Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 551, 2026 г.

А. Ю. Миллер

ОБ ОДНОМ ПРИМЕЧАТЕЛЬНОМ ПАТТЕРНЕ В ГОРДИЕВОМ ГРАФЕ

§1. Введение

Одним из ключевых понятий классической теории узлов является понятие гордиева расстояния. *Гордиевым расстоянием* $d_G(L_1, L_2)$ между двумя зацеплениями L_1 и L_2 называется минимальное количество последовательных применений преобразования переключения перекрёстка, требуемое для преобразования одного из данных зацеплений в другое. Первое упоминание понятия гордиева расстояния встречается в работе Вендта [6] от 1937 года. Спустя более чем полвека, в 2002 году, в работе [2] Хирасава и Учида дают новое прочтение идее гордиева расстояния, вводя понятие гордиева комплекса. *Гордиевым комплексом* $\mathcal{G}$ называется симплициальный комплекс, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с объемлемо-изотопическими классами всех ручных узлов, а набор из $n+1$ вершины образует n-мерный симплекс тогда и только тогда, когда все попарные гордиевы расстояния между узлами, соответствующими вершинам данного набора, равны единице. Одномерный остов гордиева комплекса $\mathcal{G}$ называют *гордиевым графом.*

Настоящая работа посвящена поиску регулярных геометрических паттернов в структуре гордиева графа и состоит из анонса следующего результата, изложения схемы его доказательства и обзора ряда следствий.

Теорема 1. *В гордиевом графе для любого $n \geqslant 2$ и любого подграфа-звезды на $n+1$ вершине существует подграф-клика на бесконечном числе вершин, каждая вершина которого смежна с каждой вершиной данного подграфа-звезды.*

Ключевые слова: теория узлов, переключение перекрёстка, гордиев граф, гордиев комплекс.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 25-11-00251, https://rscf.ru/project/25-11-00251/.

§2. Предварительные сведения

Настоящий параграф содержит формулировки серии вспомогательных лемм, определений и замечаний, используемых в изложении схемы доказательства теоремы 1. Всюду далее под *узлом* (в зависимости от контекста) понимается как вложение окружности в трёхмерную сферу S^3, так и объемлемо-изотопический класс соответствующего вложения. Все узлы предполагаются неориентированными.

Определение 1. Узел K^* называется *сателлитом* нетривиального узла K, если найдутся такая простая замкнутая кривая q, лежащая в некотором полнотории V, не содержащаяся ни в каком трёхмерном шаре внутри этого полнотория и не изотопная его центральной кривой c, и такое вложение $\varphi\colon V \to S^3$ полнотория V в трёхмерную сферу S^3, что простая замкнутая кривая $\varphi(c) \subset S^3$ представляет объемлемо-изотопический класс узла K, а простая замкнутая кривая $\varphi(q) \subset S^3$ представляет объемлемо-изотопический класс узла K^*. Если узел K^* является сателлитом узла K, то узел K называют *компаньоном* узла K^*.

Замечание 1. Пусть k – простая замкнутая кривая в трёхмерной сфере S^3, представляющая объемлемо-изотопический класс узла K, пусть $N(k)$ – замкнутая трубчатая окрестность кривой k, а T – несжимаемый не параллельный краю тор в дополнении $S^3 \setminus \mathrm{Int}(N(k))$. Предположим, что существует такое вложение $\varphi\colon V \to S^3$ некоторого полнотория V в трёхмерную сферу S^3, что $\varphi(\partial V) = T$, а простая замкнутая кривая $\varphi(c) \subset S^3$, где c – центральная кривая полнотория V, представляет объемлемо-изотопический класс некоторого нетривиального узла Q. В таком случае узел Q является компаньоном узла K.

Лемма 1 (см. [3])**.** *Пусть W – нетривиально заузленный полноторий в трёхмерной сфере S^3, а K – узел во внутренности* $\mathrm{Int}(W)$*. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *каждая меридиональная кривая полнотория W образует с узлом K нерасщепимое зацепление*;
(2) *граничный тор ∂W несжимаем в многообразии $S^3 \setminus K$.*

Определение 2. Поверхность $H \subset S^3$ называется *незаузленным тором с дырой*, если существует такой незаузленный полноторий $V \subset S^3$, что $H \subset \partial V$ и дополнение $\partial V \setminus H$ гомеоморфно открытому диску.

Будем говорить, что пара простых замкнутых кривых на незаузленном торе с дырой $H \subset S^3$ является *меридионально-параллельной парой* для H, если эта пара является меридионально-параллельной парой для некоторого (и, следовательно, любого) незаузленного тора в S^3, содержащего тор с дырой H.

Лемма 2 (см. [3]). *Пусть K – узел в S^3. Пусть H – незаузленный тор с дырой в дополнении $S^3 \setminus K$, а $\{m_H, l_H\}$ – меридионально-параллельная пара для тора с дырой H. Если зацепления $m_H \cup K$ и $l_H \cup K$ нерасщепимы, то и зацепление $\partial H \cup K$ нерасщепимо.*

Лемма 3. *Пусть $n \geqslant 2$, пусть узлы $K_0, K_1, \ldots, K_n$ попарно не изотопны и пусть каждый из узлов $K_1, K_2, \ldots, K_n$ может быть преобразован в узел K_0 однократным применением преобразования переключения перекрёстка. Тогда узел K_0 допускает* специальную диаграмму*, локально устроенную так, как показано на Рис. 1, причём переключение перекрёстка с меткой $\boxed{c_i}$ на данной диаграмме узла K_0 преобразует эту диаграмму в диаграмму узла K_i.*

Рис. 1. Локальное устройство специальной диаграммы узла K_0. Переключение перекрёстка с меткой $\boxed{c_i}$ преобразует данную диаграмму в диаграмму узла K_i.

Доказательство леммы 3 носит технический характер и основано на проведении серии подходящих изотопий.

Интерпретируя на языке преобразования переключения перекрёстка такие структурные элементы гордиева графа, как “подграф-звезда”, “бесконечная клика” и “смежные вершины”, приведём эквивалентную развернутую формулировку теоремы 1. Схема доказательства будет опираться на данную переформулировку и использовать соответствующую нотацию.

Переформулировка теоремы 1. *Пусть $n \geqslant 2$, при этом пусть узлы $K_0, K_1, \ldots, K_n$ попарно не изотопны и пусть каждый из узлов $K_1, K_2, \ldots, K_n$ может быть преобразован в узел K_0 однократным применением преобразования переключения перекрёстка. Тогда найдётся бесконечное семейство попарно не изотопных узлов $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$, не содержащее узлов, объемлемо-изотопных узлам $K_0, K_1, \ldots, K_n$, и обладающее следующими свойствами:*

(1) *для любых $k, m \geqslant 1$, где $k \neq m$, узел J_k получается из узла J_m однократным применением преобразования переключения перекрёстка;*

(2) *для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и любого $m \geqslant 1$ узел K_i получается из узла J_m однократным применением преобразования переключения перекрёстка.*

§3. Схема доказательства теоремы 1

Пользуясь леммой 3, изобразим интересующую нас часть специальной диаграммы узла K_0 и расположим на данной диаграмме подходящий каспер Гусарова – Хабиро (см. [1]), как показано на Рис. 2. Хирургия по данному касперу вовлекает пары нитей диаграммы в

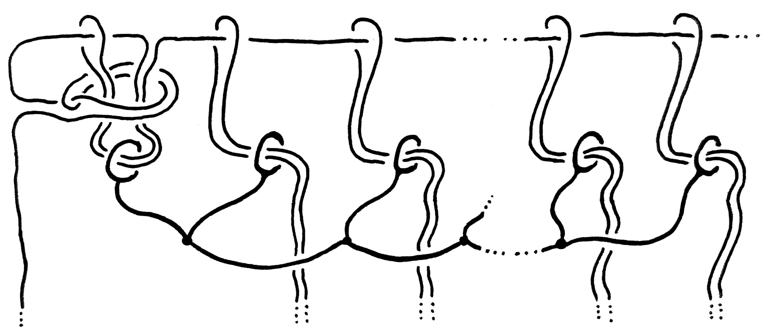

Рис. 2. Каспер в дополнении узла K_0.

“бруннов шаблон” и преобразует диаграмму узла K_0 в диаграмму вспомогательного узла J_0. Диаграмма узла J_1 формируется на основе полученной диаграммы узла J_0 путём добавления фрагмента, содержащего локальное заузливание пары нитей в простой узел, не являющийся компаньоном для узлов $K_0, K_1, \ldots, K_n$ (такой узел можно выбрать в силу теоремы Шуберта о конечном числе компаньонов, см. [5]). Аналогично, диаграмма узла J_m формируется на основе построенной ранее диаграммы узла J_{m-1} путём добавления очередного фрагмента, содержащего локальное заузливание пары нитей в простой узел, не являющийся компаньоном для узлов $K_0, K_1, \ldots, K_n, J_1, J_2, \ldots, J_{m-1}$. Благодаря геометрическим особенностям исходной специальной диаграммы узла K_0, а также устройству добавленных фрагментов, содержащих локальные заузливания, построенное семейство узлов будет удовлетворять условиям (1) и (2) из переформулировки теоремы 1. Неизотопность узла J_m узлам $K_0, K_1, \ldots, K_n, J_1, J_2, \ldots, J_{m-1}$ следует из несжимаемости естественно возникающего нетривиально заузленного тора в дополнении узла J_m, ассоциированного с локальным заузливанием, добавленным на шаге m (см. замечание 1). Несжимаемость данного тора в дополнении узла J_m, согласно лемме 1, эквивалентна нерасщепимости зацепления, образованного его меридиональной кривой и узлом J_m. Наконец, нерасщепимость данного зацепления устанавливается с помощью итеративного применения леммы 2 к естественно возникающей в дополнении узла J_m серии торов с дырой, образующей гроп (пример использования данной техники смотри в работе [3]). Это завершает описание схемы доказательства.

§4. Следствия

Отметим, что теорема 1 в комбинации с результатом Хирасавы и Учиды (смотри работу [2, Theorem 1.3]) немедленно влечёт положительный ответ на вопрос из работы [2] о достраивании произвольного симплекса в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ до симплекса сколь угодно высокой размерности. Кроме того, теорема 1 немедленно влечёт стягиваемость линка произвольного симплекса в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$, откуда прямо следует наличие структуры $\mathbb{R}^\infty$-многообразия на геометрической реализации гордиева комплекса $\mathcal{G}$, см. [4].

Список литературы

1. K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links.* — Geometry & Topology **4**, No. 1 (2000), 1–83.
2. M. Hirasawa, Y. Uchida, *The Gordian complex of knots.* — J. Knot Theory Ramifications **11**, No. 3 (2002), 363–368.
3. A. Yu. Miller, A. V. Malyutin, I. S. Alekseev, *Infinite midway cliques in the Gordian graph.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **549** (2025), 146–160.
4. K. Sakai, *Topology of Infinite-Dimensional Manifolds.* Springer, 2020.

5. H. Schubert, *Über eine numerische Knoteninvariante.* — Math. Z. **61**, No. 1 (1954), 245–288.
6. H. Wendt, *Die gordische Auflösung von Knoten.* — Math. Z. **42**, No. 1 (1937), 680–696.

Miller A. Yu. A note on a remarkable pattern in the Gordian graph.

This paper announces a new result concerning a specific regular geometric pattern in the Gordian graph. We outline the proof and review several corollaries. In particular, we establish that for any $n \geqslant 2$ and any star subgraph on $n+1$ vertices in the Gordian graph, there exists an infinite clique in the Gordian graph such that every vertex of the clique is adjacent to every vertex of the given star subgraph.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `miller.m2@mail.ru`

Поступило 1 марта 2026 г.