_J^{n+1}(N)$. *Тогда для любого гладкого отображения* $a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^n, N)$ *и двух его продолжений* $b, \tilde{b} \in \mathrm{C}^\infty(D^{n+1}, N)$ *разность*

$$\left(\int\limits_{D^{n+1}} b^*(\omega)\right) - \left(\int\limits_{D^{n+1}} \tilde{b}^*(\omega)\right)$$

принадлежит J.

Доказательство леммы 1. Заметим, что экватор делит сферу S^{n+1} на две полусферы и служит для них краем. Обозначим эти полусферы через S_+^{n+1} и S_-^{n+1}. Замыкание K некоторой ε-окрестности экватора для достаточно малого $\varepsilon > 0$ делит сферу S^{n+1} на два шара

$$B_+ = (\mathrm{S}^{n+1} \backslash K) \cap \mathrm{S}_+^{n+1}, \quad B_- = (\mathrm{S}^{n+1} \backslash K) \cap \mathrm{S}_-^{n+1}.$$

При этом существует гладкое отображение $g\colon \mathrm{S}^{n+1} \to \mathrm{S}^{n+1}$, диффеоморфно отображающее B_+ на $\mathrm{Int}(\mathrm{S}_+^{n+1})$, диффеоморфно отображающее B_- на $\mathrm{Int}(\mathrm{S}_-^{n+1})$ и отображающее множество $K = \mathrm{S}^{n+1} \backslash (B_+ \cup B_-)$ в экватор.

Склеив отображения b и $\tilde{b}$ по отображению a, получим негладкое отображение $d\colon \mathrm{S}^{n+1} \to N$ и положим $c = d \circ g$. Отображение c является гладким и, более того,

$$\begin{aligned} J \ni \int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} c^*(\omega) &= \int\limits_{B_+} (c|_{B_+})^*(\omega) + \int\limits_{B_-} (c|_{B_-})^*(\omega) + \int\limits_{K} (c|_K)^*(\omega) \\ &= \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} b^*(\omega) - \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \tilde{b}^*(\omega). \end{aligned}$$

Здесь интеграл по K равен нулю, так как отображение $c|_K$ пропускается через S^n, а все $(n+1)$-формы на S^n тривиальны. □

Лемма 1 гарантирует корректность следующего определения.

Определение 5 (вторичный функционал)**.** Пусть N – гладкое многообразие, J – подгруппа в $\mathbb{R}$, $\omega \in \Lambda_J^{n+1}(N)$. *Вторичным функционалом,* *связанным с формой* ω, называется отображение

$$\begin{array}{rcl} f_{\omega,J}\colon \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^n,N) & \to & \mathbb{R}/J \\ a & \mapsto & \left(\int_{D^{n+1}} b^*(\omega)\right) \bmod J, \end{array}$$

где $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^{n+1},N)$ – продолжение отображения a, и $b^*(\omega)$ – обратный образ формы ω относительно отображения b.

Идея вторичного функционала находит своё применение в физике. Например, пусть G – группа Ли, $\omega_G \in \Omega^3(G)$ – левоинвариантная 3-форма, которая в касательном пространстве к единице группы G (т. е. в алгебре Ли группы G) задаётся формулой

$$\omega_G(x,y,z) = K\big([x,y],\, z\big),$$

где K – скалярное произведение Киллинга. Тогда форма ω_G замкнута, см. работу [5]. Пусть J – подгруппа в $\mathbb{R}$, содержащая все сферические периоды формы ω_G, тогда функционал

$$f_{\omega_G,J}\colon \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^2,G) \to \mathbb{R}/J$$

называется функционалом (действием) Весса–Зумино–Новикова–Виттена. В данном случае $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^2,G) = \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^2,G)$, так как любое отображение из S^2 в группу Ли нуль-гомотопно.

Замечание 2. Если $J' \leqslant J$, то $\Lambda_{J'}^{n+1}(N) \leqslant \Lambda_J^{n+1}(N)$ и для любой формы $\omega \in \Lambda_{J'}^{n+1}(N)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}/J' \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^n,N) \arrow[ur, "f_{\omega,J'}"] \arrow[r, "f_{\omega,J}"'] & \mathbb{R}/J, \end{tikzcd}$$

где π – проекция. Поэтому $\mathrm{ord}(f_{\omega,J'}) \leqslant \mathrm{ord}(f_{\omega,J})$.

Теперь мы готовы сформулировать наш первый основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $\omega \in \Lambda_J^{n+1}(N)$. *Тогда* $\mathrm{ord}(f_{\omega,J}) \leqslant 1$, *если и только если все периоды формы* ω *лежат в* J.

Пример 1. Для трёхмерной сферы S^3 и формы объёма $\omega_{\mathrm{S}^3} \in \Omega^3(\mathrm{S}^3)$, определяемой стандартной метрикой на сфере S^3, положим

$$j = \int\limits_{\mathrm{S}^3} \omega_{\mathrm{S}^3}.$$

Легко видеть, что $j \neq 0$ и все периоды формы ω_{S^3} лежат в подгруппе $\langle j \rangle \leqslant \mathbb{R}$. Тогда, по теореме 1, мы имеем $\operatorname{ord}\left(f_{\omega_{\mathrm{S}^3},\langle j\rangle}\right) \leqslant 1$. При этом ясно, что функционал $f_{\omega_{\mathrm{S}^3},\langle j\rangle}$ не является постоянным, поэтому $\operatorname{ord}\left(f_{\omega_{\mathrm{S}^3},\langle j\rangle}\right) = 1$.

Пример 2. Для проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$, его стандартного двулистного накрытия $p\colon \mathrm{S}^3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ и формы объёма $\omega_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3} \in \Omega^3(\mathbb{R}\mathrm{P}^3)$, определяемой стандартной метрикой на $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$, имеем

$$p^*(\omega_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3}) = \omega_{\mathrm{S}^3},$$

и все отображения из S^3 в $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ поднимаются до отображений из S^3 в S^3. В таком случае все сферические периоды формы $\omega_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3}$ лежат в подгруппе $\langle j \rangle$ из предыдущего примера, а потому корректно определён функционал $f_{\omega_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3},\langle j\rangle}$. Однако, поскольку выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3} \omega_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3} = \frac{j}{2},$$

не все периоды формы $\omega_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3}$ лежат в $\langle j \rangle$. Отсюда по теореме 1 имеем $\operatorname{ord}(f_{\omega_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3},\langle j\rangle}) > 1$.

Предложение 1. *Выполнено равенство* $\operatorname{ord}\left(f_{\omega_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3},\langle j\rangle}\right) = 2$.

Мы докажем это предложение в соответствующем параграфе.

Определение 6. Для гладкого многообразия N однородный элемент

$$w \in \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(N)$$

кольца когомологий де Рама называется *разложимым*, если w принадлежит квадрату идеала $\bigoplus\limits_{l>0} \mathrm{H}^l_{\mathrm{dR}}(N)$ кольца $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{dR}}(N)$.

Теперь мы готовы сформулировать наш второй основной результат.

Теорема 2. *Пусть* $\omega \in \Omega^{n+1}(N)$ *– замкнутая форма, когомологический класс которой разложим. Тогда* $\omega \in \Lambda^{n+1}_{\{0\}}(N)$ *и* $\operatorname{ord}(f_{\omega,\{0\}}) \leqslant 2$.

С учётом замечания 2, из теоремы 2 следует, что для любой подгруппы $J \leqslant \mathbb{R}$ мы имеем $\omega \in \Lambda^{n+1}_J(N)$ и $\operatorname{ord}(f_{\omega,J}) \leqslant 2$.

Пример 3. Для многообразия $N = N_1 \times N_2$ (где N_1 и N_2 – замкнутые ориентированные многообразия ненулевой размерности) и формы объёма $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ на многообразии N (где ω_i – форма объёма на многообразии N_i) по теореме 2 мы имеем $\operatorname{ord}(f_{\omega,J}) \leqslant 2$ для любой подгруппы $J \leqslant \mathbb{R}$. Положив

$$V = \int\limits_N \omega,$$

предположим, что $V \notin J$. Тогда, по теореме 1, мы имеем $\operatorname{ord}(f_{\omega,J}) > 1$ и, следовательно, $\operatorname{ord}(f_{\omega,J}) = 2$.

Определение 7 (тройное произведение Масси)**.** Для гладкого многообразия N, трёх натуральных индексов $i, j, k \in \mathbb{N}$ и трёх таких классов

$$[\alpha] \in \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(N), \quad [\beta] \in \mathrm{H}^j_{\mathrm{dR}}(N), \quad [\gamma] \in \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(N),$$

что $[\alpha] \wedge [\beta] = [\beta] \wedge [\gamma] = 0$, множество

$$\left\{ [t \wedge \gamma + (-1)^{\deg(\alpha)+1} \alpha \wedge s] \in \mathrm{H}^{i+j+k-1}_{\mathrm{dR}}(N) \;\middle|\; \mathrm{d}t = \alpha \wedge \beta, \mathrm{d}s = \beta \wedge \gamma \right\}$$

называется *тройным произведением Масси* классов $[\alpha], [\beta], [\gamma]$ и обозначается через $\big\langle [\alpha], [\beta], [\gamma] \big\rangle$.

Теперь мы готовы сформулировать наш третий основной результат.

Теорема 3. *Пусть N – гладкое многообразие, а $\omega \in \Omega^{n+1}(N)$ – такая замкнутая форма на нём, когомологический класс которой лежит в тройном произведении Масси $\big\langle [\alpha], [\beta], [\gamma] \big\rangle$ для некоторых замкнутых форм α, β, γ, удовлетворяющих условию $[\alpha \wedge \beta] = [\beta \wedge \gamma] = 0$. Тогда $\omega \in \Lambda^{n+1}_{\{0\}}(N)$ и $\operatorname{ord}(f_{\omega,\{0\}}) \leqslant 3$.*

Пусть $N = \mathrm{S}^3 \backslash L$, где L – это кольца Борромео. Следуя [1, с. 117], введём такие замкнутые формы $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2$ и $\widetilde{U}_3$, что класс $[\widetilde{U}_i]$ двойственен по Пуанкаре–Лефшецу к диску, затягивающему i-ую компоненту зацепления L. Тогда существует такая замкнутая форма ω_L, что

$$[\omega_L] \in \Big\langle [\widetilde{U}_1], [\widetilde{U}_2], [\widetilde{U}_3] \Big\rangle.$$

Возникает функционал $f_{\omega_L,\{0\}} \colon \mathrm{C}^\infty_0(\mathrm{S}^1, N) \to \mathbb{R}$. Следующее предложение демонстрирует, что оценку, полученную в теореме 3, нельзя улучшить.

Предложение 2. *Выполнено равенство* $\operatorname{ord}(f_{\omega_L,\{0\}}) = 3$.

Мы докажем это предложение в соответствующем параграфе.

Предварительные замечания

Прежде чем перейти к доказательству основных результатов, мы приведём серию вспомогательных рассуждений и замечаний.

(1) Для гладкого многообразия N и дифференциальной формы $\omega \in \Omega^k(N)$ можно построить коцепь $I(\omega)$, действующую по правилу
$$I(\omega)(c) = \int_c \omega$$
для любого гладкого сингулярного симплекса $c \in \mathrm{C}_k(N; \mathbb{R})$. Индуцируемый отображением $I\colon \Omega^k(N) \to \mathrm{C}^k(N; \mathbb{R})$ изоморфизм на группах когомологий называется изоморфизмом де Рама и также обозначается через I.

(2) Для фундаментального цикла $z \in \mathrm{Z}_n(\mathrm{S}^n; \mathbb{Z})$ имеем
$$\int_{\mathrm{S}^n} \alpha = \bigl\langle I(\alpha), z \bigr\rangle,$$
где $\langle -, - \rangle$ – это спаривание коцепи с цепью, а α – произвольная дифференциальная n-форма на S^n.

(3) Пусть $t \in \mathrm{C}_{n+1}(\mathrm{D}^{n+1}; \mathbb{Z})$ – такая сингулярная цепь, что выполнено $\partial t = i_*(z)$, где $i\colon \mathrm{S}^n \hookrightarrow \mathrm{D}^{n+1}$ – включение, а $z \in \mathrm{Z}_n(\mathrm{S}^n; \mathbb{Z})$ – фундаментальный цикл. Тогда мы имеем
$$\int_{\mathrm{D}^{n+1}} \beta = \bigl\langle I(\beta), t \bigr\rangle.$$

§1. Доказательство теоремы 1

Доказательство достаточности в теореме 1. Пусть все периоды формы ω лежат в J. Покажем, что $\mathrm{ord}(f_{\omega,J}) \leqslant 1$.

Сперва рассмотрим частный случай, когда форма точна. Тогда все периоды формы тривиальны, так как
$$\langle \omega, z \rangle = \langle \mathrm{d}\eta, z \rangle = \langle \eta, \partial z \rangle = \langle \eta, 0 \rangle = 0,$$
и тем самым содержатся в J в качестве тривиальной подгруппы.

Пусть дано конечное открытое покрытие Γ сферы S^n. Выберем разбиение единицы
$$\sum_{V \in \Gamma} \varphi_V = 1,$$

где $\varphi_V \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^n)$ и $\operatorname{supp}(\varphi_V) \subset V$. Для любого $a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^n, N)$ выберем продолжение $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^{n+1}, N)$. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} b^*(\omega) &= \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} b^*(\mathrm{d}\eta) = \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \mathrm{d}\big(b^*(\eta)\big) = \int\limits_{\partial\mathrm{D}^{n+1}} b^*(\eta) = \int\limits_{\mathrm{S}^n} (b|_{\mathrm{S}^n})^*(\eta)\\ &= \int\limits_{\mathrm{S}^n} a^*(\eta) = \int\limits_{\mathrm{S}^n} \left(\sum_{V\in\Gamma}\varphi_V\right) a^*(\eta) = \sum_{V\in\Gamma}\int\limits_{\mathrm{S}^n}\varphi_V\, a^*(\eta)\\ &= \sum_{V\in\Gamma}\int\limits_{V}\varphi_V\,(a|_V)^*(\eta).\end{aligned}$$

Для каждого $W \in \Gamma(1) = \Gamma \cup \{\varnothing\}$ определим функционал f_W следующим образом. Положим $f_\varnothing = 0$, а для $W \in \Gamma$ и любого $\widetilde{a} \in \mathrm{C}^\infty(W, N)$ положим

$$f_W(\widetilde{a}) = \int\limits_W \varphi_W\, \widetilde{a}^*(\eta) \bmod J.$$

Тогда

$$f_{\omega,J}(a) = \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} b^*(\omega) \bmod J = \sum_{V\in\Gamma} f_V(a|_V) = \sum_{W\in\Gamma(1)} f_W(a|_W).$$

Замечание 3. В выкладках выше появился ещё один функционал, а именно

$$\begin{array}{rcc} F\colon \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^n, N) & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \int\limits_{\mathrm{S}^n} a^*(\eta), \end{array}$$

где $\eta \in \Omega^n(N)$. Его можно назвать *первичным функционалом*. И, как только что было показано, его порядок не превосходит 1.

Вернёмся к общему случаю. Заметим, что существует единственный такой гомоморфизм g, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Z}_{n+1}(N;\mathbb{Z}) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\langle\omega,-\rangle"] & \mathrm{C}_{n+1}(N;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\tilde\partial"] \arrow[d, "\langle\omega,-\rangle"] & \mathrm{B}_n(N;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "i_2"] & \mathbb{R} \arrow[r, "- \bmod J"] & \mathbb{R}/J \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где i_1, i_2 – это включения, $\tilde\partial = \partial|_{\mathrm{C}_{n+1}(N;\mathbb{Z})\to\mathrm{B}_n(N;\mathbb{Z})}$ – граничный гомоморфизм с уменьшенной до группы кограниц $\mathrm{B}_n(N;\mathbb{Z})$ кообластью, а $\langle\omega,-\rangle$ – гомоморфизмы интегрирования. Таким образом, для любого

$c \in \mathrm{C}_{n+1}(N;\mathbb{Z})$ выполнено $g(\partial c) = \langle \omega, c\rangle \bmod J$. Заметим, что $\mathbb{R}/J$ – делимая группа, поэтому существует такой гомоморфизм g', что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}_n(N;\mathbb{Z}) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & \mathbb{R}/J \\ \mathrm{C}_n(N;\mathbb{Z}), \arrow[ur, "g'"] & \end{tikzcd}$$

где j – включение. Теперь мы готовы к тому, чтобы провести оценку сверху.

Пусть дано конечное открытое покрытие Γ сферы S^n. Выберем фундаментальный цикл $z \in \mathrm{Z}_n(\mathrm{S}^n;\mathbb{Z})$, подчинённый покрытию Γ,

$$z = \sum_{V \in \Gamma} (i_V)_*(z_V),$$

где $z_V \in \mathrm{C}_n(V;\mathbb{Z})$, $i_V\colon V \to \mathrm{S}^n$ – включения. Для любого $a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^n, N)$ выберем продолжение $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^{n+1}, N)$. Тогда

$$\int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} b^*(\omega) = \big\langle b^*(\omega), t\big\rangle = \big\langle \omega, b_*(t)\big\rangle,$$

где $t \in \mathrm{C}_{n+1}(\mathrm{D}^{n+1};\mathbb{Z})$ – такая цепь, что $\partial t = i_*(z)$, где $i\colon \mathrm{S}^n \to \mathrm{D}^{n+1}$ – включение. Имеем

$$\partial\big(b_*(t)\big) = b_*\big(i_*(z)\big) = (b \circ i)_*(z) = a_*(z).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f_{\omega,J}(a) &= \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} b^*(\omega) \bmod J = \big\langle \omega, b_*(t)\big\rangle \bmod J = g\Big(\partial\big(b_*(t)\big)\Big) \\ &= g\big(a_*(z)\big) = g'\big(a_*(z)\big) = g'\left(a_*\left(\sum_{V \in \Gamma} (i_V)_*(z_V)\right)\right) \\ &= \sum_{V \in \Gamma} g'\Big(a_*\big((i_V)_*(z_V)\big)\Big) = \sum_{V \in \Gamma} g'\big((a|_V)_*(z_V)\big). \end{aligned}$$

Отталкиваясь от полученного выражения для функционала $f_{\omega,J}$, легко видеть, каким образом для каждого $W \in \Gamma(1)$ следует определить функционал f_W. $\square$

Доказательство необходимости в теореме 1. Предположим, что не все периоды формы ω лежат в J. Покажем, что тогда $\operatorname{ord}(f_{\omega,J}) > 1$.

Выберем произвольный $(n+1)$-мерный аффинный симплекс

$$\Delta \subset \operatorname{int}(\mathrm{D}^{n+1})$$

и введём ряд обозначений. Обозначим через $v_0, v_1, \ldots, v_{n+1}$ вершины симплекса Δ, сам симплекс Δ будем обозначать через $[v_0, v_1, \ldots, v_{n+1}]$, а грани симплекса Δ будем кодировать следующим образом:

$$\partial_i \Delta = [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{n+1}],$$

где символ $\hat{}$ над вершиной означает, что данная вершина удалена из последовательности $v_0, \ldots, v_{n+1}$.

Естественные аффинные координаты $q_i \colon \mathrm{D}^{n+1} \to \mathbb{R}$ относительно вершин симплекса Δ обладают следующими свойствами: справедливо равенство $\sum_{i=0}^{n+1} q_i = 1$, выполнено $q_i = 0$ на грани $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{n+1}]$ симплекса Δ, а также в любой точке вне симплекса Δ выполнено $q_i < 0$ хотя бы для одного i.

Далее определим семейство гладких функций:

$$\begin{array}{rcc} \mu_i \colon \mathrm{D}^{n+1} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\theta(q_i(x))}{\sum\limits_{j=0}^{n+1} \theta(q_j(x))}, \end{array}$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Заметим, что выполнено $\mu_i \geqslant 0$, а также справедливо $\sum_{i=0}^{n+1} \mu_i = 1$. Это означает, что корректно определено отображение

$$\begin{array}{rcc} \mu \colon \mathrm{D}^{n+1} & \to & \Delta^{n+1} \\ x & \mapsto & (\mu_0, \ldots, \mu_{n+1}), \end{array}$$

где Δ^{n+1} – стандартный $(n+1)$-мерный симплекс. Для отображения μ выполнено включение $\mu(\partial \mathrm{D}^{n+1}) \subseteq \partial \Delta^{n+1}$, а также за счёт выбора нумерации вершин симплекса Δ можно добиться того, чтобы степень отображения μ оказалась равной 1. Для i-ой грани стандартного симплекса

$$\partial_i \Delta^{n+1} = \bigl\{(t_0, \ldots, t_{n+1}) \in \Delta^{n+1} \bigm| t_i = 0\bigr\}$$

будем обозначать через V_i множество

$$\operatorname{int}\bigl(\mu^{-1}(\partial_i \Delta^{n+1})\bigr) \cap \mathrm{S}^n \subset \mathrm{S}^n.$$

Из определения отображения μ и последнего свойства аффинных отображений q_i следует, что семейство $\Gamma = \{V_i \mid i = 0, \dots, n+1\}$ является покрытием сферы S^n.

Теперь выберем такой цикл $z \in \mathrm{Z}_{n+1}(N; \mathbb{Z})$, что выполнено $\langle \omega, z \rangle \notin J$. Обозначим через S оператор барицентрического подразделения

$$S\colon \mathrm{C}_{n+1}(N;\mathbb{Z}) \to \mathrm{C}_{n+1}(N;\mathbb{Z}).$$

Так как $S(z)$ – это целочисленная сингулярная цепь, то справедливо $S(z) = \sum_j n_j \sigma_j$, где σ_j – сингулярные симплексы, а n_j – целые числа, причём выполнено $\sum_j n_j = 0$. Следовательно, выполнено

$$\langle \omega, z \rangle = \big\langle \omega, S(z) \big\rangle = \sum_j n_j \langle \omega, \sigma_j \rangle.$$

Так как степень отображения μ равна 1, то для каждого j имеем

$$\begin{aligned} f_{\omega,J}\big((\sigma_j \circ \mu)|_{\mathrm{S}^n}\big) &= \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} (\sigma_j \circ \mu)^*(\omega) \bmod J = \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \mu^*\big(\sigma_j^*(\omega)\big) \bmod J \\ &= \int\limits_{\Delta^{n+1}} \sigma_j^*(\omega) \bmod J = \langle \omega, \sigma_j \rangle \bmod J. \end{aligned}$$

Предположим, что $\operatorname{ord}(f_{\omega,J}) \leqslant 1$, тогда существуют такие отображения f_W, где $W \in \Gamma(1)$, что для любого $a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^n, N)$ выполнено

$$f_{\omega,J}(a) = \sum_{W \in \Gamma(1)} f_W(a|_W).$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} &\langle \omega, z \rangle \bmod J = \sum_j n_j f_{\omega,J}\big((\sigma_j \circ \mu)|_{\mathrm{S}^n}\big) \\ &= \sum_j n_j \sum_{W \in \Gamma(1)} f_W\Big(\big((\sigma_j \circ \mu)|_{\mathrm{S}^n}\big)|_W\Big) = \sum_{W \in \Gamma(1)} \sum_j n_j f_W\big((\sigma_j \circ \mu)|_W\big). \end{aligned}$$

Покажем, что для любого $W \in \Gamma(1)$ сумма

$$\sum_j n_j f_W\big((\sigma_j \circ \mu)|_W\big) \tag{1}$$

равна нулю. Для $W = \varnothing$ сумма (1) равна нулю, так как $\sum_j n_j = 0$. Пусть теперь $W = V_i \in \Gamma$. Для $i \in \{0, \dots, n+1\}$ будем обозначать через $\varepsilon_i\colon \Delta^n \to \Delta^{n+1}$ стандартную аффинную параметризацию грани $\partial_i\Delta^{n+1}$. Заметим, что для любого гладкого сингулярного симплекса $\rho\colon \Delta^{n+1} \to N$ выполнено

$$\partial\rho = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\partial_i\rho = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(\rho\circ\varepsilon_i).$$

Значит, для любого $V_i \in \Gamma$ выполнено

$$\sum_j n_j f_{V_i}\big((\sigma_j\circ\mu)|_{V_i}\big) = \sum_j n_j f_{V_i}(\sigma_j\circ\varepsilon_i\circ\lambda_i),$$

где отображение λ_i определяется следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "\mathrm{in}"'] & \Delta^n \arrow[d, "\varepsilon_i"] \\ \mathrm{D}^{n+1} \arrow[r, "\mu"] & \Delta^{n+1}. \end{tikzcd}$$

Обозначим через $F_i\colon \mathrm{C}_n(N;\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}/J$ гомоморфизм абелевых групп, действующий на сингулярных симплексах по правилу $\tau \mapsto f_{V_i}(\tau\circ\lambda_i)$. Наконец, получаем

$$\sum_j n_j f_{V_i}\big((\sigma_j\circ\mu)|_{V_i}\big) = \sum_j n_j f_{V_i}(\sigma_j\circ\varepsilon_i\circ\lambda_i)$$

$$= \sum_j n_j F_i(\sigma_j\circ\varepsilon_i) = \sum_j n_j F_i(\partial_i\sigma_j) = F_i\big(\partial_i(\sum_j n_j\sigma_j)\big) = F_i\big(\partial_i S(z)\big).$$

Заключительная часть доказательства проводится с опорой на следующую лемму.

Лемма 2. *Для любого* $i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$ *следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}_{n+1}(N;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "S"] & \mathrm{C}_n(N;\mathbb{Z}) \arrow[d, "\delta_i^0\cdot S"] \\ \mathrm{C}_{n+1}(N;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial_i"] & \mathrm{C}_n(N;\mathbb{Z}). \end{tikzcd}$$

Замечание 4. В формулировке леммы 2 через δ_i^0 обозначается символ Кронекера. Будем считать, что при барицентрическом подразделении вершина нумеруется коразмерностью того симплекса, чьим барицентром она является. Таким образом, лемма 2 является уточнением того факта, что барицентрическое подразделение – это цепное отображение.

Доказательство леммы 2. Учитывая описанную выше нумерацию вершин, заметим, что для гладкого сингулярного симплекса ρ и любых $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ из определения барицентрического подразделения следует равенство

$$\partial_i S(\rho) = 0.$$

Так как барицентрическое подразделение S является цепным отображением, то для любого гладкого сингулярного симплекса ρ имеем

$$S(\partial\rho) = \partial S(\rho) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i S(\rho) = \partial_0 S(\rho). \qquad \square$$

Из леммы 2 вытекает, что $\partial_i S(z) = 0$ для любого $i \in \{0, \ldots, n+1\}$, откуда получаем

$$\sum_j n_j f_{V_i}((\sigma_j \circ \mu)|_{V_i}) = F_i(\partial_i S(z)) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к противоречию

$$0 \neq \langle \omega, z \rangle \bmod J = \sum_{W \in \Gamma(1)} \sum_j n_j f_W\big((\sigma_j \circ \mu)|_W\big) = 0. \qquad \square$$

Замечание 5. Приведённый выше рецепт построения противоречия не является единственным. Пусть $\omega \in \Omega^2(\mathrm{T}^2)$ – это форма площади, определяемая стандартной метрикой на торе T^2. Рассмотрим функционал

$$f_{\omega,\{0\}} \colon \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^1, \mathrm{T}^2) \to \mathbb{R}$$

и приведём набросок доказательства того, что $\operatorname{ord}(f_{\omega,\{0\}}) > 1$.

Пусть V_j – открытая дуга окружности S^1, служащая окрестностью пересечения данной окружности с j-й четвертью плоскости $\mathbb{R}^2$ и лишь чуть большая этого пересечения. Положим $\Gamma = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$. Выберем гладкое отображение дуги V_j на каждую из восьми гладких дуг на торе, из которых состоят изображённые на рис. 1 кривые.

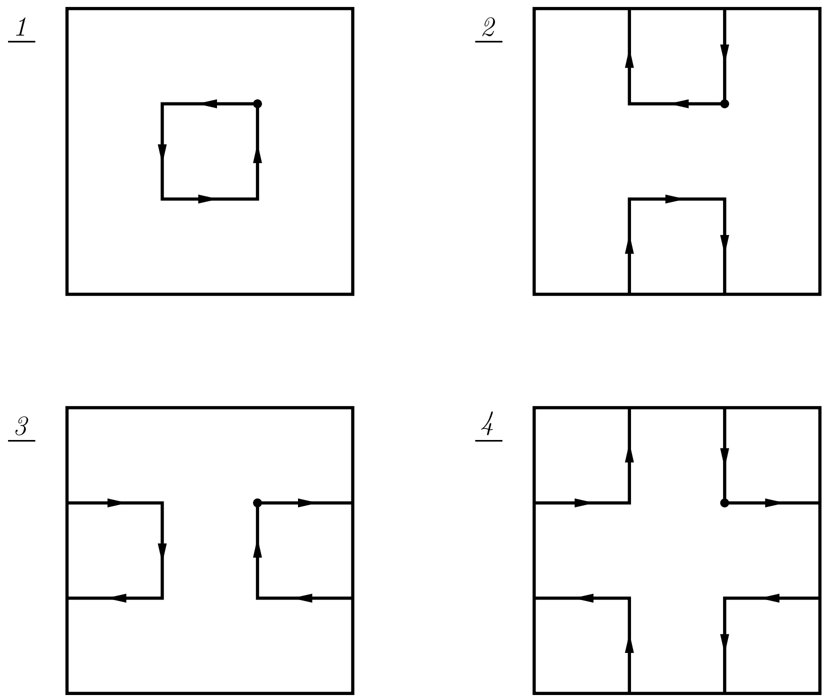

Рис. 1. Образы отображений a_i.

Потребуем, чтобы выбранные отображения были нестрого монотонными относительно указанных на рисунке ориентаций и постоянными на пересечении дуг V_k и V_j для каждой пары (k, j), где $k \neq j$. Обозначим через $a_i\colon \mathrm{S}^1 \to \mathrm{T}^2$ отображение, составленное из выбранных отображений дуг V_1, V_2, V_3, V_4 таким образом, как показано на i-й части рис. 1, и отправляющее точку $(1, 0) \in \mathrm{S}^1$ в точку тора, изображённую утолщенной на рис. 1. Заметим, что

$$a_1(V_i) = a_2(V_i),\ a_3(V_i) = a_4(V_i),\ i \in \{1, 3\},$$
$$a_1(V_l) = a_3(V_l),\ a_2(V_l) = a_4(V_l),\ l \in \{2, 4\}.$$

Предположим, что $\operatorname{ord}(f_{\omega,\{0\}}) \leqslant 1$. Тогда для любого конечного открытого покрытия $\widetilde{\Gamma}$ существует семейство таких отображений f_W, где $W \in \widetilde{\Gamma}(1)$, что для любого $a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^1, \mathrm{T}^2)$ выполнено

$$f_{\omega,\{0\}}(a) = \sum_{W \in \widetilde{\Gamma}(1)} f_W(a|_W).$$

В частности, данное условие выполнено для покрытия Γ и отображений a_1, a_2, a_3, a_4. Обозначим через S площадь тора, и заметим, что справедлива следующая серия равенств:

$$\begin{aligned} S &= f_{\omega,\{0\}}(a_1) - f_{\omega,\{0\}}(a_2) - f_{\omega,\{0\}}(a_3) + f_{\omega,\{0\}}(a_4) \\ &= \sum_{W \in \Gamma(1)} \big(f_W(a_1|_W) - f_W(a_2|_W) - f_W(a_3|_W) + f_W(a_4|_W)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{4} \big(f_{V_i}(a_1|_{V_i}) - f_{V_i}(a_2|_{V_i}) - f_{V_i}(a_3|_{V_i}) + f_{V_i}(a_4|_{V_i})\big). \end{aligned}$$

Знаки и отображения подобраны таким образом, что соответствующие слагаемые в результирующем выражении взаимно уничтожаются. Мы приходим к противоречию, так как тор имеет ненулевую площадь.

§2. Доказательство теоремы 2

Напомним, что порядок функционала обладает следующим свойством

$$\mathrm{ord}(f+g) \leqslant \max(\mathrm{ord}(f), \mathrm{ord}(g)).$$

Таким образом, доказательство достаточно провести в случае точной формы и в случае формы вида $\eta_1 \wedge \eta_2$, где $\eta_1 \in \Omega^m(N)$, $\eta_2 \in \Omega^l(N)$ – замкнутые формы, $m, l > 0$ и $m+l = n+1$. Так как случай точной формы был разобран в рамках доказательства достаточности в теореме 1, далее будем считать, что $\omega = \eta_1 \wedge \eta_2$.

Утверждение 1. *Все сферические периоды формы ω равны нулю.*

Доказательство утверждения 1. Для $c \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^{n+1}, N)$ имеем

$$\int_{\mathrm{S}^{n+1}} c^*(\eta_1 \wedge \eta_2) = \int_{\mathrm{S}^{n+1}} c^*(\eta_1) \wedge c^*(\eta_2) = 0.$$

Действительно, так как $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(\mathrm{S}^k) = 0$ при $i \notin \{0, k\}$, формы $c^*(\eta_1)$ и $c^*(\eta_2)$ являются точными, а значит точна и подынтегральная форма $c^*(\eta_1) \wedge c^*(\eta_2)$, являющаяся произведением точных форм. $\square$

Утверждение 2. *Пусть* $k \notin \{0, n+1\}$, *а четвёрка циклов*

$$\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathrm{Z}^k_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1}) \quad \textit{и} \quad \beta, \tilde{\beta} \in \mathrm{Z}^{n+1-k}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1})$$

обладает свойствами $\alpha|_{\mathrm{S}^n} = \tilde{\alpha}|_{\mathrm{S}^n}$ *и* $\beta|_{\mathrm{S}^n} = \tilde{\beta}|_{\mathrm{S}^n}$. *Тогда справедливо*

$$\int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \alpha \wedge \beta = \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}.$$

Доказательство утверждения 2. Заметим, что $\beta, \tilde{\alpha} \in \mathrm{B}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1})$, в то время как $(\alpha - \tilde{\alpha}), (\beta - \tilde{\beta}) \in \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1}, \mathrm{S}^n)$. Следовательно,

$$(\alpha - \tilde{\alpha}) \wedge \beta \in \mathrm{B}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1}, \mathrm{S}^n) \quad \text{и} \quad \tilde{\alpha} \wedge (\beta - \tilde{\beta}) \in \mathrm{B}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1}, \mathrm{S}^n),$$

откуда имеем

$$\int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \alpha \wedge \beta = \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \big((\alpha - \tilde{\alpha}) \wedge \beta + \tilde{\alpha} \wedge (\beta - \tilde{\beta}) + \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}\big) = \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}. \quad \square$$

Зафиксируем конечное открытое покрытие Γ сферы S^n и зададим сохраняющее градуировку отображение g следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1}) & \to & \bigoplus\limits_{V \in \Gamma} \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(V) \\ \omega & \mapsto & (\omega|_V)_{V \in \Gamma}\,. \end{array}$$

Так как любое сюръективное линейное отображение обратимо справа, а любое линейное отображение, определённое на подпространстве, можно продолжить до линейного отображения, определённого на всём пространстве, существует такое сохраняющее градуировку линейное отображение

$$\mathscr{L} = \underset{V \in \Gamma}{\oplus} \mathscr{L}_V \colon \bigoplus_{V \in \Gamma} \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1}),$$

что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1}) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & \bigoplus\limits_{V \in \Gamma} \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(V) \\ \bigoplus\limits_{V \in \Gamma} \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1}). \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Заметим, что отображение g раскладывается в следующую композицию:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1}) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{res}"] & & \bigoplus\limits_{V\in\Gamma} \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(V) \\
& \mathrm{Z}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathrm{S}^n), \arrow[ur, hook, "i"] &
\end{tikzcd}
$$

где res – это отображение сужения, а i – инъективное линейное отображение, заданное тем же правилом, что и отображение g. Так как инъективные линейные отображения обратимы слева, мы заключаем, что равенство $g \circ \mathscr{L} \circ g = g$ равносильно равенству $\mathrm{res} \circ \mathscr{L} \circ g = \mathrm{res}$.

Для каждого $a \in \mathrm{C}^\infty_0(\mathrm{S}^n, N)$ выберем продолжение $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^{n+1}, N)$ и, в силу утверждения 2, получим

$$
\begin{aligned}
f_{\omega,\{0\}}(a) &= \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} b^*(\omega) = \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} b^*(\eta_1) \wedge b^*(\eta_2) \\
&= \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \mathscr{L}\Big(\big((a|_{V_1})^*(\eta_1)\big)_{V_1\in\Gamma} \Big) \wedge \mathscr{L}\Big(\big((a|_{V_2})^*(\eta_2)\big)_{V_2\in\Gamma} \Big) \\
&= \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \left(\sum_{V_1\in\Gamma} \mathscr{L}_{V_1}\big((a|_{V_1})^*(\eta_1)\big) \right) \wedge \left(\sum_{V_2\in\Gamma} \mathscr{L}_{V_2}\big((a|_{V_2})^*(\eta_2)\big) \right) \\
&= \sum_{V_1, V_2\in\Gamma} \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \mathscr{L}_{V_1}\big((a|_{V_1})^*(\eta_1)\big) \wedge \mathscr{L}_{V_2}\big((a|_{V_2})^*(\eta_2)\big) \\
&= \sum_{W\in\Gamma(2)} \left({\sum}' \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \mathscr{L}_{V_1}\big((a|_{V_1})^*(\eta_1)\big) \wedge \mathscr{L}_{V_2}\big((a|_{V_2})^*(\eta_2)\big) \right).
\end{aligned}
$$

Суммирование ${\sum}'$ ведётся по таким $V_1, V_2 \in \Gamma$, что $V_1 \cup V_2 = W$. Для $W \in \Gamma(2)$ зададим функционал f_W следующим образом: для любого $\widetilde{a} \in \mathrm{C}^\infty(W, N)$ положим

$$
f_W(\widetilde{a}) = {\sum}' \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \mathscr{L}_{V_1}\big((\widetilde{a}|_{V_1})^*(\eta_1)\big) \wedge \mathscr{L}_{V_2}\big((\widetilde{a}|_{V_2})^*(\eta_2)\big).
$$

Тогда получаем

$$
f_{\omega,\{0\}}(a) = \sum_{W\in\Gamma(2)} f_W(a|_W).
$$

Это завершает доказательство.

§3. Доказательство предложения 1

Для коммутативного кольца R элемент $w \in \mathrm{H}^k(N;R)$ (аналогично случаю когомологий де Рама) будем называть *разложимым*, если класс w принадлежит квадрату идеала $\bigoplus_{l>0} \mathrm{H}^l(N;R)$ кольца $\mathrm{H}^\bullet(N;R)$ относительно cup-произведения.

Заметим, что для $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ тройка

$$i\colon \mathrm{C}^{n+1}(N,\mathbb{Z}) \to \mathrm{C}^{n+1}(N,\mathbb{R}), \quad I\colon \mathrm{H}^{n+1}_{\mathrm{dR}}(N) \to \mathrm{H}^{n+1}(N;\mathbb{R}),$$

$$j_k\colon \mathrm{C}^{n+1}(N;\mathbb{Z}) \to \mathrm{C}^{n+1}(N;\mathbb{Z}/k),$$

где i – включение, I – изоморфизм де Рама, а j_k – гомоморфизм, индуцирует следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^{n+1}(N;\mathbb{Z}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(j_k)_*"] & \mathrm{H}^{n+1}(N;\mathbb{R}) & \mathrm{H}^{n+1}_{\mathrm{dR}}(N) \arrow[l, "I", "\cong"'] \\ \mathrm{H}^{n+1}(N;\mathbb{Z}/k)\,. \end{tikzcd}$$

Лемма 3. *Если p – это простое число, элемент $[\omega] \in \mathrm{H}^{n+1}(N;\mathbb{Z})$ выбран таким образом, что элемент $(j_p)_*([\omega])$ разложим, а замкнутая форма $\eta \in \Omega^{n+1}(N)$ обладает свойством $I([\eta]) = [i(\omega)] = i_*([\omega])$, то вторичный функционал $f_{\eta,p\mathbb{Z}}$ определён корректно и* $\operatorname{ord}(f_{\eta,p\mathbb{Z}}) \leqslant 2$.

Доказательство леммы 3. Проверим, что все сферические периоды формы η лежат в $p\mathbb{Z}$. Пусть $c \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^{n+1}, N)$, $z \in \mathrm{Z}(\mathrm{S}^{n+1})$ – фундаментальный цикл S^{n+1}, тогда имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} c^*(\eta) \bmod p\mathbb{Z} &= \Big\langle c^*\big(I(\eta)\big), z\Big\rangle_{\mathbb{R}} \bmod p\mathbb{Z} \\ &= \Big\langle c^*\big(i(\omega)+\delta\theta\big), z\Big\rangle_{\mathbb{R}} \bmod p\mathbb{Z} \\ &= \Big(\big\langle c^*(\omega), z\big\rangle_{\mathbb{Z}} + \big\langle c^*(\theta), \partial z\big\rangle_{\mathbb{R}}\Big) \bmod p\mathbb{Z} \\ &= \Big\langle c^*\big(j_p(\omega)\big), z\Big\rangle_{\mathbb{Z}/p}, \end{aligned}$$

где δ – это дифференциал. Так как класс $(j_p)_*([\omega])$ является разложимым, а для $i \notin \{0,k\}$ выполнено $\mathrm{H}^i(\mathrm{S}^k;\mathbb{Z}/p) = 0$, то коцикл $c^*(j_p(\omega))$

является кограницей. Тогда имеем

$$\int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} c^*(\eta) \bmod p\mathbb{Z} = \Big\langle c^*\big(j_p(\omega)\big), z\Big\rangle_{\mathbb{Z}/p} = 0.$$

Таким образом, функционал $f_{\eta,p\mathbb{Z}}$ определён корректно. Перейдём теперь к оценке порядка функционала $f_{\eta,p\mathbb{Z}}$.

Пусть дано конечное открытое покрытие Γ сферы S^n. Выберем фундаментальный цикл $z \in \mathrm{Z}_n(\mathrm{S}^n;\mathbb{Z})$, подчинённый покрытию Γ:

$$z = \sum_{V \in \Gamma} (i_V)_*(z_V),$$

где $z_V \in \mathrm{C}_n(V;\mathbb{Z})$, а $i_V : V \to \mathrm{S}^n$ – это включения. Выберем для каждого $a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^n, N)$ продолжение $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^{n+1}, N)$ и получим

$$\int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} b^*(\eta) \bmod p\mathbb{Z} = \Big\langle b^*\big(I(\eta)\big), t\Big\rangle_{\mathbb{R}} \bmod p\mathbb{Z}$$

$$= \Big\langle b^*\big(i(\omega) + \delta\theta\big), t\Big\rangle_{\mathbb{R}} \bmod p\mathbb{Z} = \Big(\big\langle b^*(\omega), t\big\rangle_{\mathbb{Z}} + \big\langle b^*(\theta), \partial t\big\rangle_{\mathbb{R}}\Big) \bmod p\mathbb{Z},$$

где $t \in \mathrm{C}_{n+1}(\mathrm{D}^{n+1};\mathbb{Z})$ – это такая цепь, что выполнено $\partial t = i_*(z)$, а $i\colon \mathrm{S}^n \to \mathrm{D}^{n+1}$ – это включение. Проанализируем второе слагаемое:

$$\begin{aligned}\big\langle b^*(\theta), \partial t\big\rangle_{\mathbb{R}} \bmod p\mathbb{Z} &= \big\langle b^*(\theta), i_*(z)\big\rangle_{\mathbb{R}} \bmod p\mathbb{Z} = \big\langle \theta, a_*(z)\big\rangle_{\mathbb{R}} \bmod p\mathbb{Z} \\ &= \sum_{V \in \Gamma} \Big\langle \theta, \big(a_* \circ (i_V)_*\big)(z_V)\Big\rangle_{\mathbb{R}} \bmod p\mathbb{Z} \\ &= \sum_{V \in \Gamma} \big\langle \theta, (a|_V)_*(z_V)\big\rangle_{\mathbb{R}} \bmod p\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Перейдём к анализу первого слагаемого. Для упрощения выкладок будем считать, что $[j_p(\omega)] = [\alpha \smile \beta]$, где $\alpha, \beta \in \mathrm{Z}^\bullet(N;\mathbb{Z}/p)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\big\langle b^*(\omega), t\big\rangle_{\mathbb{Z}} \bmod p\mathbb{Z} &= \Big\langle b^*\big(j_p(\omega)\big), t\Big\rangle_{\mathbb{Z}/p} = \big\langle b^*(\alpha \smile \beta + \delta\xi), t\big\rangle_{\mathbb{Z}/p} \\ &= \big\langle b^*(\alpha \smile \beta), t\big\rangle_{\mathbb{Z}/p} + \sum_{V \in \Gamma} \big\langle \xi, (a|_V)_*(z_V)\big\rangle_{\mathbb{Z}/p},\end{aligned}$$

где $\xi \in \mathrm{C}^\bullet(N;\mathbb{Z}/p)$. Рассмотрим сохраняющее градуировку отображение

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathrm{Z}^\bullet(\mathrm{D}^{n+1};\mathbb{Z}/p) & \to & \bigoplus\limits_{V\in\Gamma} \mathrm{Z}^\bullet(V;\mathbb{Z}/p) \\ \xi & \mapsto & (\xi|_V)_{V\in\Gamma} . \end{array}$$

Аналог рассуждения о линейных отображениях, приведённого в §2, позволяет заключить, что существует такое сохраняющее градуировку $\mathbb{Z}/p$-линейное отображение

$$\mathscr{L} = \underset{V\in\Gamma}{\oplus} \mathscr{L}_V\colon \bigoplus_{V\in\Gamma} \mathrm{Z}^\bullet(V;\mathbb{Z}/p) \to \mathrm{Z}^\bullet(\mathrm{D}^{n+1};\mathbb{Z}/p),$$

что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Z}^\bullet(\mathrm{D}^{n+1};\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\ g\ } & \bigoplus\limits_{V\in\Gamma} \mathrm{Z}^\bullet(V;\mathbb{Z}/p) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ \bigoplus\limits_{V\in\Gamma} \mathrm{Z}^\bullet(V;\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\ \mathscr{L}\ } & \mathrm{Z}^\bullet(\mathrm{D}^{n+1};\mathbb{Z}/p). \end{array}$$

Положив $\lambda = \mathscr{L}\Big(\big((a|_V)^*(\alpha)\big)_{V\in\Gamma}\Big)$ и $\mu = \mathscr{L}\Big(\big((a|_V)^*(\beta)\big)_{V\in\Gamma}\Big)$, покажем, что справедливо

$$\big\langle b^*(\alpha) \smile b^*(\beta), t\big\rangle_{\mathbb{Z}/p} = \langle \lambda \smile \mu, t\rangle_{\mathbb{Z}/p}.$$

Действительно, заметим, что выполнено

$$b^*(\alpha) \smile b^*(\beta) = \big(b^*(\alpha) - \lambda\big) \smile b^*(\beta) + \lambda \smile \big(b^*(\beta) - \mu\big) + \lambda \smile \mu.$$

Здесь $\big(b^*(\alpha)-\lambda\big) \smile b^*(\beta)$ и $\lambda \smile \big(b^*(\beta)-\mu\big)$ – элементы $\mathrm{B}^\bullet(\mathrm{D}^{n+1},\Gamma;\mathbb{Z}/p)$, т. е. существуют такие коцепи θ_1 и θ_2, что $\delta\theta_1 = \big(b^*(\alpha) - \lambda\big) \smile b^*(\beta)$ и $\delta\theta_2 = \lambda \smile \big(b^*(\beta) - \mu\big)$, а также $\theta_1|_V = \theta_2|_V = 0$ для каждого $V \in \Gamma$. Действительно, ведь

$$b^*(\alpha) - \lambda,\ b^*(\beta) - \mu \in \mathrm{Z}^\bullet(\mathrm{D}^{n+1},\Gamma;\mathbb{Z}/p) \quad \text{и} \quad b^*(\beta),\ \lambda \in \mathrm{B}^\bullet(\mathrm{D}^{n+1};\mathbb{Z}/p).$$

Таким образом, мы имеем

$$\Big\langle \big(b^*(\alpha) - \lambda\big) \smile b^*(\beta), t\Big\rangle_{\mathbb{Z}/p} = \langle \theta_1, \partial t\rangle_{\mathbb{Z}/p} = \big\langle \theta_1, \sum_{V\in\Gamma} i_V(z_V)\big\rangle_{\mathbb{Z}/p}$$

$$= \sum_{V\in\Gamma} \big\langle (i_V)^*(\theta_1), z_V\big\rangle_{\mathbb{Z}/p} = \sum_{V\in\Gamma} \langle \theta_1|_V, z_V\rangle_{\mathbb{Z}/p} = 0.$$

Аналогично, $\Big\langle \lambda \smile \big(b^*(\beta)-\mu\big), t\Big\rangle_{\mathbb{Z}/p} = 0$. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned}
&\big\langle b^*(\alpha \smile \beta), t\big\rangle_{\mathbb{Z}/p} = \langle \lambda \smile \mu, t\rangle_{\mathbb{Z}/p} \\
&= \left\langle \left(\sum_{V_1 \in \Gamma} \mathscr{L}_{V_1}\Big((a|_{V_1})^*(\alpha)\Big)\right) \smile \left(\sum_{V_2 \in \Gamma} \mathscr{L}_{V_2}\Big((a|_{V_2})^*(\beta)\Big)\right), t \right\rangle_{\mathbb{Z}/p} \\
&= \sum_{V_1, V_2 \in \Gamma} \Big\langle \mathscr{L}_{V_1}\big((a|_{V_1})^*(\alpha)\big) \smile \mathscr{L}_{V_2}\big((a|_{V_2})^*(\beta)\big), t\Big\rangle_{\mathbb{Z}/p}.
\end{aligned}$$

А значит, справедливо

$$\begin{aligned}
f_{\eta, p\mathbb{Z}}(a) = &\sum_{V_1, V_2 \in \Gamma} \Big\langle \mathscr{L}_{V_1}\big((a|_{V_1})^*(\alpha)\big) \smile \mathscr{L}_{V_2}\big((a|_{V_2})^*(\beta)\big), t\Big\rangle_{\mathbb{Z}/p} \\
&+ \sum_{V \in \Gamma} \big\langle \xi, (a|_V)_*(z_V)\big\rangle_{\mathbb{Z}/p} + \sum_{V \in \Gamma} \big\langle \theta, (a|_V)_*(z_V)\big\rangle_{\mathbb{R}} \bmod p\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Отталкиваясь от полученного выражения для функционала $f_{\eta,p\mathbb{Z}}$, легко видеть, каким образом для каждого $W \in \Gamma(2)$ следует определить функционал f_W.

$\square$

Пусть теперь $p = 2$ и $j = 2$, тогда форма $\omega_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3}$ удовлетворяет условиям леммы 3, так как $\mathrm{H}^3(\mathbb{R}\mathrm{P}^3; \mathbb{Z}/2) = \langle \theta^3 \rangle$, где θ – образующая $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^3; \mathbb{Z}/2)$ (т. е. $\langle\theta\rangle = \mathrm{H}^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^3; \mathbb{Z}/2)$). Это завершает доказательство.

§4. Доказательство теоремы 3

Замечание 6. Если $[\omega] \in \big\langle [\alpha], [\beta], [\gamma] \big\rangle$, то из определения тройного произведения Масси следует, что $\omega = t\wedge\gamma+(-1)^{\deg(\alpha)+1}\alpha\wedge s+\theta$, где θ – некоторая точная форма. Так как порядок вторичного функционала, соответствующего точной форме, не превосходит 1, в дальнейших выкладках мы будем считать, что $\omega = t \wedge \gamma + (-1)^{\deg(\alpha)+1}\alpha \wedge s$.

Утверждение 3. *Все сферические периоды формы ω равны нулю.*

Доказательство утверждения 3. Пусть $c \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^{n+1}, N)$, тогда

$$\int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} c^*(\omega) = \int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} c^*\big(t \wedge \gamma + (-1)^{\deg(\alpha)+1}\alpha \wedge s\big),$$

где $t \in \Omega^{\deg(\alpha)+\deg(\beta)-1}(N)$ и $s \in \Omega^{\deg(\beta)+\deg(\gamma)-1}(N)$ – это такие формы, что выполнено $dt = \alpha \wedge \beta$ и $ds = \beta \wedge \gamma$. Далее получаем

$$\int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} c^*(\omega) = \int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} \big(c^*(t) \wedge c^*(\gamma) + (-1)^{\deg(\alpha)+1} c^*(\alpha) \wedge c^*(s)\big).$$

Однако $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(\mathrm{S}^k) = 0$ для $i \notin \{0, k\}$, и тогда существуют такие формы η_1 и η_2, что выполнено $\mathrm{d}\eta_1 = c^*(\gamma)$ и $\mathrm{d}\eta_2 = c^*(\alpha)$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} \big(c^*(t) \wedge c^*(\gamma) + (-1)^{\deg(\alpha)+1} c^*(\alpha) \wedge c^*(s)\big)\\ &\quad = \int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} \big(c^*(t) \wedge \mathrm{d}\eta_1 + (-1)^{\deg(\alpha)+1} \mathrm{d}\eta_2 \wedge c^*(s)\big).\end{aligned}$$

Наконец, пользуясь формулой Стокса, получаем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} \big(c^*(t) \wedge \mathrm{d}\eta_1 + (-1)^{\deg(\alpha)+1} \mathrm{d}\eta_2 \wedge c^*(s)\big)\\ &= -\int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} \big((-1)^{\deg(\alpha)+\deg(\beta)-1} c^*(\mathrm{d}t) \wedge \eta_1 + \eta_2 \wedge c^*(\mathrm{d}s)\big)\\ &= -\int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} \big((-1)^{\deg(\alpha)+\deg(\beta)-1} c^*(\alpha \wedge \beta) \wedge \eta_1 + \eta_2 \wedge c^*(\beta \wedge \gamma)\big)\\ &= (-1)^{\deg(\alpha)+\deg(\beta)} \int\limits_{\mathrm{S}^{n+1}} \mathrm{d}\big(\eta_2 \wedge c^*(\beta) \wedge \eta_1\big) = 0.\end{aligned}$$ □

Утверждение 4. *Пусть* $\eta_1 \in \Omega^{\deg(\alpha)-1}(\mathrm{S}^n)$ *– первообразная для формы* $a^*(\alpha)$*, т. е.* $\mathrm{d}\eta_1 = a^*(\alpha)$*, и пусть* $\eta_2 \in \Omega^{\deg(\gamma)-1}(\mathrm{S}^n)$ *– первообразная для формы* $a^*(\gamma)$*. Тогда справедливо*

$$f_{\omega,\{0\}}(a) = (-1)^{\deg(\alpha)+1} \int\limits_{\mathrm{S}^n} \big((-1)^{\deg(\beta)} a^*(t) \wedge \eta_2 + \eta_1 \wedge a^*(s)\big)$$

$$+ (-1)^{\deg(\alpha)+1} \int\limits_{\mathrm{S}^n} (-1)^{\deg(\beta)-1} \eta_1 \wedge a^*(\beta) \wedge \eta_2.$$

Доказательство утверждения 4. Пусть $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^{n+1}, N)$ – продолжение отображения a. Продолжим форму η_1 до некоторой формы $\theta_1 \in \Omega^{\deg(\alpha)-1}(\mathrm{D}^{n+1})$, которая является первообразной для формы $b^*(\alpha)$. Такое продолжение существует, так как $\deg(\alpha) \neq n+1$ и $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}^{n+1}, \mathrm{S}^n) = 0$ для $i \neq n+1$. Аналогично, продолжим η_2 до некоторой формы $\theta_2 \in \Omega^{\deg(\gamma)-1}(\mathrm{D}^{n+1})$, которая является первообразной для формы $b^*(\gamma)$. Пользуясь формулой Стокса, получаем

$$\int\limits_{\mathrm{S}^n} \big((-1)^{\deg(\alpha)+\deg(\beta)-1} a^*(t) \wedge \eta_2 + (-1)^{\deg(\alpha)+1} \eta_1 \wedge a^*(s)\big) - f_{\omega,\{0\}}(a)$$

$$= \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \mathrm{d}\big((-1)^{\deg(\alpha)+\deg(\beta)-1} b^*(t) \wedge \theta_2 + (-1)^{\deg(\alpha)+1} \theta_1 \wedge b^*(s)\big)$$

$$- f_{\omega,\{0\}}(a) = \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \big((-1)^{\deg(\alpha)+\deg(\beta)-1} b^*(\mathrm{d}t) \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge b^*(\mathrm{d}s)\big)$$

$$= \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \big((-1)^{\deg(\alpha)+\deg(\beta)-1} b^*(\alpha \wedge \beta) \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge b^*(\beta \wedge \gamma)\big)$$

$$= (-1)^{\deg(\alpha)+\deg(\beta)-1} \int\limits_{\mathrm{D}^{n+1}} \mathrm{d}\big(\theta_1 \wedge b^*(\beta) \wedge \theta_2\big)$$

$$= (-1)^{\deg(\alpha)+\deg(\beta)-1} \int\limits_{\mathrm{S}^n} \big(\eta_1 \wedge a^*(\beta) \wedge \eta_2\big). \qquad \square$$

Аналог рассуждения о линейных отображениях, приведённого в § 2, позволяет заключить, что существуют такие отображения

$$\mathscr{L}_1 \colon \Omega^{\deg(\alpha)}(\mathrm{S}^n) \to \Omega^{\deg(\alpha)-1}(\mathrm{S}^n),$$

$$\mathscr{L}_2 \colon \Omega^{\deg(\gamma)}(\mathrm{S}^n) \to \Omega^{\deg(\gamma)-1}(\mathrm{S}^n),$$

что для любой точной формы $u \in \Omega^{\deg(\alpha)}(\mathrm{S}^n)$ выполнено $\mathrm{d}\big(\mathscr{L}_1(u)\big) = u$, а для любой точной формы $u \in \Omega^{\deg(\gamma)}(\mathrm{S}^n)$ выполнено $\mathrm{d}\big(\mathscr{L}_2(u)\big) = u$.

Пусть дано конечное открытое покрытие Γ сферы S^n. Выберем разбиение единицы

$$\sum_{V \in \Gamma} \varphi_V = 1,$$

где $\varphi_V \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^n)$ и $\operatorname{supp}(\varphi_V) \subset V$. Для каждого $a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^n, N)$ выберем продолжение $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^{n+1}, N)$ и, воспользовавшись утверждением 4, получим

$$\begin{aligned}
&f_{\omega,\{0\}}(a) \\
&= (-1)^{\deg(\alpha)+1} \int\limits_{\mathrm{S}^n} \Big((-1)^{\deg(\beta)} a^*(t) \wedge \mathscr{L}_2\big(a^*(\gamma)\big) + \mathscr{L}_1\big(a^*(\alpha)\big) \wedge a^*(s)\Big) \\
&+ (-1)^{\deg(\beta)-1} \int\limits_{\mathrm{S}^n} \mathscr{L}_1\big(a^*(\alpha)\big) \wedge a^*(\beta) \wedge \mathscr{L}_2\big(a^*(\gamma)\big) \\
&= \sum_{V_1, V_2 \in \Gamma} (-1)^{\deg(\alpha)+1} \int\limits_{\mathrm{S}^n} (-1)^{\deg(\beta)} \big(\varphi_{V_1} a^*(t)\big) \wedge \mathscr{L}_2\big(\varphi_{V_2} a^*(\gamma)\big) \\
&+ \sum_{V_1, V_2 \in \Gamma} (-1)^{\deg(\alpha)+1} \int\limits_{\mathrm{S}^n} \mathscr{L}_1\big(\varphi_{V_1} a^*(\alpha)\big) \wedge \big(\varphi_{V_2} a^*(s)\big) \\
&+ \sum_{V_1, V_2, V_3 \in \Gamma} (-1)^{\deg(\beta)-1} \int\limits_{\mathrm{S}^n} \mathscr{L}_1\big(\varphi_{V_1} a^*(\alpha)\big) \wedge \big(\varphi_{V_2} a^*(\beta)\big) \wedge \mathscr{L}_2\big(\varphi_{V_3} a^*(\gamma)\big).
\end{aligned}$$

Отталкиваясь от полученного выражения для функционала $f_{\omega,\{0\}}$, легко видеть, каким образом для каждого $W \in \Gamma(3)$ следует определить функционал f_W.

§5. Доказательство предложения 2

Следуя [1, с. 118], будем обозначать носитель формы ω_L через $I_{1\,2\,3}$. Обозначим через

$$a\colon \mathrm{S}^1 \to N \backslash I_{1\,2\,3}$$

петлю, охватывающую носитель формы ω_L. Несложно заметить, что найдутся такие классы петель g_1, g_2 и g_3 в фундаментальной группе $\pi_1(N \backslash I_{1\,2\,3})$, что справедливо

$$\overline{a} = \big[[g_1, g_2], g_3\big]$$

в $\pi_1(N\backslash I_{1\,2\,3})$, где через $\overline{a}$ обозначен класс петли a в данной группе. Каждому классу g_i, $i=1,2,3$, сопоставим гладкий представитель

$$a_i\colon \mathrm{S}^1 \to N\backslash I_{1\,2\,3},$$

постоянный в окрестности U выделенной точки $* \in \mathrm{S}^1$. Существует такое отображение

$$e\colon \mathrm{S}^1 \to \bigvee_{k=1}^{3} \mathrm{S}^1,$$

что сужение (по области и кообласти) $e|_{e^{-1}(\mathrm{S}^1_k\backslash\{*\})\to \mathrm{S}^1_k\backslash\{*\}}$ является гладким для каждой окружности S^1_k букета $\bigvee_{k=1}^3 \mathrm{S}^1$, а также справедливо

$$\overline{e} = \bigl[[s_1,s_2],s_3\bigr],$$

где s_1,s_2,s_3 – стандартные образующие группы $\pi_1(\bigvee_{k=1}^3 \mathrm{S}^1)$, а $\overline{e}$ – класс петли e. Наконец, определим восемь гладких петель следующим образом:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}^1 \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend right, "a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}"'] & \bigvee\limits_{k=1}^{3} \mathrm{S}^1 \arrow[r, "(a_1^{\varepsilon_1},a_2^{\varepsilon_2},a_3^{\varepsilon_3})"] & N\backslash I_{1\,2\,3}, \end{tikzcd}$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3 \in \{0,1\}$, и для каждого $i\in\{1,2,3\}$ через a_i^0 обозначена постоянная петля, а через a_i^1 обозначена петля a_i.

Предположим, что $\operatorname{ord}(f_{\omega_L,\{0\}}) \leqslant 2$, и зафиксируем покрытие Γ окружности S^1, заданное следующим образом:

$$\Gamma = \{e^{-1}(\mathrm{S}^1_i \cup U)\,|\, i=1,2,3\}.$$

Для данного покрытия Γ существует такое семейство отображений f_W, $W\in\Gamma(2)$, что равенство

$$f_{\omega_L,\{0\}}(\tilde a) = \sum_{W\in\Gamma(2)} f_W(\tilde a|_W)$$

выполнено для каждого $\tilde a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S}^1,\mathrm{S}^3\backslash L)$. В частности, данное равенство выполнено для отображений $i\circ a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}$, где $i\colon N\backslash I_{1\,2\,3}\to N$ – включение. Вычислим сумму

$$\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3} (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} f_{\omega_L,\{0\}}(i\circ a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}).$$

Так как петля $i \circ a_{1,1,1}$ гомотопна в $N \backslash I_{1,2,3}$ петле $i \circ a$, мы имеем

$$f_{\omega_L,\{0\}}(i \circ a_{1,1,1}) = f_{\omega_L,\{0\}}(i \circ a).$$

Из определения формы ω_L следует, что значение функционала $f_{\omega_L,\{0\}}$ на петле $i \circ a$ не равно нулю. При этом, если $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \neq (1,1,1)$, то петля $i \circ a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}$ стягиваема в $N \backslash I_{1\,2\,3}$. Тогда у петли $i \circ a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}$ существует такое продолжение $b_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3} : \mathrm{D}^2 \to N$, что $\operatorname{Im} b_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3} \cap I_{1\,2\,3} = \varnothing$, откуда имеем

$$f_{\omega_L,\{0\}}(i \circ a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}) = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3} (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} f_{\omega_L,\{0\}}(i \circ a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}) = -f_{\omega_L,\{0\}}(i \circ a) \neq 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3} (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} f_{\omega_L,\{0\}}(i \circ a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}) \\ &= \sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3} (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} \sum_{W \in \Gamma(2)} f_W\big((i \circ a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3})|_W\big) = 0, \end{aligned}$$

так как отображение $(i \circ a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3})|_{V_i \cup V_j}$ зависит только от ε_i и ε_j (и не зависит от ε_k при $k \neq i, j$). Таким образом, мы приходим к противоречию. Отсюда по теореме 3 следует, что

$$\operatorname{ord}(f_{\omega_L,\{0\}}) = 3.$$

Автор выражает благодарность С. С. Подкорытову за постановку задачи и полезные обсуждения в ходе работы над ней.

Список литературы

1. Ф. А. Гриффитс, Д. В. Морган, *Рациональная теория гомотопий и дифференциальные формы.* Наука, 1990.
2. В. А. Запольский, *Функциональная характеризация инвариантов Васильева.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 39–53.
3. М. Минский, С. Пейперт, *Персептроны.* Мир, 1971.
4. А. Н. Трефилов, *η-инвариант Атьи–Патоди–Зингера и инварианты конечной степени.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **415** (2013), 163–193.
5. E. Witten, *Non-abelian bosonization in two dimensions.* — Commun. Math. Phys. **92**, No. 4 (1984), 455–472.

Postushkov S. S. Order of a secondary functional defined on smooth maps from a sphere.

Take a map a from S^n to an $(n+1)$-dimensional manifold N homotopic to a constant map. We can extend this map to a map b from D^{n+1} to N, take the pullback of the volume form on N by the map b, and integrate it over D^{n+1}. Let I_a denote this integral. A functional f that maps a to $I_a \bmod J$ is called a secondary functional associated with the volume form. Here J is a subgroup of $(\mathbb{R},+)$ such that f is well defined. One can also consider the secondary functional associated with any closed differential form.

For a functional defined on continuous maps between two topological spaces and taking values in an abelian group, we can define its order, a number that measures its complexity.

In this paper, we give a criterion for the secondary functional to have order at most 1. We obtain upper bounds for the order of a secondary functional associated with a closed form whose cohomology class is decomposable or represents a triple Massey product. Our upper bounds are exact.

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: sergpost228@yandex.ru

Поступило 6 октября 2025 г.