

Е. Ю. Панов

О ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ С КОСОСИММЕТРИЧНЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, A_0 – кососимметричный линейный оператор на H с плотной областью определения $X_0 = D(A_0) \subset H$. Кососимметричность оператора A_0 означает, что $(A_0 u, v) = -(u, A_0 v) \forall u, v \in X_0$, где (\cdot, \cdot) обозначает скалярное умножение на H . Условие кососимметричности эквивалентно соотношению $-A_0 \subset (A_0)^*$, где $(A_0)^*$ – сопряжённый оператор. Из этого соотношения, с учётом замкнутости сопряжённого оператора, следует существование замыкания A оператора A_0 . Оператор A является замкнутым кососимметричным оператором, при этом $A^* = (A_0)^*$. Следует отметить, что из тождества $2((A_0 u, v) + (u, A_0 v)) = (A_0(u+v), u+v) - (A_0(u-v), u-v)$ следует, что требование кососимметричности эквивалентно условию $(A_0 u, u) = 0 \forall u \in X_0$.

Оператор A^* является расширением оператора $-A$ и, в общем случае, не является кососимметричным. Последнее верно лишь в случае $A^* = -A$, то есть, когда оператор A – косопряжённый.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$u' - A^* u = 0, \quad u = u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

где $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, снабжённое начальным условием

$$u(0) = u_0 \in H. \quad (1.2)$$

Определение 1.1. Функция $u = u(t) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, H)$ называется обобщённым решением (о.р.) задачи (1.1), (1.2), если $\forall f(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+, X_0)$,

Ключевые слова: кососимметричные операторы, эволюционные уравнения, задача Коши, обобщённые решения, энергетическое неравенство, транспортные уравнения, линеаризованные уравнения Эйлера.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

где пространство X_0 нормировано нормой графика $\|u\|^2 = \|u\|_H^2 + \|A_0u\|_H^2$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} (u(t), f'(t) + A_0f(t))dt + (u_0, f(0)) = 0. \quad (1.3)$$

Замечание 1.1. 1) Из соотношения (1.3) при $f(t) = v\varphi(t)$, где $\varphi(t) \in C_0^1((0, +\infty))$, $v \in X_0$, следует, что $\frac{d}{dt}(u(t), v) = (u(t), Av)$ в $\mathcal{D}'((0, +\infty))$, где $\mathcal{D}'(I)$ обозначает пространство распределений на открытом множестве I . Из этого соотношения легко следует слабая непрерывность $u(t)$ (после возможного исправления на множестве нулевой меры). Нетрудно видеть, что из (1.3) следует и начальное условие (1.2), понимаемое в смысле слабой сходимости $u(t) \rightharpoonup u_0$ при $t \rightarrow 0+$;

2) Пусть $X = D(A)$ – область определения оператора A , снабжённая нормой графика $\|u\|^2 = \|u\|_H^2 + \|A(u)\|_H^2$, X является банаховым пространством ввиду замкнутости оператора A . Из условия, что оператор A является замыканием A_0 следует плотность X_0 как в H , так и в X , откуда в свою очередь вытекает плотность $C_0^1(\mathbb{R}_+, X_0)$ в $C_0^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, X)$. Аппроксимируя пробную функцию $f(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, X)$ последовательностью $f_r(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+, X_0)$, $r \in \mathbb{N}$, так что при $r \rightarrow \infty$ справедливы равномерные по t сходимости $f_r(t) \rightarrow f(t)$, $f_r'(t) \rightarrow f'(t)$, $A_0f_r(t) \rightarrow Af(t)$ в H , получим из соотношения (1.3) с пробными функциями $f = f_r$ в пределе при $r \rightarrow \infty$ соотношение

$$\int_{\mathbb{R}_+} (u(t), f'(t) + Af(t))dt + (u_0, f(0)) = 0$$

при всех $f(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, X)$. Поскольку

$$C_0^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, X) \supset C_0^1(\mathbb{R}_+, X),$$

то в определении 1.1 можно заменить A_0, X_0 на A, X . Тем самым, можно было изначально предполагать, что $A_0 = A$ – замкнутый кососимметричный оператор.

§2. СЖИМАЮЩИЕ ПОЛУГРУППЫ ОБОБЩЁННЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим C_0 -полугруппу $T_t = e^{tB}$ ограниченных линейных операторов в H , порождённую инфинитезимальным генератором B . Известно, что B – плотно определённый замкнутый оператор в H . Его

область определения $D(B)$ является банаховым пространством относительно нормы графика. Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Функции $u(t) = e^{tB}u_0$ являются о.р. задачи (1.1), (1.2) при всех $u_0 \in H$ тогда и только тогда, когда $B \subset A^*$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $B \subset A^*$ и $u_0 \in D(B)$. Тогда $u(t) = e^{tB}u_0 \in C(\mathbb{R}_+, D(B)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H)$ и $u'(t) = T_t B u_0 = B T_t u_0 = B u(t)$. Поэтому, при всех $f(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+, X_0)$ существует непрерывная производная

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), f(t)) &= (u'(t), f(t)) + (u(t), f'(t)) \\ &= (B u(t), f(t)) + (u(t), f'(t)). \end{aligned} \quad (2.1)$$

По условию $B \subset A^*$ и значит.

$$(B u(t), f(t)) = (A^* u(t), f(t)) = (u(t), A f(t)) = (u(t), A_0 f(t)).$$

Из (2.1) тогда следует равенство

$$\frac{d}{dt}(u(t), f(t)) = (u(t), A_0 f(t) + f'(t)),$$

интегрируя которое, получим соотношение

$$\int_{\mathbb{R}_+} (u(t), f'(t) + A_0 f(t)) dt = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{d}{dt}(u(t), f(t)) dt = -(u_0, f(0)).$$

Итак, тождество (1.3) выполнено и $u(t)$ – о.р. задачи (1.1), (1.2). В случае произвольного $u_0 \in H$ рассмотрим последовательность $u_{0k} \in D(B)$, сходящуюся при $k \rightarrow \infty$ к u_0 в H . Как уже установлено, функции $u_k(t) = T_t u_{0k}$ являются о.р. задачи (1.1), (1.2) с начальными данными u_{0k} при всех $k \in \mathbb{N}$ и

$$\|u_k(t) - u(t)\|_H \leq \|T_t\| \|u_{0k} - u_0\|_H \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

равномерно на любом временном отрезке $[0, T]$, где мы учитываем известную для C_0 -полугрупп оценку $\|T_t\| \leq C e^{\alpha t}$, с постоянными $C > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в тождестве (1.3)

$$\int_{\mathbb{R}_+} (u_k(t), f'(t) + A_0 f(t)) dt + (u_{0k}, f(0)) = 0,$$

получим, что для всех пробных функций $f(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+, X_0)$

$$\int_{\mathbb{R}_+} (u(t), f'(t) + A_0 f(t)) dt + (u_0, f(0)) = 0.$$

Итак, $u(t)$ – о.р. задачи (1.1), (1.2), что и требовалось доказать.

Обратно, предположим что функции $u(t) = T_t u_0$ являются о.р. задачи (1.1), (1.2) при всех $u_0 \in H$. Если $u_0 \in D(B)$, то $u(t) = T_t u_0 \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$ и $u'(0) = B u_0$. Следовательно, при всех $v \in D(A_0)$ скалярная функция

$$I(t) = (u(t), v) \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad I'(0) = (B u_0, v).$$

С другой стороны, при всех $h(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+)$

$$\int_{\mathbb{R}_+} I(t) h'(t) dt = \int_{\mathbb{R}_+} (u(t), v h'(t)) dt = -h(0)(u_0, v) - \int_{\mathbb{R}_+} (u(t), A_0 v) h(t) dt$$

ввиду равенства (1.3) с $f = h(t)v$. Из формулы интегрирования по частям тогда следует, что

$$\int_{\mathbb{R}_+} I'(t) h(t) dt = \int_{\mathbb{R}_+} (u(t), A_0 v) h(t) dt$$

и ввиду произвольности $h(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+)$ получаем равенство $I'(t) = (u(t), A_0 v)$. В частности, $(u_0, A_0 v) = I'(0+) = (B u_0, v)$. Поскольку тождество $(u_0, A_0 v) = (B u_0, v)$ справедливо при всех $v \in D(A_0)$, то по определению сопряжённого оператора $A^* = (A_0)^*$ верно включение $u_0 \in D(A^*)$ и равенство $A^* u_0 = B u_0$. Итак, $B \subset A^*$, что и требовалось установить. \square

По теореме Люмера–Филлипса (см., например, [15, Theorem 1.1.3]) полугруппа $T_t = e^{tB}$ является сжимающей (то есть $\|T_t\| \leq 1 \forall t > 0$) тогда и только тогда, когда её генератор B является m -диссипативным оператором. Напомним, что оператор A в банаховом пространстве H называется диссипативным, если $\|u - hAu\| \geq \|u\|$ при всех $u \in D(A)$ и всех $h > 0$. Диссипативный оператор называется m -диссипативным, если операторы $E - hA$ сюръективны при всех $h > 0$ (достаточно, чтобы это свойство выполнялось при одном $h > 0$). Известно, что m -диссипативный оператор является максимальным диссипативным оператором (то есть, этот оператор не имеет собственных диссипативных расширений). В случае гильбертова пространства H диссипативность

оператора A эквивалентна условию $(Au, u) \leq 0 \forall u \in D(A)$. В частности, кососимметричные операторы диссипативны.

Следующее свойство означает, что требование $B \subset A^*$ из теоремы 2.1 для m -диссипативного оператора эквивалентно условию, что B – расширение оператора $-A$.

Лемма 2.1. Пусть B – m -диссипативный оператор на H . Тогда $B \subset A^* \Leftrightarrow -A \subset B$.

Доказательство. Пусть $B \subset A^*$. Так как также $-A \subset A^*$, то $-Au = Bu = A^*u$ на $D(A) \cap D(B)$. Это позволяет определить общее для $-A$ и B расширение \tilde{B} , заданное на $D(A) + D(B)$ равенством

$$\tilde{B}u = -Au_1 + Bu_2, \quad u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in D(A), u_2 \in D(B).$$

Ввиду совпадения операторов $-A$ и B на общей области определения $D(A) \cap D(B)$, определение оператора \tilde{B} корректно и не зависит от представления $u = u_1 + u_2$. По построению $-A \subset \tilde{B}$, $B \subset \tilde{B}$. Покажем, что оператор \tilde{B} диссипативен. Возьмём произвольное $u \in D(A) + D(B)$. Тогда найдутся такие $u_1 \in D(A)$, $u_2 \in D(B)$, что $u = u_1 + u_2$ и

$$\begin{aligned} (\tilde{B}u, u) &= (-Au_1 + Bu_2, u_1 + u_2) \\ &= -(Au_1, u_1) + (Bu_2, u_2) + ((u_1, Bu_2) - (Au_1, u_2)) \\ &= (Bu_2, u_2) + ((u_1, A^*u_2) - (Au_1, u_2)) = (Bu_2, u_2) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

ввиду диссипативности оператора B . Мы также учли, что $(Au_1, u_1) = 0$ по кососимметричности оператора A и что $B \subset A^*$. Из (2.2) следует, что оператор \tilde{B} диссипативен. Но оператор B является максимальным диссипативным оператором, ввиду его m -диссипативности. Поэтому $\tilde{B} = B$ и значит $D(A) + D(B) = D(B)$, то есть $D(A) \subset D(B)$. Это доказывает, что $-A \subset B$.

Обратно, предположим, что $-A \subset B$. Пусть $u \in D(A)$, $v \in D(B)$. Тогда $u + sv \in D(B)$ при всех $s \in \mathbb{R}$ и в силу диссипативности B верно неравенство $f(s) \doteq (B(u + sv), u + sv) \leq 0$ при всех вещественных s . Функция $f(s)$ квадратична и расписывается в виде

$$\begin{aligned} f(s) &= (Bu, u) + s((Bu, v) + (Bv, u)) + s^2(Bv, v) = \\ &= s((Bu, v) + (Bv, u)) + s^2(Bv, v), \end{aligned} \quad (2.3)$$

так как по условию $-A \subset B$ верно равенство $(Bu, u) = -(Au, u) = 0$. Заметим также, что $(Bv, v) \leq 0$. Из представления (2.3) и условия

$f(s) \leq 0 \forall s \in \mathbb{R}$ следует, что $(Bu, v) + (Bv, u) = 0$. Мы установили, что для всех $v \in D(B)$ $u \in D(A)$ выполнено тождество

$$(Au, v) = -(Bu, v) = (Bv, u) = (u, Bv),$$

из которого следует, что $v \in D(A^*)$ и $A^*v = Bv$ при всех $v \in D(B)$. Это означает, что $B \subset A^*$. Лемма доказана. \square

Заметим, что импликация $-A \subset B \Rightarrow B \subset A^*$ доказана также в [15, Лемма 1.1.5].

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ввиду теоремы 2.1 и леммы 2.1 генераторы сжимающих полугрупп обобщенных решений уравнения (1.1) это в точности m -диссипативные расширения оператора $-A$. Покажем, что такое расширение всегда существует. Опишем сначала кососимметричные расширения. Кососимметричные расширения оператора A сводятся к симметричным расширениям оператора iA , теория которых хорошо известна и основана на использовании преобразования Кэли. Для кососимметричных операторов A преобразование Кэли $Q = (E + A)(E - A)^{-1}$ даже более естественно. Оператор Q изометрично отображает подпространство $H_- = \text{Im}(E - A)$ на подпространство $H_+ = \text{Im}(E + A)$ (заметим, что подпространства H_{\pm} замкнуты в силу замкнутости оператора A). Преобразование Кэли обратимо, обратное преобразование определено равенством $A = (Q - E)(Q + E)^{-1}$ (при условии плотности $D(A) = \text{Im}(Q + E)$ оператор $Q + E$ обратим). Таким образом, кососимметричные расширения оператора A соответствуют изометричным расширениям оператора Q , построение которых сводится к нахождению частичных изометрий из $(H_-)^{\perp}$ в $(H_+)^{\perp}$. Напомним, что гильбертовы размерности этих пространств (иначе – коразмерности подпространств H_{\pm}) называются индексами дефекта кососимметричного оператора A . Будем обозначать их, соответственно, d_{\pm} . Максимальные кососимметричные операторы характеризуются условием равенства нулю одного из индексов дефекта. Условие $d_- = d_+ = 0$ характеризует кососопряжённые операторы, преобразование Кэли которых ортогонально. Ясно, что кососимметричный оператор A допускает максимальное кососимметричное расширение \tilde{A} . Пусть $d_{\pm} = \text{codim Im}(E \pm \tilde{A})$ – индексы дефекта \tilde{A} . В силу максимальной по крайней мере один из этих индексов нулевой. Если $d_+ = 0$, то $\text{Im}(E + \tilde{A}) = H$ и значит оператор $-\tilde{A}$ – m -диссипативен. Положим в этом случае $B = -\tilde{A}$.

Аналогично, в случае $d_- = 0$ оператор \tilde{A} является m -диссипативным. Известно (см., например, [15, Theorem 1.1.2]), что сопряжённый оператор $(\tilde{A})^*$ также является m -диссипативным. Заметим также, что $-A \subset -\tilde{A} \subset (\tilde{A})^*$ ввиду кососимметричности \tilde{A} . Полагая $B = (\tilde{A})^*$ получаем m -диссипативное продолжение оператора $-A$ и в случае $d_- = 0$. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 3.1. *Существует сжимающая полугруппа $u(t) = e^{tB}u_0$ о.р. уравнения (1.1) такая, что возможны следующие два случая:*

- 1) *генератор B кососимметричен. В этом случае, операторы $T_t = e^{tB}$ – изометрические вложения и выполнено энергетическое равенство $\|u(t)\| = \|u_0\|$, $t > 0$;*
- 2) *оператор B^* кососимметричен. Тогда сопряжённые операторы $(T_t)^*$ являются изометрическими вложениями.*

Заметим, что в работе Филлипса [15] существование m -диссипативного продолжения оператора A доказано другим способом, с помощью преобразования Кэли диссипативных операторов.

Верно следующее свойство единственности полугруппы о.р.

Теорема 3.2. *Сжимающая полугруппа о.р. уравнения (1.1) единственна тогда и только тогда, когда кососимметричный оператор A максимален*

Доказательство. Пусть кососимметричный оператор A максимален и d_{\pm} – его индексы дефекта. Если $u(t) = e^{tB}u_0$ – сжимающая полугруппа о.р., то её инфинитезимальный генератор B m -диссипативен и по Теореме 2.1 и Лемме 2.1 $-A \subset B \subset A^*$. Выше было показано, что один из операторов $-A$, A^* является m -диссипативным, $-A$ в случае $d_+ = 0$ и A^* при $d_- = 0$. Так как B тоже является m -диссипативным оператором, а такие операторы максимальны среди диссипативных операторов, заключаем, что $B = -A$ при $d_+ = 0$, $B = A^*$ при $d_- = 0$ (в случае $d_+ = d_- = 0$ верно равенство $B = -A = A^*$). Итак, оператор B определён однозначно, значит, единственна и соответствующая полугруппа.

Обратно, если оператор A не максимален, то оба его индекса дефекта не нулевые. Легко видеть, что тогда существуют разные максимальные кососимметричные расширения A_1, A_2 оператора A с одинаковыми индексами дефекта d_{\pm} . Соответствующие m -диссипативные операторы

$B_1 = \begin{cases} -\tilde{A}_1 & , \quad d_+ = 0, \\ (\tilde{A}_1)^* & , \quad d_- = 0, \end{cases} \quad B_2 = \begin{cases} -\tilde{A}_2 & , \quad d_+ = 0, \\ (\tilde{A}_2)^* & , \quad d_- = 0 \end{cases}$ различны и порождают различные сжимающие полугруппы о.р. \square

Теперь мы готовы сформулировать условие единственности о.р. задачи (1.1), (1.2).

Теорема 3.3. *О.р. задачи Коши (1.1), (1.2) единственно тогда и только тогда, когда индекс дефекта d_- кососимметричного оператора A равен нулю.*

Доказательство. Пусть о.р. задачи (1.1), (1.2) единственно. Покажем, что индекс дефекта d_- оператора A нулевой. Предполагая противное $d_- > 0$, получим, что замкнутое подпространство $\text{Im}(E - A)$ отлично от H . Тогда $\ker(E - A^*) = (\text{Im}(E - A))^\perp \neq \{0\}$ и значит найдётся ненулевой вектор $u_0 \in D(A^*)$, такой что $A^*u_0 = u_0$. Функция $u = e^t u_0$ будет тогда о.р. задачи (1.1), (1.2), отличным от полугруппового о.р. $T_t u_0$ (существующего по Теореме 3.1), так как последнее ограничено. Заметим, что при всех $t_0 \geq 0$ функции

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} e^t u_0, & , \quad 0 \leq t \leq t_0, \\ e^{t_0} T_{t-t_0} u_0 & , \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

являются попарно различными ограниченными о.р. задачи (1.1), (1.2) и мы приходим к противоречию даже с условием единственности ограниченного (!) о.р.. Итак, $d_- = 0$.

Обратно, предположим, что $d_- = 0$. Пусть $u(t)$ — о.р. задачи (1.1), (1.2) с нулевыми начальными данными. Ввиду линейности задачи, достаточно доказать, что $u(t) \equiv 0$. Так как $d_- = 0$, то для оператора $-A$ индекс $d_+ = 0$ и в соответствии с доказательством Теоремы 3.1 оператор A порождает полугруппу $u = e^{tA} u_0$ о.р. уравнения $u' + A^*u = 0$ (тогда $u = e^{-tA} u_0$, $t < 0$, задаёт полугруппу о.р. обратной задачи Коши для исходного уравнения). Пусть $v_0 \in D(A)$ и $v(t) = e^{(t_0-t)A} v_0$, $t \leq t_0$. Тогда $v(t) \in C^1([0, t_0], H) \cap C([0, t_0], D(A))$ и $v'(t) = -Av(t)$. Выберем функцию $\beta(s) \in C_0(\mathbb{R})$ так, что $\text{supp } \beta(s) \subset [-1, 0]$, $\beta(s) \geq 0$, $\int \beta(s) ds = 1$ и положим при $\nu \in \mathbb{N}$ $\beta_\nu(s) = \nu \beta(\nu s)$,

$$\theta_\nu(t) = \int_t^{+\infty} \beta_\nu(s) ds. \text{ Ясно, что } \beta_\nu(s) \in C_0^1(\mathbb{R}), \text{ supp } \beta_\nu(s) \subset [-1/\nu, 0],$$

$\beta_\nu(s) \geq 0$, $\int \beta_\nu(s) ds = 1$. Поэтому, последовательность $\beta_\nu(s)$ сходится при $\nu \rightarrow \infty$ к δ -мере Дирака в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а последовательность $\theta_\nu(t) \in C^1(\mathbb{R})$ состоит из убывающих функций, $\theta_\nu(t) = 1$ при $t \leq -1/\nu$, $\theta_\nu(t) = 0$ при $t \geq 0$ и эта последовательность сходится поточечно к функции $\theta(-t)$, где $\theta(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ 1, & s > 0. \end{cases}$ – функция Хевисайда. Функция $f(t) = \theta_\nu(t - t_0)v(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, D(A))$ (мы полагаем $f(t) = 0$ при $t > t_0$) является законной пробной функцией в соотношении (1.3) для о.р. $u(t)$. Расписывая это соотношение с учетом равенства $f'(t) = \theta_\nu(t - t_0)v'(t) - \beta_\nu(t - t_0)v(t) = -Af(t) - \beta_\nu(t - t_0)v(t)$, получим равенство

$$-\int (u(t), v(t))\beta_\nu(t - t_0)dt = 0,$$

из которого в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ с учётом непрерывности $(u(t), v(t))$ (напомним, что функция $v(t)$ непрерывна, а $u(t)$ слабо непрерывна по Замечанию 1.1(1)), получим равенство $(u(t_0), v(t_0)) = 0$. Так как $v(t_0) = v_0 \in D(A)$ произвольно, а $D(A)$ плотно в H , заключаем, что $u(t_0) = 0 \forall t_0 > 0$. Итак, $u(t) \equiv 0$, что и требовалось доказать. \square

Можно рассматривать и обратную задачу Коши для уравнения (1.1), определённого при $t < T$ с начальным условием $u(T, x) = u_T(x)$. С помощью замены $t \rightarrow T - t$ эта задача сводится к прямой задаче Коши (1.1), (1.2) для уравнения $u' + A^*u = 0$, соответствующего оператору $-A$. Так как $d_-(-A) = d_+(A)$, справедлив следующий результат:

Следствие 3.1. *Единственность о.р. прямой и обратной задач (1.1), (1.2) эквивалентна кососопряжённости оператора A .*

Заметим, что для решений $u = \tilde{u}(t)$, построенных в ходе доказательства теоремы 3.3, нарушено энергетическое неравенство

$$\forall t > 0 \quad E(t) \doteq \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 \leq E(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2. \quad (3.1)$$

Ясно, что для полугрупповых о.р. энергия $E(t)$ убывает и свойство (3.1) выполнено. Оказывается, в случае максимального кососимметричного оператора A в классе о.р., удовлетворяющих энергетическому неравенству (3.1) выполнено свойство единственности. Точнее, справедливо следующее утверждение

Теорема 3.4. *Единственность удовлетворяющего неравенству (3.1) о.р. задачи (1.1), (1.2), с произвольными начальными данными $u_0 \in H$, эквивалентна максимальной кососимметричности оператора A .*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.2 условие максимальной операторности A необходимо для единственности о.р., удовлетворяющего (3.1). Докажем достаточность этого условия. Итак, предположим, что кососимметричный оператор A максимален. Тогда по крайней мере один из его индексов дефекта d_{\pm} нулевой. Если $d_- = 0$, то по Теореме 3.3 единственность верна даже в более широком классе всех о.р.. Осталось рассмотреть случай $d_+ = 0$. В этом случае оператор $-A$ m -диссипативен и порождает сжимающую полугруппу о.р. $u = e^{-tA}u_0$ задачи (1.1), (1.2). Пусть теперь $u(t)$ — о.р. задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющее (3.1), $v \in D(A)$, $t_0 > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$. Выберем пробную функцию $f(t) = \theta_{\nu}(t - t_0)v(t)$, где $v(t) = e^{-tA}v$, а последовательность $\theta_{\nu} = \int_t^{+\infty} \beta_{\nu}(s)ds$ определена в ходе доказательства теоремы 3.3. Тогда $f(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, D(A))$, $f'(t) + Af(t) = -\beta_{\nu}(t - t_0)v(t)$ и $f(0) = v$ при $1/\nu < t_0$. Из соотношения (1.3) с учётом Замечания 1.1(2) следует, что при достаточно больших $\nu \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}_+} (u(t), v(t))\beta_{\nu}(t - t_0)dt = (u_0, v),$$

откуда в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ вытекает равенство $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v)$. Так как $D(A)$ плотно в H , а $v(t_0) = e^{-t_0A}v$ непрерывно зависит от v , мы можем перейти к пределу при $v \rightarrow u_0$ в полученном равенстве. В результате выводим (с учётом произвольности $t_0 > 0$), что $(u(t), \tilde{u}(t)) = \|u_0\|^2$, где $\tilde{u}(t) = e^{-tA}u_0$. Используя энергетическое неравенство (3.1), выводим соотношение

$$\|u_0\|^2 = (u(t), \tilde{u}(t)) \leq \|u(t)\| \cdot \|\tilde{u}(t)\| \leq \|u_0\| \cdot \|u_0\| = \|u_0\|^2,$$

из которого следуют равенства

$$\|u(t)\| = \|\tilde{u}(t)\| = \|u_0\|, \quad (u(t), \tilde{u}(t)) = \|u(t)\| \cdot \|\tilde{u}(t)\|.$$

Очевидно, эти равенства возможны лишь в случае, когда $u(t) = \tilde{u}(t) = e^{-tA}u_0$. Тем самым, о.р. задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющее условию (3.1) единственно. \square

Замечание 3.1. Из теоремы 3.4 следует, что для максимального кососимметричного оператора A любое о.р. задачи (1.1), (1.2), (3.1) является полугрупповым. В случае, когда кососимметричный оператор A не максимален, это уже не так: могут существовать удовлетворяющие энергетическому неравенству о.р., не являющиеся полугрупповыми. Подтвердим это следующим простым примером. Пусть $H = L^2([0, 1])$, $Au = u'$, $u \in D(A) = \{u = u(x) \in W_2^1([0, 1]), u(1) = u(0) = 0\}$. Ясно, что A – замкнутый кососимметричный оператор с индексами дефекта $d_{\pm} = 1$. Существуют два кососопряжённых расширения этого оператора $A_1u = A_2u = u'$, заданные, соответственно, на $D(A_1) = \{u = u(x) \in W_2^1([0, 1]), u(1) = u(0)\}$, $D(A_2) = \{u = u(x) \in W_2^1([0, 1]), u(1) = -u(0)\}$. Нетрудно проверить, что соответствующие ортогональные полугруппы (группы) имеют вид

$$e^{-tA_1}u(x) = u_p(x-t), \quad e^{-tA_2}u(x) = u_{ap}(x-t),$$

где функции $u_p(x)$, $u_{ap}(x)$ это периодическое и, соответственно, антипериодическое расширение функции $u(x) \in L^2([0, 1])$ на всю вещественную ось: $u_p(x+1) = u_p(x)$, $u_{ap}(x+1) = -u_{ap}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть $u_0 = u_0(x) \in H$, $u_0 \neq 0$. Тогда функции $u_1(t) = e^{-tA_1}u_0$, $u_2(t) = e^{-tA_2}u_0$ являются полугрупповыми о.р. задачи (1.1), (1.2), для которых условие (3.1) выполнено со знаком равенства: $\|u_1(t)\| = \|u_2(t)\| = \|u_0\|$.
Функция

$$u(t) = \frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t)) = (u_{0p}(x-t) + u_{0ap}(x-t))/2$$

является о.р. той же задачи и также удовлетворяет энергетическому неравенству (3.1), так как

$$\|u(t)\| \leq \frac{1}{2}(\|u_1(t)\| + \|u_2(t)\|) = \|u_0\|.$$

Очевидно, функция $u(t)$ является 2-периодической и $u(2k+1) = u(1) = (u_0(x) - u_0(x))/2 = 0$, $u(2k) = u(0) = u_0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Предполагая, что $u(t) = T_t u_0$ – полугрупповое решение, $T_t = e^{tB}$, получим равенство $u_0 = T_2 u_0 = T_1(T_1 u_0) = T_1 u(1) = T_1 0 = 0$, что противоречит условию $u_0 \neq 0$. Итак, $u(t)$ – удовлетворяющее энергетическому неравенству о.р., не являющееся полугрупповым.

§4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

4.1. Транспортное уравнение. Пусть $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x)) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ – соленоидальный вектор в \mathbb{R}^n , то есть,

$$\operatorname{div} a(x) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (4.1)$$

Рассмотрим транспортное уравнение (уравнение неразрывности)

$$u_t + \operatorname{div}_x(au) = 0, \quad (4.2)$$

$u = u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Понятие о.р.

$$u(t, x) \in L^2_{loc}([0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^n))$$

задачи Коши для уравнения (4.2) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (4.3)$$

определяется в смысле стандартного интегрального тождества (4.4) ниже.

Определение 4.1. Функция $u = u(t, x) \in L^\infty_{loc}([0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^n))$ называется о.р. задачи (4.2), (4.3), если при всех $f = f(t, x) \in C^1_0(\Pi)$

$$\int_{\Pi} u[f_t + a \cdot \nabla_x f] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) f(0, x) dx = 0. \quad (4.4)$$

В тождестве (4.4) используется обозначение $v \cdot w$ для скалярного произведения векторов $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим вещественное гильбертово пространство $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ и определим линейный неограниченный оператор на H с областью определения $D(A_0) = C^1_0(\mathbb{R}^n) \subset H$, задаваемый равенством

$$A_0 u = a(x) \cdot \nabla u(x).$$

Этот оператор кососимметричен. Действительно, при $u, v \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (A_0 u, v)_H + (u, A_0 v)_H &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x) \cdot (v(x) \nabla u(x) + u(x) \nabla v(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x) \cdot \nabla (u(x) v(x)) dx = 0 \end{aligned}$$

ввиду условия соленоидальности (4.1). Как видно из определений 1.1, 4.1, понятие о.р. задачи (4.2), (4.3) согласуется с теорией о.р. абстрактной задачи (1.1), (1.2).

Покажем, что в случае липшицевых коэффициентов $a_i(x)$, $i=1, \dots, n$, замыкание A оператора A_0 является кососопряжённым оператором. Итак, предположим, что для некоторой константы $m > 0$

$$|a(x) - a(y)| \leq m|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.5)$$

Здесь и всюду ниже мы используем обозначение $|z|$ для евклидовой нормы конечномерного вектора, включая модуль числа. Из условия Липшица (4.5) следует, что обобщённые производные $(a_i)_{x_j}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ при всех $i, j = 1, \dots, n$. В этом случае, решения задачи (4.2), (4.3) находятся с помощью метода характеристик. Характеристики уравнения (4.2) это интегральные кривые $(t, x(t))$ характеристической системы ОДУ

$$\dot{x} = a(x). \quad (4.6)$$

Из липшицевости коэффициентов следует существование и единственность решений задачи Коши для системы (4.6). Кроме того, из условия Липшица следует, что вектор $a(x)$ имеет не более чем линейный рост на бесконечности:

$$|a(x)| \leq c(1 + |x|), \quad c = \text{const} \quad (4.7)$$

Поэтому, решения $x(t)$ системы (4.6) не могут уйти на бесконечность за конечное время и значит определены при всех $t \in \mathbb{R}$. Обозначим $x(t; t_0, x_0)$ – единственное решение системы (4.6), удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$ и положим $y(t_0, x_0) = x(0; t_0, x_0)$. Из условия $\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = (u_t + a \cdot \nabla_x u)(t, x(t)) = 0$ следует равенство $u(t, x) = u_0(y(t, x))$. По теореме Лиувилля диффеоморфизмы $x \rightarrow y(t, x)$ сохраняют меру Лебега на \mathbb{R}^n , откуда следует, что операторы $T_t(u_0) = u_0(y(t, x))$ – ортогональные операторы в $H = L^2(\mathbb{R}^n)$. Очевидно также, что выполнено групповое свойство $T_{t+s} = T_t T_s$, $t, s \in \mathbb{R}$, и свойство непрерывности $T_t u_0 \rightarrow u_0$ в H при $t \rightarrow 0$. Таким образом, $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ – ортогональная C_0 -группа и по теореме Стоуна (см., например, [8, глава IX], [9, теорема 4.7] $T_t = e^{tB}$, где инфинитезимальный генератор B – кососопряжённый оператор. Ниже будет установлено, что на самом деле $B = -A$.

Нам понадобятся некоторые оценки решений стационарного уравнения

$$\phi + ha \cdot \nabla \phi = \psi, \quad (4.8)$$

где $h > 0$. Пусть $M(x) = \|Da(x)\|$ – операторная норма $n \times n$ матрицы $Da(x) = \left(\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$. Из условия (4.5) легко следует, что $M(x) \leq m$. Справедлива следующая

Лемма 4.1. Пусть $\psi(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ и $0 < h < 1/m$. Тогда найдётся решение $\phi(x) \in W_\infty^1(\mathbb{R}^n)$ уравнения (4.8), такое что

$$|\phi(x)| \leq c_1(1 + |x|)^{-\alpha/h}, \quad |\nabla\phi(x)| \leq c_2(1 + |x|)^{-\alpha(1/h-m)}, \quad (4.9)$$

c_1, c_2 и α – положительные постоянные, причём $\alpha = 1/c$, где $c > 0$ – константа из условия (4.7).

Доказательство. На характеристике $x = x(t)$ уравнение (4.8) превращается в ОДУ $\phi + h\phi' = \psi$, где $\phi = \phi(x(t))$, $\psi = \psi(x(t))$. Частным решением этого уравнения является функция

$$\phi(t) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^t e^{(s-t)/h} \psi(x(s)) ds.$$

Выбирая $x = x(s; t, y)$, приходим к представлению

$$\phi(y) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^t e^{(s-t)/h} \psi(x(s; t, y)) ds = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^t e^{(s-t)/h} \psi(x(s-t; 0, y)) ds.$$

Сделав замену переменной $s - t \rightarrow s$, получим равенство

$$\phi(y) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^0 e^{s/h} \psi(x(s; 0, y)) ds. \quad (4.10)$$

Так как функция $\psi(x)$ ограничена и непрерывна, интеграл в (4.10) сходится равномерно по $y \in \mathbb{R}^n$, откуда следует непрерывность $\phi(y)$. Выберем $r > 0$ так, чтобы носитель $\text{supp } \psi(x)$ содержался в шаре $|x| \leq r$. Пусть $|y| > r$ и $x(s) = x(s; 0, y)$. Так как $x'(s) = a(x(s))$, то, с учётом оценки (4.7),

$$\frac{d}{ds} |x(s)| \leq |a(x(s))| \leq c(1 + |x(s)|).$$

Поэтому, $\frac{d}{ds} \ln(1 + |x(s)|) \leq c$ и после интегрирования по отрезку $[s, 0]$ приходим к неравенству

$$\ln \left(\frac{1 + |y|}{1 + |x(s)|} \right) \leq c|s| = -cs.$$

Следовательно, $|x(s)| > r$ при $s > s(y) \doteq -\frac{1}{c} \ln((1 + |y|)/(1 + r))$ и значит $\psi(x(s)) = 0$. Из представления (4.10) тогда следует, что

$$\begin{aligned} |\phi(y)| &= \left| \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{s(y)} e^{s/h} \psi(x(s; 0, y)) ds \right| \leq \frac{\|\psi\|_{\infty}}{h} \int_{-\infty}^{s(y)} e^{s/h} ds \\ &= \|\psi\|_{\infty} e^{s(y)/h} = c_1 (1 + |y|)^{-\alpha/h}, \end{aligned}$$

где $\alpha = 1/c$, $c_1 = \|\psi\|_{\infty} (1 + r)^{\alpha/h}$. Полученное неравенство остаётся верным и при $|y| \leq r$, так как тогда

$$|\phi(y)| \leq \frac{\|\psi\|_{\infty}}{h} \int_{-\infty}^0 e^{s/h} ds = \|\psi\|_{\infty} \leq c_1 (1 + |y|)^{-\alpha/h}.$$

Первая из оценок (4.9) доказана.

Заметим далее, что при $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, $s < 0$

$$\begin{aligned} |x(s; 0, y_2) - x(s; 0, y_1)| &\leq |y_2 - y_1| + \int_s^0 |x'(t; 0, y_2) - x'(t; 0, y_1)| dt \\ &= |y_2 - y_1| + \int_s^0 |a(x(t; 0, y_2)) - a(x(t; 0, y_1))| dt \\ &\leq |y_2 - y_1| + m \int_s^0 |x(t; 0, y_2) - x(t; 0, y_1)| dt. \end{aligned}$$

По лемме Гроуолла из этого соотношения следует оценка $|x(s; 0, y_2) - x(s; 0, y_1)| \leq |y_2 - y_1| e^{m|s|}$. Таким образом, отображение $y \rightarrow x(s; 0, y)$ непрерывно по Липшицу с константой $e^{m|s|}$ а значит имеет ограниченные обобщённые частные производные, причём операторная норма матрицы Якоби $X(s) = D_y x(s; 0, y)$ не превосходит $e^{m|s|}$: $\|X(s)\| \leq e^{m|s|}$. Тогда из равенства $\nabla_y \psi(x(s; 0, y)) = X(s)^{\top} \nabla_x \psi(x(s; 0, y))$ (справедливого при почти всех (s, y)) следует оценка

$$|\nabla_y \psi(x(s; 0, y))| \leq \|\nabla \psi\|_{\infty} e^{m|s|}. \quad (4.11)$$

Из представления (4.10) вытекает равенство: для п.в. $y \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla\phi(y) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^0 e^{s/h} \nabla_y \psi(x(s; 0, y)) ds. \quad (4.12)$$

Ввиду оценки (4.11) при $0 < h < 1/m$ интеграл в этом равенстве сходится равномерно по $y \in \mathbb{R}^n$. Как уже было установлено выше, при $|y| > r$, $0 > s > s(y) = -\frac{1}{c} \ln((1 + |y|)/(1 + r))$ (при $|y| \leq r$ можно положить $s(y) = 0$) функция $\psi(x(s; 0, y))$ равна нулю, значит, является нулевым и её градиент $\nabla_y \psi(x(s; 0, y))$. Следовательно,

$$\nabla\phi(y) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{s(y)} e^{s/h} \nabla_y \psi(x(s; 0, y)) ds,$$

откуда следует оценка

$$\begin{aligned} |\nabla\phi(y)| &\leq \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{s(y)} e^{s/h} |\nabla_y \psi(x(s; 0, y))| ds \leq \|\nabla\psi\|_{\infty} h^{-1} \int_{-\infty}^{s(y)} e^{(1/h-m)s} ds \\ &= \frac{\|\nabla\psi\|_{\infty}}{1-mh} e^{(1/h-m)s(y)} = c_2 (1 + |y|)^{-\alpha(1/h-m)}, \end{aligned}$$

где, как и выше, $\alpha = 1/c$, а константа $c_2 = \frac{\|\nabla\psi\|_{\infty}}{1-mh} (1+r)^{\alpha(1/h-m)}$, что доказывает вторую оценку в (4.9) (после замены y на x). Лемма доказана. \square

Покажем также, что финитные функции из пространства $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ лежат в области определения оператора A

Лемма 4.2. Пусть $u(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ – функция с компактным носителем. Тогда $u(x) \in D(A)$ и $Au = a(x) \cdot \nabla u(x)$.

Доказательство. Выберем последовательность $u_k(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ такую, что $u_k \rightarrow u$ при $k \rightarrow \infty$ в $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ и что носители $\text{supp } u_k$ содержатся в некотором общем шаре $|x| \leq R$. Например, можно взять последовательность средних функций $u_k(x) = k^n \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) \rho(ky) dy$ с ядром усреднения $\rho(z) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\rho(z) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) dz = 1$. Тогда $u_k \in D(A_0)$ и при $k \rightarrow \infty$

$$u_k \rightarrow u, \quad A_0 u_k = a(x) \cdot \nabla u_k(x) \rightarrow a(x) \cdot \nabla u(x) \quad \text{в } H,$$

где мы учитываем, что $|a(x)| \leq c(1+R)$ на шаре $|x| \leq R$ ввиду (4.7). Так как A – замыкание оператора A_0 , заключаем, что $u \in D(A)$ и $Au = a(x) \cdot \nabla u(x)$. Лемма доказана. \square

Теперь мы готовы доказать кососопряжённость оператора A .

Предложение 4.1. *Оператор A кососопряжён.*

Доказательство. Пусть $h > 0$ настолько мало, что $\alpha(1/h - m) > 1 + n/2$ и $\psi(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. По Лемме 4.1 существует функция $\phi(x) \in W_\infty^1(\mathbb{R}^n)$, которая является решением уравнения (4.8) и удовлетворяет оценкам (4.9). Покажем, что $\phi(x) \in D(A)$ и $\phi + hA\phi = \psi$. Прежде всего заметим, что $\alpha/h > 1 + n/2$ и, как следует из (4.9) и (4.7), $\phi(x), |a(x)|\phi(x) \in H = L^2(\mathbb{R}^n)$. Выберем такую функцию $\rho(y) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, что $\rho(y) \geq 0$ и $\rho(0) = 1$. По Лемме 4.2 для всех $k \in \mathbb{N}$ функции $u_k \doteq \phi(x)\rho(x/k) \in D(A)$ и $Au_k = a(x) \cdot \nabla u_k(x)$. Ясно, что $u_k \rightarrow \phi$ при $k \rightarrow \infty$ в H . Далее, функции

$$v_k \doteq Au_k = (a(x) \cdot \nabla \phi(x))\rho(x/k) + k^{-1}\phi(x)a(x)\nabla_y \rho(x/k). \quad (4.13)$$

Так как $a(x) \cdot \nabla \phi(x) = (\psi(x) - \phi(x))/h \in H$, то

$$(a(x) \cdot \nabla \phi(x))\rho(x/k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a(x) \cdot \nabla \phi(x)$$

п.в. на \mathbb{R}^n , а значит и в H . Поскольку

$$|\phi(x)a(x)\nabla_y \rho(x/k)| \leq \|\nabla \rho\|_\infty |a(x)| |\phi(x)| \in H,$$

второе слагаемое из (4.13) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ в H . Итак, установлено, что в пределе при $k \rightarrow \infty$ $u_k \rightarrow \phi$, $v_k \rightarrow a(x) \cdot \nabla \phi(x)$ в H . Так как оператор A замкнут, заключаем, что $\phi \in D(A)$ и $A\phi(x) = a(x) \cdot \nabla \phi(x) = (\psi(x) - \phi(x))/h$. В частности, $\phi + hA\phi = \psi$ и значит $\psi \in \text{Im}(E + hA)$. Но $\psi(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ произвольно, следовательно, $C_0^1(\mathbb{R}^n) \subset \text{Im}(E + hA)$ (заметим также, что постоянная $\alpha = 1/c$, а значит и сделанный выше выбор параметра h не зависит от ψ). Напомним, что подпространство $\text{Im}(E + hA)$ замкнуто в H и, так как $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ плотно в H , получаем, что $\text{Im}(E + hA) = H$. Ввиду кососимметричности A свойство $\text{Im}(E + hA) = H$ выполнено при всех $h > 0$. Аналогично доказывается, что $\text{Im}(E - hA) = H$ (для этого нужно просто рассмотреть поле $-a(x)$ вместо $a(x)$). Таким образом, индексы дефекта кососимметричного оператора A нулевые, то есть этот оператор кососопряжён. Предложение доказано. \square

В соответствии с теоремами 3.1, 3.3, из предложения 4.1 следует существование и единственность о.р. задачи (4.2), (4.3). Единственность о.р. задачи (4.2), (4.3) (прямой и обратной) установлена и в случае, когда коэффициенты имеют соболевскую регулярность (см. [7]), эти результаты были распространены позднее и на случай коэффициентов из пространства BV в работе [2]. В соответствии со следствием 3.1 в этих случаях оператор A также кососопряжён. Однако, в общем случае известны примеры неединственности о.р. задачи (4.2), (4.3), см. [1, 4–6, 12], так что кососопряжённость оператора A может нарушаться.

Заметим, что в случае ограниченного поля коэффициентов $a(x)$ утверждение следствия 3.1 применительно к задаче (4.2), (4.3) вытекает из результатов работы [3], см. также [13, 14].

Отметим также, что условие липшицевости вектора $a(x)$ существенно для кососопряжённости оператора A даже в случае аналитических коэффициентов. Пусть, например, $n = 2$, $a = a(x, y) = (x^2, -2xy)$ (заметим, что $\operatorname{div} a = 0$), A – замыкание оператора $A_0 u = x^2 u_x - 2xy u_y$. Нетрудно проверить, что при всех $v(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ функции

$$u(x, y) = \begin{cases} v(yx^2)e^{\frac{1}{hx}} & , \quad hx < 0, \\ 0 & , \quad hx \geq 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

являются решениями резольвентного уравнения $u - hA^*u = 0$ при $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. При этом, $u(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$, $\|u\|_\infty = \|v\|_\infty$, $\|u\|_2 = \|v\|_2 \sqrt{|h|/2}$. Ввиду произвольности $v(z)$ ядра операторов $E - hA^*$ бесконечномерны. Следовательно, $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(E - hA) = \dim \ker(E - hA^*) = \infty$ и оператор A имеет бесконечные индексы дефекта. В частности, этот оператор не является кососопряжённым (но допускает кососопряжённое расширение). Следует отметить, что функции (4.14) не лежат в $D(A)$, несмотря на их гладкость. В противном случае получим, что $u + hAu = 0$, а это противоречит инъективности операторов $E + hA$.

Заметим также, что для модифицированного поля коэффициентов $a = a(x, y) = ((x_+)^2, -2x_+y)$, где $x_+ = \max(x, 0)$, функции (4.14) лежат в ядре оператора $E - hA^*$ только при $h < 0$. Если же $h > 0$, то это ядро тривиально. Поэтому, индексы дефекта d_\pm оператора A следующие: $d_- = 0$, $d_+ = \infty$ и значит A – максимальный кососимметричный оператор, не являющийся кососопряжённым.

4.2. Линеаризованная система уравнений Эйлера. Рассмотрим теперь линеаризованную систему уравнений Эйлера с тем же соленоидальным вектором коэффициентов $a(x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, что и в разделе 4.1 выше:

$$u_t + \sum_{j=1}^n (a_j(x)u)_{x_j} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}_x u = 0, \quad (4.15)$$

где $(t, x) \in \Pi$, $u = (u^1(t, x), \dots, u^n(t, x)) \in L^\infty_{loc}([0, +\infty), H)$, $H \subset L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ – гильбертово пространство соленоидальных векторных полей на \mathbb{R}^n , $p = p(t, x)$ – функция давления. Рассматривается задача Коши с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in H. \quad (4.16)$$

Определение 4.2. Вектор $u = u(t, x) \in L^\infty_{loc}([0, +\infty), H)$ называется о.р. задачи (4.15), (4.16), если для любой пробной вектор-функции $f = f(t, x) \in C^1_0(\Pi, \mathbb{R}^n)$, такой что $\operatorname{div}_x f = 0$

$$\int_{\Pi} [u \cdot f_t + u \cdot (a \cdot \nabla_x) f] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \cdot f(0, x) dx = 0.$$

Выбор класса соленоидальных пробных векторов позволил исключить давление $p = p(t, x)$ из нашей системы. Определение 4.2 согласуется с определением 1.1, если определить оператор A_0 в соответствии с равенством $A_0 u = Pv$, где $u \in C^1_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap H = D(A_0)$, $v = v(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x)u_{x_j}(x)$, а $P : L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow H$ – ортогональный проектор пространства $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ на его замкнутое подпространство H . Если $u_1 = (u_1^k)_{k=1}^n, u_2 = (u_2^k)_{k=1}^n \in D(A_0)$, то

$$(A_0 u_1, u_2) + (u_1, A_0 u_2) = (Pv_1, u_2) + (u_1, Pv_2) = (v_1, u_2) + (u_1, v_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n a_j(x) ((u_1^k)_{x_j} u_2^k + u_1^k (u_2^k)_{x_j})(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n a_j(x) (u_1^k u_2^k)_{x_j} dx = 0$$

ввиду условия (4.1). Таким образом, оператор A_0 кососимметричен.

Покажем, что в случае липшицевых коэффициентов $a_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, оператор A_0 допускает кососопряжённое расширение. Для

доказательства нам понадобится восстановить член ∇p из равенства

$$\operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^n (a_j u)_{x_j} + \nabla p \right) = 0.$$

Учитывая, что $\operatorname{div} u = 0$ при $u = (u^1, \dots, u^n) \in H$, получим соотношение

$$\sum_{k,j=1}^n ((a_j)_{x_k}(x) u^k)_{x_j} + \Delta p = 0,$$

понимаемое в смысле распределений. Переходя к образам Фурье, получим равенство

$$\tilde{p}(\xi) = \sum_{j=1}^n \mathcal{F} \left(\sum_{k=1}^n (a_j)_{x_k} u^k \right) (\xi) \frac{i\xi_j}{|\xi|^2}. \quad (4.17)$$

Здесь i – мнимая единица, $\tilde{u}(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi)$ – преобразование Фурье функции (более обще – распределения) $u(x)$, задаваемое при $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ стандартным равенством

$$\tilde{u}(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx.$$

Тогда $\mathcal{F}(\nabla p)(\xi) = i\xi \tilde{p}(\xi)$ и из (4.17) следует, что

$$\mathcal{F}(\nabla p)^l(\xi) = - \sum_{j=1}^n \mathcal{F} \left(\sum_{k=1}^n (a_j)_{x_k} u^k \right) (\xi) \frac{\xi_l \xi_j}{|\xi|^2}. \quad (4.18)$$

Поскольку функции $(a_j)_{x_k}(x)$, $\xi_l \xi_j / |\xi|^2$ ограничены, а преобразование Фурье унитарно на $L^2(\mathbb{R}^n)$, получаем, что $\nabla p = Tu$ – линейный ограниченный оператор на $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. По построению $A_0 u = \sum_{j=1}^n (a_j(x) u)_{x_j} + Tu$ при $u(x) \in D(A_0) \subset H$. Рассмотрим оператор B_0 в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, заданный равенствами $(B_0 u)^l = \sum_{j=1}^n a_j(x) u_{x_j}^l$, $l = 1, \dots, n$, с областью определения $D(B_0) = C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Оператор B_0 это прямая сумма n скалярных транспортных операторов, рассмотренных в предыдущем разделе. По предложению 4.1 замыкание B оператора B_0 является косопряжённым оператором. Оператор $\tilde{A}_0 = B_0 + T$ определён на $D(B_0)$ и по построению является расширением оператора A_0 . Так как оператор T ограничен, замыкание \tilde{A} оператора \tilde{A}_0 совпадает с оператором $B + T$. Ввиду косопряжённости B , операторы $E - hB$ сюръективны при $h \in \mathbb{R}$:

$\text{Im}(E - hB) = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Поскольку $\tilde{A} = B + T$ – ограниченное возмущение оператора B , это свойство сохраняется и для оператора \tilde{A} , при условии, что $|h|$ достаточно мало: $\text{Im}(E - h\tilde{A}) = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ при всех $h \in \mathbb{R}$, $|h| < h_0$. Покажем, что пространство H соленоидальных векторных полей инвариантно для резольвенты $(E - h\tilde{A})^{-1}$. Будем считать, что $0 < h < h_0$. Случай отрицательного h разбирается путём замены $a(x)$ на $-a(x)$.

Лемма 4.3. Пусть $u \in D(\tilde{A})$, $u - h\tilde{A}u = v \in H$ и $h > 0$ достаточно мало. Тогда $u \in H$, то есть $\text{div } u = 0$.

Доказательство. Пусть $\psi(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $0 < h < 1/m$ и $\phi(x) \in W_\infty^1(\mathbb{R}^n)$ – функция, построенная в лемме 4.1. Выберем h настолько малым, что $\alpha(1/h - m) > n/2$. Тогда, как следует из (4.9), $|\nabla\phi(x)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Умножая равенство $u - h\tilde{A}u = v$ скалярно на потенциальный вектор $\nabla\phi$, получим равенство

$$(u, \nabla\phi) - h(\tilde{A}u, \nabla\phi) = (v, \nabla\phi) = 0.$$

Заметим далее, что по равенству Парсеваля

$$\begin{aligned} (Tu, \nabla\phi) &= (\mathcal{F}(Tu), \mathcal{F}(\nabla\phi)) \\ &= - \int \sum_{j=1}^n \mathcal{F} \left(\sum_{k=1}^n (a_j)_{x_k} u^k \right) (\xi) \sum_{l=1}^n \frac{\xi_l \xi_j}{|\xi|^2} \overline{i\xi_l \mathcal{F}(\phi)(\xi)} d\xi \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \mathcal{F} \left(\sum_{k=1}^n (a_j)_{x_k} u^k \right) (\xi) \overline{i\xi_j \mathcal{F}(\phi)(\xi)} d\xi \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n (a_j)_{x_k}(x) u^k \phi_{x_j}(x) dx. \end{aligned}$$

Распишем при $u \in D(\tilde{A}_0) = D(B_0)$

$$\begin{aligned} (Bu, \nabla\phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n a_j(x) u_{x_j}^k(x) \phi_{x_k}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n (a_j(x) u^k)_{x_j}(x) \phi_{x_k}(x) dx \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n (a_j(x)u^k)_{x_k}(x) \phi_{x_j}(x) dx.$$

Из полученных выше соотношений следует равенство

$$\begin{aligned} (\tilde{A}u, \nabla\phi) &= (Bu, \nabla\phi) + (Tu, \nabla\phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n a_j(x)(u^k)_{x_k}(x) \phi_{x_j}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u(x) \sum_{j=1}^n a_j(x) \phi_{x_j}(x) dx. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Итак, для всех $u \in D(\tilde{A}_0)$

$$\begin{aligned} (u - h\tilde{A}u, \nabla\phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \nabla\phi(x) dx - h(\tilde{A}u, \nabla\phi) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u(x) (\phi + h \sum_{j=1}^n a_j(x) \phi_{x_j}(x)) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \nabla\psi(x) dx = (u, \nabla\psi). \end{aligned}$$

Поскольку $D(\tilde{A}_0)$ плотно в $D(\tilde{A})$ по норме графика \tilde{A} , то соотношение $(u - h\tilde{A}u, \nabla\phi) = (u, \nabla\psi)$ распространяется по непрерывности и на случай $u \in D(\tilde{A})$. По условию леммы $u - h\tilde{A}u = v \in H$ и значит $(u - h\tilde{A}u, \nabla\phi) = 0$. Тогда и $(u, \nabla\psi) = 0$. Но $\psi(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ произвольно. Следовательно, $\operatorname{div} u(x) = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то есть $u \in H$. Лемма доказана. \square

Как следует из (4.19), при $u \in D(A_0) = D(B_0)$, $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (\tilde{A}u, \nabla\phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u(x) \sum_{j=1}^n a_j(x) \phi_{x_j}(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \nabla \left(\sum_{j=1}^n a_j(x) \phi_{x_j}(x) \right) dx \end{aligned} \quad (4.20)$$

и, так как $D(\tilde{A}_0)$ плотно в $D(\tilde{A})$ по норме графика \tilde{A} , то равенство (4.20) сохраняется и при $u \in D(\tilde{A})$. Если $u \in H \cap D(\tilde{A})$, то $\operatorname{div} u(x) = 0$ и правая часть (4.20) равна нулю, откуда вытекает что $(\tilde{A}u, \nabla \phi) = 0$ при всех $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, то есть, $\operatorname{div} \tilde{A}u = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, подпространство H инвариантно для \tilde{A} . По построению вектор Tu потенциален, значит $Tu \perp H$ и $PTu = 0$. Следовательно, при $u \in D(\tilde{A}) \cap H$ $\tilde{A}u = PBu + PTu = PBu$. Отсюда и из кососимметричности оператора B легко следует, что сужение $\tilde{A}|_H$ является кососимметричным оператором на H . Из леммы 4.3 и сюръективности оператора $E - h\tilde{A}$ следует, что для любого $v \in H$ найдётся такой элемент $u \in H \cap D(\tilde{A})$, что $u - h\tilde{A}u = v$. Аналогичное утверждение верно и при замене h на $-h$. Это означает, что кососимметричный оператор $\tilde{A}|_H$, имеет нулевые индексы дефекта и потому кососопряжён. Поскольку $\tilde{A}_0|_H = A_0$, то $\tilde{A}|_H$ является кососопряжённым расширением оператора A_0 , а значит и A . Мы доказали следующий результат.

Предложение 4.2. *Оператор A допускает кососопряжённое расширение. В частности, его индексы дефекта d_+ и d_- совпадают.*

Для доказательства кососопряжённости самого оператора A нам потребуется вариант знаменитой леммы ДиПерна–Лионса [7, Lemma II.1]. Пусть $\rho(z) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \rho \subset B_1(0) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| \leq 1\}$, $\rho(z) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) dz = 1$. При $u(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ определим средние функции

$$u_k(x) = u * \rho_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y)u(y)dy,$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\rho_k(z) = k^n \rho(kz)$.

Лемма 4.4. *Пусть $a(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет глобальному условию Липшица (4.5), $u(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (au_k - (au)_k)(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^n) \quad (4.21)$$

при всех $j = 1, \dots, n$.

Доказательство. Так как

$$(au_k - (au)_k)(x) = k^n \int_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(y))\rho(k(x-y))u(y)dy,$$

существуют обобщённые производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(au_k - (au)_k)(x) &= k^n \int_{\mathbb{R}^n} a_{x_j}(x) \rho(k(x-y)) u(y) dy + \\ k^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(y)) \rho_{z_j}(k(x-y)) u(y) dy &= I_{1k}(x) + I_{2k}(x). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Первое слагаемое в этой сумме

$$I_{1k}(x) = a_{x_j}(x) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y) u(y) dy = a_{x_j}(x) u_k(x) \rightarrow a_{x_j}(x) u(x) \quad (4.23)$$

при $k \rightarrow \infty$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$, так как $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ по известному свойству средних функций, а производная $a_{x_j}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ввиду условия Липшица. Оценим слагаемое $I_{2k}(x)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} |I_{2k}(x)| &\leq k^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |a(x) - a(y)| |\rho_{z_j}(k(x-y))| |u(y)| dy \\ &\leq \omega_k(x) \doteq mk^n \int_{\mathbb{R}^n} k|x-y| |\rho_{z_j}(k(x-y))| |u(y)| dy. \end{aligned} \quad (4.24)$$

По свойствам средних функций $\omega_k(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и при $k \rightarrow \infty$

$$\omega_k(x) \rightarrow C|u(x)| \quad (4.25)$$

как в $L^p(\mathbb{R}^n)$, так и почти всюду в \mathbb{R}^n . Здесь $C = m \int_{\mathbb{R}^n} |z| |\rho_{z_j}(z)| dz = \text{const}$. Пусть теперь x — общая точка Лебега вектора $\nabla a(y)$ и функции $u(y)$. Тогда

$$\begin{aligned} I_{2k}(x) &= k^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(y)) \rho_{z_j}(k(x-y)) (u(y) - u(x)) dy \\ &\quad + u(x) k^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(y)) \rho_{z_j}(k(x-y)) dy. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Первое слагаемое в правой части (4.26) оценивается как

$$\begin{aligned} & k^{n+1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(y)) \rho_{z_j}(k(x-y))(u(y) - u(x)) dy \right| \\ & \leq m k^n \int_{\mathbb{R}^n} k|x-y| |\rho_{z_j}(k(x-y))| |u(y) - u(x)| dy \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

так как x — точка Лебега функции $u(x)$. Введём функцию

$$J_k(x) = k^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(y)) \rho_{z_j}(k(x-y)) dy$$

и представим её в виде

$$\begin{aligned} J_k(x) &= k^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(y) - \nabla a(x) \cdot (x-y)) \rho_{z_j}(k(x-y)) dy \\ &\quad + k^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla a(x) \cdot (x-y) \rho_{z_j}(k(x-y)) dy \\ &= k^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 (\nabla a(x + s(y-x)) - \nabla a(x)) \cdot (x-y) \rho_{z_j}(k(x-y)) ds dy \\ &\quad + \nabla a(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} z \rho_{z_j}(z) dz. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Здесь мы использовали представление

$$a(x) - a(y) = \int_0^1 \nabla a(x + s(y-x)) \cdot (x-y) ds,$$

справедливое при п.в. $y \in \mathbb{R}^n$. Оценим первое слагаемое в правой части (4.28). Сделаем замену переменных $z = s(x-y)$, получим, что

$$\begin{aligned} & k^{n+1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 (\nabla a(x + s(y-x)) - \nabla a(x)) \cdot (x-y) \rho_{z_j}(k(x-y)) ds dy \right| \\ & \leq k^n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla a(x-z) - \nabla a(x)| \rho_1(kz) dz, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где обозначено

$$\rho_1(y) = |y| \int_0^1 s^{-n-1} |\rho_{z_j}(y/s)| ds.$$

Заметим, что $\rho_1 \geq 0$, $\text{supp } \rho_1 \subset B_1(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_1(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |z| |\rho_{z_j}(z)| dz < \infty$.

Так как x – точка Лебега вектора $\nabla a(y)$,

$$k^n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla a(x-z) - \nabla a(x)| \rho_1(kz) dz \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

и из (4.28) и (4.29) следует, что

$$J_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \nabla a(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} z \rho_{z_j}(z) dz = -a_{x_j}(x). \quad (4.30)$$

Здесь мы учитываем, что из формулы интегрирования по частям следует равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} z \rho_{z_j}(z) dz = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial z}{\partial z_j} \rho(z) dz = -e_j,$$

где e_j – j -ый базисный вектор в \mathbb{R}^n . Ввиду (4.26), (4.27) из (4.30) следует, что $I_{2k}(x) \rightarrow -a_{x_j}(x)u(x)$ при $k \rightarrow \infty$ почти всюду на \mathbb{R}^n . Заметим далее, что

$$\begin{aligned} |I_{2k}(x) + a_{x_j}(x)u(x)|^p &\leq 2^{p-1} (|I_{2k}(x)|^p + |a_{x_j}(x)u(x)|^p) \\ &\leq 2^{p-1} ((\omega_k(x))^p + |a_{x_j}(x)u(x)|^p). \end{aligned}$$

Левая часть этого неравенства сходится к нулю п.в. на \mathbb{R}^n , а его правая часть сходится в $L^1(\mathbb{R}^n)$ и п.в. на \mathbb{R}^n , ввиду соотношения (4.25). Применяя лемму Фату к последовательностям

$$2^{p-1} ((\omega_k(x))^p + |a_{x_j}(x)u(x)|^p) \pm |I_{2k}(x) + a_{x_j}(x)u(x)|^p,$$

получим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |I_{2k}(x) + a_{x_j}(x)u(x)|^p dx = 0,$$

то есть, что $I_{2k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -a_{x_j}(x)u(x)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$. Вместе с (4.22), (4.23) это даёт требуемое соотношение (4.21). Лемма доказана. \square

Мы готовы доказать кососопряжённость оператора A при условии $a(x) \in W_\infty^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (то есть дополнительно к требованиям предложения 4.2 предполагается ограниченность коэффициентов $a(x)$).

Предложение 4.3. Пусть $a_j(x) \in W_\infty^1(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$. Тогда оператор A кососопряжённый.

Доказательство. Покажем сначала, что $W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap H \subset D(A)$. Известно, см., например, [10, лемма 3.1], [11, теорема 1], что пространство гладких соленоидальных полей $D(A_0) = C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap H$ плотно в $W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap H$. Поэтому, найдётся последовательность $u_m \in D(A_0)$, $m \in \mathbb{N}$, такая что последовательности u_m , $(u_m)_{x_j}$, $j = 1, \dots, n$, сходятся при $m \rightarrow \infty$ к $u(x)$ и, соответственно, к u_{x_j} в $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Так как по условию $a_j(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, заключаем, что

$$A(u_m) = \sum_{j=1}^n a_j(x)(u_m)_{x_j}(x) + Tu_m \rightarrow Bu + Tu = \tilde{A}u$$

в $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ввиду замкнутости оператора A , $u \in D(A)$ и $Au = \tilde{A}u$. Пусть теперь $u \in D(\tilde{A}) \cap H = D(B) \cap H$. Рассмотрим последовательность средних вектор-функций

$$u_k(x) = k^n \int_{\mathbb{R}^n} \rho(ky)u(x-y)dy = k^n \int_{\mathbb{R}^n} \rho(k(x-y))u(y)dy.$$

Ясно, что $u_k(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и что $\operatorname{div} u_k(x) = \rho_k * \operatorname{div} u = 0$. Поэтому, $u_k \in W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap H \subset D(A)$. При $k \rightarrow \infty$ справедливы предельные соотношения:

$$u_k \rightarrow u, \quad (Bu)_k = k^n \int_{\mathbb{R}^n} \rho(k(x-y))Bu(y)dy \rightarrow (Bu)(x) \quad (4.31)$$

в $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Заметим, что в силу соленоидальности вектора коэффициентов $a(x)$ и коммутирования операторов дифференцирования и усреднения

$$Bu_k(x) = \sum_{j=1}^n (a_j(x)u_k(x))_{x_j}, \quad (Bu)_k(x) = \sum_{j=1}^n ((a_j u)_k)_{x_j}(x).$$

Тогда по Лемме 4.4 (с параметром $p = 2$)

$$Bu_k - (Bu)_k = \sum_{j=1}^n (a_j(x)u_k(x) - (a_j u)_k(x))_{x_j} \rightarrow 0 \text{ в } L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

и второе соотношение в (4.31) можно переписать в виде $Bu_k \rightarrow Bu$ в $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Поскольку оператор T ограничен на $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, верны соотношения

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u, \quad Au_k = Bu_k + Tu_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Bu + Tu = \tilde{A}u \text{ в } H.$$

В силу замкнутости оператора A заключаем, что $u \in D(A)$ и $Au = \tilde{A}u$. Мы установили, что $D(\tilde{A}) \cap H \subset D(A)$. Напомним, что оператор $\tilde{A}|_H$ является косо сопряжённым расширением оператора A и в частности $D(A) \subset D(\tilde{A}) \cap H$. Итак, $D(\tilde{A}) \cap H = D(A)$ и значит оператор $A = \tilde{A}|_H$ косо сопряжён. Предложение доказано. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Aizenman, *On vector fields as generators of flows. A counterexample to Nelson's conjecture.* — Ann. of Math. **107** (1978) 287–296.
2. L. Ambrosio, *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields.* — Invent. Math. **158** (2004) 227–260.
3. F. Bouchut, G. Crippa, *Uniqueness, renormalization and smooth approximations for linear transport equations.* — SIAM J. Math. Anal. **38** (2006) 1316–1328.
4. A. Bressan, *An ill-posed Cauchy problem for a hyperbolic system in two space dimensions.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **110** (2003) 103–117.
5. F. Colombini, T. Luo, J. Rauch, *Uniqueness and nonuniqueness for nonsmooth divergence free transport.* — Sémin. Équ. Dériv. Partielles, Éc. Polytech., Cent. Math., Palaiseau 2002–2003, Exp. no. XXII, 21 p. (2003).
6. N. Depauw, *Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs BV en dehors d'un hyperplan.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris. **337** (2003) 249–252.
7. R.J. DiPerna, P.L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces.* — Invent. Math. **98** (1989) 511–547.
8. K. Yosida, *Functional Analysis*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag (1965).
9. С.Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М (1967).
10. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье-Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **59** (1976), 81–116.
11. В. Н. Масленникова, М. Е. Боговский, *О плотностях финитных соленоидальных векторных полей.* — Сиб. матем. журн. **19**, No. 5 (1978), 1092–1108.
12. E. Yu. Panov, *Generalized solutions of the Cauchy problem for a transport equation with discontinuous coefficients.* — in: C. Bardos, A.V. Fursikov (Eds.), *Instability*

- in Models Connected with Fluid Flows. II, International Mathematical Series, Vol. 7, Springer, New York, 2008, pp. 23–84.
13. E. Yu. Panov, *On generalized solutions to linear transport equations with discontinuous coefficients*. — Mathematical Modeling of Processes and Systems. Collective monograph. S.A. Mustafina ed. Sterlitamak, 2018, pp. 18–51.
 14. E. Yu. Panov, *On one criterion of the uniqueness of generalized solutions for linear transport equations with discontinuous coefficients*. Arxiv:1504.00836, 17 Apr 2015.
 15. R. S. Phillips, *Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations*. — Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959) 193–254.

Panov E. Yu. On linear evolutionary equations with a skew symmetric spatial operator.

We study generalized solutions of an evolutionary equation related to a densely defined skew-symmetric operator in a real Hilbert space. We establish existence of a contractive semigroup, whose trajectories are generalized solutions to the Cauchy problem, and find criteria of uniqueness of generalized solutions. Applications are given to some equations of mathematical physics, including transport equations and linearized Euler equations with solenoidal (and generally discontinuous) coefficients. Under some additional regularity assumption on the coefficients we prove that the corresponding spatial operators are skew-adjoint, which implies existence and uniqueness of generalized solutions for both the forward and the backward Cauchy problem.

Санкт-Петербургское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
Санкт-Петербург, 191023, Россия;
Новгородский государственный
университет им. Ярослава Мудрого,
ул. Большая Санкт-Петербургская 41,
Великий Новгород, 173003, Россия
E-mail: evpanov@pdmi.ras.ru, eugeniy.panov@novsu.ru

Поступило 3 апреля 2026 г.