Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 551, 2026 г.

И. С. Алексеев

ЧИСЛА ПЕРЕНОСА И КВАЗИМОРФИЗМЫ ГРУПП КОС

§1. Введение

Работа относится к теории кос и развивает два взаимосвязанных подхода: динамический и когомологический. Эти подходы позволяют выделить несколько уровней сложности поведения косы. В динамической части сложность описывается через асимптотические числа переноса для действий группы кос на графах, естественным образом связанных с проколотым диском. В когомологической части тем же уровням сложности сопоставляются пространства однородных квазиморфизмов и индуцированные ими полунормы. В работе рассматриваются три графа: граф граничных дуг $\mathcal{A}_\partial$, граф граничных дуг со скользящими концами $\mathcal{A}_\circ$ и граф дуг и кривых $\mathcal{AC}$.

Первый основной результат настоящей работы – построение трёхуровневой иерархии динамической сложности, которая имеет геометрическое выражение в виде асимптотических чисел переноса

$$\ell_{\mathcal{AC}}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi),$$

а когомологическое – в виде полунорм

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}} \leqslant \|\varphi\|_\circ \leqslant \|\varphi\|_\partial.$$

Первый уровень этой иерархии – уровень графа $\mathcal{A}_\partial$ и полунормы $\|\cdot\|_\partial$ – кодирует поведение дуг, имеющих конец на границе проколотого диска, детализирует и дополняет информацию, относящуюся к коэффициенту дробного скручивания Дена [1]. Переход к следующему уровню, отвечающему графу $\mathcal{A}_\circ$ и полунорме $\|\cdot\|_\circ$, нивелирует вклад этого коэффициента и исключает из рассмотрения периодическую динамику. Наконец, уровень графа дуг и кривых $\mathcal{AC}$ и полунормы $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$ дополнительно исключает приводимую динамику, сосредотачиваясь на псевдоаносовской.

Ключевые слова: группы кос, асимптотическое число переноса, однородный квазиморфизм, ограниченные когомологии, тип Нильсена–Тёрстона.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда No. 25–11–00251, `https://rscf.ru/project/25-11-00251`.

Второй основной результат работы – описание свойств, распознаваемых по положительности соответствующих чисел переноса (теорема 14): уровень граничных дуг распознаёт нерасщепимость косы; уровень граничных дуг со скользящими концами – псевдоаносовскую динамику во внешней части разложения Нильсена–Тёрстона; уровень дуг и кривых – псевдоаносовскую динамику самой косы.

Третью группу результатов образуют теоремы сравнения для первых двух уровней иерархии (теоремы 6 и 9):

$$\|\varphi\|_\partial \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi), \qquad \|\varphi\|_\circ \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi).$$

Иными словами, построенные полунормы дают нижние оценки соответствующих асимптотических чисел переноса.

Роль этой иерархии в теории узлов будет изучена в отдельной работе. В частности, предполагается установить признаки простоты и гиперболичности зацеплений, а также оценки рода Зейферта и гиперболического объёма в терминах чисел переноса и полунорм.

§2. Предварительные сведения

Пусть D^2_n – диск с n отмеченными точками (проколами), расположенными на фиксированном диаметре и с одной отмеченной точкой на границе. Пронумеруем проколы от 1 до n в соответствии с одной из двух возможных ориентаций диаметра. Все дуги и кривые в дальнейшем предполагаются существенными, в частности непериферийными, и рассматриваются с точностью до изотопии, неподвижной на множестве проколов и на границе.

Под *дугой* на поверхности мы понимаем образ отображения отрезка $[0,1]$, сужение которого на $(0,1)$ является вложением во внутренность поверхности, причём концы дуги (т. е. образы точек 0 и 1) лежат в проколах или в отмеченной граничной точке. Дуга называется *граничной*, если хотя бы один её конец лежит на границе. Дуга называется *разделяющей*, если её удаление увеличивает число компонент связности рассматриваемой поверхности.

Будем говорить, что две дуги на D^2_n являются *∂-свободно изотопными*, если их образы становятся изотопными на поверхности, полученной из диска D^2_n стягиванием его границы ∂D^2_n в точку (которая становится новым проколом). Иными словами, они становятся изотопными после забывания отмеченной граничной точки: каждый граничный росток дуги разрешается независимо перемещать вдоль ∂D^2_n.

Обозначим символами $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ стандартные образующие Артина группы кос B_n. Отождествим группу кос с группой классов отображений

$$B_n \cong \mathrm{Mod}(D_n^2),$$

неподвижных на границе и сохраняющих множество проколов, так, что образующей Артина σ_i соответствует положительное полускручивание вдоль стандартной дуги, соединяющей проколы с номерами i и $i+1$. Напомним определение центральной косы (полного оборота):

$$\Delta_n^2 = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^n.$$

Коса *расщепима*, если она сопряжена с косой, представимой артиновским словом, в котором не встречаются образующие σ_k и σ_k^{-1} для некоторого k. Коса *экстремально расщепима*, если она сопряжена с элементом стандартно вложенной подгруппы

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2} \rangle \cong B_{n-1} \subset B_n.$$

2.1. Асимптотические числа переноса. Пусть φ – изометрия метрического пространства (X, d). *Числом переноса* и *асимптотическим числом переноса* изометрии φ называются величины

$$\tau_X(\varphi) = \inf_{x \in X} d(x, \varphi x), \qquad \ell_X(\varphi) = \lim_{m \to \infty} \frac{d(x, \varphi^m x)}{m},$$

где, как хорошо известно, предел, задающий $\ell_X(\varphi)$, существует, не зависит от точки x и равен

$$\ell_X(\varphi) = \lim_{m \to \infty} \frac{\tau_X(\varphi^m)}{m}.$$

Функция ℓ_X инвариантна относительно сопряжения, абсолютно однородна и удовлетворяет неравенству $\ell_X \leqslant \tau_X$.

2.2. Квазиморфизмы и полунормы. Функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ на группе G называется *квазиморфизмом*, если её дефект

$$D(f) = \sup_{a, b \in G} |f(ab) - f(a) - f(b)|$$

конечен. Квазиморфизм называется *однородным*, если $f(a^m) = mf(a)$ для всех $a \in G$ и $m \in \mathbb{Z}$. Однородные квазиморфизмы также называют *псевдохарактерами*. Пространство всех однородных квазиморфизмов обозначается $Q(G)$.

Напомним стандартные свойства однородных квазиморфизмов [2]. Любой однородный квазиморфизм f инвариантен относительно сопряжения. Если элементы a и b коммутируют, то $f(ab) = f(a) + f(b)$. Если элемент a сопряжён со своим обратным или некоторая его ненулевая степень сопряжена со своим обратным, то $f(a) = 0$.

Пусть $V \subset Q(G)$ – линейное подпространство. Положим

$$\|a\|_V = \sup_{\substack{f \in V\\ D(f)>0}} \frac{|f(a)|}{D(f)} = \sup_{\substack{f \in V\\ D(f)=1}} |f(a)| \in [0, +\infty],$$

приняв по определению, что супремум по пустому множеству равен нулю.

Из указанных выше свойств однородных квазиморфизмов следует, что функция $\|\cdot\|_V$ инвариантна относительно сопряжения, абсолютно однородна и квазисубаддитивна, а именно,

$$\|ab\|_V \leqslant \|a\|_V + \|b\|_V + 1.$$

Кроме того, если a и b коммутируют, то

$$\|ab\|_V \leqslant \|a\|_V + \|b\|_V.$$

§3. Уровень граничных дуг

Определим *граф граничных дуг* $\mathcal{A}_\partial$ диска D^2_n как простой граф, вершинами которого являются изотопические классы граничных дуг, а две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие изотопические классы имеют представителей с непересекающимися внутренностями. Снабдим $\mathcal{A}_\partial$ стандартной метрикой кратчайшего пути, в которой каждое ребро имеет единичную длину.

Группа B_n действует на графе $\mathcal{A}_\partial$ изометриями. Это задаёт функции $\tau_{\mathcal{A}_\partial}$ и $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ на B_n.

Лемма 1. *Для любого $n \geqslant 2$ и любой косы $\varphi \in B_n$ следующие условия эквивалентны*:

(1) *φ расщепима*;
(2) *φ сохраняет граничную дугу*;
(3) *φ сохраняет разделяющую граничную дугу.*

Доказательство. Если φ сопряжена с косой, представленной артиновским словом, не содержащим образующих $\sigma_k^{\pm 1}$, то после сопряжения она сохраняет стандартную разделяющую дугу α_k, отделяющую первые k проколов от остальных. Следовательно, (1) влечёт (3). Очевидно, (3) влечёт (2).

Пусть теперь φ сохраняет граничную дугу α. Если α разделяющая, то получаем (3). Если α неразделяющая, то её второй конец лежит в проколе. Выберем регулярную окрестность дуги α; её граница, после стягивания отрезка на границе ∂D^2_n к отмеченной граничной точке, даёт разделяющую дугу, также сохраняемую φ. Значит, (2) влечёт (3). Наконец, если φ сохраняет разделяющую дугу, то сопряжённая коса сохраняет стандартную дугу α_k и, следовательно, лежит в подгруппе, порождённой всеми σ_i, кроме σ_k. Значит, φ расщепима. □

Из леммы следует, что $\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) = 0$ тогда и только тогда, когда φ расщепима, а расщепимость влечёт $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) = 0$.

Для $n \geqslant 3$ положим $Q_n = Q(B_n)$ и

$$Q_n^\partial = \{f \in Q_n \mid f(B_{n-1}) = 0\}.$$

Следующая лемма проясняет динамическое значение элементов из Q_n^∂.

Лемма 2. *Для $n \geqslant 3$ и любого однородного квазиморфизма $f \in Q_n$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *f обращается в нуль на B_{n-1};*
(2) *f обращается в нуль на всех расщепимых косах;*
(3) *f обращается в нуль на всех косах, сохраняющих вершину графа $\mathcal{A}_\partial$.*

Доказательство. Из инвариантности однородных квазиморфизмов относительно сопряжения следует, что обращение в нуль на B_{n-1} равносильно обращению в нуль на всех экстремально расщепимых косах. Если коса расщепима, то она сопряжена косе, сохраняющей одну из стандартных разделяющих дуг α_k. Стабилизатор этой дуги имеет вид

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{n-1} \rangle = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1} \rangle \times \langle \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{n-1} \rangle,$$

значит, сопряжённая коса раскладывается в произведение двух коммутирующих кос, каждая из которых экстремально расщепима как элемент группы B_n. Тогда значение квазиморфизма f на этом произведении равно нулю. Оставшаяся эквивалентность следует из леммы 1. □

Граничная полунорма на группе кос B_n задаётся формулой

$$\|\varphi\|_\partial = \sup_{\substack{f\in Q_n^\partial \\ D(f)>0}} \frac{|f(\varphi)|}{D(f)}.$$

Коэффициент дробного скручивания Дена ω_n принадлежит пространству Q_n^∂, имеет единичный дефект и удовлетворяет соотношению $\omega_n(\Delta_n^2) = 1$; см. [1, 3]. Нам потребуется следующая оценка.

Лемма 3. *Для любых $n \geqslant 3$ и $f \in Q_n^\partial$ имеем*

$$|f(\Delta_n^2)| \leqslant D(f).$$

Следовательно, $\|\Delta_n^2\|_\partial = 1$.

Доказательство. Положим $a = \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\cdots\sigma_2$ и $b = \sigma_1^2$, где в случае $n = 3$ мы полагаем $a = \sigma_2^2$. Произведение ab сопряжено с $\Delta_n^2\Delta_{n-1}^{-2}$. Косы a, b и $\Delta_{n-1}^{-2} \in B_n$ расщепимы, поэтому

$$|f(\Delta_n^2)| = |f(\Delta_n^2\Delta_{n-1}^{-2})| = |f(ab) - f(a) - f(b)| \leqslant D(f).$$

Нижняя оценка $\|\Delta_n^2\|_\partial \geqslant 1$ следует из указанных выше свойств квазиморфизма ω_n; верхняя – из первой части. □

Пусть множество S состоит из элементов Δ_n^2, Δ_n^{-2} и всех расщепимых кос. Обозначим через $\mathrm{fr}(\varphi)$ длину косы φ относительно множества S, т. е. наименьшее число $m = |t| + s$, где $t \in \mathbb{Z}$ и $s \geqslant 0$, для которого

$$\varphi = \Delta_n^{2t}\varphi_1\cdots\varphi_s$$

с расщепимыми φ_i.

Предложение 4. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда для любой нецентральной косы $\varphi \in B_n$ выполняется неравенство*

$$\|\varphi\|_\partial \leqslant \mathrm{fr}(\varphi) - 1.$$

Если φ центральна, то $\|\varphi\|_\partial = \mathrm{fr}(\varphi)$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \Delta_n^{2t}\varphi_1\cdots\varphi_s$, где косы φ_i расщепимы и $|t| + s = \mathrm{fr}(\varphi)$. Если $s \geqslant 1$, то для $f \in Q_n^\partial$ из леммы 2 и квазисубаддитивности следует

$$|f(\varphi)| \leqslant |t|D(f) + |f(\varphi_1\cdots\varphi_s)| \leqslant (|t| + s - 1)D(f).$$

Переход к супремуму даёт первую оценку. Если $\varphi = \Delta_n^{2t}$, то по лемме 3 имеем $\|\varphi\|_\partial = |t|$. В предположении $\mathrm{fr}(\Delta_n^{2t}) < |t|$ получаем представление с $s \geqslant 1$, и уже доказанная оценка даёт $\|\Delta_n^{2t}\|_\partial < |t|$, противоречие. □

Предложение 5. *Для любого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$ выполняется неравенство*

$$\mathrm{fr}(\varphi) - 1 \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi).$$

Если φ центральна, то $\mathrm{fr}(\varphi) = \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi)$.

Доказательство. Положим $m = \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi)$, выберем граничную дугу α, для которой $d(\alpha, \varphi(\alpha)) = m$, и кратчайший путь

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m = \varphi(\alpha)$$

в графе $\mathcal{A}_\partial$. Сначала предположим, что $m \geqslant 2$. В этом случае путь можно выбрать так, что все его вершины представлены неразделяющими граничными дугами. Действительно, если некоторая дуга α_i разделяющая, то она разрезает диск D_n^2 на две компоненты. Положим $\alpha_{-1} := \varphi^{-1}(\alpha_{m-1})$ и $\alpha_{m+1} := \varphi(\alpha_1)$. Дуги α_{i-1} и α_{i+1} не могут лежать в разных компонентах дополнения $D_n^2 \backslash \alpha_i$; иначе они были бы непересекающимися и путь не был бы кратчайшим. Следовательно, эти две дуги лежат в одной компоненте. В другой компоненте, поскольку α_i существенна, есть прокол; соединив его с граничной отмеченной точкой дугой, получаем неразделяющую дугу β_i, не пересекающую ни α_{i-1}, ни α_{i+1}. Замена дуги α_i на дугу β_i, проведённая согласованно с действием степеней косы φ, сохраняет длину пути. Повторяя эту процедуру, получаем кратчайший путь той же длины, все вершины которого представлены неразделяющими дугами.

Теперь для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ подберём такую косу $\varphi_i \in S$, что выполняется соотношение $\varphi_i(\alpha_{i-1}) = \alpha_i$.

Рассмотрим пару непересекающихся неразделяющих дуг α_{i-1} и α_i. Сначала пусть эти две дуги имеют один и тот же концевой прокол. Поскольку $\alpha_{i-1} \neq \alpha_i$, ограниченная ими область, расположенная между их ростками на границе, содержит хотя бы один прокол. Если внутренность этой области содержит все проколы, кроме одного, то дуга α_i получается из α_{i-1} косой $\varphi_i = \Delta_n^2$ или косой $\varphi_i = \Delta_n^{-2}$, в зависимости от взаимного расположения этих дуг.

Во всех остальных случаях существует неразделяющая граничная дуга γ, не пересекающая ни α_{i-1}, ни α_i, причём её росток в граничной отмеченной точке не лежит между ростками этих двух дуг. Если дуги α_{i-1} и α_i имеют разные концевые проколы, то их объединение является деревом; поэтому сектор у граничной отмеченной точки, лежащий справа от обеих дуг, соединён с остальной частью дополнения, и при $n \geqslant 3$ можно выбрать дугу γ к проколу, отличному от указанных концов. Если же концевой прокол общий, то две дуги отсекают диск. Случай, когда одна из компонент содержит все остальные проколы, уже был выделен выше как случай, когда две дуги отличаются действием косы $\Delta_n^{\pm 2}$; в оставшемся случае подходящий прокол лежит в нужной компоненте, и к нему можно провести граничную дугу γ.

Разрежем диск D_n^2 вдоль дуги γ. Так как росток дуги γ не лежит между ростками дуг α_{i-1} и α_i, после разрезания концы обеих дуг лежат на одной и той же компоненте края, образовавшегося при разрезе. В разрезанной поверхности, представляющей собой диск D_{n-1}^2, они являются неразделяющими граничными дугами. Группа классов отображений разрезанного диска действует транзитивно на изотопических классах таких дуг, поэтому существует класс отображений, неподвижный на крае и переводящий дугу α_{i-1} в дугу α_i. Склеивая разрез в исходное положение, получаем косу $\varphi_i \in B_n$, сохраняющую дугу γ и переводящую α_{i-1} в α_i. По лемме 1 такая коса расщепима.

Положим

$$\psi = \varphi_1^{-1} \cdots \varphi_m^{-1} \varphi.$$

Тогда коса ψ сохраняет дугу α_0, следовательно, по лемме 1 она расщепима. Получаем представление

$$\varphi = \varphi_m \cdots \varphi_1 \psi$$

в виде произведения кос из множества S. Поэтому

$$\operatorname{fr}(\varphi) \leqslant m + 1 = \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) + 1,$$

что доказывает первое утверждение при $m \geqslant 2$.

Теперь рассмотрим малые значения m. Если $m = 0$, то коса φ сохраняет граничную дугу, значит, по лемме 1 она расщепима; поэтому

$$\operatorname{fr}(\varphi) \leqslant 1 = \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) + 1.$$

Пусть теперь $m = 1$. Тогда дуги α и $\varphi(\alpha)$ не пересекаются и имеют один и тот же тип: либо обе разделяющие, либо обе неразделяющие. Если обе дуги разделяющие, то диски, которые они ограничивают, можно выбрать непересекающимися: вложенность одного такого диска в другой, учитывая равенство чисел содержащихся в них проколов, противоречила бы неизотопности дуг. Выберем неразделяющую граничную дугу α' внутри диска, отсекаемого дугой α. Тогда у дуг α' и $\varphi(\alpha')$ имеются непересекающиеся представители, следовательно, расстояние между ними не превосходит 1. Тем самым случай пары разделяющих дуг сводится к случаю пары неразделяющих дуг. В неразделяющем случае рассуждение из основной части доказательства даёт косу $\eta \in S$, переводящую дугу α в дугу $\varphi(\alpha)$. Тогда коса $\eta^{-1}\varphi$ сохраняет дугу α, и потому она расщепима. Следовательно, коса $\varphi = \eta(\eta^{-1}\varphi)$ представляется произведением не более чем двух кос из S, так что $\mathrm{fr}(\varphi) \leqslant 2 = \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) + 1$.

Осталось рассмотреть случай центральной косы. Верхняя оценка

$$\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\Delta_n^{2t}) \leqslant |t|$$

получается выбором стандартной неразделяющей дуги α от граничной отмеченной точки до прокола: при $t \geqslant 0$ имеем путь

$$\alpha, \Delta_n^2(\alpha), \Delta_n^4(\alpha), \ldots, \Delta_n^{2t}(\alpha)$$

в $\mathcal{A}_\partial$. При $t < 0$ рассуждение аналогично.

Для обратной оценки разрежем диск вдоль отрезка, содержащего все проколы. Полученное кольцо имеет две компоненты края: “внешнюю” ∂D_n^2 и “внутреннюю”, образованную удвоением разреза. Для каждой граничной дуги α выберем представителя в минимальном положении относительно разреза, ориентируем его в направлении от отмеченной точки на границе (если оба конца совпадают, ориентируем, начиная с того ростка, который является первым в локальном угловом порядке, заданном фиксированной ориентацией границы диска) и возьмём начальный отрезок дуги α до первого пересечения с разрезом. Поднимаем этот отрезок в универсальное накрывающее пространство кольца $\mathbb{R} \times [0,1]$ с началом в фиксированном подъёме граничной отмеченной точки и записываем, в какой из фундаментальных промежутков попадает конечная точка этого поднятого отрезка. Если две ориентированные граничные дуги смежны, то соответствующие поднятые начальные отрезки в полосе не пересекаются, откуда следует оценка $|w(\alpha) - w(\beta)| \leqslant 1$. Нумерация фундаментальных промежутков выбирается так, что полный оборот увеличивает число w на 1:

$$w(\Delta_n^2(\alpha)) = w(\alpha) + 1.$$

Поэтому любой путь от α к $\Delta_n^{2t}(\alpha)$ имеет длину не меньше $|t|$. Следовательно,

$$\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\Delta_n^{2t}) = |t|.$$

Из предложения 4 и леммы 3 уже известно, что $\mathrm{fr}(\Delta_n^{2t}) = |t|$. Тем самым $\mathrm{fr}(\varphi) = \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi)$ для центральных φ. □

Теорема 6. *Для любого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$ выполняется соотношение*

$$\|\varphi\|_\partial \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi).$$

Доказательство. В силу предложений 4 и 5 имеем

$$\|\psi\|_\partial \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\psi)$$

для всякой $\psi \in B_n$. Применим это неравенство к $\psi = \varphi^m$, разделим на m и воспользуемся абсолютной однородностью граничной полунормы:

$$\|\varphi\|_\partial = \frac{\|\varphi^m\|_\partial}{m} \leqslant \frac{\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi^m)}{m}.$$

Переход к пределу даёт требуемое неравенство. □

Следствие 7. *Для любого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$ выполняется соотношение*

$$|\omega_n(\varphi)| \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi).$$

Доказательство. Поскольку $\omega_n \in Q_n^\partial$ и $D(\omega_n) = 1$, имеем

$$|\omega_n(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_\partial.$$

Осталось применить теорему 6. □

§4. Уровень граничных дуг со скользящими концами

Определим граф $\mathcal{A}_\circ$ как фактор-граф графа $\mathcal{A}_\partial$, полученный отождествлением ∂-свободно изотопных вершин и последующим удалением петель и дублирующих рёбер, возникающих после отождествления. Если это не приводит к неоднозначности, вершину графа $\mathcal{A}_\circ$ будем представлять выбранной граничной дугой из соответствующего ∂-свободного изотопического класса.

Замечание 1. Если одна граничная дуга получается из другой действием некоторой степени полного оборота, то такие дуги ∂-свободно изотопны. Для разделяющих дуг обратное неверно: прообраз одного ∂-свободного изотопического класса разделяющих дуг в $\mathcal{A}_\partial$ является объединением двух орбит действия группы $\langle\Delta_n^2\rangle$. Для неразделяющих граничных дуг, напротив, ∂-свободный изотопический класс совпадает с одной $\langle\Delta_n^2\rangle$-орбитой. Таким образом, естественное 1-липшицево отображение

$$\mathcal{A}_\partial/\langle\Delta_n^2\rangle \longrightarrow \mathcal{A}_\circ$$

взаимно однозначно на вершинах, представленных неразделяющими дугами; для любой вершины графа $\mathcal{A}_\circ$ её прообраз в $\mathcal{A}_\partial/\langle\Delta_n^2\rangle$ состоит из одной или двух вершин, причём в последнем случае эти две вершины находятся на расстоянии не больше 1.

Эквивалентно, стягивание границы диска D_n^2 в новый прокол задаёт отождествление графа $\mathcal{A}_\circ$ с индуцированным подграфом графа дуг проколотой сферы S_{n+1}^2, вершины которого представлены дугами, у которых хотя бы один конец – новый прокол; см. [4]. Действие группы B_n на графе $\mathcal{A}_\partial$ спускается к действию на графе $\mathcal{A}_\circ$. Выполняется соотношение

$$\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi).$$

Полный оборот действует на графе $\mathcal{A}_\circ$ тривиально.

Положим

$$Q_n^\circ = \{f \in Q_n^\partial \mid f(\Delta_n^2) = 0\}.$$

Следующая лемма проясняет динамическое значение элементов из Q_n°.

Лемма 8. *Для $n \geqslant 3$ и любого $f \in Q_n^\partial$ следующие условия эквивалентны*:

(1) $f \in Q_n^\circ$;
(2) *f обращается в нуль на всех косах, сохраняющих вершину графа $\mathcal{A}_\circ$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $f \in Q_n^\circ$, и пусть коса φ сохраняет вершину графа $\mathcal{A}_\circ$. Прообраз этой вершины при естественном отображении $\mathcal{A}_\partial/\langle\Delta_n^2\rangle \to \mathcal{A}_\circ$ состоит из одного или двух элементов. Так как коса φ сохраняет указанную вершину, она действует на этом прообразе перестановкой. Следовательно, коса φ^2 сохраняет некоторый элемент прообраза: существуют граничная дуга α и целое число r такие, что

$$\varphi^2(\alpha) = \Delta_n^{2r}(\alpha).$$

Положим $\psi = \Delta_n^{-2r}\varphi^2$. Коса ψ сохраняет вершину графа $\mathcal{A}_\partial$, поэтому по лемме 2 получаем $f(\psi) = 0$. Так как Δ_n^2 центральна и $f(\Delta_n^2) = 0$, имеем

$$0 = f(\psi) = f(\Delta_n^{-2r}) + f(\varphi^2) = 2f(\varphi).$$

Таким образом, квазиморфизм f обращается в нуль на любой косе, сохраняющей вершину графа $\mathcal{A}_\circ$.

Обратно, полный оборот Δ_n^2 сохраняет каждую вершину графа $\mathcal{A}_\circ$. Поэтому $f(\Delta_n^2) = 0$, т. е. $f \in Q_n^\circ$. $\square$

Положим

$$\|\varphi\|_\circ = \sup_{\substack{f \in Q_n^\circ \\ D(f) > 0}} \frac{|f(\varphi)|}{D(f)}.$$

Поскольку $Q_n^\circ \subseteq Q_n^\partial$, получаем

$$\|\varphi\|_\circ \leqslant \|\varphi\|_\partial.$$

Кроме того, $\|\Delta_n^{2t}\varphi\|_\circ = \|\varphi\|_\circ$.

Теорема 9. *Для любого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$ выполняется соотношение*

$$\|\varphi\|_\circ \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi).$$

Доказательство. Сначала докажем оценку $\|\varphi\|_\circ \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi)$. Положим $m = \tau_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi)$, выберем вершину v графа $\mathcal{A}_\circ$, для которой

$$d(v, \varphi(v)) = m,$$

и кратчайший путь

$$v = v_0, v_1, \ldots, v_m = \varphi(v)$$

в $\mathcal{A}_\circ$. Выберем граничную дугу α_0, представляющую вершину v_0, положим $\alpha_m := \varphi(\alpha_0)$ и выберем представителей α_i промежуточных вершин v_i так, что каждая соседняя пара представителей имеет непересекающиеся внутренности после ∂-свободной изотопии. Получаем последовательность

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m = \varphi(\alpha).$$

Если $m \geqslant 2$, то её можно выбрать так, что все дуги α_i являются неразделяющими. Для таких дуг переход от ∂-свободных классов к обычным классам сводится к действию полного оборота. Поэтому можно последовательно выбрать целые числа $r_1, \ldots, r_m$ так, что последовательность

$$\alpha_0, \Delta_n^{2r_1}(\alpha_1), \ldots, \Delta_n^{2r_m}(\alpha_m)$$

является путём в графе $\mathcal{A}_\partial$. Поскольку $\alpha_m = \varphi(\alpha_0)$, получаем

$$\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\Delta_n^{2r_m}\varphi) \leqslant m.$$

По теореме 6

$$\|\Delta_n^{2r_m}\varphi\|_\partial \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\Delta_n^{2r_m}\varphi) \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\Delta_n^{2r_m}\varphi) \leqslant m.$$

Так как $Q_n^\circ \subseteq Q_n^\partial$ и полунорма $\|\cdot\|_\circ$ не меняется при умножении на степень полного оборота, имеем

$$\|\varphi\|_\circ = \|\Delta_n^{2r_m}\varphi\|_\circ \leqslant \|\Delta_n^{2r_m}\varphi\|_\partial \leqslant m.$$

Если $m = 0$, то коса φ сохраняет некоторую вершину графа $\mathcal{A}_\circ$, и по лемме 8 получаем $\|\varphi\|_\circ = 0$. Пусть теперь $m = 1$. Тогда дуги α и $\varphi(\alpha)$ смежны в графе $\mathcal{A}_\circ$ и имеют один и тот же тип. Если обе они разделяющие, то, как в доказательстве предложения 5, заменяем дугу α на неразделяющую дугу α' внутри диска, отсекаемого дугой α; после ∂-свободной изотопии у дуг α' и $\varphi(\alpha')$ имеются непересекающиеся представители. Следовательно, можно считать, что дуги α и $\varphi(\alpha)$ неразделяющие. Тогда существует целое число r такое, что дуги α и $\Delta_n^{2r}\varphi(\alpha)$ смежны в графе $\mathcal{A}_\partial$. Значит, $\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\Delta_n^{2r}\varphi) \leqslant 1$, и по теореме 6

$$\|\varphi\|_\circ = \|\Delta_n^{2r}\varphi\|_\circ \leqslant \|\Delta_n^{2r}\varphi\|_\partial \leqslant 1 = m.$$

Таким образом, оценка $\|\varphi\|_\circ \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi)$ доказана во всех случаях.

Применяя её к косе φ^k, деля на k и переходя к пределу, получаем

$$\|\varphi\|_\circ = \frac{\|\varphi^k\|_\circ}{k} \leqslant \frac{\tau_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi^k)}{k} \longrightarrow \ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi). \qquad \square$$

Предложение 10. *Для любого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются соотношения*

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) - |\omega_n(\varphi)| \leqslant 2\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant 2\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi).$$

Доказательство. Правое неравенство следует из 1-липшицевости естественного отображения $\mathcal{A}_\partial \to \mathcal{A}_\circ$. Для левой оценки достаточно сначала получить оценку для неасимптотического числа переноса с равномерной аддитивной константой. Положим $m = \tau_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi)$, выберем вершину v графа $\mathcal{A}_\circ$, для которой $d(v, \varphi(v)) = m$, и кратчайший путь

$$v = v_0, v_1, \ldots, v_m = \varphi(v),$$

в $\mathcal{A}_\circ$. Выберем граничную дугу α_0, представляющую вершину v_0, положим $\alpha_m := \varphi(\alpha_0)$ и выберем представителей α_i промежуточных вершин v_i так, что каждая соседняя пара представителей имеет непересекающиеся внутренности после ∂-свободной изотопии. Получаем последовательность

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m = \varphi(\alpha).$$

Предположим сначала, что $m \geqslant 2$. Как в доказательстве теоремы 9, дуги α_i можно считать неразделяющими, а затем поднять указанный выше путь, с точностью до степеней полного оборота, до пути в графе $\mathcal{A}_\partial$. Значит, существует целое число r такое, что

$$\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\Delta_n^{2r}\varphi) \leqslant m.$$

По следствию 7 и неравенству $\ell_{\mathcal{A}_\partial} \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}$ получаем

$$|r + \omega_n(\varphi)| = |\omega_n(\Delta_n^{2r}\varphi)| \leqslant m.$$

Следовательно, $|r| \leqslant m + |\omega_n(\varphi)|$. Умножение на Δ_n^{-2r} изменяет положение любой неразделяющей граничной дуги на расстояние не больше $|r|$ в графе $\mathcal{A}_\partial$, поэтому

$$\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \tau_{\mathcal{A}_\partial}(\Delta_n^{2r}\varphi) + |r| \leqslant 2m + |\omega_n(\varphi)|.$$

В случае $m = 1$ при необходимости заменяем разделяющую дугу α на неразделяющую дугу внутри отсекаемого ею диска, как в доказательстве теоремы 9. Тогда существует целое число r такое, что

$$\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\Delta_n^{2r}\varphi) \leqslant 1.$$

То же рассуждение даёт

$$\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 2 + |\omega_n(\varphi)| = 2\tau_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) + |\omega_n(\varphi)|.$$

Остаётся случай $m = 0$. Если вершина, сохраняемая косой φ в графе $\mathcal{A}_\circ$, представлена неразделяющей дугой, то для некоторого $r \in \mathbb{Z}$ коса $\Delta_n^{2r}\varphi$ сохраняет соответствующую вершину графа $\mathcal{A}_\partial$, и потому

$$0 = \omega_n(\Delta_n^{2r}\varphi) = r + \omega_n(\varphi).$$

Следовательно,

$$\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant |r| = |\omega_n(\varphi)|.$$

Если же сохраняемая вершина представлена разделяющей дугой, выберем неразделяющую граничную дугу, не пересекающую её. Эта дуга и её образ соединены в графе $\mathcal{A}_\circ$ путём из неразделяющих дуг длины не больше 2. Повторяя основное рассуждение, получаем

$$\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 4 + |\omega_n(\varphi)|.$$

Итак, во всех случаях доказана оценка

$$\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 2\tau_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) + |\omega_n(\varphi)| + 4.$$

Применим её к косе φ^k, разделим на k и воспользуемся однородностью квазиморфизма ω_n:

$$\frac{\tau_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi^k)}{k} \leqslant 2\frac{\tau_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi^k)}{k} + |\omega_n(\varphi)| + \frac{4}{k}.$$

Переход к пределу даёт

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant 2\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) + |\omega_n(\varphi)|. \qquad \square$$

§5. Уровень дуг и кривых

Определим *граф дуг* $\mathcal{A}$ как простой граф, вершинами которого являются классы ∂-свободно изотопных дуг в D_n^2 (не обязательно граничных), а две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда они могут быть реализованы дугами с непересекающимися внутренностями. Имеем естественное вложение $\mathcal{A}_\circ \hookrightarrow \mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{C}$ – *граф кривых* проколотого диска D_n^2 [7, 8]. Для $n \geqslant 4$ его рёбра соединяют кривые, у которых имеются непересекающиеся представители, а для $n = 3$ – кривые, имеющие представителей с ровно двумя пересечениями. Граф $\mathcal{C}$ гиперболичен по Громову [7].

Граф дуг и кривых $\mathcal{AC}$ получается объединением графа кривых $\mathcal{C}$ и графа дуг $\mathcal{A}$ с добавлением ребра между дугой и кривой в том случае, когда у них имеются непересекающиеся представители. Имеем естественное вложение $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{AC}$.

Вложение $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{AC}$ является квазиизометрией [6]; при этом

$$\frac{1}{2}\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{AC}}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{C}}(\varphi).$$

Так как граф $\mathcal{A}_\circ$ является подграфом графа $\mathcal{AC}$, получаем иерархию

$$\ell_{\mathcal{AC}}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi).$$

Положим

$$Q_n^{\mathcal{C}} = \{f \in Q(B_n) \mid f(\psi) = 0 \text{ для любой приводимой косы } \psi\}.$$

Определим *полунорму уровня дуг и кривых* формулой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\substack{f \in Q_n^{\mathcal{C}} \\ D(f)>0}} \frac{|f(\varphi)|}{D(f)}.$$

Поскольку полный оборот и всякая расщепимая коса приводимы, выполняются следующие соотношения:

$$Q_n^{\mathcal{C}} \subseteq Q_n^{\circ} \subseteq Q_n^{\partial}, \qquad \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \leqslant \|\varphi\|_{\circ} \leqslant \|\varphi\|_{\partial}.$$

Полунорма $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$ обращается в нуль на периодических и приводимых косах. Тем самым положительность величины $\|\varphi\|_{\mathcal{C}}$ служит когомологическим признаком псевдоаносовской динамики.

§6. Внешняя динамика Нильсена–Тёрстона

Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$ – приводимая и непериодическая коса. Тогда, согласно [5], существует такое $r \in \{2, \ldots, n-1\}$, что после сопряжения коса φ записывается во *внешней нормальной форме Нильсена–Тёрстона*

$$\varphi = \varphi_{\mathrm{tub}}\psi,$$

где φ_{tub} – так называемая *трубчатая коса*, полученная из некоторой косы $\varphi_{\mathrm{ext}} \in B_r$, называющейся *внешней*, следующим образом. Каждый прокол *внешнего* диска D_r^2 раздувается до малого диска D_i, содержащего n_i проколов, где

$$n_1, \ldots, n_r \geqslant 1, \qquad n_1 + \ldots + n_r = n,$$

и класс отображения φ_{ext} продолжается на объединение малых дисков без внутренней динамики: диски D_i переставляются посредством заранее выбранных отождествлений. Кроме того, *внутренняя коса* ψ может быть представлена гомеоморфизмом диска D_n^2, носитель которого содержится в объединении малых дисков $D_1, \ldots, D_r$. Совокупность граничных окружностей этих дисков называется *внешней мультикривой*, а дополнение к их внутренностям называется *внешней областью*. Для периодических и псевдоаносовских кос положим

$$\varphi_{\mathrm{ext}} = \varphi_{\mathrm{tub}} = \varphi.$$

Лемма 11. *При $n \geqslant 3$ коса $\varphi \in B_n$ расщепима тогда и только тогда, когда её внешняя коса φ_{ext} тривиальна.*

Доказательство. Пусть $\varphi_{\mathrm{ext}} = 1$. Выберем во внешнем диске D^2_r разделяющую дугу; она сохраняется косой φ_{ext}. Соответствующая дуга во внешней области диска D^2_n сохраняется трубчатой косой φ_{tub}; поскольку эта дуга лежит вне малых дисков D_i, она также сохраняется внутренней косой ψ. По лемме 1 коса φ расщепима.

Обратно, если φ расщепима, она сохраняет разделяющую граничную дугу α. Если коса φ – периодическая, то некоторая её степень равна Δ_n^{2p}; сохранение α влечёт $p = 0$, а так как группы кос не имеют кручения, получаем $\varphi = 1$. В приводимом непериодическом случае переведём дугу α в минимальное положение относительно внешней мультикривой. Начальный отрезок дуги α во внешней области после стягивания дисков даёт граничную дугу в D^2_r, сохраняемую косой φ_{ext}. Следовательно, φ_{ext} расщепима. Поскольку внешняя коса по построению либо периодическая, либо псевдоаносовская, она должна быть периодической. Наконец, периодическая коса, сохраняющая существенную граничную дугу, тривиальна. □

Предложение 12. *Пусть $n \geqslant 3$, и пусть символ X обозначает $\mathcal{A}_\partial$ или $\mathcal{A}_\circ$. Для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются соотношения*

$$\ell_X(\varphi_{\mathrm{ext}}) = \ell_X(\varphi_{\mathrm{tub}}) \leqslant \ell_X(\varphi) \leqslant 2\ell_X(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Доказательство. Если φ периодическая или псевдоаносовская, то по определению имеем $\varphi_{\mathrm{ext}} = \varphi_{\mathrm{tub}} = \varphi$, и утверждение очевидно. Далее считаем φ приводимой и непериодической; после сопряжения она записывается во внешней нормальной форме Нильсена–Тёрстона

$$\varphi = \varphi_{\mathrm{tub}}\psi.$$

С каждой неразделяющей граничной дугой α в D^2_n свяжем её усечение – граничную дугу $T(\alpha)$ в D^2_r. Приведём α в минимальное положение относительно внешней мультикривой и возьмём начальный отрезок дуги до первого входа в один из дисков D_i. После стягивания этого диска в прокол получаем дугу во внешнем диске D^2_r. Это определение не зависит от выбранного минимального представителя с точностью до изотопии. Более того, если две неразделяющие граничные дуги не пересекаются, то их усечённые образы либо не пересекаются, либо совпадают. Поэтому после удаления повторяющихся вершин отображение T переводит рёберные пути, состоящие из неразделяющих граничных дуг, в рёберные пути не большей длины. В случае $X = \mathcal{A}_\circ$ данная конструкция и все конструкции ниже понимаются на уровне ∂-свободных изотопических классов.

По построению

$$T(\varphi_{\mathrm{tub}}(\alpha)) = \varphi_{\mathrm{ext}}(T(\alpha)).$$

Так как коса ψ может быть представлена гомеоморфизмом, носитель которого содержится в дисках D_i, она не меняет начальный отрезок дуги до первого пересечения с мультикривой. Следовательно,

$$T(\varphi(\alpha)) = T((\varphi_{\mathrm{tub}}\psi)(\alpha)) = \varphi_{\mathrm{ext}}(T(\alpha)).$$

Поскольку при возведении косы φ в степень внешняя мультикривая сохраняется, а внешняя и трубчатая части косы возводятся в ту же степень, аналогично получаем

$$T(\varphi^m(\alpha)) = T(\varphi^m_{\mathrm{tub}}(\alpha)) = \varphi^m_{\mathrm{ext}}(T(\alpha)).$$

Теперь зафиксируем $m \geqslant 1$. Если $\tau_X(\varphi^m) \geqslant 2$, то, как в доказательствах предложения 5 и теоремы 9, можно выбрать граничную дугу α и кратчайший путь в $X(D^2_n)$ от α до $\varphi^m(\alpha)$ так, что все его вершины представлены неразделяющими граничными дугами. Применяя T, после удаления повторений получаем путь в $X(D^2_r)$ от $T(\alpha)$ до $\varphi^m_{\mathrm{ext}}(T(\alpha))$ не большей длины. Отсюда

$$\tau_X(\varphi^m_{\mathrm{ext}}) \leqslant \tau_X(\varphi^m).$$

Если же $\tau_X(\varphi^m) = 0$ или $\tau_X(\varphi^m) = 1$, то, заменяя при необходимости разделяющую дугу на неразделяющую дугу в одной из отсекаемых областей, получаем неразделяющую граничную дугу α, соединённую с $\varphi^m(\alpha)$ путём длины не более 2, все вершины которого неразделяющие. Применение T даёт $\tau_X(\varphi^m_{\mathrm{ext}}) \leqslant 2$. Итак, во всех случаях

$$\tau_X(\varphi^m_{\mathrm{ext}}) \leqslant \tau_X(\varphi^m) + 2.$$

Разделим на m и перейдём к пределу:

$$\ell_X(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant \ell_X(\varphi).$$

То же рассуждение, применённое к φ^m_{tub} вместо φ^m, устанавливает соотношение

$$\tau_X(\varphi^m_{\mathrm{ext}}) \leqslant \tau_X(\varphi^m_{\mathrm{tub}}) + 2,$$

откуда

$$\ell_X(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant \ell_X(\varphi_{\mathrm{tub}}).$$

Докажем обратное неравенство для φ_{ext} и φ_{tub}. В каждом диске D_i выберем выделенный прокол и дугу от этого прокола к граничной окружности ∂D_i; поскольку трубчатая часть действует на малых дисках без внутренней динамики, выбор можно провести эквивариантно относительно действия гомеоморфизма, представляющего косу φ_{tub}. Получаем отображение

$$L\colon X(D^2_r) \longrightarrow X(D^2_n),$$

которое приклеивает к концу дуги, находящемуся в проколе, выбранную дугу в соответствующем малом диске; если оба конца дуги лежат на границе, рассматриваем её как дугу во внешней области диска D^2_n. При необходимости слегка раздвигая выбранные внутренние дуги в малых дисках, можно добиться того, чтобы непересекающиеся дуги отображались в непересекающиеся дуги. Поэтому L переводит рёбра в рёбра. Кроме того,

$$L(\varphi_{\mathrm{ext}}(\beta)) = \varphi_{\mathrm{tub}}(L(\beta)).$$

Значит, кратчайший путь от β к $\varphi_{\mathrm{ext}}(\beta)$ отображается в путь той же длины от $L(\beta)$ к $\varphi_{\mathrm{tub}}(L(\beta))$, и поэтому

$$\tau_X(\varphi_{\mathrm{tub}}) \leqslant \tau_X(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Усредняя и совмещая оценки, получаем

$$\ell_X(\varphi_{\mathrm{ext}}) = \ell_X(\varphi_{\mathrm{tub}}).$$

Остаётся доказать верхнюю оценку для числа переноса косы φ в терминах её внешней косы φ_{ext}. Зададим отображение

$$V\colon X(D^2_r) \longrightarrow X(D^2_n).$$

Если внешняя дуга имеет оба конца на границе, рассматриваем её как дугу во внешней области E. Если же она идёт от границы к проколу, соответствующему диску D_j, берём представителя $\widehat{\alpha} \subset E$ от границы к ∂D_j и заменяем его дугой, полученной из границы регулярной окрестности объединения $\widehat{\alpha} \cup D_j$ после стягивания соответствующего отрезка на границе ∂D^2_n к отмеченной точке. Если две дуги в $X(D^2_r)$ смежны и не заканчиваются в одном и том же внешнем проколе, их образы можно выбрать непересекающимися. Если же они заканчиваются в одном и том же проколе внешней области, выберем третью внешнюю дугу γ, не пересекающуюся с обеими и заканчивающуюся в другом внешнем проколе; тогда последовательность

$$V(\alpha),\ V(\gamma),\ V(\beta)$$

задаёт путь длины 2. Следовательно, V является 2-липшицевым на рёберных путях.

По построению отображение V эквивариантно относительно действий кос φ_{ext} и φ:

$$V(\varphi_{\mathrm{ext}}(\alpha)) = \varphi_{\mathrm{tub}}(V(\alpha)) = \varphi(V(\alpha)),$$

поскольку дуга $V(\alpha)$ лежит во внешней области, а коса ψ сосредоточена на дисках D_i. Применяя V к кратчайшему пути от α к $\varphi_{\mathrm{ext}}(\alpha)$, получаем путь от $V(\alpha)$ к $\varphi(V(\alpha))$ длины не более $2\tau_X(\varphi_{\mathrm{ext}})$. Значит,

$$\tau_X(\varphi) \leqslant 2\tau_X(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Отсюда, применяя тот же аргумент к степеням и переходя к пределу, получаем $\ell_X(\varphi) \leqslant 2\ell_X(\varphi_{\mathrm{ext}})$. $\square$

Будем говорить, что периодическая коса $\varphi \in B_n$ *имеет тип* (p,q), если $\varphi^q = \Delta_n^{2p}$ для $p, q \in \mathbb{Z}$ и $q \geqslant 1$.

Следствие 13. *Если внешняя коса φ_{ext} – периодическая типа (p,q), то*

$$\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) = 0, \qquad \frac{|p|}{q} \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) \leqslant \frac{2|p|}{q}.$$

Доказательство. Полный оборот действует тривиально на $\mathcal{A}_\circ$, а на $\mathcal{A}_\partial$ его асимптотическое число переноса равно 1. Поэтому $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi_{\mathrm{ext}}) = 0$ и $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi_{\mathrm{ext}}) = |p|/q$. Остаётся применить предложение 12. $\square$

Теорема 14. *Для любого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются следующие свойства*:

(1) $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) > 0$ *тогда и только тогда, когда φ нерасщепима*;
(2) $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) > 0$ *тогда и только тогда, когда внешняя коса φ_{ext} псевдоаносовская*;
(3) $\ell_{\mathcal{AC}}(\varphi) > 0$ *тогда и только тогда, когда φ псевдоаносовская.*

Доказательство. Пункт (3) следует из теоремы Мазура–Милски о действии псевдоаносовских классов на графе кривых [7, 8] и из квазиизометричности графов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{AC}$, а именно, периодические и приводимые косы имеют нулевое асимптотическое число переноса, а псевдоаносовские – положительное.

В пункте (2) предложение 12 показывает, что условие $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) > 0$ равносильно $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi_{\text{ext}}) > 0$. Напомним, что внешняя коса является либо периодической, либо псевдоаносовской. В периодическом случае число переноса $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi_{\text{ext}})$ равно нулю. В псевдоаносовском случае оно положительно, поскольку $\ell_{\mathcal{AC}} \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\circ}$ и пункт (3) уже доказан.

В пункте (1) расщепимость влечёт $\ell_{\mathcal{A}_\partial} = 0$ по лемме 1. Обратно, если выполняется $\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) = 0$, то $\ell_{\mathcal{A}_\circ}(\varphi) = 0$. Согласно (2), внешняя коса не является псевдоаносовской, значит, она периодическая. Из следствия 13 тогда получаем, что для её типа (p, q) имеем $p = 0$, откуда, по отсутствию кручения в группах кос, внешняя коса тривиальна. По лемме 11 коса φ расщепима. $\square$

Список литературы

1. А. В. Малютин, *Закрученность (замкнутых) кос.* — Алгебра и анализ **16**, No. 5 (2004), 59–91; St. Petersburg Math. J. **16**, No. 5 (2005), 791–813.
2. D. Calegari, *scl.* Math. Soc. Japan Memoirs **20**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.
3. P. Feller, *The slice-Bennequin inequality for the fractional Dehn twist coefficient.* — J. Inst. Math. Jussieu **24**, No. 1 (2025), 273–289.
4. D. Futer, S. Schleimer, *Cusp geometry of fibered 3-manifolds.* — Amer. J. Math. **136**, No. 2 (2014), 309–356.
5. J. Gonzalez-Meneses, B. Wiest, *On the structure of the centralizer of a braid.* — Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **37**, No. 5 (2004), 729–757.
6. M. Korkmaz, A. Papadopoulos, *On the arc and curve complex of a surface.* — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **148**, No. 3 (2010), 473–483.
7. H. A. Masur, Y. N. Minsky, *Geometry of the complex of curves I: Hyperbolicity.* — Invent. Math. **138**, No. 1 (1999), 103–149.
8. H. A. Masur, Y. N. Minsky, *Geometry of the complex of curves II: Hierarchical structure.* — Geom. Funct. Anal. **10**, No. 4 (2000), 902–974.

Alekseev I. S. Translation lengths and quasimorphisms on braid groups.

We construct a three-level hierarchy of dynamical complexity for braids, based on asymptotic translation lengths for actions of braid groups on graphs of arcs and curves on the punctured disk. The same hierarchy has a bounded-cohomology counterpart: seminorms defined by families of homogeneous quasimorphisms. The main results identify the Nielsen–Thurston features detected at the three levels and establish comparison

theorems: the seminorms at the first two levels yield lower bounds for the corresponding asymptotic translation lengths.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ilyaalekseev@yahoo.com

Поступило 11 мая 2026 г.