Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 550, 2026 г.

Е. В. Фролова

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

§1. Введение

Рассматривается задача магнитной гидродинамики в ограниченной области $\Omega \subset R^3$. Эта задача описывает движение двух вязких несжимаемых жидкостей, разделенных свободной поверхностью, под действием магнитного поля. Пусть ограниченная область Ω_{1t} заполнена жидкостью с плотностью d_1 и вязкостью η_1. Область Ω_{1t} окружена ограниченной областью $\Omega_{2t} = \Omega \setminus \overline{\Omega}_{1t}$, заполненной жидкостью с плотностью d_2 и вязкостью η_2. Граница Ω_{2t} состоит из двух непересекающихся компонент: неизвестной поверхности Γ_t и внешней фиксированной замкнутой поверхности $S = \partial\Omega$, которая является идеальным проводником. Предполагается, что известно положение поверхности раздела жидкостей в начальный момент времени, поверхности Γ_0 и S гомеоморфны сфере, $dist\{\Gamma_0, S\} \geqslant 3d_0 > 0$.

При $t > 0$ надо найти поверхность Γ_t, разделяющую жидкости, поле скоростей жидкости $\mathbf{v}^{(i)}$, давление $p^{(i)}$ и магнитное поле $\mathbf{H}^{(i)}$ из следующей системы уравнений магнитной гидродинамики:

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, две несжимаемые жидкости, свободная граница, пространства Соболева–Слободецкого, глобальная разрешимость.

$$
\begin{aligned}
&d_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \right) - \nabla\cdot T(\mathbf{v},p) - \nabla\cdot T_M(\mathbf{H}) = 0, \qquad x\in\Omega_{it},\\
&\mu_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \alpha_i^{-1}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mu_i \mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) = 0, \qquad x\in\Omega_{it},\\
&\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0, \qquad x\in\Omega_{it},\\
&\big([T(\mathbf{v},p)] + [T_M(\mathbf{H})]\big)\mathbf{n} = \sigma\mathcal{H}\mathbf{n}, \qquad \mathbf{V}_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}, \quad x\in\Gamma_t,\\
&\Big[\frac{1}{\alpha}(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_\tau\Big] = [\mu(\mathbf{v}\times\mathbf{H})_\tau], \quad [\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}] = 0,\\
&[\mathbf{H}_\tau] = 0, \ \ [\mathbf{v}] = 0, \ \ x\in\Gamma_t,\\
&\mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad (\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_\tau = 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad x\in S,\\
&\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x), \qquad \mathbf{H}(x,0) = \mathbf{H}_0(x), \quad x\in\Omega_{10}\cup\Omega_{20},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где введены следующие обозначения: μ_i – магнитная проницаемость, η_i – вязкость, α_i – проводимость, d_i – плотность σ – коэффициент поверхностного натяжения,

$$
\mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{v}^{(1)}, & x\in\Omega_{1t},\\ \mathbf{v}^{(2)}, & x\in\Omega_{2t},\end{cases} \quad \mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{H}^{(1)}, & x\in\Omega_{1t},\\ \mathbf{H}^{(2)}, & x\in\Omega_{2t},\end{cases} \quad p = \begin{cases} p^{(1)}, & x\in\Omega_{1t},\\ p^{(2)}, & x\in\Omega_{2t},\end{cases}
$$

$$
T_M(\mathbf{H}) = \mu(\mathbf{H}\otimes\mathbf{H} - \frac{1}{2}I|\mathbf{H}|^2)
$$

– магнитный тензор напряжений,

$$
T(\mathbf{v},p) = -pI + \eta S(\mathbf{v})
$$

– тензор напряжений,

$$
S(\mathbf{v}) = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T = \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)_{i,j=1,2,3}
$$

– удвоенный тензор скоростей деформации. Предполагается, что η_i, α_i, d_i, μ_i, σ – положительные постоянные. Через $\mathcal{H}$ обозначена удвоенная средняя кривизна поверхности Γ_t, $\mathbf{V}_n$ – скорость движения поверхности Γ_t в направлении нормали $\mathbf{n}$ к Γ_t, внешней по отношению к области Ω_{1t}. Через $(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_\tau$ обозначена касательная составляющая ротора. Через $[f]$ обозначен скачок функции f при переходе через поверхность Γ_t:

$$
[f]|_{x=x_0\in\Gamma_t} = \lim_{x\to x_0, x\in\Omega_{1t}} f^{(1)}(x) - \lim_{x\to x_0, x\in\Omega_{2t}} f^{(2)}(x).
$$

Краевые условия на поверхности Γ_t означают, что на ней действуют капиллярные силы и перенос массы через поверхность исключен. Условие на скачок касательной составляющей $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ следует из уравнений Максвелла и непрерывности касательной составляющей напряженности электрического поля на поверхности раздела.

Задача (1.1) является переопределенной, так как для гладкого решения краевое условие $[\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}]_{\Gamma_t} = 0$ яляется следствием уравнения и остальных краевых условий, в том случае, когда оно выполнено в начальный момент времени. Из технических соображений, мы предпочитаем сохранить все краевые условия в задаче (1.1).

В работах [1–3] изучалась задача магнитной гидродинамики со свободной границей, описывающая движение вязкой несжимаемой жидкости в вакууме. В частности, в [2] доказана разрешимость этой задачи в пространствах Соболева–Слободецкого $W_2^{2+l,1+l/2}$, $1/2 < l < 1$, на неограниченном интервале времени в предположении, что в начальный момент времени свободная граница близка к сфере и начальные данные достаточно малы. Цель данной статьи – получить аналогичный результат для (1.1). Задача магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости, отделенной свободной поверхностью от области, заполненной неподвижным диэлектрическим газом, рассматривалась в [6, 7]. $L_p - L_q$ теория локальной по времени разрешимости задачи магнитной гидродинамики для двух жидкостей построена в [4, 5]. Гидродинамическая задача, описывающая движение двух вязких несжимаемых жидкостей, разделенных свободной поверхностью, соответствующая (1.1) в случае отсутствия магнитного поля, достаточно хорошо изучена (см. например[8–12]. Терема существования решения двухфазной линейной задачи для магнитного поля, возникающей при линеаризации (1.1), доказана в [14].

§2. Преобразование координат

Предположим, что в начальный момент времени свободная граница Γ_0 близка к сфере радиуса R_0 и задана следующим образом:

$$\Gamma_0 = \{x = y + \boldsymbol{N}(y)\rho_0(y), \quad y \in S_{R_0}\},$$

где ρ_0 – заданная функция, $\boldsymbol{N}(y) = \frac{y}{|y|}$ – внешняя нормаль к сфере S_{R_0}, причем радиус этой сферы удовлетворяет соотношению

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 = |\Omega_{10}|, \qquad R_0 > 2d_0.$$

Следовательно,

$$\int_{S_1} ((R_0 + \rho_0(R_0 y))^3 - R_0^3) dS = 0. \tag{2.1}$$

Будем следить за центром тяжести внутренней жидкости, координаты которого находятся по формуле

$$\xi(t) = \frac{1}{|\Omega_{10}|} \int\limits_{\Omega_{1t}} x dx = \frac{1}{|\Omega_{10}|} \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Omega_{1\tau}} \mathbf{v}(x, \tau) dx \right) d\tau.$$

Предполагая, что в начальный момент времени он находится в начале координат, приходим к соотношению

$$\int_{S_1} y_i((R_0 + \rho_0(R_0 y))^4 - R_0^4) dS = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

Будем искать свободную границу в виде:

$$\Gamma_t = \{x = y + \mathbf{N}(y)\rho(y, t) + \xi(t), \quad y \in S_{R_0}\},$$

где функции $\rho(y, t)$ и $\boldsymbol{\xi}(t)$ неизвестны. Если $|\xi(t)| + |\rho(y, t)| \leqslant d_0$, свободная поверхность лежит в шаровом слое $R_0 - d_0 \leqslant |y| \leqslant R_0 + d_0$. Это предположение выполнено при достаточно малых начальных данных.

Для перехода от задачи со свободной границей к задаче в фиксированной области воспользуемся модификацией преобразования Hanzawa:

$$x = y + \boldsymbol{N}^*(y)\rho^*(y, t) + \chi(y)\xi(t) \equiv e_{\rho,\xi}(y), \quad y \in \Omega, \tag{2.3}$$

где $\chi(y)$ – гладкая срезающая функция, равная 1 при $R_0 - d_0 \leqslant |y| \leqslant R_0 + d_0$ и равная нулю вне шарового слоя $R_0 - 2d_0 \leqslant |y| \leqslant R_0 + 2d_0$. Через $\boldsymbol{N}^*(y)$, $\rho^*(y, t)$ обозначены продолжения $\boldsymbol{N}$ и ρ с S_{R_0} в Ω с сохранением класса. Предполагается, что $\rho^*(y, t) = 0$ в окрестности поверхности S и C^1 норма ρ^* мала.

Пусть $\mathcal{F}_1$ – шар радиуса R_0, $\mathcal{F}_2 = \Omega \setminus \overline{\mathcal{F}}_1$, $\partial\mathcal{F}_2 = S \cup S_{R_0}$, тогда $\Omega = \mathcal{F}_1 \cup S_{R_0} \cup \mathcal{F}_2$, При достаточно малых ρ^*, преобразование (2.3) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{F}_i$ и Ω_{it}, $i = 1, 2$. Элементы матрицы Якоби $\mathcal{L}(y, \rho^*, \boldsymbol{\xi})$ преобразования (2.3) равны

$$l_{ij} = \delta_i^j + \frac{\partial \mathbf{N}_i^*}{\partial y_j}\rho^* + \mathbf{N}_i^* \frac{\partial \rho^*}{\partial y_j} + \frac{\partial \chi(y)}{\partial y_j}\xi_i, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Введем следующие обозначения: $L = \det \mathcal{L}$. $\widehat{\mathcal{L}} = L\mathcal{L}^{-1}$. Пусть

$$\mathbf{v}(e_{\rho,\xi}, t) = \mathbf{u}(y, t), \quad p(e_{\rho,\xi}, t) = q(y, t), \quad \widehat{\mathcal{L}}(y, \rho^*, \xi)\mathbf{H}(e_{\rho,\xi}, t) = \mathbf{h}(y, t),$$

тогда $\nabla_x \mathbf{v}$ соответствует $\tilde{\nabla}\mathbf{u} = (\mathcal{L}^{-1})^T \nabla_y \mathbf{u}$ (символом A^T обозначается матрица транспонированная к матрице A), $\mathrm{rot}_x \mathbf{H}$ соответствует $((\mathcal{L}^{-1})^T \nabla_y) \times \mathbf{H}(e_{\rho,\xi}, t)$. Нормаль $\mathbf{n}$ к свободной поверхности может быть найдена по формуле

$$\mathbf{n}(e_\rho(y,t)) = \frac{\widehat{\mathcal{L}}^T(y,t)\mathbf{N}(y)}{|\widehat{\mathcal{L}}^T(y,t)\mathbf{N}(y)|}.$$

Так же как и в работе [1], введем новое неизвестное векторное поле $\mathbf{h} = L\mathcal{L}^{-1}\mathbf{H}(e_{\rho,\xi}, t)$ вместо $\mathbf{h} = \mathbf{H}(e_{\rho,\xi}, t)$. Мотивацией послужило то, что такое векторное поле является соленоидальным и удовлетворяет однородному условию сопряжения на поверхности раздела: $[\mu \mathbf{h} \cdot \mathbf{N}] = 0$.

Преобразование (2.3) переводит (1.1) в нелинейную систему в фиксированной области $\Omega = \mathcal{F}_1 \cup S_{R_0} \cup \mathcal{F}_2$ для неизвестных функций $\mathbf{u}(y,t)$, $q(y,t)$, $\mathbf{h}(y,t)$, $\rho(y,t)$. Выделим линейную часть в этой системе и запишем динамическое краевое условие, разделяя касательную и нормальную составляющие векторов (аналогично тому, как это сделано в [1], [13]). Введем обозначения для касательной составляющей вектора на S_{R_0}: $\Pi_0 \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{N}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{N})$ и для образа касательной составляющей вектора на Γ_t: $\Pi \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{n}(e_{\rho,\xi})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(e_{\rho,\xi}))$.

Приходим к следующей задаче:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu_i \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{d_i} \nabla q = \mathbf{b}_1(\mathbf{u}, q, \mathbf{h}, \rho), \quad y \in \mathcal{F}_i \\
&\nabla \cdot \mathbf{u} = b_2(\mathbf{u}, \rho), \quad y \in \mathcal{F}_i, \\
&[\eta \Pi_0 S(\mathbf{u})\mathbf{N}]_{S_{R_0}} = \mathbf{b}_3(\mathbf{u}, \rho), \quad y \in S_{R_0}, \\
&-[q]_{S_{R_0}} + [\eta \mathbf{N} \cdot S(\mathbf{u})\mathbf{N}]_{S_{R_0}} + \sigma B \rho = b_4(\mathbf{u}, \mathbf{h}, \rho) + b_5(\rho), \quad y \in S_{R_0}, \\
&[\mathbf{u}]_{S_{R_0}} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} + \frac{1}{|\mathcal{F}_1|} \int\limits_{\mathcal{F}_1} \mathbf{u} dy \cdot \mathbf{N} = b_6(\mathbf{u}, \rho), \quad y \in S_{R_0}, \\
&\mu_i \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \alpha_i^{-1} \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{h} = \mathbf{b}_7(\mathbf{h}, \mathbf{u}, \rho), \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0, \quad y \in \mathcal{F}_i, \\
&[\mu \mathbf{h} \cdot \mathbf{N}]_{S_{R_0}} = 0, \quad [\Pi_0 \mathbf{h}]_{S_{R_0}} = \mathbf{b}_8(\mathbf{h}, \rho), \\
&[\frac{1}{\alpha} \Pi_0 (\mathrm{rot}\, \mathbf{h})]_{S_{R_0}} = \mathbf{b}_9(\mathbf{h}, \mathbf{u}, \rho), \\
&\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathrm{rot}\, \mathbf{h})_\tau = 0, \quad \mathbf{u} = 0 \quad y \in S, \quad \int\limits_{\Omega} q(y,t) dy = 0 \\
&\mathbf{u}(y,0) = \mathbf{u}_0(y), \quad \mathbf{h}(y,0) = \mathbf{h}_0(y), \quad y \in \mathcal{F}_i,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\rho(y,0) = \rho_0(y), \quad y \in S_{R_0}.$$

Здесь $\nu_i = \frac{\eta_i}{d_i}$, $B\rho = -\frac{1}{R_0^2}(\Delta_{S_1}\rho + 2\rho)$, Δ_{S_1} – оператор Бельтрами–Лапласа на единичной сфере S_1. Через $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_9$ обозначены нелинейные члены. Выражения $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_4$ аналогичны вычисленным в работах [2, 8, 13].

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b}_1(\mathbf{u}, q, \mathbf{h}, \rho) = \nu_i(\widetilde{\nabla}^2 - \nabla^2)\mathbf{u} + \frac{1}{d_i}(\nabla - \widetilde{\nabla})q + \rho_t^*(\mathcal{L}^{-1}\mathbf{N}^*(y)\cdot\nabla)\mathbf{u} \\
&- (\mathcal{L}^{-1}\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + (\chi(y)\xi^{'}(t)\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{d_i}\widetilde{\nabla}\cdot T_M(\frac{\mathcal{L}}{L}\mathbf{h}), \\
&b_2(\mathbf{u}, \rho) = (I - \widehat{\mathcal{L}}^T)\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot(I - \widehat{\mathcal{L}})\mathbf{u}, \quad y \in \mathcal{F}_i, \\
&\mathbf{b}_3(\mathbf{u}, \rho) = \Big[\eta\Pi_0(\Pi_0 S(\mathbf{u})\mathbf{N} - \Pi\widetilde{S}(\mathbf{u})\mathbf{n}(e_{\rho,\xi}))\Big]_{S_{R_0}}, \\
&b_4(\mathbf{u}, \mathbf{h}, \rho) = \Big[\eta(\mathbf{N}\cdot S(\mathbf{u})\mathbf{N} - \mathbf{n}(e_{\rho,\xi})\cdot\widetilde{S}(\mathbf{u})\mathbf{n}(e_{\rho,\xi}))\Big]_{S_{R_0}} \\
&\qquad - \Big[T_M(\frac{\mathcal{L}}{L}\mathbf{h})\Big]_{S_{R_0}}\mathbf{n}(e_{\rho,\xi}), \quad \widetilde{S}(\mathbf{u}) = (\widetilde{\nabla}\mathbf{u}) + (\widetilde{\nabla}\mathbf{u})^T.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Выражения $\mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6$ совпадают с полученными в [8, 9] при доказательстве глобальной разрешимости задачи для двух несжимаемых жидкостей разделенных свободной поверхностью в отсутствии магнитного поля. Выражения $\mathbf{b}_7, \mathbf{b}_8$ вычисленны в работе [2].

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b}_7(\mathbf{h}, \mathbf{u}, \rho) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{h} - \frac{1}{L}\mathcal{L}^T\mathcal{L}\mathrm{rot}\,\frac{1}{L}\mathcal{L}^T\mathcal{L}\mathbf{h}\right) + \frac{1}{L}\widehat{\mathcal{L}}_t\mathcal{L}\mathbf{h} \\
&+ \widehat{\mathcal{L}}\left(\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{N}^*\rho_t^* + \chi(y)\xi^{'}(t))\cdot\nabla\right)\frac{1}{L}\mathcal{L}\mathbf{h} + \mu_1\mathrm{rot}(\mathcal{L}^{-1}\mathbf{u}\times\mathbf{h}), \\
&\mathbf{b}_8(\mathbf{h}, \rho) = \left(\frac{\widehat{\mathcal{L}}\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}}{|\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}|^2} - \mathbf{N}\right)[\mathbf{h}\cdot\mathbf{N}]_{S_{R_0}}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Нелинейный член $\mathbf{b}_9$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_9(\mathbf{h},\mathbf{u},\rho) = {} & \Big[\mu\Pi(\mathbf{u}\times\frac{1}{L}\mathcal{L}\mathbf{h})\Big]_{S_{R_0}} \\
& + \left(\frac{\widehat{\mathcal{L}}\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}}{|\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}(y)|^2}-\mathbf{N}\right)\Big[\frac{1}{\alpha}\mathrm{rot}\frac{1}{L}\mathcal{L}^T\mathcal{L}\mathbf{h}\cdot\mathbf{N}\Big]_{S_{R_0}} \\
& + \mathbf{N}\Big[\frac{1}{\alpha}\Big(\mathrm{rot}\,\frac{1}{L}\mathcal{L}^T\mathcal{L}\mathbf{h}-\mathrm{rot}\,\mathbf{h}\Big)\cdot\mathbf{N}\Big]_{S_{R_0}}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Для доказательства существования решения задачи (2.4), прежде всего рассмотрим соответствующую линейную задачу.

§3. Линейные задачи

Приведем определения функциональных пространств, в которых ищется решение. Пространству Соболева $W_2^l(\Omega)$, $\Omega\in\mathbb{R}^n$, с нецелым $l>0$, принадлежат функции $u(x)$, $x\in\Omega$, для которых конечна норма

$$
\| u \|^2_{W_2^l(\Omega)} = \| u \|^2_{W_2^{[l]}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[l]}\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \big|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)\big|^2\frac{dxdy}{|x-y|^{n+2(l-[l])}},
$$

где

$$
\| u \|^2_{W_2^{[l]}(\Omega)} = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant[l]}\int\limits_\Omega \big|D^\alpha u(x)\big|^2 dx
$$

– квадрат нормы пространства $W_2^{[l]}(\Omega)$. Анизотропные пространства Соболева- Слободецкого $W_2^{l,l/2}(Q_T)$ в цилиндрической области $Q_T=\Omega\times(0,T)$ можно определить как $L_2((0,T),W_2^l(\Omega))\cap L_2(\Omega,W_2^{l/2}(0,T))$ с нормой

$$
\| u \|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_T)} = \int\limits_0^T \| u(\cdot,t) \|^2_{W_2^l(\Omega)}\,dt + \int\limits_\Omega \| u(x,\cdot) \|^2_{W_2^{l/2}(0,T)}\,dx. \tag{3.1}
$$

Первое и второе слагаемое в правой части (3.1) совпадают с квадратом нормы пространств $W_2^{l,0}(Q_T)=L_2((0,T),W_2^l(\Omega))$ и $W_2^{0,l/2}(Q_T)=L_2((\Omega,W_2^{l/2}(0,T))$ соответственно. На гладких поверхностях пространства Соболева-Слободецкого вводятся стандартным способом с помощью разбиения единицы.

Очевидно, задачу (2.4) можно разделить на две части: гидродинамическую, в которой линейные слагаемые зависят от $\mathbf{u}$, q, ρ и магнитную, в которой линейные слагаемые зависят от $\mathbf{h}$. Заметим, что результаты для линейных задач были получены в более общем случае $\Omega = \mathcal{F}_1 \cup G \cup \mathcal{F}_2$,, когда поверхность разделяюшая фазы G – гладкая замкнутая поверхность гомеоморфная сфере. В нашей задаче $G = S_{R_0}$.

Линеаризованная гидродинамическая задача имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu_i \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{d_i}\nabla q = \mathbf{F}, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = \mathcal{P}, \quad y \in \mathcal{F}_i,\\
&[\eta \Pi_0 S(\mathbf{u})\mathbf{N}]_{S_{R_0}} = \mathbf{A},\\
&[-p + \eta \mathbf{N}\cdot S(\mathbf{u})\mathbf{N}]_{S_{R_0}} + \sigma B\rho = R, \quad y \in S_{R_0},\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{N} + \frac{1}{|\mathcal{F}_1|}\int\limits_{\mathcal{F}_1} \mathbf{u} dy \cdot \mathbf{N} = K, \ \ y \in S_{R_0}, \quad [\mathbf{u}]_{S_{R_0}} = 0, \ \ \mathbf{u}^{(2)}\Big|_S = 0,\\
&\mathbf{u}(y,0) = \mathbf{u}_0(y), \quad y \in \mathcal{F}_i, \ \ \rho(y,0) = \rho_0(y), \ \ y \in S_{R_0}, \ \ \int\limits_\Omega q(y,t)dy = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}^{(1)}, & x \in \mathcal{F}_1 \\ \mathbf{u}^{(2)}, & x \in \mathcal{F}_2 \end{cases}, \qquad q = \begin{cases} q^{(1)}, & x \in \mathcal{F}_1 \\ q^{(2)}, & x \in \mathcal{F}_2 \end{cases}.$$

Задача аналогичная (3.2) получается и при линеаризации задачи со свободной границей, описывающей движение двух вязких несжимаемых жидкостей, разделенных свободной поверхностью, в отсутствии магнитного поля. Такая линейная задача изучалась в [8, 9]. В частности, доказана однозначная разрешимость в пространствах Соболева-Слободецкого.

Теорема 1. [8] *Пусть*

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}_0 \in W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i), \quad \rho_0 \in W_2^{2+l}(S_{R_0}), \quad \mathbf{F} \in W_2^{l,l/2}(Q_T^{(i)}), \quad \mathcal{P} \in W_2^{1+l,0}(Q_T^{(i)}),\\
\mathcal{P} = \nabla\cdot\mathbf{P}, \quad \mathbf{P} \in W_2^{0,1+l/2}(Q_T^{(i)}), \quad [\mathbf{P}_\mathbf{N}]_{S_{R_0}} = 0, \quad \mathbf{A} \in W_2^{1/2+l,1/4+l/2}(G_T),\\
R \in W_2^{1/2+l,0}(G_T) \cap W_2^{l/2}(0,T; W_2^{1/2}(S_{R_0})), \quad K \in W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T),\\
Q_T^{(i)} = \mathcal{F}_i \times (0,T), \qquad G_T = S_{R_0} \times (0,T), \quad l \in (1/2,1), \quad i = 1,2
\end{gathered}$$

и выполняются условия согласования

$$\nabla\cdot\mathbf{u}_0^{(i)}=\mathcal{P}^{(i)}\Big|_{t=0},\quad [\eta\Pi_0 S(\mathbf{u}_0)\mathbf{N}]_{S_{R_0}}=\mathbf{A}\Big|_{t=0},\quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{A}=0\quad (t\geqslant 0),$$
$$[\mathbf{u}_0]_{S_{R_0}}=0,\quad \mathbf{u}_0^{(2)}\Big|_S=0.$$

Тогда задача (3.2) *имеет единственное решение*

$$\rho\in W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_T)\quad \rho_t\in W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T),$$
$$\mathbf{u}\in W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)}),\quad q\in W_2^{0,l/2}(Q_T^{(i)}),\quad \nabla q\in W_2^{l,l/2}(Q_T^{(i)}).$$

Для этого решения имеет место оценка:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\Big(\|\,\mathbf{u}\,\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)})}+\|\,\nabla q\,\|_{W_2^{l,l/2}(Q_T^{(i)})}+\|\,q\,\|_{W_2^{0,l/2}(Q_T^{(i)})}\Big)\\
&+\|\,\rho\,\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_T)}+\|\,\rho_t\,\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)}\\
&\leqslant c(T)\Big(\sum_{i=1}^{2}\|\,\mathbf{u}_0\,\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)}+\|\,\rho_0\,\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\\
&+\sum_{i=1}^{2}\Big(\|\,\mathbf{F}\,\|_{W_2^{l,l/2}(Q_T^{(i)})}+\|\,\mathcal{P}\,\|_{W_2^{1+l,0}(Q_T^{(i)})}+\|\,P\,\|_{W_2^{0,1+l/2}(Q_T^{(i)})}\Big)\\
&+\|\,\mathbf{A}\,\|_{W_2^{1/2+l,1/4+l/2}(G_T)}+\|\,R\,\|_{W_2^{1/2+l,0}(G_T)}\\
&+\|\,R\,\|_{W_2^{l/2}(0,T;W_2^{l/2}(S_{R_0}))}+\|\,K\,\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)}\Big)
\end{aligned}\tag{3.3}$$

Из теоремы 1 следует, что при всех $t\in(0,T)$ функция ρ имеет ту же гладкость, что и в начальный момент времени: $\rho(\cdot,t)\in W_2^{2+l}(S_{R_0})$.

Выделяя в (2.4) линейную часть зависящую от $\mathbf{h}$, приходим к линейной задаче сопряжения:

$$\begin{aligned}
&\mu_i\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha_i}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{h}=\mathbf{f},\quad \nabla\cdot\mathbf{h}=0,\quad y\in\mathcal{F}_i,\\
&[\mu\mathbf{h}\cdot\mathbf{N}]_{S_{R_0}}=0,\quad [\mathbf{h}_\tau]_{S_{R_0}}=\mathbf{a},\\
&[\frac{1}{\alpha}(\mathrm{rot}\mathbf{h})_\tau]_{S_{R_0}}=\mathbf{g},\\
&\mathbf{h}^{(2)}\cdot\mathbf{n}=0,\qquad (\mathrm{rot}\,\mathbf{h}^{(2)})_\tau=0,\quad y\in S,\\
&\mathbf{h}(y,0)=\mathbf{h}_0(y),\quad y\in\mathcal{F}_i,\quad i=1,2,
\end{aligned}\tag{3.4}$$

где $\mathbf{h} = \begin{cases} \mathbf{h}^{(1)}, & x \in \mathcal{F}_1 \\ \mathbf{h}^{(2)}, & x \in \mathcal{F}_2 \end{cases}$. В работе [14] доказана однозначная разрешимость (3.4) в пространствах Соболева-Слободецкого.

Теорема 2. [14] *Пусть в задаче* (3.4) $\mathbf{a} = [\mathcal{A}]$, $\mathbf{g} = [\mathbf{B}]$,

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \mathcal{A}^{(1)}, & x \in \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{A}^{(2)}, & x \in \mathcal{F}_2 \end{cases}, \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \mathbf{B}^{(1)}, & x \in \mathcal{F}_1 \\ \mathbf{B}^{(2)}, & x \in \mathcal{F}_2 \end{cases},$$

$\mathcal{A}^{(i)} \cdot \mathbf{N}\big|_{S_{R_0}} = 0$, $\mathbf{B}^{(i)} \cdot \mathbf{N}\big|_{S_{R_0}} = 0$, $\mathcal{A}^{(i)} \in W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)})$, $\mathbf{B}^{(i)} \in W_2^{1+l,1/2+l/2}(Q_T^{(i)})$, $\mathbf{f} \in W_2^{l,l/2}(Q_T^{(i)})$, $\mathbf{h}_0 \in W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)$.

Предположим также, что $\mathcal{A}^{(2)}$, $\mathbf{B}^{(2)}$ *обращаются в ноль в окрестности заданной границы* S *и выполняются следующие условия согласования:*

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{h}_0 = 0, \qquad y \in \mathcal{F}_i,$$

$$[\mathbf{h}_{0\tau}]_{S_{R_0}} = \mathbf{a}\big|_{t=0}, \quad [\frac{1}{\alpha}(\operatorname{rot}\mathbf{h}_0)_\tau]_{S_{R_0}} = \mathbf{g}\big|_{t=0}, \quad [\mathbf{f}\cdot\mathbf{N}]_{S_{R_0}} = [\operatorname{rot}\mathbf{B}\cdot\mathbf{N}]_{S_{R_0}}, \tag{3.5}$$

$$[\mu\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{N}]_{S_{R_0}} = 0, \quad \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{n}\Big|_S = 0, \quad (\operatorname{rot}\mathbf{h}_0)_\tau\Big|_S = 0, \quad \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\Big|_S = 0.$$

(*Условие* $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ *выполняется в слабом смысле.*) *Тогда существует единственное решение задачи* (3.4) $\mathbf{h} \in W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)})$ *и следующая оценка*

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2} \| \mathbf{h} \|_{W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)})} \leqslant c \sum_{i=1}^{2} \Big(\| \mathbf{f} \|_{W_2^{l,l/2}(Q_T^{(i)})} + \| \mathbf{h}_0 \|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)} \\ &+ \| \mathbf{B}^{(i)} \|_{W_2^{1+l,1/2+l/2}(Q_T^{(i)})} + \| \mathcal{A}^{(i)} \|_{W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)})} \Big) \\ &\leqslant c_1 \sum_{i=1}^{2} \Big(\| \mathbf{f} \|_{W_2^{l,l/2}(Q_T^{(i)})} + \| \mathbf{h}_0 \|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)} \\ &+ \| \mathbf{g} \|_{W_2^{1/2+l,1/4+l/2}(G_T)} + \| \mathbf{a} \|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)} \Big) \end{aligned} \tag{3.6}$$

имеет место.

§4. Нелинейная задача

В этом параграфе будем использовать следующие обозначения

$$Y(t) = \|\rho(\cdot,t)\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} + \sum_{i=1}^{2} \Big(\|\boldsymbol{h}(\cdot,t)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)} + \|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1)} \Big),$$

$$X_{(t_1,t_2)}(\mathbf{u},q,\rho,\mathbf{h})=\sum_{i=1}^{2}(\|\mathbf{h}\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(\mathcal{F}_i\times(t_1,t_2))}+\|\mathbf{u}\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(\mathcal{F}_i\times(t_1,t_2))}$$
$$+\|\nabla q\|_{W_2^{l,l/2}(\mathcal{F}_i\times(t_1,t_2))}+\|q\|_{W_2^{0,l/2}(\mathcal{F}_i\times(t_1,t_2))})$$
$$+\|\rho\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(S_{R_0}\times(t_1,t_2))}+\|\rho_t\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(S_{R_0}\times(t_1,t_2))}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{u}_0\in W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)$, $\mathbf{h_0}\in W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)$, $i=1,2$, $\rho_0\in W_2^{2+l}(S_{R_0})$ *с некоторым* $l\in(1/2,1)$ *и выполнены условия согласования*

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{u}_0=b_2(\mathbf{u}_0,\rho_0),\quad \nabla\cdot\mathbf{h}_0=0,\quad y\in\mathcal{F}_i,\\&[\eta\Pi_0 S(\mathbf{u}_0)\mathbf{N}]_{S_{R_0}}=\mathbf{b}_3(\mathbf{u}_0,\rho_0),\quad [\mathbf{u}_0]_{S_{R_0}}=0,\\&[\mu\mathbf{h}_0\cdot\mathbf{N}]_{S_{R_0}}=0,\quad [(\mathbf{h}_0)\tau]_{S_{R_0}}=\mathbf{b}_8(\mathbf{h}_0,\rho_0),\\&[\frac{1}{\alpha}\Pi_0(\operatorname{rot}\mathbf{h}_0)]_{S_{R_0}}=\mathbf{b}_9(\mathbf{h}_0,\mathbf{u}_0,\rho_0),\\&\mathbf{h}_0\cdot\mathbf{n}=0,\quad (\operatorname{rot}\mathbf{h}_0)_\tau=0,\quad \mathbf{u}_0=0\quad y\in S.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Предположим, что выполняются следующие условия малости начальных данных

$$Y(0)=\|\rho_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}+\sum_{i=1,2}\Big(\|\mathbf{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\Omega_{i0})}+\|\mathbf{h}_0\|_{W_2^{1+l}(\Omega_{i0})}\Big)\leqslant\varepsilon\tag{4.2}$$

и условия (2.1), (2.2) *для функции* ρ_0.

Тогда, на промежутке времени $(0,+\infty)$, *задача* (2.4) *имеет единственное решение со следующими свойствами:*

$$\begin{aligned}&\rho\in W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_\infty)\quad \rho_t\in W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_\infty),\quad \mathbf{u}\in W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)}),\\&\mathbf{h}\in W_2^{2+l,1+l/2}(Q_\infty),\qquad q\in W_2^{0,l/2}(Q_\infty^{(i)}),\qquad \nabla q\in W_2^{l,l/2}(Q_\infty^{(i)}).\\&Q_\infty^{(i)}=\mathcal{F}_i\times(0,+\infty),\qquad G_\infty=S_{R_0}\times(0,+\infty),\quad i=1,2.\end{aligned}$$

Для этого решения имеет место оценка

$$X_{(0,+\infty)}(e^{at}\mathbf{u},e^{at}q,e^{at}\rho,e^{at}\mathbf{h})\leqslant Y(0),\tag{4.3}$$

с некоторым $a>0$.

Будем доказывать теорему 3 шаг за шагом, сначала построив решение с нужными свойствами на промежутке $[0,T]$, затем на промежутке $[T,2T]$ и так далее. Поскольку правые части условий согласования (4.1) нелинейны, они имеют порядок ε^2. Можно найти функции $\mathbf{u}_0^{''}$, $\rho_0^{''}$,

$\mathbf{h}_0^{''}$ порядка ε^2, которые также удовлетворяют условиям согласования в нелинейной задаче (2.4) и сдедующим условиям для функции $\rho_0^{''}$:

$$\int\limits_{S_1} \rho_0^{''}(R_0 y)dS = -\frac{1}{R_0}\int\limits_{S_1} \rho_0^2(R_0 y)dS - \frac{1}{3R_0^2}\int\limits_{S_1} \rho_0^3(R_0 y)dS, \tag{4.4}$$

$$\int\limits_{S_1} y_i\rho_0^{''}dS = -\frac{3}{2R_0}\int\limits_{S_1} y_i\rho_0^2 dS - \frac{1}{R_0^2}\int\limits_{S_1} y_i\rho_0^3 dS - \frac{1}{4R_0^3}\int\limits_{S_1} y_i\rho_0^4 dS, \quad i=1,2,3. \tag{4.5}$$

Возможность построения $\mathbf{u}_0^{''}$, $\rho_0^{''}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} \nabla\cdot\mathbf{u}_0^{''} = b_2(\mathbf{u}_0,\rho_0), \quad y\in\mathcal{F}_i, \\ \nu\Pi_{S_{R_0}} S(\mathbf{u}_0^{''})\mathbf{N}(y) = \mathbf{b}_3(\mathbf{u}_0,\rho_0), \quad y\in S_{R_0}, \quad [\mathbf{u}_0^{''}]_{S_{R_0}} = 0, \\ \mathbf{u}_0^{''} = 0, \quad y\in S \end{gathered}$$

и условиям (4.4), (4.5), доказана в работах [8,9]. Построение векторного поля $\mathbf{h}_0^{''}$, удовлетворяющего условиям

$$\begin{gathered} \nabla\cdot\mathbf{h}_0^{''} = 0, \quad y\in\mathcal{F}_i, \\ [\mu\mathbf{h}_0^{''}\cdot\mathbf{N}]_{S_{R_0}} = 0, \quad [\Pi_0(\mathbf{h}_0^{''})]_{S_{R_0}} = \mathbf{b}_8(\mathbf{h}_0,\rho_0), \\ [\tfrac{1}{\alpha}\Pi_0(\operatorname{rot}\mathbf{h}_0^{''})]_{S_{R_0}} = \mathbf{b}_9(\mathbf{h}_0,\mathbf{u}_0,\rho_0), \\ \mathbf{h}_0^{''}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad (\operatorname{rot}\mathbf{h}_0^{''})_\tau = 0, \quad y\in S. \end{gathered}$$

описано в [14]. Имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\|\rho_0^{''}\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} + \|\mathbf{u}_0^{''}\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)} + \|\mathbf{h}_0^{''}\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)} \\ &\leqslant C\Big(\|\rho_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} + \|\mathbf{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)} + \|\mathbf{h}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)}\Big)^2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Функции

$$\mathbf{u}_0^{'} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^{''}, \quad \rho_0^{'} = \rho_0 - \rho_0^{''}, \quad \mathbf{h}_0^{'} = \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_0^{''}$$

удовлетворяют условиям согласования в линейной однородной задаче. Найдем $\mathbf{u}^{'}$, $\rho^{'}$, $q^{'}$ как решение задачи

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}^{'}}{\partial t} - \nu_i \nabla^2 \mathbf{u}^{'} + \frac{1}{d^{(i)}} \nabla q^{'} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{'} = 0, \quad y \in \mathcal{F}_i, \\
&[\eta \Pi_0 S(\mathbf{u}^{'})\mathbf{N}]_{S_{R_0}} = 0, \\
&[-q^{'} + \eta \mathbf{N} \cdot S(\mathbf{u}^{'})\mathbf{N}]_{S_{R_0}} + \sigma B \rho^{'} = 0, \quad y \in S_{R_0}, \\
&\frac{\partial \rho^{'}}{\partial t} - \mathbf{u}^{'} \cdot \mathbf{N} - \frac{1}{|\mathcal{F}_1|} \int\limits_{\mathcal{F}_1} \mathbf{u}^{'} dy \cdot \mathbf{N} = 0, \quad [\mathbf{u}^{'}]_{S_{R_0}} = 0, \quad y \in S_{R_0}, \ \ \mathbf{u}^{'}\Big|_S = 0, \\
&\mathbf{u}^{'}(y,0) = \mathbf{u}_0^{'}(y), \quad y \in \mathcal{F}_i, \quad \rho^{'}(y,0) = \rho_0^{'}(y), \quad y \in S_{R_0}.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

В работах И. В. Денисовой и В. А. Солонникова [8, 9] доказана глобальная разрешимость задачи (4.7) при всех $\mathbf{u}_0^{'} \in W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$, $\rho_0^{'} \in W_2^{2+l}(S_{R_0})$, удовлетворяющих условиям согласования и условиям ортогональности

$$
\int\limits_{S_1} \rho_0^{'}(R_0 y) dS = 0, \quad \int\limits_{S_1} y_j \rho_0^{'}(R_0 y) dS = 0, \quad j = 1, 2, 3.
$$

Для этого решения имеет место оценка

$$
\begin{aligned}
&\|e^{bt}\mathbf{u}^{'}\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(1)} \cup Q_T^{(2)})} + \|e^{bt}\nabla q^{'}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_T^{(1)} \cup Q_T^{(2)})} \\
&\qquad + \|e^{bt} q^{'}\|_{W_2^{0,l/2}(Q_T^{(1)} \cup Q_T^{(2)})} + \|e^{bt}\rho^{'}\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(S_{R_0} \times (0,T))} \\
&\qquad\qquad + \|e^{bt} D_t \rho^{'}\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(S_{R_0} \times (0,T))} \\
&\leqslant C \left(\|\mathbf{u}_0^{'}\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)} + \|\rho_0^{'}\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} \right), \quad T \leqslant +\infty, \quad b > 0.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Из оценки (4.8) вытекает

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}^{'}(\cdot, T)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)} + \|\rho^{'}(\cdot, T)\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} \\
&\qquad \leqslant C e^{-bT} \left(\|\mathbf{u}_0^{'}\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)} + \|\rho_0^{'}\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} \right).
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Найдем $\mathbf{h}^{'}$ как решение задачи

$$\begin{aligned}
&\mu_i \frac{\partial \mathbf{h}^{'}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_i}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{h}^{'} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{h}^{'} = 0, \quad y\in\mathcal{F}_i,\\
&[\mu\mathbf{h}^{'}\cdot\mathbf{N}]_{S_{R_0}} = 0, \quad [\mathbf{h}^{'}_\tau]_{S_{R_0}} = 0,\\
&[\frac{1}{\alpha}(\operatorname{rot}\mathbf{h}^{'})_\tau]_{S_{R_0}} = 0,\\
&\mathbf{h}^{'}\cdot\mathbf{n} = 0, \qquad (\operatorname{rot}\mathbf{h}^{'})_\tau = 0, \quad y\in S,\\
&\mathbf{h}^{'}(y,0) = \mathbf{h}^{'}_0(y), \quad y\in\mathcal{F}_i.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Задачу (4.10) можно записать как задачу Коши

$$\mathbf{h}_t + \mathcal{A}\mathbf{h} = 0, \quad \mathbf{h}\big|_{t=0} = \mathbf{h}_0$$

с положительноопределенным самосопряженным оператором $\mathcal{A}$, заданным на пространстве соленоидальных векторов, удовлетворяющих краевым условиям (аналогично [17]). Спектр $-\mathcal{A}$ состоит из счетного числа отрицательных собственных чисел, сходящихся к $-\infty$. Следовательно,

$$\|e^{bt}\mathbf{h}^{'}\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(1)}\cup Q_T^{(2)})} + \sup_{t<T}\|e^{bt}\mathbf{h}^{'}(\cdot,t)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)} \leqslant C\|\mathbf{h}^{'}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)}. \tag{4.11}$$

Будем искать решение задачи (2.4) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{'} + \mathbf{u}^{''}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}^{'} + \mathbf{h}^{''}, \quad \rho = \rho^{'} + \rho^{''}, \quad q = q^{'} + q^{''}.$$

Тогда для неизвестных функций $\mathbf{u}^{''}$, $\mathbf{h}^{''}$, $\rho^{''}$, $q^{''}$ приходим к следующей нелинейной задаче:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{u}^{''}}{\partial t} - \nu_i\nabla^2\mathbf{u}^{''} + \frac{1}{d_i}\nabla q^{''} = \mathbf{b}_1(\mathbf{u},q,\mathbf{h},\rho), \quad \nabla\cdot\mathbf{u}^{''} = b_2(\mathbf{u},\rho), \quad y\in\mathcal{F}_i,\\
&[\eta\Pi_0 S(\mathbf{u}^{''})\mathbf{N}]_{S_{R_0}} = \mathbf{b}_3(\mathbf{u},\rho), \quad y\in S_{R_0},\\
&-[q^{''}]_{S_{R_0}} + [\eta\mathbf{N}\cdot S(\mathbf{u}^{''})\mathbf{N}]_{S_{R_0}} + \sigma B\rho^{''} = b_4(\mathbf{u},\mathbf{h},\rho) + b_5(\rho), \quad y\in S_{R_0},\\
&[\mathbf{u}^{''}]_{S_{R_0}} = 0, \quad \frac{\partial\rho^{''}}{\partial t} - \mathbf{u}^{''}\cdot\mathbf{N} + \frac{1}{|\mathcal{F}_1|}\int\limits_{\mathcal{F}_1}\mathbf{u}^{''}dy\cdot\mathbf{N} = b_6(\mathbf{u},\rho), \quad y\in S_{R_0},\\
&\mu_i\frac{\partial\mathbf{h}^{''}}{\partial t} + \alpha_i^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{h}^{''} = \mathbf{b}_7(\mathbf{h},\mathbf{u},\rho), \quad \nabla\cdot\mathbf{h}^{''} = 0, \quad y\in\mathcal{F}_i,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[\mu \mathbf{h}'' \cdot \mathbf{N}]_{S_{R_0}} = 0,\\
&[\Pi_0 \mathbf{h}'']_{S_{R_0}} = \mathbf{b}_8(\mathbf{h},\rho), \quad [\frac{1}{\alpha}\Pi_0(\operatorname{rot}\mathbf{h}'')]_{S_{R_0}} = \mathbf{b}_9(\mathbf{h},\mathbf{u},\rho),\\
&\mathbf{h}'' \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\operatorname{rot}\mathbf{h}'')_\tau = 0, \quad \mathbf{u}'' = 0 \quad y \in S,\\
&\mathbf{u}''(y,0) = \mathbf{u}_0''(y), \quad \mathbf{h}''(y,0) = \mathbf{h}_0''(y), \quad y \in \mathcal{F}_i,\\
&\quad \rho''(y,0) = \rho_0''(y), \quad y \in S_{R_0}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{u}_0'' \in W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)$, $\mathbf{h_0}'' \in W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)$, $i = 1,2$, $\rho_0'' \in W_2^{2+l}(S_{R_0})$ *с некоторым* $l \in (1/2, 1)$ *и выполнены условия согласования* (4.1). *Для заданного* $T > 1$ *существует* $\varepsilon > 0$, *такое что, если начальные данные удовлетворяют условиям* (4.2), (4.6) *с таким* ε, *то задача* (4.12) *имеет единственное решение на промежутке времени* $[0, T]$, *для которого верна оценка*

$$
X_{(0,T)}(\mathbf{u}'', q'', \rho'', \mathbf{h}'') + \sup_{t<T} Y''(t) \leqslant C(T)Y''(0) \leqslant C_1(T)\varepsilon Y(0). \tag{4.13}
$$

Здесь $Y''(t)$ *обозначет* $Y(t)$, *вычисленное для функций* $\mathbf{u}''$, $\mathbf{h}''$, ρ''.

Разрешимость задачи (4.12) с начальными данными порядка ε^2 доказывается методом последовательных приближений. Приведем схему доказательства. В качестве первого приближения возьмем продолжение начальных данных. Пусть

$$
\mathbf{u}_1'' \in W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)}), \quad \mathbf{u}_1''\big|_{t=0} = \mathbf{u}_0'', \quad [\mathbf{u}_1'']_{S_{R_0}} = 0, \quad \mathbf{u}_1''|_S = 0,
$$
$$
\|\mathbf{u}_1''\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)})} \leqslant c\|\mathbf{u}_0''\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)}.
$$

За $\mathbf{h}_1''$ возьмем продолжение $\mathbf{h}_0''$, принадлежащее пространству $W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)})$, обладающее следующими свойствами:

$$
\mathbf{h}_1''\big|_{t=0} = \mathbf{h}_0'', \quad \mathbf{h}_1'' \cdot \mathbf{n}\big|_S = 0, \quad \Big(\operatorname{rot}\mathbf{h}_1''\Big)\big|_S = 0.
$$
$$
\|\mathbf{h}_1''\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(i)})} \leqslant c\|\mathbf{h}_0''\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)}.
$$

Положим $q_1'' = 0$. Из начальных условий и краевого условия в (4.12), находим

$$
\begin{aligned}
&\rho_1''\big|_{t=0}! = \rho_0'',\\
&\frac{\partial \rho_1''}{\partial t}\Big|_{t=0} = \mathbf{u}_0'' \cdot \mathbf{N} - \frac{1}{|\mathcal{F}_1|}\int_{\mathcal{F}_1} \mathbf{u}_0'' dy \cdot \mathbf{N} + b_6(\mathbf{u}_0, \rho_0) \in W_2^{1/2+l}(S_{R_0}).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

В предложении 4.1 работы [16] доказано, что существует функция $\rho_1^{''} \in W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_T)$, обладающая дополнительной гладкостью по времени: $\frac{\partial \rho_1^{''}}{\partial t} \in W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)$ и удовлетворяющая при $t=0$ условиям (4.14). Для этой функции верна оценка:

$$\|\rho_1^{''}\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_T)} + \|\frac{\partial \rho_1^{''}}{\partial t}\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)} \leqslant c(\|\rho_0^{''}\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} + \|\frac{\partial \rho_0^{''}}{\partial t}\|_{W_2^{1/2+l}(S_{R_0})}). \quad (4.15)$$

Согласно теореме о следах

$$\|\rho_1^{''}(\cdot,t)\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} \leqslant c\left(\|\rho_1^{''}\|_{W_2^{5/2+l,0}(G_T)} + \|\frac{\partial \rho_1^{''}}{\partial t}\|_{W_2^{3/2+l,0}(G_T)}\right). \quad (4.16)$$

Продолжим $\rho_1^{''}$ в область Ω с сохранением класса. Определим линейный оператор продолжения E так, чтобы $\operatorname{supp} E\rho \subset \Omega$, $\frac{\partial E\rho}{\partial n}\Big|_{S_{R_0}} = 0$, $E\rho \in W_2^{3+l,3/2+l/2}(Q_T^{(i)})$ и имели место оценки

$$\begin{aligned} &\|E\rho(\cdot,t)\|_{W_2^{1/2+\alpha}(\Omega)} \leqslant c_3\|\rho(\cdot,t)\|_{W_2^{\alpha}(S_{R_0})}, \quad \alpha\in[0,2+l],\\ &\|\frac{\partial}{\partial t}(E\rho)(\cdot,t)\|_{W_2^{1/2+\alpha}(\Omega)} \leqslant c_4\|\frac{\partial}{\partial t}\rho(\cdot,t)\|_{W_2^{\alpha}(S_{R_0})}, \quad \alpha\in[0,1/2+l]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Для всех $m\in\mathbb{N}$, зная m-ое приближение и полагая $\rho_m^* = E\rho_m$, последовательно найдем $(m+1)$-ое приближение из системы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}_{m+1}^{''}}{\partial t} - \nu_i\nabla^2\mathbf{u}_{m+1}^{''} + \frac{1}{d_i}\nabla q_{m+1}^{''} = \mathbf{b}_1(\mathbf{u}_m, q_m, \mathbf{h}_m, \rho_m), \quad y\in\mathcal{F}_i\\ &\nabla\cdot\mathbf{u}_{m+1}^{''} = b_2(\mathbf{u}_m,\rho_m) = \nabla\cdot\mathbf{l}(\mathbf{u}_m,\rho_m), \quad y\in\mathcal{F}_i,\\ &[\eta\Pi_0 S(\mathbf{u}_{m+1}^{''})\mathbf{N}]_{S_{R_0}} = \mathbf{b}_3(\mathbf{u}_m,\rho_m), \quad y\in S_{R_0},\\ &-[q_{m+1}^{''}]_{S_{R_0}} + [\eta\mathbf{N}\cdot S(\mathbf{u}_{m+1}^{''})\mathbf{N}]_{S_{R_0}} + \sigma B\rho_{m+1}^{''}\\ &= b_4(\mathbf{u}_m,\mathbf{h}_m,\rho_m) + b_5(\rho_m), \quad y\in S_{R_0}, \qquad (4.18)\\ &[\mathbf{u}_{m+1}^{''}]_{S_{R_0}} = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial t}\rho_{m+1}^{''} - \mathbf{u}_{m+1}^{''}\cdot\mathbf{N} + \frac{1}{|\mathcal{F}_1|}\int\limits_{\mathcal{F}_1}\mathbf{u}_{m+1}^{''}dy\cdot\mathbf{N} = b_6(\mathbf{u}_m,\rho_m), \quad y\in S_{R_0},\\ &\mu_i\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{h}_{m+1}^{''} + \alpha_i^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{h}_{m+1}^{''} = \mathbf{b}_7(\mathbf{h}_m,\mathbf{u}_m,\rho_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\mathbf{h}^{''}_{m+1}=0 \quad y\in\mathcal{F}_i,\\
&[\mu\mathbf{h}^{''}_{m+1}\cdot\mathbf{N}]_{S_{R_0}}=0,\quad [\Pi_0\mathbf{h}^{''}_{m+1}]_{S_{R_0}}=\mathbf{b}_8(\mathbf{h}_m,\rho_m),\\
&[\frac{1}{\alpha}\Pi_0(\mathrm{rot}\,\mathbf{h}_{m+1})]_{S_{R_0}}=\mathbf{b}_9(\mathbf{h}_m,\mathbf{u}_m,\rho_m),\\
&\mathbf{h}^{''}_{m+1}\cdot\mathbf{n}=0,\quad (\mathrm{rot}\,\mathbf{h}^{''}_{m+1})_\tau=0,\quad \mathbf{u}^{''}_{m+1}=0\quad y\in S,\\
&\mathbf{u}^{''}_{m+1}(y,0)=\mathbf{u}^{''}_0(y),\quad \mathbf{h}^{''}_{m+1}(y,0)=\mathbf{h}^{''}_0(y),\ \ y\in\mathcal{F}_i,\\
&\rho^{''}_{m+1}(y,0)=\rho^{''}_0(y),\quad y\in S_{R_0}.
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\mathbf{u}_m=\mathbf{u}^{''}_m+\mathbf{u}^{'},\quad \mathbf{h}_m=\mathbf{h}^{''}_m+\mathbf{h}^{'},\quad q_m=q^{''}_m+q^{'},\quad \rho_m=\rho^{''}_m+\rho^{'}.$$

Условия согласования в задаче (4.18) выполнены, так как $(\mathbf{u}^{''}_0,\mathbf{h}^{''}_0,\rho^{''}_0)$ удовлетворяют условиям согласования задачи (2.4).

За $(\mathbf{u}^{(i)}_{m+1},\rho_{m+1},q^{(i)}_{m+1})$ возьмем решение задачи (3.2), в которой известные функции равны

$$\mathbf{F}=\mathbf{b}_1(\mathbf{u}_m,q_m,\mathbf{h}_m,\rho_m),\quad \mathcal{P}=b_2(\mathbf{u}_m,\rho_m)=\nabla\cdot\mathbf{l},\quad \mathbf{A}=\mathbf{b}_3(\mathbf{u}_m,\rho_m),$$
$$R=b_4(\mathbf{u}_m,\mathbf{h}_m,\rho_m)+b_5(\rho_m),\quad K=b_6(\mathbf{u}_m,\rho_m).$$

Функция $\mathbf{h}^{''}_{m+1}$ является решением задачи (3.4), в которой известные функции равны

$$\mathbf{f}=\mathbf{b}_7\left(\mathbf{h}_m,\mathbf{u}_m,\rho_m\right),\quad \mathbf{a}=\mathbf{b}_8\left(\mathbf{h}_m,\rho_m\right),\quad \mathbf{g}=\mathbf{b}_9\left(\mathbf{u}_m,\mathbf{h}_m,\rho_m\right).$$

Применяя теоремы 1,2, находим решение задачи (4.18), согласно оценкам (3.3), (3.6) имеем

$$\begin{aligned}
X_{(0,T)}[\mathbf{u}^{''}_{m+1},\mathbf{h}^{''}_{m+1},q^{''}_{m+1},\rho^{''}_{m+1}]+\sup_{t<T}Y^{''}_{m+1}(t)&\\
\leqslant C\Bigg(\sum_{i=1,2}(\|\,\mathbf{u}^{''}_0\,\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)}+\|\,\mathbf{h}^{''}_0\,\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)})&\\
+\|\,\rho^{''}_0\,\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}+Z[b(\mathbf{u}_m,q_m,\rho_m,\mathbf{h}_m)]\Bigg),&\quad (4.19)
\end{aligned}$$

где через $Y''_{m+1}(t)$ обозначено выражение $Y(t)$, вычисленное на функциях $(\mathbf{u}''_{m+1}, \mathbf{h}''_{m+1}, \rho''_{m+1})$,

$$\begin{aligned} Z[b(\mathbf{u}_m, q_m\rho_m, \mathbf{h}_m)] = \sum_{i=1}^{2} \Big(\| \mathbf{b}_1 \|_{W_2^{l,l/2}(Q_T^{(i)})} + \| \mathbf{b}_7 \|_{W_2^{l,l/2}(Q_T^{(i)})} \\ + \| b_2 \|_{W_2^{1+l,0}(Q_T^{(i)})} + \| \mathbf{l} \|_{W_2^{0,1+l/2}(Q_T^{(i)})} \Big) \\ + \| \mathbf{b}_3 \|_{H_2^{1/2+l,1/4+l/2}(G_T)} + \| b_4 + b_5 \|_{W_2^{1/2+l,0}(G_T)} \\ + \| b_4 + b_5 \|_{W_2^{l/2}(0,T;W_2^{1/2}(S_{R_0}))} \\ + \| b_6 \|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)} + \| \mathbf{b}_8 \|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)} \\ + \| \mathbf{b}_9 \|_{W_2^{1/2+l,1/4+l/2}(G_T)} . \end{aligned}$$

Оценки нелинейных слагаемых $Z[b(\mathbf{u}_m, q_m\rho_m, \mathbf{h}_m)]$ в предположении что начальные данные достаточно малы, в то время как промежуток времени, на котором ищется решение, наоборот не мал ($T > 1$), основываются на методе разработанном В. А. Солонниковым в статье [15]. Особенности применения этого метода для случая, когда преобразование координат содержит дополнительное слагаемое $\chi(y)\xi(t)$ по сравнению с преобразованием координат в [15] описаны в работе [2], из результатов которой следует лемма.

Лемма 1. *Предположим. что функции* $(\mathbf{u}, q, \rho, \mathbf{h})$ *имеют конечные нормы*

$$X_{(0,T)}(\mathbf{u}, q, \rho, \mathbf{h}) + \sup_{t<T} Y(t), \quad T > 1, \quad l \in (1/2, 1)$$

и выполнены условия:

$$\sum_{i=1,2} \Big(\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)} + \|\mathbf{h}(\cdot,t)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_i)} \Big) + \|\rho(\cdot,t)\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} \leqslant \delta < 1, \qquad t < T, \quad (4.20)$$

тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} Z[b(\mathbf{u}, q, \rho, \mathbf{h})] \leqslant C_2(T) \Bigg(\Big(X_{(0,T)}(\mathbf{u}, q, \rho, \mathbf{h}) + \sup_{t<T} Y(t) \Big)^2 \\ + \Big(X_{(0,T)}(\mathbf{u}, q, \rho, \mathbf{h}) + \sup_{t<T} Y(t) \Big)^3 \Bigg). \quad (4.21) \end{aligned}$$

Из неравенств (4.9), (4.11) следует

$$Y^{'}(t) \leqslant ce^{-at}Y(0).$$

Выберем T так, чтобы

$$Y^{'}(t) \leqslant \frac{1}{8}Y(0), \tag{4.22}$$

тогда, на основании (4.19), (4.21) получим

$$\begin{aligned} &X_{(0,T)}[\mathbf{u}^{''}_{m+1}, \mathbf{h}^{''}_{m+1}, q^{''}_{m+1}, \rho^{''}_{m+1}] + \sup_{t<T} Y^{''}_{m+1}(t) \\ &\leqslant C_4(T)\Bigg(\bigg(X^{''}_{(0,T);m} + \sup_{t<T} Y^{''}_m(t)\bigg)^2 \\ &+ \bigg(X^{''}_{(0,T);m} + \sup_{t<T} Y^{''}_m(t)\bigg)^3 \Bigg) + C_5(T)\varepsilon Y(0), \\ &X^{''}_{(0,T);m} = X_{(0,T)}(\mathbf{u}^{''}_m, q^{''}_m, \rho^{''}_m, \mathbf{h}^{''}_m). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Выберем ε настолько малым, чтобы при $m = 1$ правая часть неравенства (4.23) не превосходила $2C_5(T)\varepsilon Y(0)$.

Если оценка

$$X^{''}_{(0,T);m} + \sup_{t<T} Y^{''}_m(t) \leqslant 2C_5(T)\varepsilon Y(0) \tag{4.24}$$

верна для m-го приближения, то вследствие (4.23), она остается верной и для $(m+1)$-го приближения при достаточно малом ε.

Для доказательства сходимости метода последовательных приближений надо рассмотреть их разности

$$\mathbf{w}_{m+1} = \mathbf{u}^{''}_{m+1} - \mathbf{u}^{''}_m, \quad s_{m+1} = q^{''}_{m+1} - q^{''}_m,$$
$$\tau_{m+1} = \rho^{''}_{m+1} - \rho^{''}_m, \quad \mathbf{p}_{m+1} = \mathbf{h}^{''}_{m+1} - \mathbf{h}^{''}_m.$$

Вследствие (4.12), функции $\mathbf{w}_{m+1}, s_{m+1}, \tau_{m+1}, \mathbf{p}_{m+1}$ являются решением аналогичной системы, в правых частях которой стоят разности

$$b_j(\mathbf{u}_m, q_m, \rho_m.\mathbf{h}_m) - b_j(\mathbf{u}_{m-1}, q_{m-1}, \rho_{m-1}.\mathbf{h}_{m-1}), \quad j = 1, 2, ..., 9,$$

а начальные условия нулевые. На основании оценок разностей нелинейных членов, так же как в [2], выводится оценка

$$X[\mathbf{w}_{m+1}, s_{m+1}, \tau_{m+1}, \mathbf{k}_{m+1}] \leqslant C(\varepsilon, T)X[\mathbf{w}_m, s_m, \tau_m, \mathbf{k}_m], \tag{4.25}$$

в которой $C(\varepsilon, T)$ мала при малом ε. Неравенство (4.25) гарантирует сходимость последовательностей $\mathbf{u}^{''}_m, q^{''}_m, \rho^{''}_m, \mathbf{h}^{''}_m$ к решению задачи

(4.12). Так как оценка (4.24) верна для всех аппроксимаций, она верна и для решения задачи (4.12), а значит имеет место оценка (4.13), в которой $C_1(T) = 2C_5(T)$.

Перейдем к доказательству существования решения на неограниченном интервале времени. Пусть ε так мало, что $C_1(T)\varepsilon < \frac{1}{8}$, тогда из (4.13), (4.22) следует

$$Y(T) \leqslant \frac{1}{4} Y(0). \tag{4.26}$$

При $t = T$ центр тяжести внутренней жидкости уже не обязательно находится в начале координат, но закон сохранения объема остается выполненным и, как показано в [2], линейная часть условия (2.2) сохраняет свой вид, а именно

$$\int\limits_{S_1} y_j \rho(R_0 y, T) dS = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно, можно взять $\mathbf{u}(y,T)$, $\mathbf{h}(y,T)$, $\rho(y,T)$ за начальные данные и повторить описанную выше схему на промежутке $[T, 2T]$. Затем, зная решение при $t \leqslant (k-1)T$, построить его на промежутке $(k-1)T, kT$, $k \in \mathbb{N}$. Последовательное применение (4.26) приводит к оценке

$$Y(kT) \leqslant \frac{1}{4} Y((k-1)T) \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{4^k} Y(0), \tag{4.27}$$

что дает экспоненциальное убывание для $Y(t)$.

Перейдем к доказательсьву оценки (4.3). Из неравенств (4.9), (4.11) следует

$$X_{[0,T]}(e^{bt}\mathbf{u}', e^{bt}\mathbf{h}', e^{bt}q', e^{bt}\rho') \leqslant C_6 Y(0) \tag{4.28}$$

с некоторым $b > 0$, где постоянная C_6 не зависит от T. Так как мы выбрали ε так, чтобы $C_1(T)\varepsilon < \frac{1}{8}$, из (4.13) следует

$$X_{[0,T]}(e^{bt}\mathbf{u}'', e^{bt}\mathbf{h}'', e^{bt}q'', e^{bt}\rho'') \leqslant Y(0), \qquad b \leqslant \frac{1}{T}. \tag{4.29}$$

На основании (4.28), (4.29), приходим к неравенству

$$X_{[0,T]}(e^{bt}\mathbf{u}, e^{bt}\mathbf{h}, e^{bt}q, e^{bt}\rho) \leqslant C_7 Y(0), \qquad b \leqslant \frac{1}{T},$$

с постоянной C_7 независяшей от T. На промежутке $[T, 2T]$ повторим аналогичные рассуждения, заменяя в (4.28), (4.29) t на $t - T$, получим

$$X_{[T,2T]}(e^{b(t-T)}\mathbf{u}, e^{b(t-T)}\mathbf{h}, e^{b(t-T)}q, e^{b(t-T)}\rho) \leqslant C_7 Y(T), \qquad b \leqslant \frac{1}{T},$$

следовательно,

$$X_{[T,2T]}(e^{bt}\mathbf{u}, e^{bt}\mathbf{h}, e^{bt}q, e^{bt}\rho) \leqslant C_7 e^{bT} Y(T) \leqslant C_7 \frac{e^{bT}}{4} Y(0) < C_7 Y(0).$$

Повторив аналогичные рассуждения на промежутках $[kT,(k+1)T]$, учитывая (4.27) и выбирая $b < \frac{1}{T}$, приходим к оценке

$$X_{[kT,(k+1)T]}(e^{bt}\mathbf{u}, e^{bt}\mathbf{h}, e^{bt}q, e^{bt}\rho) \leqslant C_7 \frac{e^{bkT}}{4^k} Y(0) < C_7 Y(0). \tag{4.30}$$

На основании (4.30), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} X_{[kT,(k+1)T]}(e^{bt}\mathbf{u}, e^{bt}\mathbf{h}, e^{bt}q, e^{bt}\rho) \leqslant nC_7 Y(0), \qquad b \leqslant \frac{1}{T}. \tag{4.31}$$

При $n \to +\infty$ из неравенства (4.31) следует оценка (4.3) с некоторым $a < b$, так как линейный рост по n в правой части (4.31) слабее экспоненциального.

Положение свободной границы при каждом $t > 0$ можно найти по формуле

$$\Gamma_t = \{x = y + \boldsymbol{N}(y)\rho(y,t) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad y \in S_{R_0}\},$$

затем можно выполнить преобразование координат (2.3) и получить решение задачи со свободной границей (1.1).

Из оценки (4.27) и предположения (4.2) следует

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}_1)} \leqslant e^{-\alpha t} Y(0) \leqslant e^{-\alpha t}\varepsilon, \qquad \alpha > 0. \tag{4.32}$$

Поскольку Якобиан преобразования (2.3) равномерно ограничен при всех $t > 0$ и имеет место экспоненциальное убывание L_2 нормы (4.32), можем оценить положение центра тяжести внутренней жидкости следующим образом:

$$|\xi(+\infty)| \leqslant \frac{1}{|\Omega_{10}|} \int_0^{+\infty} dt \int_{\Omega_{1t}} |\mathbf{v}(x,t)| dx \leqslant \frac{1}{|\Omega_{10}|} \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathcal{F}_1} |\mathbf{u}(x,t)||L| dx$$
$$\leqslant C \int\limits_0^{+\infty} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{F}_1)} dt \leqslant C \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon e^{-\alpha t} dt \leqslant C^* \varepsilon.$$

Это означает равномерную ограниченность $|\xi(t)|$ при всех $t > 0$.

Для решения задачи со свободной границей (1.1), на основании теоремы 3, получается следующий результат.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{v}_0^{(i)} \in W_2^{1+l}(\Omega_{i0})$, $\rho_0 \in W_2^{2+l}(S_{R_0})$, $\mathbf{H}_0^{(i)} \in W_2^{1+l}(\Omega_{io})$, $i = 1, 2$, *с некоторым* $l \in (1/2, 1)$, *удовлетворяют условиям согласования и условиям* (2.1), (2.2). *Предположим, что выполняются следующие условия малости*

$$\|\rho_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} + \sum_{i=1,2} \Big(\|\mathbf{v}_0\|_{W_2^{1+l}(\Omega_{i0})} + \|\mathbf{H}_0\|_{W_2^{1+l}(\Omega_{i0})} \Big) \leqslant \varepsilon.$$

Пусть в начальный момент времени $dist\{\Gamma_0, S\} > 3d_0$, $R_0 > 2d_0$, $d_0 > (C^* + 1)\varepsilon$.

Найдется такое ε, *что задача* (1.1) *имеет единственное решение на бесконечном интервале времени со следующими свойствами: для любого* $t > 0$, *свободная граница* Γ_t *находится в шаровом слое* $0 < R_0 - d_0 \leqslant |y| \leqslant R_0 + d_0$,

$$\rho(\cdot, t) \in W_2^{2+l}(S_{R_0}), \qquad \mathbf{v}(\cdot, t) \in W_2^{1+l}(\Omega_{it}), \qquad \mathbf{H}^{(i)}(\cdot, t) \in W_2^{1+l}(\Omega_{it}).$$

Решение экспонециально убывает при t *стремящемся к* $+\infty$.

Список литературы

1. М. Падула, В. А. Солонников, *О задаче магнитной гидродинамики со свободной границей.* — Зап. Научн. сем. ПОМИ, **385**, (2010), 135–186.
2. В. А. Солонников, Е. В. Фролова, *Разрешимость задачи магнитной гидродинамики со свободной границей на бесконечном интервале времени.* — Зап. Научн. сем. ПОМИ **410** (2013), 131–167.
3. Е. В. Фролова, *О задачах со свободной границей в магнитогидродинамике.* — Зап. Научн. сем. ПОМИ **425** (2014), 149–178,
4. E. V. Frolova, Y. Shibata, *On the maximal* $L_p - L_q$ *regularity theorem for the linearized electro-magnetic field equations with interface conditions.* — J. Math. Sci. **260**, No. 1 (2022), 87–117.
5. E. V. Frolova, Y. Shibata, *Local Well-Posedness for the Magnetohydrodynamics in the Different Two Liquids Case.* — Mathematics **10** (2022), 4751.
6. P. Kacprzyk, *Local existence of solutions of the free boundary problem for the equations of a magnetohydrodynamic incompressible fluid.* — Appl. Math. 30, No. 4 (2003), 461–488.
7. Y. Shibata, W. Zajaczkowski, *On local solutions to a free boundary problem for incompressible viscous magnetohydrodynamics in the* L_p*-approach.* — Diss. Math. **566** (2021), 1–102.
8. И. В. Денисова, В. А. Солонников, *Движение капли в несжимаемой жидкости.* Изд. Лань (2020).
9. I. V. Denisova, V. A. Solonnikov, L_2*-theory for two incompressible fluids separated by a free interface.*— Topol. Methods Nonlinear Anal. **52** (2018), 213–238.
10. J. Pruss, G. Simonett, *On the two-phase Navier-Stokes equations with surface tension.* — Interfaces Free Bound. **12**, No. 3 (2010), 311–345.

11. J. Pruss, G. Simonett. *Moving interfaces and quasilinear parabolic evolution equations.* — V.105 of Monographs in Mathematics, Birkhauser, 2016.
12. S. Shimizu, *Local solvability of free boundary problems for the two-phase Navier–Stokes equations with surface tension in the whole space.* — Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **80** (2011), 647–686.
13. M. Padula, V. A. Solonnikov, *On the local solvability of free boundary problem for the Navier–Stokes equations.* — Problemy Math. Analiza **50** (2010), 87–133.
14. Е. В. Фролова, *Линеаризация задачи магнитной гидродинамики со свободной границей.* — ПМА, **95** (2018), 69–78.
15. В. А. Солонников, *On the stability of uniformly rotating liquid in weak magnetic field .* — ПМА **57** (2011), 165–191.
16. В. А. Солонников, *On the Linear problem arising in the study of a free boundary problem for the Navier-Stokes equations.* — Алгебра и Анализ **22**, No. 6 (2010), 235–269.
17. S. Mosconi, V. A. Solonnikov, *On a problem of magnetohydrodinamics in a multi-connected domain.* — Nonlinear analysis, **74** No. 2 (2010), 462–478.

Frolova E. V. Global solvability of the free boundary magnetohydrodynamics problem for two fluids.

We consuder the problem of magnetohydrodynamics for two viscous incompressible fluids separated by a free surface. It is assumed that the initial position of the free bounday is close to a sphere, the velocity fields of the fluids and the magnetic field are sufficiently small at the initial moment of time. The global solvability in the Sobolev–Slobodetsky spaces $W_2^{2+l,1+l/2}$, $1/2 < l < 1$ is proved. As $t \to +\infty$, the free boundary tends to a sphere of the same radius, the solution decreases exponentially.

С.-Петербургский
государственный электротехнический
университет ("ЛЭТИ"),
Проф. Попова 5,
Санкт-Петербург 197022;
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: elenafr@mail.ru

Поступило 1 мая 2026 г.