

А. С. Кривовичев, Е. А. Фоминых

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИНВАРИАНТОВ ТУРАЕВА–ВИРО ПЯТОГО ПОРЯДКА

§1. ВВЕДЕНИЕ

Инварианты Тураева–Виро $TV_{r,q}(M)$ трёхмерного многообразия M определяются двумя параметрами: натуральным числом $r \geq 3$, называемым *порядком* инварианта, и таким комплексным корнем q из единицы степени $2r$, что q^2 – примитивный корень из единицы степени r [1]. В случае $r = 5$, которому посвящена настоящая работа, q принимает одно из значений

$$\exp\left(\pm \frac{\pi}{5}i\right), \quad \exp\left(\pm \frac{2\pi}{5}i\right), \quad \exp\left(\pm \frac{3\pi}{5}i\right), \quad \exp\left(\pm \frac{4\pi}{5}i\right)^1.$$

Оказывается, значение $TV_{5,q}(M)$ зависит не столько от q , сколько от связанного с ним параметра ε , принимающего значения $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Точный вид зависимости ε от q указан в формулировках теорем 1 и 2. Более того, инвариант $TV_{5,q}(M)$ выражается через слагаемые другого инварианта – так называемого ε -инварианта $t(M)$ многообразия M [2].

Для описания основных результатов работы нам понадобится ряд обозначений. Пусть P – специальный спайн трёхмерного многообразия M . Обозначим через $\mathcal{F}(P)$ множество всех простых подполиэдров спайна P , включая P и пустое множество, а через $\mathcal{S}(P)$ – подмножество в $\mathcal{F}(P)$, состоящее из всех замкнутых поверхностей. Для пары $(F, Q) \in \mathcal{S}(P) \times \mathcal{F}(P)$ обозначим через $\tau(F, Q)$ число таких истинных вершин полиэдра P , что F проходит через соответствующую бабочку по четырём крыльям, Q – по пяти, а $F \cup Q$ – по всем шести. Напомним также, что ε -весом простого полиэдра Q называется число

$$w_\varepsilon(Q) = (-1)^{|V(Q)|} \varepsilon^{\chi(Q) - |V(Q)|},$$

Ключевые слова: Трёхмерные многообразия, инварианты Тураева–Виро.

Исследование А. С. Кривовичева выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда No. 22-21-00747.

¹Набранная жирным шрифтом буква i – это мнимая единица.

где $|V(Q)|$ – число истинных вершин полиэдра Q , а $\chi(Q)$ – его эйлерова характеристика.

Теорема 1. Пусть M – компактное 3-многообразие, P – его специальный спайн. Если $q \in \{\exp(\pm \frac{\pi}{5} \mathbf{i}), \exp(\pm \frac{3\pi}{5} \mathbf{i})\}$, то

$$TV_{5,q}(M) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(P)} \left(\sum_{F \in \mathcal{S}(P)} (-1)^{\chi(F) + \tau(F,Q)} \right) w_\varepsilon(Q),$$

где $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ при $q = \exp(\pm \frac{\pi}{5} \mathbf{i})$ и $\varepsilon = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ при $q = \exp(\pm \frac{3\pi}{5} \mathbf{i})$.

Теорема 2. Пусть M – компактное 3-многообразие, P – его специальный спайн. Если $q \in \{\exp(\pm \frac{2\pi}{5} \mathbf{i}), \exp(\pm \frac{4\pi}{5} \mathbf{i})\}$, то

$$TV_{5,q}(M) = |H_2(M, \mathbb{Z}_2)| \cdot t(M),$$

где $\varepsilon = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ при $q = \exp(\pm \frac{2\pi}{5} \mathbf{i})$ и $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ при $q = \exp(\pm \frac{4\pi}{5} \mathbf{i})$.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Специальные спайны. Напомним определения простых и специальных полиэдров, следуя [3]. Компактный полиэдр P называется *простым*, если линк каждой его точки $x \in P$ гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров: (а) окружности (в этом случае точка x называется *неособой*); (б) объединению окружности и диаметра (в этом случае точка x называется *тройной точкой*); (с) объединению окружности и трех радиусов (в этом случае точка x называется *истинной вершиной*). Типичные окрестности точек простого полиэдра показаны на Рис. 1. Регулярная окрестность истинной вершины называется *бабочкой*. Пересечение бабочки с объединением всех 2-компонент полиэдра состоит из шести дисков, которые, следуя [3], будем называть *крыльями* бабочки. Назовем два крыла *противоположными*, если пересечение их замыканий есть в точности истинная вершина. Несложно заметить, что шесть крыльев бабочки разбиваются на три пары противоположных крыльев.

Простой полиэдр имеет естественную *стратификацию*. Страты размерности 2 (*2-компоненты*) – это связные компоненты множества точек типа (а). Страты размерности 1 (*ребра*) – это связные компоненты

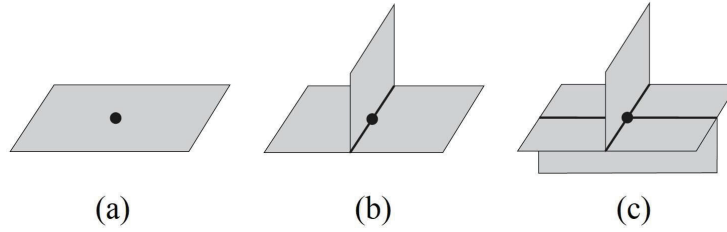


Рис. 1. Разрешенные типы окрестностей в простом полиэдре.

множества точек типа (b). Страты размерности 0 – это истинные вершины. Естественно потребовать, чтобы каждый страт являлся клеткой. Простой полиэдр P называется *специальным*, если выполнены следующие условия:

- (1) Каждое ребро полиэдра P является открытой 1-клеткой.
- (2) Каждая 2-компонента полиэдра P является открытой 2-клеткой.

Очевидно, что если простой полиэдр P связан и содержит хотя бы одну истинную вершину, то выполнение условия (2) влечет выполнение условия (1).

Пусть M – связное компактное 3-многообразие с непустым краем. Компактный полиэдр $P \subset M$ называется *спайном* многообразия M , если разность $M \setminus P$ гомеоморфна $\partial M \times (0, 1]$. При этом под спайном замкнутого 3-многообразия M подразумевается спайн многообразия $M \setminus V$, где V – шар в M . Спайн многообразия называется *специальным*, если он является специальным полиэдром. Как несложно видеть, специальный спайн связного 3-многообразия связан.

2.2. Инварианты Тураева–Виро. Следуя изложению в [3], напомним конструкцию инвариантов Тураева–Виро [1]. Пусть P – специальный полиэдр с множеством истинных вершин $V(P)$, множеством рёбер $E(P)$ и множеством 2-компонент $D(P)$. Раскраской полиэдра P в цвета палитры $\mathcal{C} = \{0, 1, \dots, r - 2\}$, где $r \geq 3$ – целое число, будем называть отображение $\xi: D(P) \rightarrow \mathcal{C}$. Неупорядоченная тройка цветов i, j, k^2 из \mathcal{C} называется *допустимой*, если выполнено:

- $i + j \geq k, j + k \geq i, k + i \geq j$;
- сумма $i + j + k$ чётна;

²Не путать цвет i с мнимой единицей i .

- $i + j + k \leq 2r - 4$.

Раскраска ξ специального полиэдра P называется *допустимой*, если цвета любых трёх 2-компонент, инцидентных одному и тому же ребру, образуют допустимую тройку. Множество всех допустимых раскрасок специального полиэдра P с палитрой \mathcal{C} обозначим через $\text{Adm}(P)$.

Напомним обозначения из теории квантовых инвариантов. Пусть q – корень из единицы степени $2r$, причем q^2 – примитивный корень из единицы степени r . Для целого неотрицательного числа n положим

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \quad \text{и} \quad [n]! = [n][n-1] \cdots [2][1].$$

В частности, $[1]! = [1] = 1$, и положим $[0]! = 1$.

Каждому цвету $i \in \mathcal{C}$ сопоставим вес

$$w_i = (-1)^i [i + 1].$$

Для целого неотрицательного m обозначим $\hat{m} = m/2$. Для допустимой тройки i, j, k положим

$$\Delta(i, j, k) = \left(\frac{[\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}]! [\hat{j} + \hat{k} - \hat{i}]! [\hat{k} + \hat{i} - \hat{j}]!}{[\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} + 1]!} \right)^{1/2}.$$

Заметим, что любая раскраска $\xi \in \text{Adm}(P)$ определяет раскраску окрестности каждой истинной вершины $v \in V(P)$. Это означает, что в окрестности вершины v мы видим раскрашенную бабочку $\begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix}$, где верхняя строка задает цвета трех крыльев, инцидентных одному ребру бабочки, а каждый столбец задает цвета противоположных пар крыльев (см. Рис. 2).

Сопоставим раскрашенной вершине v её вес $\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ l & m & n \end{matrix} \right\|_v \in \mathbb{C}$ и её $(q - 6j)$ -символ $\left| \begin{matrix} i & j & k \\ l & m & n \end{matrix} \right|_v \in \mathbb{C}$. А именно, положим

$$\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ l & m & n \end{matrix} \right\|_v = q^{i+j+k+l+m+n} \sum_z \frac{(-1)^z \cdot [z + 1]!}{B\left(z, \begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix}\right) \cdot C\left(z, \begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix}\right)}$$

и

$$\left| \begin{matrix} i & j & k \\ l & m & n \end{matrix} \right|_v = \Delta(i, j, k) \Delta(i, m, n) \Delta(l, j, n) \Delta(l, m, k) \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ l & m & n \end{matrix} \right\|_v,$$

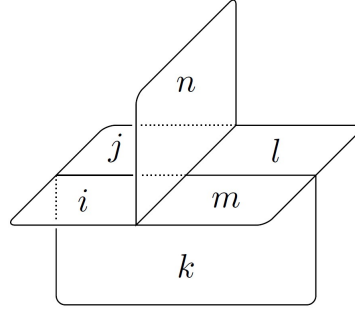


Рис. 2. Раскрашенная бабочка.

где

$$B\left(z, \begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix}\right) = [z - \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}]![z - \hat{i} - \hat{m} - \hat{n}]![z - \hat{l} - \hat{j} - \hat{n}]![z - \hat{l} - \hat{m} - \hat{k}]!,$$

$$C\left(z, \begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix}\right) = [\hat{i} + \hat{j} + \hat{l} + \hat{m} - z]![\hat{i} + \hat{k} + \hat{l} + \hat{n} - z]![\hat{j} + \hat{k} + \hat{m} + \hat{n} - z]!,$$

а сумма берётся по всем таким целым z , что все выражения в квадратных скобках неотрицательны. Другими словами, $\alpha \leq z \leq \beta$, где

$$\alpha = \max(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \hat{i} + \hat{m} + \hat{n}, \hat{l} + \hat{j} + \hat{n}, \hat{l} + \hat{m} + \hat{k});$$

$$\beta = \min(\hat{i} + \hat{j} + \hat{l} + \hat{m}, \hat{i} + \hat{k} + \hat{l} + \hat{n}, \hat{j} + \hat{k} + \hat{m} + \hat{n}).$$

Заметим, что набранная выше жирным шрифтом буква \hat{i} – это мнимая единица (не путать с символом i , обозначающим цвет из палитры \mathcal{C}).

Далее, каждой раскраске $\xi \in \text{Adm}(P)$ сопоставим вес $w(\xi)$ по правилу

$$w(\xi) = \prod_{v \in V(P)} \begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}_v \prod_{d \in D(P)} w_{\xi(d)}. \quad (2.1)$$

Вес специального полиэдра P задается формулой

$$w(P) = \sum_{\xi \in \text{Adm}(P)} w(\xi).$$

Как показано в [1], вес $w(P)$ произвольного специального спайна P многообразия M является инвариантом Тураева–Виро $TV_{r,q}(M)$ порядка r многообразия M .

Перепишем формулу (2.1) так, чтобы в неё входили веса вершин, а не их $(q - 6j)$ -символы. Для этого нам понадобится ввести понятие веса ребра.

Пусть e – ребро специального полиэдра P . Если 2-компоненты, инцидентные этому ребру, оказались покрашены в цвета i, j, k , то тройку (i, j, k) будем называть *раскраской* ребра e . Раскрашенному ребру e сопоставим его *вес* $\|i j k\|_e = \Delta(i, j, k)^2 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$w(\xi) = \prod_{v \in V(P)} \left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ l & m & n \end{array} \right\|_v \prod_{e \in E(P)} \|i j k\|_e \prod_{d \in D(P)} w_{\xi(d)}. \quad (2.2)$$

Действительно, для ребра $e \in E(P)$ с раскраской (i, j, k) число $\Delta(i, j, k)$ входит в произведение (2.1) дважды – по одному разу в $(q - 6j)$ -символы начала и конца ребра e .

§3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЧЕТЫРЁХЦВЕТНОЙ РАСКРАСКИ

Сопоставим каждой четырёхцветной раскраске ξ специального полиэдра P подполиэдры $F(\xi)$ и $Q(\xi)$ следующим образом: полиэдр $F(\xi)$ определяется как замыкание всех 2-компонент, покрашенных нечётными цветами, а полиэдр $Q(\xi)$ – как замыкание всех 2-компонент, покрашенных цветами 1 и 2.

Лемма 1. *Если четырёхцветная раскраска ξ допустима, то полиэдр $F(\xi)$ есть замкнутая поверхность, а полиэдр $Q(\xi)$ является простым. Более того, сопоставление $\xi \mapsto (F(\xi), Q(\xi))$ индуцирует биекцию между множеством $\text{Adm}(P)$ и множеством $\mathcal{S}(P) \times \mathcal{F}(P)$.*

Доказательство. Заметим, что замыкание некоторого набора 2-компонент полиэдра P есть замкнутая поверхность тогда и только тогда, когда к каждому ребру полиэдра P , лежащему в замыкании, 2-компоненты набора примыкают ровно два раза (с учетом кратности). Кроме того, замыкание некоторого набора 2-компонент полиэдра P есть простой подполиэдр тогда и только тогда, когда к каждому ребру полиэдра P , лежащему в замыкании, 2-компоненты набора примыкают

два или три раза (с учетом кратности). Поэтому первое утверждение леммы прямо следует из анализа всех допустимых троек:

$$(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 2, 0), (2, 2, 2), (3, 3, 0). \quad (3.1)$$

Для доказательства биективности достаточно описать обратное отображение. Рассмотрим пару $(F, Q) \in \mathcal{S}(P) \times \mathcal{F}(P)$ и построим по ней раскраску ξ полиэдра P . В цвет 0 покрасим 2-компоненты, не лежащие ни в поверхности F , ни в полиэдре Q . В цвет 1 покрасим 2-компоненты, лежащие одновременно и в F , и в Q . В цвет 2 покрасим 2-компоненты, лежащие в Q , но не лежащие в F . Наконец, в цвет 3 покрасим 2-компоненты, лежащие в F , но не лежащие в Q . Нетрудно видеть, что $F(\xi) = F$ и $Q(\xi) = Q$. Кроме того, анализируя все способы того, как полиэдры F и Q проходят через произвольное ребро полиэдра P , легко видеть, что раскраска ξ допустима. Лемма доказана. \square

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Пусть M – компактное 3-многообразие, P – его специальный спайн и ξ – допустимая четырехцветная раскраска спайна P .

4.1. Выражение веса раскраски через [2], [3] и [4].

Сначала выпишем веса цветов:

$$w_0 = 1, \quad w_1 = -[2], \quad w_2 = [3], \quad w_3 = -[4]. \quad (4.1)$$

Пронумеруем все возможные допустимые тройки, начиная с нуля, в том порядке, в котором они перечислены в списке (3.1). Вес s -ой допустимой тройки обозначим через T_s . Тогда

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{[0]! \cdot [0]! \cdot [0]!}{[1]!} = 1 - \text{вес тройки } (0, 0, 0); \\ T_1 &= \frac{[1]! \cdot [0]! \cdot [0]!}{[2]!} = [2]^{-1} - \text{вес тройки } (1, 1, 0); \\ T_2 &= \frac{[0]! \cdot [1]! \cdot [1]!}{[3]!} = [3]!^{-1} - \text{вес тройки } (1, 1, 2); \\ T_3 &= \frac{[0]! \cdot [1]! \cdot [2]!}{[4]!} = [3]^{-1}[4]^{-1} - \text{вес тройки } (1, 2, 3); \\ T_4 &= \frac{[2]! \cdot [0]! \cdot [0]!}{[3]!} = [3]^{-1} - \text{вес тройки } (2, 2, 0); \\ T_5 &= \frac{[1]! \cdot [1]! \cdot [1]!}{[4]!} = [4]!^{-1} - \text{вес тройки } (2, 2, 2); \\ T_6 &= \frac{[3]! \cdot [0]! \cdot [0]!}{[4]!} = [4]^{-1} - \text{вес тройки } (3, 3, 0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Наконец, есть ровно 19 различных допустимых раскрашенных бабочек. Пронумеруем их, начиная с нуля. Вес t -ой раскрашенной бабочки обозначим через H_t . Вычислим эти веса:

$$\begin{aligned}
0. & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 0; & H_0 = i^0 \cdot \frac{(-1)^0 \cdot [1]!}{1 \cdot 1} = 1. \\
1. & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 1; & H_1 = i^3 \cdot \frac{(-1)^1 \cdot [2]!}{1 \cdot 1} = i[2]. \\
2. & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 2; & H_2 = i^6 \cdot \frac{(-1)^2 \cdot [3]!}{[2]! \cdot 1} = -[3]. \\
3. & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 3; & H_3 = i^9 \cdot \frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{[3]! \cdot 1} = -i[4]. \\
4. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 1; & H_4 = i^4 \cdot \frac{(-1)^1 \cdot [2]!}{1 \cdot 1} = -[2]. \\
5. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 2; & H_5 = i^6 \cdot \frac{(-1)^2 \cdot [3]!}{1 \cdot 1} = -[3]!. \\
6. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 2; & H_6 = i^7 \cdot \frac{(-1)^2 \cdot [3]!}{1 \cdot 1} = -i[3]!. \\
7. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 3; & H_7 = i^9 \cdot \frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{[2]! \cdot 1} = -i[3][4]. \\
8. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 3; & H_8 = i^{10} \cdot \frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{[2]! \cdot 1} = [3][4]. \\
9. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 2; & H_9 = i^8 \cdot \frac{(-1)^2 \cdot [3]!}{1 \cdot 1} = [3]!. \\
10. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 3; & H_{10} = i^9 \cdot \frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{1 \cdot 1} = -i[4]!. \\
11. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 3; & H_{11} = i^{10} \cdot \frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{1 \cdot 1} = [4]!. \\
12. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 3; & H_{12} = i^{11} \cdot \frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{1 \cdot 1} = i[4]!. \\
13. & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 3; & H_{13} = i^{12} \cdot \frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{1 \cdot [2]!} = -[3][4]. \\
14. & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 3; & H_{14} = i^{11} \cdot \frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{1 \cdot [2]!} = i[3][4]. \\
15. & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 2; & H_{15} = i^8 \cdot \frac{(-1)^2 \cdot [3]!}{1 \cdot [2]!} = [3]. \\
16. & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 3; & H_{16} = i^{10} \cdot \frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{1 \cdot 1} = [4]!. \\
17. & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \alpha = 3, \beta = 4; & H_{17} = i^{12} \left(\frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{1 \cdot 1} + \frac{(-1)^4 \cdot [5]!}{1 \cdot 1} \right) = -[4]!. \\
18. & \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \alpha = \beta = 3; & H_{18} = i^{12} \cdot \frac{(-1)^3 \cdot [4]!}{1 \cdot [3]!} = -[4].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Обозначим через a_t , $0 \leq t \leq 18$, число раскрашенных бабочек полиэдра P , раскраски которых описаны в (4.3), через b_s , $0 \leq s \leq 6$, – число рёбер полиэдра P , раскраски которых описаны в (4.2), и, наконец, через c_k , $0 \leq k \leq 3$, – число 2-компонент полиэдра P , покрашенных

цветом k . Тогда формула (2.2) примет вид

$$w(\xi) = \prod_{t=0}^{18} H_t^{a_t} \prod_{s=0}^6 T_s^{b_s} \prod_{k=0}^3 w_k^{c_k}. \quad (4.4)$$

Подставив в формулу (4.4) вычисленные в формулах (4.1), (4.2), (4.3) значения весов, мы получим

$$w(\xi) = (-1)^{X_0} \mathbf{i}^{X_1} [2]^{X_2} [3]^{X_3} [4]^{X_4}, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} X_0 &= a_{2:7} + a_{10} + a_{13} + a_{17} + a_{18} + c_1 + c_3, \\ X_1 &= a_1 + a_3 + a_6 + a_7 + a_{10} + a_{12} + a_{14}, \\ X_2 &= a_1 + a_{4:6} + a_{9:12} + a_{16} + a_{17} - b_1 - b_2 - b_5 + c_1, \\ X_3 &= a_2 + a_{5:17} - b_2 - b_3 - b_4 - b_5 + c_2, \\ X_4 &= a_3 + a_7 + a_8 + a_{10:14} + a_{16:18} - b_3 - b_5 - b_6 + c_3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь через $a_{m:n}$ мы обозначаем сумму $\sum_{t=m}^n a_t$.

Проанализировав раскраски ребер в раскрашенных бабочках, выразим числа b_i через числа a_j .

$$\begin{aligned} b_0 &= 2a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3, \\ b_1 &= \frac{3}{2}a_1 + 2a_4 + a_5 + \frac{1}{2}a_6 + \frac{1}{2}a_7 + \frac{1}{2}a_8, \\ b_2 &= a_5 + a_6 + 2a_9 + \frac{3}{2}a_{10} + a_{11} + \frac{1}{2}a_{12}, \\ b_3 &= a_7 + a_8 + a_{11} + a_{12} + 2a_{13} + a_{14}, \\ b_4 &= \frac{3}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_6 + \frac{1}{2}a_7 + \frac{1}{2}a_{14} + 2a_{15} + a_{16}, \\ b_5 &= \frac{1}{2}a_{10} + \frac{1}{2}a_{12} + a_{16} + 2a_{17}, \\ b_6 &= \frac{3}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_8 + \frac{1}{2}a_{14} + 2a_{18}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Подставив (4.7) в (4.6), мы получим

$$\begin{aligned} X_0 &= a_{2:7} + a_{10} + a_{13} + a_{17} + a_{18} + c_1 + c_3, \\ X_1 &= a_1 + a_3 + a_6 + a_7 + a_{10} + a_{12} + a_{14}, \\ X_2 &= -\frac{1}{2}a_1 - a_4 - a_5 - \frac{1}{2}a_6 - \frac{1}{2}a_7 - \frac{1}{2}a_8 - a_9 - a_{10} - a_{17} + c_1, \\ X_3 &= -\frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_6 - \frac{1}{2}a_7 - a_{9:13} - \frac{1}{2}a_{14} - a_{15:17} + c_2, \\ X_4 &= -\frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}a_8 + \frac{1}{2}a_{10} - \frac{1}{2}a_{12} - a_{13} - \frac{1}{2}a_{14} - a_{17} - a_{18} + c_3. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2. Вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Следующие величины чётны:*

1. $a_1 + a_2 + a_3$; 2. $a_1 + a_6 + a_7 + a_8$; 3. $a_{10} + a_{12}$; 4. $a_3 + a_8 + a_{14}$.

Доказательство. Предположим, что сумма в пункте 1 нечётна. Тогда, согласно (4.7), число b_0 не является целым, что противоречит его определению. Остальные пункты леммы доказываются аналогично. \square

Лемма 3. *Имеют место следующие сравнения и равенство:*

1. $X_0 + \frac{1}{2}X_1 \equiv \chi(F(\xi)) + \tau(F(\xi), Q(\xi)) + |V(Q(\xi))| \pmod{2}$;
2. $X_0 + \frac{1}{2}X_1 + X_2 + X_4 \equiv |V(Q(\xi))| \pmod{2}$;
3. $X_2 + X_3 = \chi(Q(\xi)) - |V(Q(\xi))|$.

Доказательство. Выразим величины

$$\tau(F(\xi), Q(\xi)), \quad |V(Q(\xi))|, \quad \chi(F(\xi)) \quad \text{и} \quad \chi(Q(\xi))$$

через числа a_t и c_k , чем сведём доказательство к простому подсчёту.

Напомним, что через $\tau(F(\xi), Q(\xi))$ обозначается число таких истинных вершин полиэдра P , что поверхность $F(\xi)$ состоит ровно из четырёх крыльев, полиэдр $Q(\xi)$ – из пяти крыльев, а полиэдр $F(\xi) \cup Q(\xi)$ – из шести крыльев каждой из этих вершин. Это означает, что из шести крыльев каждой такой вершины ровно пять должны быть покрашены цветами 1 и 2, ровно четыре должны быть покрашены нечётными цветами, и все крылья должны быть покрашены ненулевыми цветами. Единственная допустимая бабочка, подходящая под это условие, имеет номер 11. Таким образом,

$$\tau(F(\xi), Q(\xi)) = a_{11}. \tag{4.9}$$

Истинным вершинам полиэдра $Q(\xi)$ соответствуют такие бабочки, все крылья которых покрашены в цвета 1 и 2. Такие бабочки стоят в списке (4.3) под номерами 9, 10 и 17. Таким образом,

$$|V(Q(\xi))| = a_9 + a_{10} + a_{17}. \tag{4.10}$$

В поверхность $F(\xi)$ входят вершины всех раскрасок, кроме 0, 2, 15, 16 и 17 (список (4.3)), рёбра раскрасок 1, 2, 3, 6 (список (4.2)) и 2-компоненты, покрашенные цветами 1 и 3. Тогда

$$\chi(F(\xi)) = a_1 + a_{3;14} + a_{18} - b_1 - b_2 - b_3 - b_6 + c_1 + c_3.$$

Применив формулы (4.7), получаем

$$\begin{aligned} \chi(F(\xi)) = & -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_3 - a_4 - a_5 - \frac{1}{2}a_6 - \frac{1}{2}a_7 - a_8 - a_9 - \frac{1}{2}a_{10} - a_{11} \\ & - \frac{1}{2}a_{12} - a_{13} - \frac{1}{2}a_{14} - a_{18} + c_1 + c_3; \end{aligned} \quad (4.11)$$

В полиэдр $Q(\xi)$ входят вершины всех раскрасок, кроме 0, 3 и 18 (список (4.3)), рёбра раскрасок 1, 2, 3, 4, 5 (список (4.2)) и 2-компоненты, покрашенные цветами 1 и 2. Тогда

$$\chi(Q(\xi)) = a_1 + a_2 + a_{4:17} - b_1 - b_2 - b_3 - b_4 - b_5 + c_1 + c_2.$$

Применив формулы (4.7), получаем

$$\begin{aligned} \chi(Q(\xi)) = & -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 - a_{4:7} - \frac{1}{2}a_8 - a_{9:13} - \frac{1}{2}a_{14} - a_{15:17} \\ & + c_1 + c_2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Докажем пункт 1 леммы 3. Для этого вычтем из правой части сравнения левую, подставим (4.11), (4.9), (4.10) и (4.8). Получим

$$\begin{aligned} \chi(F(\xi)) + \tau(F(\xi), Q(\xi)) + |V(Q(\xi))| - X_0 - \frac{1}{2}X_1 \\ \equiv a_1 + a_2 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} \pmod{2}. \end{aligned}$$

Согласно пунктам 1, 3 и 4 леммы 2, это выражение сравнимо с нулём по модулю 2.

Докажем сравнение из пункта 2 леммы 3. Вычтем из левой части сравнения правую, подставим (4.8) и (4.10). Получим

$$X_0 + \frac{1}{2}X_1 + X_2 + X_4 - |V(Q(\xi))| \equiv a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8 \pmod{2}.$$

Согласно пунктам 1 и 2 леммы 2, это выражение сравнимо с нулём по модулю 2.

Докажем равенство из пункта 3 леммы 3. Вычтем из правой части равенства левую, подставим (4.12), (4.10) и (4.8). Получим

$$\chi(Q(\xi)) - |V(Q(\xi))| - X_2 - X_3 = 0. \quad \square$$

4.3. Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1. Прямой подсчёт показывает, что

$$[2] = [3] = \varepsilon \quad \text{и} \quad [4] = 1,$$

где $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ при $q = \exp(\pm \frac{\pi}{5}i)$ и $\varepsilon = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ при $q = \exp(\pm \frac{3\pi}{5}i)$.

Подставив эти значения в формулу (4.5), получаем

$$w(\xi) = (-1)^{X_0} i^{X_1} \varepsilon^{X_2+X_3}.$$

Заключение теоремы следует из пунктов 1 и 3 леммы 3 и определения ε -веса простого полиэдра. \square

Доказательство теоремы 2. Прямой подсчёт показывает, что

$$[2] = -\varepsilon, \quad [3] = \varepsilon \quad \text{и} \quad [4] = -1,$$

где $\varepsilon = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ при $q = \exp(\pm \frac{2\pi}{5}i)$ и $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ при $q = \exp(\pm \frac{4\pi}{5}i)$.

Подставив эти значения в формулу (4.5), получаем

$$w(\xi) = (-1)^{X_0+X_2+X_4} \varepsilon^{X_1} \varepsilon^{X_2+X_3}.$$

Заключение теоремы следует из пунктов 2 и 3 леммы 3, определения ε -веса простого полиэдра и того факта, что $|H_2(M, \mathbb{Z}_2)| = |\mathcal{S}(P)|$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. G. Turaev, O. Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*. — *Topology* **31**, No. 4 (1992), 865 – 902.
2. С. В. Матвеев, М. А. Овчинников, М. В. Соколов, *Построение и свойства t-инварианта*. — *Зап. научн. семин. ПОМИ* **267** (2000), 207 – 219.
3. С. В. Матвеев, *Алгоритмическая топология и классификация трёхмерных многообразий*. МЦНМО, 2007.

Krivovichev A. S., Fominykh E. A. Geometric interpretation of the Turaev–Viro invariants of order 5.

The Turaev–Viro invariant of order r of a 3-manifold M is the sum of the weights of admissible $(r-1)$ -colorings of any special spine P of M . It turns out that for $r = 5$, the admissible colorings are encoded by pairs (F, Q) of simple subpolyhedra of the spine P , where F is a closed surface. In this case, the value of the invariant is expressed as the sum of the ε -weights of the subpolyhedra Q with integer coefficients depending on the Euler characteristics of the polyhedra F , Q , and their relative positions.

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: akrivovichev14@mail.ru

Поступило 26 мая 2026 г.

С.-Петербургский государственный университет;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: efominykh@gmail.com