Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 551, 2026 г.

И. С. Алексеев

ЧИСЛА ПЕРЕНОСА И ГЕОМЕТРИЯ ЗАМКНУТЫХ КОС

§1. Введение

Настоящая работа относится к теории узлов и кос. В ней изучается связь между динамической сложностью косы, рассматриваемой как класс отображений проколотого диска, и геометрическими свойствами зацепления, полученного замыканием этой косы.

Основными мерами сложности служат асимптотические числа переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ и $\ell_{\mathcal{A}_\circ}$, связанные с действием группы кос на графе граничных дуг $\mathcal{A}_\partial$ и на его фактор-графе граничных дуг со скользящими концами $\mathcal{A}_\circ$. Эти числа переноса измеряют асимптотическое смещение вершин графа под действием косы. Переход от графа $\mathcal{A}_\partial$ к графу $\mathcal{A}_\circ$ отвечает стягиванию граничной окружности проколотого диска в новый прокол; в терминах чисел переноса это соответствует устранению вклада коэффициента дробного скручивания Дена косы [1].

Первый основной результат работы утверждает, что если число переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi)$ косы φ превышает определённые пороговые значения, то её класс сопряжённости не допускает упрощающих преобразований Бирман–Менэско. Из этого для зацепления, представленного косой, выводятся признаки нетривиальности, нерасщепимости, простоты (теорема 5), а также признаки минимальности по числу нитей для такого представления и признаки единственности минимального представления с точностью до сопряжения (теорема 8). Число переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ также даёт нижние оценки классических мер сложности: рода Зейферта (теорема 10) и числа перекрёстков (теорема 11).

Второй основной результат касается гиперболической геометрии дополнений узлов и зацеплений; здесь ключевую роль играет граф $\mathcal{A}_\circ$. Доказано, что если гиперболическое зацепление является замыканием некоторой косы φ, то число переноса $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi)$ даёт нижнюю оценку

Ключевые слова: замкнутая коса, асимптотическое число переноса, простое зацепление, индекс косы, род Зейферта, число перекрёстков, гиперболический объём.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда No. 25-11-00251, `https://rscf.ru/project/25-11-00251`.

объёма дополнения этого зацепления (теорема 22). Число переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ также даёт признак гиперболичности (теорема 17). В случае узлов в предположении $\ell_{\mathcal{A}_\partial} > 4$ устанавливается соответствие между типом косы по Нильсену–Тёрстону и геометрическим типом её замыкания (теорема 18): периодические, приводимые и псевдоаносовские косы отвечают соответственно торическим, сателлитным и гиперболическим узлам.

Доказательства опираются на три инструмента. Первый из них – оценки числа переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ в терминах количества вхождений фиксированной образующей Артина. Второй – теория Бирман–Менэско, позволяющая строить пути в графе граничных дуг $\mathcal{A}_\partial$ на основе информации о поверхностях в дополнении замкнутой косы. Третий – оценки геометрических характеристик каспов расслоенных гиперболических трёхмерных многообразий и количественная форма 2π-теоремы Громова–Тёрстона.

Настоящая работа продолжает исследование, начатое в [1], где вводятся используемые здесь числа переноса и для этих чисел доказываются нижние оценки в терминах квазиморфизмов на группах кос. В совокупности эти две работы связывают квазиморфизмы с динамикой кос, а динамику кос – с топологией и геометрией их замыканий.

§2. Предварительные сведения

Пусть D_n^2 – диск с n отмеченными точками во внутренности, расположенными на фиксированном диаметре. Как это принято, мы свободно переходим между диском с отмеченными точками и соответствующей проколотой поверхностью [3]. Выберем одну из двух ориентаций диаметра и соответствующим образом пронумеруем проколы от 1 до n. Часть диска, видимую справа от диаметра при движении в порядке возрастания номеров проколов, будем называть *нижней*. Все дуги и кривые в дальнейшем предполагаются существенными, в частности непериферийными, и рассматриваются с точностью до изотопии, неподвижной на множестве проколов и на границе.

Под *дугой* на поверхности мы понимаем образ отображения отрезка $[0,1]$, сужение которого на $(0,1)$ является вложением во внутренность поверхности, причём концы дуги (т. е. образы точек 0 и 1) лежат в проколах или в отмеченных точках на границе. Как правило, мы фиксируем одну отмеченную точку на границе диска D_n^2, лежащую в нижней его части. В §5 рассматриваются дуги с концами в нескольких отмеченных точках на ∂D_n^2. Дуга называется *граничной*, если хотя бы один её конец лежит на границе.

Будем говорить, что две дуги на D_n^2 являются *∂-свободно изотопными*, если их образы становятся изотопными на поверхности, полученной из диска D_n^2 стягиванием его границы ∂D_n^2 в точку (которая становится новым проколом). Иными словами, каждый граничный росток дуги разрешается независимо перемещать вдоль ∂D_n^2.

Пусть B_n – группа кос с образующими Артина $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$. Отождествим её с группой классов отображений

$$B_n \cong \mathrm{Mod}(D_n^2),$$

неподвижных на границе и сохраняющих множество проколов, так, чтобы образующей Артина σ_i соответствовало положительное полускручивание вдоль дуги диаметра, соединяющей проколы с номерами i и $i+1$ [3]. *Полным оборотом* называется коса

$$\Delta_n^2 = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^n.$$

Обозначим символом $\mathcal{L}(\varphi)$ зацепление, являющееся замыканием косы φ. Класс сопряжённости косы обозначается символом $\widehat{\varphi}$.

Вершинами *графа граничных дуг* $\mathcal{A}_\partial$ являются изотопические классы граничных дуг проколотого диска D_n^2. Две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие изотопические классы имеют представителей с непересекающимися внутренностями. Граф $\mathcal{A}_\circ$ определяется как фактор-граф графа $\mathcal{A}_\partial$, полученный отождествлением вершин, отвечающих ∂-свободно изотопным дугам, и последующим удалением петель и дублирующих рёбер, возникающих в результате отождествления.

Для изометрического действия группы B_n на связном графе X положим

$$\tau_X(\varphi) = \min_{\alpha \in X} d(\alpha, \varphi(\alpha)), \qquad \ell_X(\varphi) = \lim_{m \to \infty} \frac{\tau_X(\varphi^m)}{m}.$$

Как хорошо известно, функция ℓ_X инвариантна относительно сопряжения, абсолютно однородна и удовлетворяет неравенству $\ell_X \leqslant \tau_X$.

Нам понадобится следующее соотношение между числами переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ и $\ell_{\mathcal{A}_\circ}$. Пусть ω_n – коэффициент дробного скручивания Дена. Согласно [1],

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) - |\omega_n(\varphi)| \leqslant 2\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant 2\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi). \tag{1}$$

В частности, $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi)$.

Следующая оценка связывает числа переноса $\tau_{\mathcal{A}_\partial}$ и $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ с комбинаторной сложностью артиновских слов.

Лемма 1. *Пусть $n \geqslant 2$ и $\varphi \in B_n$. Если некоторая коса, сопряжённая с косой φ, допускает выражение в образующих Артина, содержащее ровно m образующих вида $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$, то*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant m.$$

Доказательство. В силу инвариантности чисел переноса относительно сопряжения можно считать, что коса φ имеет вид

$$\varphi = \psi_0 \zeta_1 \psi_1 \zeta_2 \cdots \zeta_m \psi_m,$$

где $\zeta_i = \sigma_{n-1}^{\pm 1}$, а каждая коса ψ_i записана словом в образующих

$$\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-2}^{\pm 1}.$$

Пусть δ_n – дуга от граничной отмеченной точки к n-му проколу, лежащая в нижней части диска. Тогда косы ψ_i сохраняют изотопический класс дуги δ_n, а дуги δ_n и $\sigma_{n-1}^{\pm 1}(\delta_n)$ смежны в $\mathcal{A}_\partial$.

Положим

$$g_j = \psi_0 \zeta_1 \psi_1 \cdots \zeta_j \psi_j.$$

Тогда последовательность

$$\delta_n = g_0(\delta_n), g_1(\delta_n), \ldots, g_m(\delta_n) = \varphi(\delta_n)$$

задаёт путь длины m в графе $\mathcal{A}_\partial$. Следовательно, $d(\delta_n, \varphi(\delta_n)) \leqslant m$, откуда получаем оценку для $\tau_{\mathcal{A}_\partial}$, а вместе с ней и искомую оценку для асимптотического числа переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$. $\square$

Для оценки рода Зейферта нам потребуется также неравенство в терминах ленточных образующих Бирман–Ко–Ли, имеющих вид

$$a_{i,j} = (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1}) \sigma_i (\sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}), \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Геометрически $a_{i,j}$ представляет собой полускручивание вдоль дуги, соединяющей i-й и j-й проколы и проходящей в верхней части диска.

Лемма 2. *Если некоторая коса, сопряжённая с косой $\varphi \in B_n$, допускает выражение длины m в ленточных образующих, то*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor.$$

Доказательство. Пусть w – такое выражение. Для $k \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через $r_k(w)$ число образующих $a_{i,j}^{\pm 1}$ в выражении w, для которых $i = k$ или $j = k$. Пусть δ_k – дуга от граничной отмеченной точки к k-му проколу, лежащая в нижней части диска. Дуга δ_k сохраняется всеми ленточными образующими, направляющие дуги которых не инцидентны k-му проколу. Если $\zeta = a_{i,k}^{\pm 1}$ или $\zeta = a_{k,j}^{\pm 1}$, то $\zeta(\delta_k)$ не пересекается с δ_k: геометрически полускручивание ζ перемещает конец в k-м проколе через соответствующую дугу в верхней части диска, и образ $\zeta(\delta_k)$ можно расположить вдоль одной из "сторон" малой регулярной окрестности объединения дуги δ_k и дуги, направляющей полускручивание ζ. Тем самым δ_k и $\zeta(\delta_k)$ задают смежные вершины графа $\mathcal{A}_\partial$. Как в доказательстве леммы 1, отсюда следует, что $\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant r_k(w)$ для каждого k.

Каждая ленточная образующая учитывается ровно дважды в сумме

$$r_1(w) + \cdots + r_n(w),$$

следовательно, эта сумма равна $2m$. По принципу Дирихле существует k, для которого $r_k(w) \leqslant \lfloor 2m/n \rfloor$. Это даёт требуемую оценку. □

§3. Простота из граничного числа переноса

Нам потребуются три стандартных типа упрощающих преобразований замкнутых кос. Класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ *допускает дестабилизацию*, если он содержит элементы из множества $B_{n-1}\sigma_{n-1}^{\pm 1}$; *допускает рокировку*, если он содержит элементы из множества

$$B_{n-1}\sigma_{n-1}B_{n-1}\sigma_{n-1}^{-1};$$

допускает переворот, если он содержит элементы из множества

$$B_{n-1}\sigma_{n-1}B_{n-1}\sigma_{n-1}^{\pm 1}B_{n-1}\sigma_{n-1}^{-1}.$$

Известно, что возможность дестабилизации влечёт возможность рокировки, а возможность рокировки – возможность переворота.

Предложение 3. *Пусть $n \geqslant 3$. Для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются следующие свойства*:

(1) *если $\widehat{\varphi}$ допускает дестабилизацию, то*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 1;$$

(2) *если $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку, то*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 2;$$

(3) *если $\widehat{\varphi}$ допускает переворот, то*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 3.$$

Доказательство. Числа переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ и $\tau_{\mathcal{A}_\partial}$ инвариантны относительно сопряжения. В случае дестабилизации можно выбрать представителя класса сопряжённости, задаваемого словом с ровно одним вхождением образующей $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$. В случае рокировки аналогичное слово содержит ровно два вхождения образующей $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$. В случае переворота аналогичное слово содержит ровно три вхождения образующей $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$. Все три оценки непосредственно следуют из леммы 1. □

Зацепление называется *простым*, если оно нетривиально, нерасщепимо и не является составным. Следующее утверждение принадлежит Малютину и Нецветаеву [2].

Лемма 4. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Если зацепление $\mathcal{L}(\varphi)$ не является простым, то класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку.* □

Теорема 5. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Если*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 2,$$

то зацепление $\mathcal{L}(\varphi)$ является простым.

Доказательство. Если зацепление $\mathcal{L}(\varphi)$ не является простым, то по лемме 4 класс $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку. Тогда в силу предложения 3 получаем $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 2$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $\mathcal{L}(\varphi)$ простое. □

§4. Минимальность и жёсткость

При $n \geqslant 3$ *блочно-нитевая диаграмма* $\mathcal{D}$ задаётся косами

$$\psi_1, \ldots, \psi_k \in B_n$$

и k интервалами $[p_i, q_i]$ такими, что

$$1 \leqslant p_i \leqslant q_i < n, \qquad [p_i, q_i] \neq [1, n-1].$$

Класс $\widehat{\varphi}$ *допускает диаграмму* $\mathcal{D}$, если он содержит косу вида

$$\gamma_1 \psi_1 \cdots \gamma_k \psi_k,$$

где каждая γ_i имеет запись в образующих $\sigma_s^{\pm 1}$ при $p_i \leqslant s \leqslant q_i$.

Предложение 6. *Для любой блочно-нитевой диаграммы $\mathcal{D}$ существует целое число $m = m(\mathcal{D})$ такое, что если $\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > m$, то $\widehat{\varphi}$ не допускает диаграммы $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Для диаграммы $\mathcal{D}$, заданной системой кос ψ_i и интервалов $[p_i, q_i]$, где $i \in \{1, \dots, k\}$, положим

$$H_i = \langle \sigma_{p_i}, \dots, \sigma_{q_i} \rangle.$$

Поскольку $[p_i, q_i] \neq [1, n-1]$, существует такая коса $a_i \in B_n$, зависящая только от интервала $[p_i, q_i]$, что

$$a_i H_i a_i^{-1} \subset \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2} \rangle.$$

Положим $a_{k+1} = a_1$ и $\kappa_i = a_i \psi_i a_{i+1}^{-1}$. Выберем для всех κ_i выражения в образующих Артина; пусть m – общее число вхождений образующей $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$ в эти выбранные выражения.

Если класс $\widehat{\varphi}$ допускает диаграмму $\mathcal{D}$, то после сопряжения косой a_1 получаем его представителя вида

$$\zeta_1 \kappa_1 \zeta_2 \kappa_2 \cdots \zeta_k \kappa_k, \qquad \zeta_i \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2} \rangle.$$

Образующая $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$ может входить только в заранее выбранные выражения для кос κ_i, причём таких вхождений ровно m. По лемме 1 получаем $\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant m$. Поэтому условие $\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > m$ исключает допустимость такой диаграммы $\mathcal{D}$. □

Назовём косу *минимальной*, если число её нитей минимально среди всех представителей того же ориентированного зацепления. Назовём минимальную косу *жёсткой*, если каждый минимальный представитель того же ориентированного зацепления сопряжён с этой косой.

Лемма 7. *Для любого $n \geqslant 3$ существует такое конечное множество $\mathcal{S}_n$ блочно-нитевых диаграмм, что класс сопряжённости любой нежёсткой косы из B_n допускает диаграмму из $\mathcal{S}_n$.*

Доказательство. Применим следующий вариант теоремы Маркова без стабилизации [8]: если коса $\varphi \in B_n$ не минимальна или если у зацепления $\mathcal{L}(\varphi)$ имеются несопряжённые минимальные представители, то $\widehat{\varphi}$ допускает блочно-нитевую диаграмму, соответствующую одному из упрощающих трафаретных преобразований Бирман–Менэско. Множество таких диаграмм при фиксированном n является конечным, откуда следует требуемое утверждение. □

Положим

$$\rho(n) = \max_{\mathcal{D} \in \mathcal{S}_n} m(\mathcal{D}),$$

где $m(\mathcal{D})$ определено в предложении 6.

Теорема 8. *Для любого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$, если*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > \rho(n),$$

то коса φ является минимальной и жёсткой.

Доказательство. По лемме 7, либо φ минимальная и жёсткая, либо $\widehat{\varphi}$ допускает некоторую диаграмму $\mathcal{D} \in \mathcal{S}_n$. Второй вариант невозможен: $m(\mathcal{D}) \leqslant \rho(n)$, а из неравенств $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > \rho(n)$ и $\ell_{\mathcal{A}_\partial} \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}$ следует неравенство $\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > m(\mathcal{D})$. В таком случае предложение 6 исключает допустимость диаграммы $\mathcal{D}$. □

§5. Поверхности Зейферта и число перекрёстков

В этом разделе используется теория Бирман–Менэско [8]. С поверхностью, специальным образом расположенной в дополнении замкнутой косы, связывается однопараметрическое семейство граничных дуг и кривых в проколотых дисках. Седловые перестройки в этом семействе порождают пути в графе $\mathcal{A}_\partial$. Из этой конструкции выводится, что поверхностям малой сложности отвечают малые смещения в графе граничных дуг под действием косы; эквивалентно, большое число переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ обеспечивает большую сложность исходной поверхности.

Рассмотрим стандартное разложение трёхмерной сферы S^3 в открытую книгу с переплётом $A \subset S^3$:

$$S^3 = \bigcup_{\theta \in S^1} H_\theta, \qquad A = \bigcap_{\theta \in S^1} H_\theta.$$

Далее предполагаем, что A – ось замыкания $\mathcal{L}(\varphi)$ косы $\varphi \in B_n$: каждая страница H_θ пересекает зацепление $\mathcal{L}(\varphi)$ ровно в n точках.

Пусть F – компактная ориентированная несжимаемая поверхность в дополнении замкнутой косы, приведённая в положение, стандартное для теории Бирман–Менэско. Для каждого неособого значения θ каждая компонента пересечения $F \cap H_\theta$ является либо дугой, либо замкнутой кривой, называемой *c-окружностью*. Компонента, являющаяся дугой, называется *a-дугой*, если один из её концов лежит на $A \cap F$, а другой лежит в проколе; она называется *b-дугой*, если оба конца лежат на $A \cap F$.

Разрежем открытую книгу вдоль некоторой страницы H_0 и тривиализуем получающееся расслоение над $[0,1]$. В полученной модели для $S^3 \setminus A$ страница H_1 отождествляется со страницей H_0 гомеоморфизмом, представляющим класс отображений φ. Получаем однопараметрическое семейство одномерных срезов поверхности F с параметром $\theta \in [0,1]$ в фиксированном проколотом диске H_0. В этом семействе компоненты пересечения $F \cap H_\theta$ меняются только в конечном числе моментов, отвечающих седловым точкам поверхности F; если α – компонента набора $F \cap H_0$, то соответствующая компонента набора $F \cap H_1$ есть $\varphi(\alpha)$.

Зафиксируем точку $v \in F \cap A$; далее считаем её отмеченной точкой на границе проколотого диска H_0 и отслеживаем только дуги, инцидентные v. Поскольку, при выборе различных отмеченных точек на границе, мы получаем эквивариантно изоморфные графы граничных дуг $\mathcal{A}_\partial$, соответствующие числа переноса не меняются.

Для неособого значения параметра θ пусть $\gamma = \gamma_v(\theta)$ – единственная компонента набора $F \cap H_\theta$ с концом в отмеченной точке v. Если $\gamma_v(\theta)$ является a-дугой, то она непосредственно задаёт вершину графа граничных дуг $\mathcal{A}_\partial$. Если $\gamma_v(\theta)$ является b-дугой с концами v и w на границе, то зафиксируем малый воротник границы, не пересекающий проколов, и сдвинем конец w вдоль этого воротника в направлении, заданном ориентацией границы, к отмеченной точке v. Полученную граничную дугу обозначим символом $\widehat{\gamma}$; для a-дуг полагаем $\widehat{\gamma}_v(\theta) = \gamma_v(\theta)$.

При каждом особом значении θ компоненты пересечения $F \cap H_\theta$ подвергаются одной вложенной перестройке вдоль так называемой *направляющей дуги.* Мы говорим, что эта перестройка *инцидентна* точке $v \in F \cap A$, если локальная компонента $\gamma_v(\theta - \epsilon)$ изменяется этой перестройкой, что эквивалентно тому, что v является концом одной из локальных ветвей седловой особенности. *Валентностью* точки v называется число особых значений параметра θ, при которых перестройка инцидентна точке v.

Лемма 9. *Если на поверхности F имеется точка $v \in F \cap A$ валентности s, то*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant s.$$

Доказательство. При прохождении через седловую перестройку, инцидентную точке v, дуги $\gamma_v(\theta - \epsilon)$ и $\gamma_v(\theta + \epsilon)$ до и после перестройки могут быть выбраны непересекающимися, возможно, за исключением общего начального отрезка у точки v. Если одна из них является b-дугой, описанную выше процедуру сдвига выполняем на разных уровнях фиксированного граничного воротника; это не создаёт новых внутренних пересечений. Следовательно, соответствующие вершины графа $\mathcal{A}_\partial$ либо совпадают, либо соединены ребром.

При изменении параметра θ от 0 до 1 происходит ровно s седловых перестроек, инцидентных точке v. Таким образом, указанное однопараметрическое семейство даёт путь в графе $\mathcal{A}_\partial$, длина которого не превышает s, от некоторой вершины α до $\varphi(\alpha)$. Следовательно, $\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant s$, а так как $\ell_{\mathcal{A}_\partial} \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}$, получаем требуемое. $\square$

Поверхностью Зейферта называется вложенная связная компактная ориентированная поверхность в трёхмерной сфере S^3, край которой представляет заданное ориентированное зацепление. Пусть $\chi_3(L)$ обозначает максимальное значение, которое принимает эйлерова характеристика на множестве всех поверхностей Зейферта для ориентированного зацепления L. Для узла K оно связано с родом Зейферта равенством $2g_3(K) = 1 - \chi_3(K)$.

Теорема 10. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Тогда для зацепления $L = \mathcal{L}(\varphi)$ выполняется неравенство*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \frac{-4\chi_3(L)}{n} + 4.$$

В частности, если L – узел, то

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \frac{8}{n} g_3(L) + 4.$$

Доказательство. Пусть F – поверхность Зейферта для L, для которой выполняется соотношение $\chi(F) = \chi_3(L)$. Если $\chi(F) > 0$, то F – диск и L – тривиальный узел. По теореме 5 имеем $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 2$, и требуемая оценка следует из предположения о том, что $n \geqslant 3$.

Пусть теперь $\chi(F) \leqslant 0$. Поскольку $\chi(F) = \chi_3(L)$, поверхность F несжимаема. Далее, как и выше, рассматриваем разложение трёхмерной сферы S^3 в открытую книгу с переплётом A, представляющим собой ось замыкания $\mathcal{L}(\varphi)$ косы φ, и предполагаем, что F приведена в положение, стандартное для теории Бирман–Менэско. Если в $F \cap A$ найдётся точка, валентность которой не превышает 3, то по лемме 9

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 3 \leqslant \frac{-4\chi(F)}{n} + 4.$$

Дальнейшее рассуждение следует схеме доказательства Ито [6] и состоит из рассмотрения двух случаев. В первом случае коса φ сопряжена с косой, представимой произведением $n-\chi(F)$ ленточных образующих; в силу леммы 2 получаем

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \left\lfloor \frac{2(n-\chi(F))}{n} \right\rfloor \leqslant \frac{-4\chi(F)}{n} + 4.$$

Во втором случае, согласно комбинаторному анализу слоения на F (см. [6]), в $F \cap A$ найдётся точка, валентность которой складывается из p перестроек, локально вовлекающих a-дуги, и q перестроек, вовлекающих b-дуги (общая валентность равна $p+q$), такая, что выполняется оценка

$$p + \frac{q}{2} \leqslant -\frac{2\chi(F)}{n+2} + 2.$$

Так как $p+q \leqslant 2p+q$, из леммы 9 следует, что

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant -\frac{4\chi(F)}{n+2} + 4 \leqslant \frac{-4\chi(F)}{n} + 4.$$

Это доказывает основную оценку. Если L – узел, то $-\chi(F) = 2g(F)-1$, и потому

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \frac{8g(F)-4}{n} + 4 \leqslant \frac{8}{n} g(F) + 4. \qquad \square$$

Пусть $\mathrm{cr}(L)$ обозначает минимальное значение числа перекрёстков среди всех регулярных плоских диаграмм зацепления L.

Теорема 11. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Тогда для зацепления $L = \mathcal{L}(\varphi)$ выполняется неравенство*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \frac{4\mathrm{cr}(L)}{n} + 4.$$

Доказательство. Если зацепление L расщепимо, то по теореме 5 имеем $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 2$, и утверждение очевидно.

Остаётся рассмотреть случай, когда L нерасщепимо, что и предполагается в дальнейшем. Пусть D – диаграмма зацепления L с минимальным числом перекрёстков; в этом случае $\mathrm{cr}(D) = \mathrm{cr}(L)$. Поскольку L нерасщепимо, диаграмма D связна. Применяя алгоритм Зейферта к D, получаем поверхность Зейферта F_D, для которой

$$\chi(F_D) = s(D) - \mathrm{cr}(D),$$

где $s(D)$ – число окружностей Зейферта диаграммы D. Следовательно,

$$\chi_3(L) \geqslant \chi(F_D) = s(D) - \operatorname{cr}(L),$$

и поэтому

$$-\chi_3(L) \leqslant \operatorname{cr}(L) - s(D) \leqslant \operatorname{cr}(L).$$

Из теоремы 10 следует, что

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \frac{-4\chi_3(L)}{n} + 4 \leqslant \frac{4}{n}\operatorname{cr}(L) + 4. \qquad \square$$

Предложение 12. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$, причём $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 4$. Если дополнение $S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi)$ содержит существенный тор, то коса φ приводима.*

Доказательство. Пусть F – существенный тор в дополнении зацепления $\mathcal{L}(\varphi)$. Приведём F в положение, стандартное для теории Бирман–Менэско. Если F пересекает ось A, то рассуждение Ито [7] для замкнутых существенных поверхностей, в сочетании с леммой 9, даёт оценку

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 4g(F).$$

Для тора выполняется соотношение $g(F) = 1$. Полученная оценка противоречит предположению о том, что $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 4$. Следовательно, F не пересекает ось A.

Поэтому для каждой неособой страницы H_θ пересечение $F \cap H_\theta$ состоит только из существенных c-окружностей. В таком случае число особых страниц равно $|\chi(F)|$. Поскольку F – тор, $\chi(F) = 0$, особых страниц нет. Поэтому набор окружностей $F \cap H_0$ даёт непустую существенную мультикривую в диске с n проколами, сохраняемую монодромией φ. Значит, φ приводима. $\square$

Предложение 13. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$ – приводимая коса. Если класс $\widehat{\varphi}$ не допускает рокировок, то дополнение $S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi)$ содержит существенный тор. В частности, для каждой конечной орбиты существенных кривых соответствующий ей тор является существенным.*

Доказательство. Выберем φ-орбиту существенных кривых

$$C_1, C_2, \ldots, C_m$$

в диске D_n^2. После сопряжения косы φ можно считать, что каждая кривая C_i стандартна, а именно, пересекает диаметр диска ровно в двух точках. Пусть $D_i \subset D_n^2$ – диск, ограниченный кривой C_i. Так как указанные кривые C_i образуют единую орбиту, все диски D_i содержат одно и то же число отмеченных точек; обозначим его через k. Отождествим диск D_n^2 с меридиональным диском стандартного полнотория $V \subset S^3$, содержащего замыкание $\mathcal{L}(\varphi)$. Под действием монодромии φ диски D_i заметают полноторий $W \subset V$; его граница

$$T = \partial W$$

является тором в дополнении $S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi)$.

Сначала покажем, что T несжимаем в $S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi)$. Предположим противное. Стягивание каждого из дисков D_i в отдельную точку даёт фактор-диск D_r^2 с

$$r = n - m(k-1)$$

отмеченными точками и косу $\psi \in B_r$, индуцированную косой φ.

Замыкание косы ψ включает сердцевину полнотория W в качестве одной из компонент зацепления. Если тор $T = \partial W$ сжимаем в $S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi)$, то по стандартному рассуждению с внутренним диском указанная компонента ограничивает диск в дополнении остальных компонент зацепления $\mathcal{L}(\psi)$. В частности, замыкание косы ψ является расщепимым зацеплением, если $m < r$, или тривиальным узлом, если $m = r$.

Сперва рассмотрим случай, когда $r \geqslant 3$. В этом случае по лемме 4 класс сопряжённости $\widehat{\psi}$ допускает рокировку; после сопряжения можно считать, что

$$\psi = \gamma_1 \sigma_{r-1} \gamma_2 \sigma_{r-1}^{-1}, \qquad \gamma_1, \gamma_2 \in B_{r-1}.$$

Применим к этому выражению ту же процедуру раздутия проколов в малые диски, посредством которой коса φ получается из косы ψ. Получим сопряжённую с косой φ косу вида

$$\varphi' = \beta_1 \zeta \beta_2 \zeta^{-1}, \qquad \beta_1, \beta_2 \in B_{n-1},$$

где коса ζ получается из косы σ_{r-1} в результате указанной процедуры. Коса ζ имеет вид

$$\zeta = \theta_1 \sigma_{n-1} \theta_2, \qquad \theta_1, \theta_2 \in B_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\varphi' = \beta_1 \theta_1 \sigma_{n-1} \theta_2 \beta_2 \theta_2^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} \theta_1^{-1},$$

и после циклической перестановки получаем представителя класса $\widehat{\varphi}$, лежащего в множестве

$$B_{n-1} \sigma_{n-1} B_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1}.$$

Значит, $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку, что противоречит предположению.

Остаётся рассмотреть случай $r = 2$. По предположению, замыкание косы $\psi \in B_2$ расщепимо или является тривиальным узлом. Следовательно, $\psi = \sigma_1^s$ для некоторого $s \in \{-1, 0, 1\}$. Если $s = 0$, то коса φ расщепима; в этом случае класс $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку. Если $s = \pm 1$, то та же процедура раздутия демонстрирует, что коса φ сопряжена с косой вида

$$\theta_1 \sigma_{n-1}^{\pm 1} \theta_2, \qquad \theta_1, \theta_2 \in B_{n-1}.$$

Следовательно, $\widehat{\varphi}$ допускает дестабилизацию, а значит и рокировку. Полученное противоречие показывает, что тор T несжимаем.

Докажем, что тор T – непериферийный. Пусть $\mu \subset T$ – меридиан, представленный одной из кривых $C_i = \partial D_i$. Кривая C_i существенна в D_n^2, поэтому диск D_i содержит по меньшей мере две отмеченные точки. Ориентируем $L = \mathcal{L}(\varphi)$ как замкнутую косу. Тогда для каждой компоненты L_j зацепления L коэффициент зацепления $\operatorname{lk}(\mu, L_j)$ равен, с точностью до общего знака, числу точек в пересечении $L_j \cap D_i$. Следовательно, сумма абсолютных значений этих коэффициентов равна числу отмеченных точек внутри C_i и потому составляет по меньшей мере два.

Если бы тор T был периферийным, то вектор коэффициентов зацепления его меридиана с компонентами зацепления $\mathcal{L}(\varphi)$ имел бы ровно одну ненулевую компоненту, равную ± 1. Из рассуждений предыдущего абзаца следует, что для μ это невозможно. Значит, тор T непериферийный. Итак, T несжимаем и не параллелен краю, т. е. является существенным в $S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi)$. □

§6. Гиперболичность

Пусть $\varphi \in B_n$ – псевдоаносовская коса. Тогда дополнение объединения её замыкания с осью,

$$S^3 \backslash (\mathcal{L}(\varphi) \cup A),$$

является гиперболическим многообразием; это многообразие гомеоморфно тору отображения T_φ. Пусть $C \subset T_\varphi$ – максимальная орисферическая окрестность каспа граничной компоненты, соответствующей оси A; см. [10]. Гиперболическая метрика на T_φ индуцирует евклидову метрику на торе ∂C. Пусть l_λ – евклидова длина параллели λ на ∂C, т. е. такой геодезической кривой в ∂C, что многообразие, полученное из T_φ заполнением Дена, при котором кривая λ становится стягиваемой, гомеоморфно многообразию $S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi)$.

Лемма 14. *Для любого $n \geqslant 3$ и любой псевдоаносовской косы $\varphi \in B_n$ выполняется соотношение*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 4289 n^5 \, l_\lambda.$$

Доказательство. Пусть $V \subset S^3$ – стандартный полноторий, полученный из S^3 удалением трубчатой окрестности оси A и содержащий зацепление $\mathcal{L}(\varphi)$. Имеем

$$T_\varphi \cong V \backslash \mathcal{L}(\varphi).$$

Обозначим через (μ, λ) стандартную пару, состоящую из меридиана и параллели граничного тора ∂V полнотория V. Ориентируем кривые μ и λ и зафиксируем изометрию

$$\partial C \cong \mathbb{R}^2 / \langle (x,0), (y,z) \rangle, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}, \qquad x, z > 0,$$

сохраняющую ориентацию и переводящую пару кривых (μ, λ) в пару кривых, отвечающих векторам, идущим из начала координат в $(x, 0)$ и (y, z), соответственно. Тогда

$$l_\lambda = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Используя стандартное неравенство $x \geqslant 1$ [10], получаем

$$\left| \frac{y}{x} \right| \leqslant |y| \leqslant l_\lambda.$$

Согласно работе Футера и Шлеймера [5], справедлива оценка

$$\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant 536(n-1)^4 z \leqslant 536(n-1)^4 l_\lambda. \tag{2}$$

Следующая оценка, полученная Шмалианом [10], связывает коэффициент дробного скручивания Дена с угловым коэффициентом y/x. Для неасимптотического числа переноса она имеет вид

$$\left| \omega_n(\varphi) - \frac{y}{x} \right| \leqslant 6(n-1)\tau_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) + 3.$$

Применим оценку Шмалиана к степени φ^m. Тор отображения T_{φ^m} является m-листным циклическим накрытием тора отображения T_φ в направлении, трансверсальном его слоям. Для поднятия максимальной орисферической окрестности каспа меридиан по-прежнему задаётся вектором $(x, 0)$, а выделенная параллель – вектором (my, mz).

Расширение поднятой окрестности до максимальной соответствует гомотетии евклидова тора и не меняет его углового коэффициента. Следовательно, угловой коэффициент осевого каспа для T_{φ^m} равен my/x.

Так как $\omega_n(\varphi^m) = m\omega_n(\varphi)$, получаем

$$m\left|\omega_n(\varphi) - \frac{y}{x}\right| \leqslant 6(n-1)\tau_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi^m) + 3.$$

Разделим обе части неравенства на m и перейдём к пределу. Тогда

$$\left|\omega_n(\varphi) - \frac{y}{x}\right| \leqslant 6(n-1)\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi). \tag{3}$$

Из (3) и оценки $|y/x| \leqslant l_\lambda$ следует, что

$$|\omega_n(\varphi)| \leqslant l_\lambda + 6(n-1)\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi). \tag{4}$$

Совместим (2), (4) и неравенство (1):

$$\begin{aligned}\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) &\leqslant 2\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) + |\omega_n(\varphi)| \\ &\leqslant 1072(n-1)^4 l_\lambda + \big(3216(n-1)^5 + 1\big) l_\lambda \\ &\leqslant 4289 n^5 l_\lambda. \end{aligned} \qquad \square$$

Следующая лемма – количественная форма 2π-теоремы Громова–Тёрстона в формулировке Футера, Калфагианни и Парсел [4].

Лемма 15. *Пусть M – гиперболическое трёхмерное многообразие, а s – замкнутая евклидова геодезическая длины $l > 2\pi$ на границе максимальной орисферической окрестности одного из его каспов. Тогда многообразие $M(s)$, полученное из M заполнением Дена, при котором кривая s становится стягиваемой, гиперболично, и выполняется следующее соотношение*:

$$\operatorname{vol}(M(s)) \geqslant \left(1 - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2\right)^{3/2} \operatorname{vol}(M). \qquad \square$$

Следующее утверждение принадлежит Менэско [9].

Лемма 16. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Если замыкание $\mathcal{L}(\varphi)$ является торическим узлом, то либо коса φ – периодическая, либо класс $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку.* $\square$

Теорема 17. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$ – псевдоаносовская коса.*

(1) *Если $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 26949n^5$, то зацепление $\mathcal{L}(\varphi)$ является гиперболическим.*

(2) *Если $\mathcal{L}(\varphi)$ – узел и $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 4$, то этот узел является гиперболическим.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение (1). Поскольку коса φ – псевдоаносовская, тор отображения

$$T_\varphi \cong S^3 \backslash (\mathcal{L}(\varphi) \cup A)$$

гиперболичен. Дополнение $S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi)$ получается из T_φ заполнением Дена, при котором параллель λ становится стягиваемой. Если $l_\lambda > 2\pi$, то по лемме 15 результат заполнения гиперболичен.

По лемме 14 имеем оценку $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant c' \cdot l_\lambda$ для $c' = 4289n^5$. Положим

$$c = 26949n^5.$$

Тогда $c > 2\pi c'$. Если $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > c$, то

$$l_\lambda \geqslant \frac{\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi)}{c'} > \frac{c}{c'} > 2\pi,$$

и потому дополнение $S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi)$ гиперболично.

Теперь докажем утверждение (2). Пусть $\mathcal{L}(\varphi)$ – узел и $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 4$. По теореме 5 узел $\mathcal{L}(\varphi)$ прост. Он не может быть сателлитным: иначе его дополнение содержало бы существенный тор, и предложение 12 влекло бы приводимость косы φ, противоречащую тому, что коса φ является псевдоаносовской. Узел $\mathcal{L}$ также не может быть торическим: по лемме 16 либо коса φ является периодической, либо класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку; первое невозможно для псевдоаносовской косы, а второй вариант исключён предложением 3, поскольку выполняется неравенство $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 2$. Согласно теореме геометризации для простых узлов, узел $\mathcal{L}(\varphi)$ гиперболичен. □

Теорема 18. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Предположим, что $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 4$ и что замыкание $K = \mathcal{L}(\varphi)$ является узлом. Тогда:*

(1) *узел K является торическим если и только если коса φ является периодической;*
(2) *узел K является сателлитным если и только если коса φ является приводимой;*
(3) *узел K является гиперболическим если и только если коса φ является псевдоаносовской.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение (1). Как хорошо известно, замыкание любой периодической косы является торическим зацеплением. Обратно, если узел K является торическим, то по лемме 16 либо φ – периодическая, либо $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку. Второй вариант исключён предложением 3, так как $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 4 > 2$. Значит, φ – периодическая коса.

Теперь докажем утверждение (2). Пусть коса φ приводима. Поскольку $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 2$, то согласно предложению 3, класс $\widehat{\varphi}$ не допускает рокировок. Поэтому в силу предложения 13 дополнение $S^3 \backslash K$ содержит существенный тор. Так как по теореме 5 узел K прост и нетривиален, это означает, что K сателлитный. Обратно, если K сателлитный, то $S^3 \backslash K$ содержит существенный тор. В силу предложения 12 отсюда следует, что φ приводима.

Остаётся доказать утверждение (3). Если φ псевдоаносовская, то гиперболичность K следует из теоремы 17 в случае узлов, поскольку выполняется неравенство $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 4$. Обратно, пусть K гиперболичен. Тогда K не является торическим и его дополнение не содержит существенного тора. В силу пунктов (1) и (2) коса φ не может быть ни периодической, ни приводимой. По трихотомии Нильсена–Тёрстона она псевдоаносовская. □

§7. Гиперболический объём

Для оценки объёма гиперболических зацеплений мы переходим от граничного числа переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ к числу переноса $\ell_{\mathcal{A}_\circ}$. Пусть, как и ранее, C обозначает максимальную орисферическую окрестность осевого каспа тора отображения T_φ псевдоаносовской косы φ.

Лемма 19. *Для любого $n \geqslant 3$ и любой псевдоаносовской косы $\varphi \in B_n$ выполняется неравенство*

$$\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant 900(n-1)^4 \mathrm{vol}(C).$$

Доказательство. Применим следующий вариант теоремы Футера–Шлеймера [5] о геометрии каспа трёхмерных многообразий, расслаивающихся над окружностью: для псевдоаносовских классов отображений площадь евклидовой границы ∂C окрестности C осевого каспа оценивается снизу в терминах числа переноса $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi)$. Поскольку объём окрестности C равен половине площади её границы ∂C, константы, установленные Футером и Шлеймером, дают константу $900(n-1)^4$. □

Следствие 20. *Если $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$ – псевдоаносовская коса, то*

$$\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant 900 n^4 \mathrm{vol}(T_\varphi).$$

Доказательство. Поскольку $\mathrm{vol}(C) \leqslant \mathrm{vol}(T_\varphi)$ и $900(n-1)^4 \leqslant 900n^4$, утверждение следует из леммы 19. $\square$

Следствие 21. *Пусть $n \geqslant 3$, и пусть коса $\varphi \in B_n$ – непериодическая, а зацепление $\mathcal{L}(\varphi)$ – гиперболическое. Тогда либо коса φ – псевдоаносовская, либо класс $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку.*

Доказательство. Если φ не псевдоаносовская и не периодическая, то она приводимая. Если бы класс $\widehat{\varphi}$ не допускал рокировок, то в силу предложения 13 дополнение $S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi)$ содержало бы существенный тор. Это невозможно для гиперболического зацепления. Следовательно, приводимый случай возможен только при допустимости рокировки. $\square$

Теорема 22. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Если зацепление $L = \mathcal{L}(\varphi)$ является гиперболическим, то*

$$\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant 900n^4 \cdot \mathrm{vol}(S^3 \backslash L) + 3537n^4.$$

Доказательство. Пусть $c_1 = 900n^4$ и $c_2 = 3537n^4$. Если $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant c_2$, то требуемая оценка выполнена. Далее предполагаем, что выполняется неравенство $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) > c_2$. Имеем

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \geqslant \ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) > c_2 > 2.$$

Согласно предложению 3, класс $\widehat{\varphi}$ не допускает рокировок. Кроме того, φ – непериодическая коса, так как для периодических кос выполняется соотношение $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) = 0$. В силу следствия 21 коса φ является псевдоаносовской.

Пусть $T_\varphi \cong S^3 \backslash (L \cup A)$ – тор отображения косы φ, и пусть l_λ – длина параллели соответствующего осевого каспа. По оценке (2), имеем $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant 536(n-1)^4 l_\lambda$. Если $l_\lambda \leqslant 2\pi$, то

$$\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) < 2\pi\, 536n^4 < 3537n^4 = c_2,$$

что противоречит предположению выше. Значит, $l_\lambda > 2\pi$.

По лемме 15, применённой к $T_\varphi(\lambda) = S^3 \backslash L$, имеем

$$\mathrm{vol}(S^3 \backslash L) \geqslant \left(1 - \left(\frac{2\pi}{l_\lambda}\right)^2\right)^{3/2} \mathrm{vol}(T_\varphi).$$

С другой стороны, в силу следствия 20,

$$c_1 \mathrm{vol}(T_\varphi) \geqslant \ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi).$$

Следовательно,

$$c_1 \mathrm{vol}(S^3 \backslash L) \geqslant \ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \left(1 - \left(\frac{2\pi}{l_\lambda}\right)^2\right)^{3/2}.$$

Положим

$$u = \frac{\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi)}{2\pi\, 536 n^4} > 1.$$

Тогда из $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant 536 n^4 l_\lambda$ получаем

$$\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) - c_1 \mathrm{vol}(S^3 \backslash L) \leqslant 2\pi\, 536 n^4\, u \left(1 - \left(1 - u^{-2}\right)^{3/2}\right).$$

Несложно убедиться в справедливости оценки

$$\sup_{u>1} u \left(1 - \left(1 - u^{-2}\right)^{3/2}\right) < \frac{21}{20},$$

откуда получаем

$$\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) - c_1 \mathrm{vol}(S^3 \backslash L) < 2\pi\, 536 n^4 \cdot \frac{21}{20} < 3537 n^4 = c_2.$$

Отсюда следует требуемое неравенство. □

Замечание 1. Теорема 22 стандартным образом обобщается на случай произвольных зацеплений, если гиперболический объём заменить на симплициальный объём Громова. А именно, для каждого $n \geqslant 3$ существуют положительные константы $c_1 = c_1(n)$ и $c_2 = c_2(n)$ такие, что для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняется

$$\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant c_1 \, \| S^3 \backslash \mathcal{L}(\varphi) \| + c_2.$$

Доказательство повторяет схему оценки гиперболического объёма: после перехода к псевдоаносовской внешней части разложения Нильсена–Тёрстона [1] используется гиперболическая JSJ-компонента дополнения, а затем аддитивность симплициального объёма относительно JSJ-разложения. Для гиперболических зацеплений эта формулировка сводится к теореме 22, поскольку симплициальный объём дополнения равен его гиперболическому объёму с точностью до универсального множителя.

Список литературы

1. И. С. Алексеев, *Числа переноса и квазиморфизмы групп кос.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **551** (2026), 5–26.
2. А. В. Малютин, Н. Ю. Нецветаев, *Порядок Деорнуа на группе кос и преобразования замкнутых кос.* — Алгебра и анализ **15**, No. 3 (2003), 170–187; St. Petersburg Math. J. **15**, No. 3 (2004), 437–448.
3. B. Farb, D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups.* Princeton Math. Ser. **49**, Princeton University Press, Princeton, 2012.
4. D. Futer, E. Kalfagianni, J. Purcell, *Dehn filling, volume, and the Jones polynomial.* — J. Differential Geom. **78**, No. 3 (2008), 429–464.
5. D. Futer, S. Schleimer, *Cusp geometry of fibered 3-manifolds.* — Amer. J. Math. **136**, No. 2 (2014), 309–356.
6. T. Ito, *Braid ordering and knot genus.* — J. Knot Theory Ramifications **20**, No. 9 (2011), 1311–1323.
7. T. Ito, *Braid ordering and the geometry of closed braids.* — Geom. Topol. **15**, No. 1 (2011), 473–498.
8. D. LaFountain, W. W. Menasco, *Braid Foliations in Low-Dimensional Topology.* Grad. Stud. Math. **185**, American Mathematical Society, Providence, 2017.
9. W. W. Menasco, *On iterated torus knots and transversal knots.* — Geom. Topol. **5** (2001), 651–682.
10. M. Schmalian, *Cusp shape and fractional Dehn twists of fibred hyperbolic 3-manifolds.* — Trans. Amer. Math. Soc. **379** (2026), 4479–4507.

Alekseev I. S. Translation lengths and the geometry of closed braids.

We study translation lengths of braids and their applications to the topology and geometry of knots and links. For links represented as closed braids, we establish criteria for primeness and hyperbolicity, conditions for minimality of such braid representatives with respect to the number of strands, and conditions for uniqueness of minimal braid representatives up to conjugation. We also prove lower bounds on the Seifert genus, crossing number, and hyperbolic volume.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ilyaalekseev@yahoo.com

Поступило 12 мая 2026 г.