

С. А. Назаров

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ ФОРМАЛЬНО САМОСОПРЯЖЁННОЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В СОЧЛЕНЕНИИ
ЧЕТВЕРТЕЙ СЛОЁВ**

§1. Постановка задачи

Пусть Π – область на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y = (y_1, y_2)$ с липшицевой границей (рис. 1, а–с), состоящая из ядра Θ с компактным замыканием $\bar{\Theta} = \Theta \cup \partial\Theta$ и полуполос $\varpi_j = \{\xi^j = (\eta_j, \zeta_j) : |\eta_j| < \ell_j/2, \zeta_j > 0\}$, $j = 1, \dots, J$, причём $\ell_j > 0$ – ширины полос, ξ^j – локальные декартовы системы координат и все торцы $(-\ell_j/2, \ell_j/2) \times \{0\}$ погружены в замыкание ядра. В бесконечной трёхмерной области $\Omega = \Pi \times \mathbb{R}_+ \ni x = (y, z)$ (рис. 1, d) рассмотрим задачу Дирихле для формально самосопряжённой системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$L(x, \nabla_x)u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

и её вариационную формулировку как интегральное тождество [1, 2]

$$E(u, \psi; \Omega) := (AD(\nabla_x)u, D(\nabla_x)\psi)_\Omega - \lambda(u, \psi)_\Omega = (f, \psi)_\Omega \quad (3)$$

$$\forall \psi \in H_0^1(\Omega)^K.$$

Поясним обозначения. Под $\lambda \in \mathbb{R}$ подразумеваем заменитель спектрального параметра, которому будем придавать разные значения, а вектор-функцию $u = (u_1, \dots, u_K)^\top$ интерпретируем как столбец (\top – знак транспонирования). Кроме того, $(K \times K)$ -матрица дифференциальных операторов

$$L(x, \nabla_x) = -D(\nabla_x)^\top A(x)D(\nabla_x) \quad (4)$$

Ключевые слова: задача Дирихле, сочленение четвертей слоёв, весовые пространства Соболева, асимптотика решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение No. 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН).

включает $(N \times N)$ -матрицу-функцию A с вещественными ограниченными измеримыми элементами, симметричную, а также равномерно ограниченную и положительно определённую при почти всех x . Кроме того, $D(\nabla_x)$ – $(N \times K)$ -матрица дифференциальных операторов первого порядка с постоянными вещественными коэффициентами. Наконец, $(\cdot, \cdot)_\Omega$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, скалярном или векторном, вещественном или комплексном, $H_0^1(\Omega)$ – пространство Соболева функций, удовлетворяющих условиям Дирихле (2), а последний верхний индекс K в интегральном тождестве (3) указывает количество компонент у пробной вектор-функции $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_K)^\top$, однако он отсутствует в обозначениях скалярных произведений и норм. Отметим, что здесь и всюду далее саму дифференциальную постановку задачи (1), (2) рассматриваем только в случае достаточно гладких коэффициентов и хотя бы кусочно-гладкой границы, однако отдельно это не оговариваем.

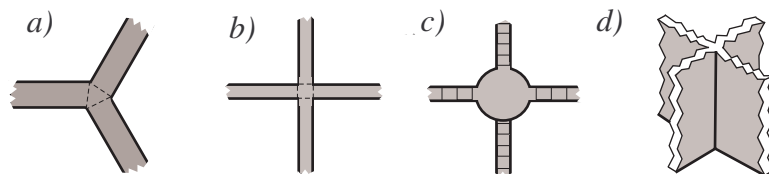


Рис. 1. Плоская область Π с простыми – многоугольными, выделенными штрих-пунктирными линиями – ядрами (а, б) и с круговым ядром Θ (с), а также разбиением на квадратные ячейки \square_{jk} и центральную \square_Θ . На рис. d изображена трёхмерная область Ω , отвечающая случаю (б).

В §8 обсуждаются и другие типы краевых условий, но трёхмерное пространство и условия Дирихле выбраны для упрощения формулировок и облегчения доказательств теорем о свойствах оператора задачи (3) в весовых классах и асимптотике её решений на бесконечности. Приёмы исследования в целом следуют подходу В. А. Кондратьева [3]

к изучению условий разрешимости в подходящих весовых пространствах и построению асимптотики решений эллиптических краевых задач в цилиндрических и конических областях, однако из-за неограниченности поперечного сечения Π полубесконечного “цилиндра” Ω некоторые весовые аргументы теории Кондратьева потребовали переработки, частично уже сделанной в статье [4], где встретились похожие эффекты и трудности. Плоские задачи в областях аналогичной геометрии целиком подпадают под названную теорию и потому здесь не рассматриваются, а обобщение результатов на многомерные области и иные краевые условия намечено в §8.

Данная статья примыкает к исследованиям автора тонкостенных конструкций (см. [5, 6] и др.). Подобные трёхмерные задачи возникают при асимптотическом анализе, например, квантовых волноводов с перегородками и тавровых сочленений упругих пластин-прокладок, а постановка условий Дирихле предопределена методом исследования свойств решений задачи (1), (2) – случай краевых условий Неймана требует использования в значительной степени отличающихся подходов и обеспечивает совершенно иные свойства пограничных слоёв около многогранных угловых сочленений тонких областей (см., например, [7, 8]). Разнообразные ограничения, принятые в §2, как раз и приспособлены к дифференциальным операторам Лапласа и Ламе, относящимся к квантовым волноводам и изотропным однородным телам¹ (см. монографии [9, 10] и [11, 12] по поводу физической природы объектов). Соответствующие примеры разобраны в §3. Разрешимость задачи (3) в весовых пространствах Соболева с экспоненциальными и степенными весами изучена в §§4 и 5 соответственно. После подготовки в §6, содержащем основные нововведения при изучении спектра пучка, возникающего в результате применения преобразования Фурье, в §7 найдена асимптотика решений при $z = x_3 \rightarrow +\infty$, а в §8 собраны комментарии к полученным результатам.

§2. ТРЕБОВАНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ

На протяжении всей статьи считаем, что матрица D алгебраически комплектна [13], т.е. существует такое натуральное число d_D , что для любой строки $P(x) = (P_1(x), \dots, P_K(x))$ однородных полиномов

¹Теоремы 1 и 2 содержат в значительной степени неожиданные результаты для упругой задачи Дирихле.

степени $d \geq d_D$ переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$ найдётся полиномиальная строка $Q(x) = (Q_1(x), \dots, Q_N(x))$, для которой

$$P(x) = Q(x)D(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (5)$$

По необходимости $N \geq K$. При выполнении требования (5) оператор (4) называется формально положительным [13], причём для любой области Υ с липшицевой границей и компактным замыканием имеет место неравенство Корна (см. [13, §3.7.4])

$$\|\nabla_x u; L^2(\Upsilon)\|^2 \leq c_{\Upsilon, D} (\|D(\nabla_x)u; L^2(\Upsilon)\|^2 + \|u; L^2(\Upsilon)\|^2), \quad (6)$$

где множитель $c_{\Upsilon, D}$ зависит от области Υ и матрицы D , но не от вектор-функции $u \in H^1(\Upsilon)^K$. Кроме того, билинейная форма из левой части интегрального тождества (3) обладает полиномиальным свойством [14], обеспечивающим, в частности, эллиптичность задачи (1), и (2):

$$E(u, u; \Upsilon) = 0, \quad u \in H^1(\Upsilon)^K \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{P}|_{\Upsilon}. \quad (7)$$

Здесь Υ – опять-таки любая конечная область в \mathbb{R}^3 и \mathcal{P} – некоторое конечномерное пространство векторных полиномов переменных x . Соотношение (7) обеспечивает много полезных и используемых далее свойств рассматриваемой задачи (см. обзор [14]).

Далее предполагаем, что матрица $A(y, z)$ с экспоненциальной скоростью $O(e^{-\alpha_z z})$, $\alpha_z > 0$, стабилизируется при $z \rightarrow +\infty$ к матрице $A^0(y)$, для которой в свою очередь справедливо неравенство

$$|A^0(y) - A^j(\eta_j)| \leq c_j e^{-\alpha_y \zeta_j} \quad \text{при почти всех } y \in \varpi_j, \quad \alpha_y > 0, \quad (8)$$

где A^j – $(N \times N)$ -матрица-функция переменной $\eta_j \in [-\ell_j, \ell_j]$ и $j = 1, \dots, J$. Подчеркнём, что элементы всех введённых матриц измеримы и ограничены, а сами они симметричны и положительно определены равномерно относительно своих аргументов (почти всюду).

Заменим дифференциальный оператор (4) оператором $L^0(y, \nabla_x) = -D(\nabla_x)^T A^0(y) D(\nabla_x)$, превратим λ в спектральный параметр Λ , применим (пока формально) преобразование Фурье $\mathcal{F}_{z \rightarrow t}$ и придём к семейству задач Дирихле на сечении Π “цилиндра” Ω

$$L^0(y, \nabla_y, it)U(y, t) = \Lambda(t)U(y, t), \quad y \in \Pi, \quad U(y, t) = 0, \quad y \in \partial\Pi, \quad (9)$$

где образы Фурье обозначены заглавными буквами, $t \in \mathbb{R}$ – двойственная переменная преобразования (параметр полученной задачи), а i –

мнимая единица. Лево́й частью соответствующего интегрального тождества

$$E^0(U, \Psi; \Pi, t) := (A^0 D(\nabla_y, it)U, D(\nabla_y, -it)\Psi)_{\Pi} = \Lambda(t)(U, \Psi)_{\Pi}, \quad (10)$$

$$\forall \Psi \in H_0^1(\Pi)^K$$

служит положительная замкнутая в $H^1(\Pi)^K$ эрмитова полуторалинейная форма, а значит, задачам (10) (и (9) в дифференциальной форме) ставится [15, гл. 10, §1] в соответствии неограниченный положительный самосопряжённый оператор $\mathcal{B}^0(t)$ в гильбертовом пространстве $L^2(\Pi)^K$.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\|\nabla_y U; L^2(\Pi)\|^2 + t^2 \|U; L^2(\Pi)\|^2 \leq C_A E^0(U, U, \Pi, t) \quad (11)$$

с независимым от вектор-функции $U \in H_0^1(\Pi)^K$ и вещественного параметра t множителем C_A , т.е., в частности, оператор $\mathcal{B}^0(t)$ положительно определён равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Разобьём область $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ на ячейки, квадратные \square_{jk} при $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $j = 1, \dots, J$, и центральную $\square_{\Theta} \supset \Theta$, содержащую непустую часть границы $\partial\Pi$ (см. рис. 1, с). Благодаря условиям Дирихле на каждой из них выполнены неравенства

$$\|\nabla_y U; L^2(\square_{\dots})\|^2 + t^2 \|U; L^2(\square_{\dots})\|^2 \leq C_{\dots} E^0(U, U; \square_{\dots}, t), \quad (12)$$

где многоточие заменяет введённые индексы. В самом деле, на трёхмерных множествах $\square_{\dots}^m = \square_{\dots} \times (m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, справедливы следующие соотношения с общим множителем c_{\dots}^D :

$$\|\nabla_x \mathcal{U}; L^2(\square_{\dots}^m)\|^2 \leq c_{\dots}^D \|D(\nabla_x) \mathcal{U}; L^2(\square_{\dots}^m)\|^2. \quad (13)$$

Отметим, что $L^2(\square_{\dots}^m)$ -норму удалось убрать из правой части формулы (6) по причине условий Дирихле на части границы $\partial\square_{\dots}^m$ (см., например, [16, теорема 3.3.3] и [17, теорема 4]). В соотношения (13) подставим вектор-функцию

$$\mathcal{U}(y, z) = \chi_N(z) e^{itz} U(y),$$

где $\chi_n(z) = \chi(N+z)\chi(N-z)$, а $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – эталонная срезающая функция (см. графики на рис. 2),

$$\chi(z) = 0 \text{ при } z < 0 \text{ и } \chi(z) = 1 \text{ при } z > 1. \quad (14)$$

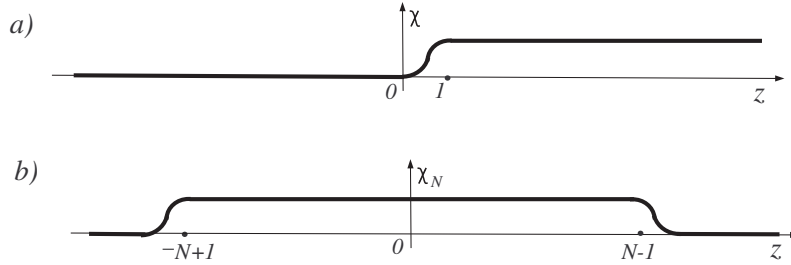


Рис. 2. Графики срезающих функций χ (a) и χ_N (b).

Просуммировав полученные неравенства по $m \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ (их конечное число), приходим к оценке

$$2(N-1)(\|\nabla_y U; L^2(\square \dots)\|^2 + t^2 \|U; L^2(\square \dots)\|^2) \leq \\ \leq 2Nc^D \|D(\nabla_y, it)U; L^2(\square \dots)\|^2 + 2c_\chi (\|\nabla_y U; L^2(\square \dots)\|^2 + t^2 \|U; L^2(\square \dots)\|^2),$$

в которой нужно выполнить деление на $2(N-1)$ и переход к пределу при $N \rightarrow +\infty$.

Теперь просуммируем по всем ячейкам неравенства (12) (в них фигурируют только $1+J$ разных множителей – берём максимальный) и при учёте неравенств Фридрихса–Пуанкаре на каждой из ячеек придём к искомому соотношению (11) в силу равномерной относительно переменной $y \in \bar{\Pi}$ положительной определённости матрицы $A^0(y)$. Лемма 1 доказана. \square

Теория Кондратьева [3], приспособленная [14] к обладающим полиномиальным свойством (7) задачам в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность, в частности, позволяющая находить их атрибуты посредством алгебраических вычислений, гарантирует, что непрерывный спектр $\wp_c^0(t)$ оператора $\mathcal{B}^0(t) : H_0^1(\Pi)^K \rightarrow (H_0^1(\Pi)^K)^*$ задачи (10) занимает луч $[\Lambda_\dagger(t), +\infty)$, точка отсечки которого имеет вид

$$\Lambda_\dagger(t) = \min\{\text{Im } \kappa_p^j(t) \mid \kappa_p^j(t) \in \mathbb{K}_+^j(t), j = 1, \dots, J\},$$

где $\mathbb{K}^j(t) = \{\kappa_p^j(t)\}_{p \in \mathbb{N}}$ – множество собственных чисел задачи Дирихле на интервале $(-\ell_j/2, \ell_j/2) \ni \eta_j$ для матричного дифференциального

оператора (квадратичного пучка относительно комплексного параметра κ)

$$L^j(\eta_j, \partial_{\eta_j}, i\kappa, it) = D^j(\partial_{\eta_j}, i\kappa, it)^\top A^j(\eta_j) D^j(\partial_{\eta_j}, i\kappa, it), \quad (15)$$

точнее, соответствующей вариационной задачи. При этом $D^j(\partial_{\eta_j}, \partial_{\zeta_j}, it)$ и $A^j(\eta_j)$ – матрицы, получающиеся из $D(\nabla_y, it)$ и $A^0(y)$ в результате перехода к локальным координатам $y = (y_1, y_2) \mapsto (\eta_j, \zeta_j)$. Ввиду формальной самосопряжённости оператора (15) и вещественности его коэффициентов множество $\mathbb{K}^j(t)$ симметрично относительно обеих, вещественной и мнимой, осей комплексной плоскости \mathbb{C} и расположено внутри двойного угла $\{\kappa : |\operatorname{Im} \kappa| < \mathbb{K}^j |\operatorname{Re} \kappa|\}$, $\mathbb{K}^j > 0$, в частности, благодаря условиям Дирихле (подробности см., например, в [14, §2]).

Ниже точки отсечки $\Lambda_\dagger(t)$ располагается дискретный спектр $\wp_d(t)$ оператора $\mathcal{B}^0(t)$, может быть, пустой. Нижняя грань всего спектра $\wp(t) = \wp_c(t) \cup \wp_d(t)$ вычисляется по формуле (см. [15, гл. 10, §2])

$$\underline{\wp}(t) = \inf_{\Psi \in H_0^1(\Pi) \setminus \{0\}} \frac{E^0(\Psi, \Psi; \Pi, t)}{\|\Psi; L^2(\Pi)\|^2}. \quad (16)$$

Поскольку на области Π справедливо неравенство Фридрихса, лемма 1 гарантирует, что

$$\underline{\wp}(t) \geq \varrho_0 + \varrho_1 t^2 \text{ с некоторыми } \varrho_0, \varrho_1 > 0.$$

Дальнейший анализ проводим при допущении, что в дискретном спектре $\wp_d(0)$ есть собственное число $\Lambda_1 = \Lambda_1(0)$ с кратностью $\varkappa \geq 1$. Соответствующие собственные векторы U^1, \dots, U^\varkappa подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(U^p, U^q)_\Pi = \delta_{p,q}, \quad (17)$$

где $p, q = 1, \dots, \varkappa$ и $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера.

Благодаря устойчивости дискретного спектра при возмущениях оператора для малого $|t|$ у оператора $\mathcal{B}^0(t)$ имеются собственные числа $\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_\varkappa(t) \in \wp_d(t)$. Предположим дополнительно, что при некотором $t_0 > 0$ выполнены неравенства

$$\Lambda_q(t) \geq \Lambda_1 + \varrho t^2, \text{ где } |t| < t_0 \text{ и } \varrho > 0, q = 1, \dots, \varkappa. \quad (18)$$

В очередном утверждении и далее в статье положим

$$\lambda_\dagger = \Lambda_1 = \Lambda_1(0). \quad (19)$$

В нескольких доказательствах понадобится специфическое неравенство

$$\lambda_{\dagger} \|v; L^2(\Omega)\|^2 + \varrho \|\partial_z v; L^2(\Omega)\|^2 \leq E^0(v, v; \Omega) := (A^0 D(\nabla_x)v, D(\nabla_x)v)_{\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^K, \quad (20)$$

которое включает положительный множитель ϱ , однако не вытекает из неравенства Корна (6) и потому предполагается верным, но будет проверено в §3 для конкретных задач.

Предложение 1. *Если случилось, что собственные числа $\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_x(t)$ существуют и к тому же удовлетворяют неравенству из формулы (18) при всех $t \in \mathbb{R}$ (см., в частности, пример 1 в §3), то справедлива формула (20).*

Доказательство. Продолжим вектор-функцию $v \in H_0^1(\Omega)^K$ нулём с “полуцилиндра” Ω на целый “цилиндр” $\Pi \times \mathbb{R}$ (при сохранении класса Соболева) и применим преобразование Фурье. Обозначив образ Фурье вектор-функции v через V , воспользуемся равенством Парсеваля и при учёте формул (18) и (19) получим искомое неравенство

$$\begin{aligned} E^0(v, v; \Omega) - \lambda_{\dagger} \|v; L^2(\Omega)\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (E^0(V, V; \Pi, t) - \lambda_{\dagger} \|V; L^2(\Pi)\|^2) dt \\ &\geq \varrho \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^2 \|V; L^2(\Pi)\|^2 dt = \varrho \|\partial_z v; L^2(\Omega)\|^2. \end{aligned} \quad (21)$$

□

Замечание 1. На первый взгляд кажется, что неравенство (20) и выкладка (21) обеспечивают соотношение (18) при всех $t \in \mathbb{R}$. Однако для такого вывода требуется проверить формулу

$$\wp_d(t) \neq \emptyset \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Автор не знает, как сделать это, поскольку, вообще говоря, собственное число может “выйти” на точку отсечки непрерывного спектра оператора $\mathcal{B}^0(t)$, вычислить которую при $t \notin \mathbb{R}$ затруднительно. Во всех примерах из очередного параграфа формула (22) верна.

§3. ПРИМЕРЫ.

1. *Оператор Лапласа.* Пусть $K = 1$, $N = 3$ и $A = \mathbb{I}_3$ – единичная матрица размером 3×3 . Тогда (4) – оператор Лапласа (со знаком

минус), а точка отсечки непрерывного спектра оператора $\mathcal{B}^\Delta(t) := \mathcal{B}^0(t)$ соответствующей задачи (10) принимает вид

$$\lambda_+(t) = t^2 + \min\{\pi^2 \ell_j^{-2} \mid j = 1, \dots, J\}. \quad (23)$$

Если $J \geq 3$, узел Θ многоугольник (треугольник на рис. 1, а, и прямоугольник на рис. 1, б), а $\varpi_1, \dots, \varpi_J$ — единичные ($\ell_j = 1$) полуполосы, средние линии которых исходят из начала координат $y = 0$ под углом $2\pi/J$ одна к другой², то приём из работы [18] показывает, что у оператора $\mathcal{B}_\#^\Delta(0)$ скалярной задачи Дирихле в паукообразной области $\Pi_\# = \varpi_1 \cup \dots \cup \varpi_J$ есть простое собственное число $\Lambda_1^\Delta \in (0, \pi^2)$, минимальное в дискретном спектре, а при $t \in \mathbb{R}$ такие собственные числа задач с параметром вида (9) равны $\Lambda_1^\Delta(t) = \Lambda_1^\Delta + t^2$. Таким образом, соблюдены все перечисленные в §2 ограничения. Кроме того, $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ — пространство постоянных в формуле (7).

2. *Специальная скалярная задача.* Пусть Π — область, описанная в §1, но область $\Omega^\angle = \{x = (y, z) \in \Pi \times \mathbb{R} : z > y_1 \operatorname{tg} \alpha\}$ скошена под острым углом $\alpha \in (0, \pi/2)$. Сделаем замену координат $x \mapsto (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (y, z - y_1 \operatorname{tg} \alpha)$ и превратим Ω^\angle в прежнюю область Ω , а оператор $-\Delta_x$ — в оператор

$$\mathbf{L}(\nabla_{\mathbf{x}}) = -\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{z}^2}.$$

Исследуем дискретный спектр оператора $\mathcal{B}(t)$ соответствующей задачи в Π . Понятно, что $\Lambda_1(0) = \Lambda_1^\Delta$ — наименьшее собственное число оператора $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}^0(0)$. Для проверки представления

$$\Lambda_1(t) = \Lambda_1(0) + t^2 \quad (24)$$

собственного числа оператора $\mathcal{B}(t)$ заметим, что, если функция $U(\cdot, t)$ аннулируется оператором Гельмгольца $\Delta_x + \Lambda(t)$, то пара

$$\{\Lambda(t); \mathbf{U}(\mathbf{y}, t) = e^{-it \operatorname{tg} \alpha y_1} U(\mathbf{y}, t)\}$$

удовлетворяет уравнению $(\mathbf{L}(\nabla_{\mathbf{x}}) + \Lambda(t))\mathbf{U}(\mathbf{y}, t) = 0$, причём функция $\mathbf{U}(\cdot, t)$ наследует условие Дирихле от $U(\cdot, t)$. Отсюда сначала выведем, что сохраняется точка отсечки (23) (в полуполосе ϖ_j применяем это наблюдение к функции $\cos(\pi \eta_j / \ell_j)$, идентифицирующей грань непрерывного спектра), а затем вычисляем собственное число (24). Все сформулированные ранее требования выполнены.

²Дискретный спектр непустой конечно же и при отсутствии симметрии, которая придумана исключительно для сравнения с задачей теории упругости.

3. *Система Ламе.* Пусть $N = K = 3$, а оператор-матрица (4) размером 3×3 имеет вид

$$L^L(\nabla_x) = -\mu \Delta_x - (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot, \quad (25)$$

где $\nabla_x = \text{grad}$, $\nabla_x \cdot = \text{div}$, а $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ – постоянные Ламе. Задача (1), (2) описывает деформацию однородными изотропного сочленения четвертей толстых плит с зафиксированной поверхностями под действием массовых сил (рис. 1, d). При этом $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ – вектор смещений, интерпретируемый как столбец в пространстве \mathbb{R}^3 , а декартовы компоненты тензоров деформаций и напряжений имеют обычный вид (см., например, [12])

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jk}(u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad j, k = 1, 2, 3, \\ \sigma_{jk}(u) &= 2\mu \varepsilon_{jk}(u) + \delta_{j,k} \lambda (\varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u) + \varepsilon_{33}(u)). \end{aligned} \quad (26)$$

Благодаря условиям Дирихле в вариационную задачу (3) можно включить так называемую квазиэнергию [19]

$$\begin{aligned} E^L(u, u; \Omega) &= \int_{\Omega} (\mu |\nabla_x u(x)|^2 + (\lambda + \mu) |\nabla_x \cdot u(x)|^2) dx \\ &\geq \mu \|\nabla_x u; L^2(\Omega)\|^2 \end{aligned} \quad (27)$$

вместо общепринятого функционала (удвоенной) упругой энергии

$$E^{true}(u, u; \Omega) := \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{jk}(u; x) \varepsilon_{jk}(u; x) dx. \quad (28)$$

Обратим внимание на принципиальное различие билинейных форм (27) и (28): обе обладают полиномиальным свойством (7) (см. [14, пример 1.12]), однако у истинной упругой энергии полиномиальное подпространство \mathcal{P} – шестимерный линеал жёстких смещений³ $\{u(x) = a^0 + a^1 \times x \mid a^0, a^1 \in \mathbb{R}^3\}$, но у квазиэнергии $\mathcal{P} = \mathbb{R}^3$ – трёхмерный линеал постоянных столбцов.

Интегральное тождество (10) с полуторалинейной формой $E^{L^0}(U, \Psi; \Pi, t)$, порождённой квадратичной формой (27), задаёт неограниченный самосопряжённый оператор $\mathcal{B}^{L^0}(t)$ в гильбертовом пространстве $L^2(\Pi)^3$. В первую очередь рассмотрим соответствующую задачу (9) при $t = 0$. Она распадается на две независимые задачи

³Крестом обозначено векторное произведение в пространстве \mathbb{R}^3 .

(см., например, [12]), а именно плоскую задачу теории упругости для вектора смещений $U^{\pm} = (U_1, U_2)^{\top}$ в плоскости (y_1, y_2) , включающую (2×2) -матрицу дифференциальных операторов

$$L^{\pm}(\nabla_y) = -\mu\Delta_y - (\lambda + \mu)\nabla_y \nabla_y. \quad (29)$$

и скалярную задачу для деформации $U^! = U_3$ с оператором $L^!(\nabla_y) = -\mu\Delta_y$. Двумерный оператор Ламе (29) связывается с функционалом плоской квазиэнергии

$$E^{\pm}(U^{\pm}; U^{\pm}; \Pi) = \mu \|\nabla_y U^{\pm}; L^2(\Pi)\|^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla_y \cdot U^{\pm}; L^2(\Pi)\|^2. \quad (30)$$

На основе последнего неравенства из формулы (27) в работах [20, 21] показано, что точка отсечки непрерывного спектра оператора $\mathcal{B}^{\pm}(0)$ имеет тот же вид, что и у оператора $\mathcal{B}^!(0) = \mu\mathcal{B}^{\Delta}(0)$ (величина (23), умноженная на μ):

$$\Lambda_{\mp}(0) = \mu \min\{\pi^2 \ell_j^{-2} \mid j = 1, \dots, J\}.$$

Отправным пунктом соответствующих рассуждений служит следующее элементарное наблюдение: “стоячие” волны в скалярной и векторной задачах, обеспечивающие точки отсечки $\mu\pi^2 \ell_j^{-2}$ непрерывного спектра в полуполосе ϖ_j шириной ℓ_j , заданы следующими формулами:

$$U_{\mp}^{\pm}(\xi^j) = e_{\eta}^j \cos(\pi\eta_j/\ell_j) \quad \text{и} \quad U_{\mp}^!(\xi^j) = \cos(\pi\eta_j/\ell_j).$$

Здесь e_{η}^j и e_{ζ}^j – орты осей η_j и ζ_j локальной системы декартовых координат ξ^j .

Теорема 1. *Если в дискретных спектрах $\wp_{\bar{d}}^{\pm}(0)$ и $\wp_d^!(0)$ операторов $\mathcal{B}^{\pm}(0)$ и $\mathcal{B}^!(0)$ есть (минимальные) собственные числа $\Lambda_{\bar{1}}^{\pm}(0)$ и $\Lambda_1^!(0)$, то справедливо неравенство $\Lambda_1^!(0) < \Lambda_{\bar{1}}^{\pm}(0)$. Кроме того, если $\wp_{\bar{d}}^{\pm}(0) \neq \emptyset$, то $\wp_d^!(0) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Минимальный принцип [15, теорема 10.2.1], применённый к упомянутым операторам даёт первичную оценку, которая, в частности, проверяет последнее утверждение,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\bar{1}}^{\pm}(0) &= \min_{\psi^{\pm} \in H_0^1(\Pi)^2 \setminus \{0\}} \frac{\mu \|\nabla_y \psi^{\pm}; L^2(\Pi)\|^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla_y \cdot \psi^{\pm}; L^2(\Pi)\|^2}{\|\psi^{\pm}; L^2(\Pi)\|^2} \\ &\geq \mu \min_{(\psi_1, \psi_2) \in H_0^1(\Pi)^2 \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_y \psi_1; L^2(\Pi)\|^2 + \|\nabla_y \psi_2; L^2(\Pi)\|^2}{\|\psi_1; L^2(\Pi)\|^2 + \|\psi_2; L^2(\Pi)\|^2} = \Lambda_1^!(0). \end{aligned} \quad (31)$$

Допустим, что $\Lambda_{\bar{1}}^{\pm}(0) = \Lambda_1^!(0)$. Соответствующая собственная вектор-функция $U^{\pm}(\cdot, 0)$ не может быть соленоидальной, так как равенство

$\nabla_y \cdot U^{\pm}(y, 0) = 0$ означает, что обе компоненты $U_1(\cdot, 0)$ и $U_2(\cdot, 0)$ удовлетворяют однородной задаче Дирихле для оператора Гельмгольца $\mu\Delta_y + \Lambda_1^1(0)$, и потому $U^{\pm}(y, 0) = cU^1(y, 0)$ с некоторым постоянным столбцом $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$, а значит,

$$c_1 \frac{\partial U^1}{\partial y_1}(y, 0) + c_2 \frac{\partial U^1}{\partial y_2}(y, 0) = 0, \quad y \in \Pi. \quad (32)$$

Последнее равенство нелепо, поскольку собственная функция $U^1(\cdot, 0)$ не может зависеть лишь от одной переменной $c_2 y_1 - c_1 y_2$. Теперь пространство $H_0^1(\Pi)^2$ в цепочке (31) можно заменить подмножеством

$$\{\psi^{\pm} \in H_0^1(\Pi)^2 : \|\psi^{\pm}; L^2(\Pi)\| = 1, \|\nabla_y \cdot \psi^{\pm}; L^2(\Pi)\| > \delta_{\Pi}\}$$

с некоторым $\delta_{\Pi} > 0$ и тем самым превратить знак нестрогого \geq в знак строгого $>$ неравенств. Теорема 1 доказана. \square

В первом пункте данного параграфа приведены примеры существования собственных чисел в дискретном спектре задачи Дирихле для оператора $L^1(\nabla_x)$. Первое из них простое по теореме Крейна–Рутмана. Кроме того, благодаря теореме 1 формула (20) обеспечена следующей простой выкладкой, в которой неравенство

$$\mu \|\nabla_y v; L^2(\Omega)\|^2 \geq \Lambda_1^1(0) \|v; L^2(\Omega)\|^2 \quad (33)$$

применяем к каждой из трёх компонент вектор-функции v :

$$\begin{aligned} E(u, u; \Omega) &= \mu \|\nabla_y v; L^2(\Omega)\|^2 + \mu \|\partial_z v; L^2(\Omega)\|^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla_x \cdot v; L^2(\Omega)\|^2 \\ &\geq \Lambda_1^1(0) \|v; L^2(\Omega)\|^2 + \mu \|\partial_z v; L^2(\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

Для проверки выполнения ещё одного требования (18) построим асимптотику при $\mathbb{R} \ni t \rightarrow 0$ собственного числа

$$\Lambda_1(t) = \Lambda_1^1(0) + t\Lambda' + t^2\Lambda'' + \tilde{\Lambda}_1(t), \quad (34)$$

заведомо сохраняющего простоту при $|t| \leq t_0$ и малом $t_0 > 0$. Соответствующую собственную вектор-функцию ищем в виде

$$U(y, t) = e_{(z)} U^1(y) + itU'(y) + t^2U''(y) + \tilde{U}(y, t), \quad (35)$$

где U^1 – первая собственная функция задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Π , а $e_{(z)}$ – орт оси z .

Подставим формулы (35) и (34) в задачу (10), порождённую двумерным оператором Ламе (25) и соберём коэффициенты при t и t^2 . На

первом шаге формируем задачи

$$\begin{aligned} L^{\neq}(\nabla_y)U'^{\neq}(y) - \Lambda_1^!U'^{\neq}(y) &= (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\nabla_y \cdot U^!(y), \quad y \in \Pi \\ U'^{\neq}(y) &= 0, \quad y \in \partial\Pi, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\mu}\Delta_y U'^1(y) - \Lambda_1^!U'^1(y) &= -i\Lambda'U^1(y), \quad y \in \Pi, \\ U'^1(y) &= 0, \quad y \in \partial\Pi, \end{aligned} \quad (37)$$

Скалярная задача (37) имеет (частное) решение $U'^1 = 0$ лишь в случае

$$\Lambda' = 0,$$

но векторная задача (36) разрешима в классе вектор-функций, затухающих на бесконечности с экспоненциальной скоростью, так как $\Lambda_1^!(0)$ не является её собственным числом в силу теоремы 1. Кроме того, U'^{\neq} – вещественная вектор-функция.

На втором шаге нужно обследовать только следующую задачу для пары $\{\Lambda''; U''^1\}$:

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\mu}\Delta_y U''^1(y) - \Lambda_1^!U''^1(y) &= F''^1(y) \\ &:= \Lambda''U^1(y) - (\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\mu})U^1(y) - (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\nabla_y U'^{\neq}(y), \quad y \in \Pi, \\ U''^1(y) &= 0, \quad y \in \partial\Pi, \end{aligned}$$

Поскольку $\Lambda_1^!$ – простое собственное число, эта задача разрешима при выполнении равенства $\int_{\Pi} U^1(y)F''^1(y)dy = 0$, которое принимает вид

$$\Lambda''\|U^1; L^2(\Pi)\|^2 = I := \int_{\Pi} U^1(y)((\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\mu})U^1(y) + (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\nabla_y \cdot U'^{\neq}(y))dy.$$

Теорема 2. *Справедливо соотношение $I > 0$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} I &:= (\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\mu})\|U^1; L^2(\Pi)\|^2 + 2(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})(U^1, \nabla_y \cdot U'^{\neq})_{\Pi} + (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})(U'^{\neq}, \nabla_y U^1)_{\Pi} \\ &= (\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\mu})\|U^1; L^2(\Pi)\|^2 + 2(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})(U^1, \nabla_y \cdot U'^{\neq})_{\Pi} + (U'^{\neq}, (L^{\neq}(\nabla_y) - \Lambda_1^!(0))U'^{\neq})_{\Pi} \\ &= (\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\mu})\|U^1; L^2(\Pi)\|^2 + 2(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})(U^1, \nabla_y \cdot U'^{\neq})_{\Pi} \\ &+ (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\|\nabla_y \cdot U'^{\neq}; L^2(\Pi)\|^2 + \boldsymbol{\mu}\|\nabla_y U'^{\neq}; L^2(\Pi)\|^2 - \Lambda_1^!(0)\|U'^{\neq}; L^2(\Pi)\|^2 \\ &= \boldsymbol{\mu}\|U^1; L^2(\Pi)\|^2 + (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\|U^1 + \nabla_y \cdot U'^{\neq}; L^2(\Pi)\|^2 \\ &+ \boldsymbol{\mu}\|\nabla_y U'^{\neq}; L^2(\Pi)\|^2 - \Lambda_1^!(0)\|U'^{\neq}; L^2(\Pi)\|^2 =: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Пояснение: сначала добавили выражение

$$(\lambda + \mu)(U^!, \nabla_y \cdot U'^{=:})_{\Pi} + (\lambda + \mu)(U'^{=:}, \nabla_y U^!)_{\Pi} = 0,$$

затем при учёте задачи (36) воспользовались формулой Грина для оператора (29) и, наконец, приняли во внимание формулу (30) для квазиэнергии и перегруппировали члены. Первое слагаемое положительно, второе неотрицательно, а формула $I_3 \geq 0$ обеспечена неравенством (33). Теорема 2 доказана. \square

Итак, задача Дирихле для системы Ламе (25) удовлетворяет всем сформулированным в §§1 и 2 требованиям.

Теорема 1 значительно расширяет возможности исследования задач теории упругости о сочленении пластин. Дело в том, что для проверки непустоты дискретного спектра задачи Дирихле для оператора Лапласа разработано множество подходов (см. [18, 23–28] и др. публикации), в то время как к векторным задачам теории упругости применимы лишь некоторые приёмы, пригодные для скалярных задач. Показательным является описанное выше симметричное сочленение $\Pi_{\#}$ единичных полуполос $\varpi_1, \dots, \varpi_J$. Как уже упоминалось, дискретный спектр оператора $\mathcal{B}_{\#}^{\Delta}(0)$ скалярной задачи непустой при любом количестве J выходов на бесконечность. В то же время для оператора $\mathcal{B}_{\#}^{\text{L}}(0)$ векторной задачи аналогичный результат известен лишь в случае чётного $J = 2\mathbf{J}$ (см., например, рис. 1, b), а при нечётном $J = 2\mathbf{J} + 1$ наличие собственных чисел в $\wp_{d\#}^{\text{L}}(0)$ не подтверждено до сих пор (ср. рис. 1, а, для $J = 3$ и статью [29] по поводу скалярной задачи). Дело в том, что подход [18], обслуживающий скалярную задачу при любом J , неприменим для системы Ламе, но при чётном J в сочленении $\Pi_{\#}$ находим цельную – не изломанную – единичную полосу и применяем принцип сравнения, т.е. простое следствие минимального принципа (16) (см., например, работу [30]). При отсутствии цельной полосы подходящие пробные вектор-функции в упомянутом принципе для векторной задачи всё ещё не найдены.

§4. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ
ВЕСОВОМ КЛАССЕ

В этом параграфе сначала считаем, что матрица $A(x)$ из дифференциального оператора (4) совпадает с матрицей $A^0(y)$. Соответствующее интегральное тождество

$$(A^0 D(\nabla_x)u, D(\nabla_x)\psi)_\Omega - \lambda(u, \psi)_\Omega = (f, \psi)_\Omega \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^K. \quad (38)$$

содержит в левой части билинейную форму E^0 , причём под $B^0(\lambda)$ понимаем соответствующий оператор: $H_0^1(\Omega)^K \rightarrow (H_0^1(\Omega)^K)^*$, а $B(\lambda)$ – такой же оператор исходной задачи (3).

Пусть параметр λ в интегральном тождестве (38) удовлетворяет соотношению

$$\lambda < \lambda_\dagger = \Lambda_1(0). \quad (39)$$

Тогда в силу формулы (20) имеем

$$E^0(v, v; \Omega) - \lambda \|v; L^2(\Omega)\|^2 \geq (\lambda_\dagger - \lambda) \|v; L^2(\Omega)\|^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Pi)^K,$$

т.е. несложно проверить, что оператор $B^0(\lambda)$ – изоморфизм.

Подставим в соотношение (38) пробную вектор-функцию $\psi = \mathcal{E}_\beta^2 \varphi$, где $\varphi \in C^\infty(\Omega)^K$ и $\beta = (\beta_z, \beta_y)$ с положительными компонентами β_y и β_z , а также

$$\mathcal{E}_\beta(y, z) = e^{\beta_z z} e^{\beta_y(1+|y|^2)^{1/2}}. \quad (40)$$

После замены $u \mapsto v = \mathcal{E}_\beta u$ и двукратного коммутирования дифференциального оператора $D(\nabla_x)$ и весовой функции (40) приходим к соотношению

$$\widehat{E}_\beta(v, \varphi; \Omega) := E^0(v, \varphi; \Omega) - \mathcal{R}_\beta(v, \varphi; \Omega) - \lambda(v, \varphi)_\Omega = (\mathcal{E}_\beta f, \varphi)_\Omega, \quad (41)$$

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)^K.$$

в котором

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\beta(v, \varphi; \Omega) &= (A^0 \mathcal{E}_{-\beta} [D(\nabla_x), \mathcal{E}_\beta] v, \mathcal{E}_{-\beta} [D(\nabla_x), \mathcal{E}_\beta] \varphi)_\Omega \\ &+ (A^0 \mathcal{E}_{-\beta} [D(\nabla_x), \mathcal{E}_\beta] v, D(\nabla_x) \varphi)_\Omega - (A^0 D(\nabla_x) v, \mathcal{E}_{-\beta} [D(\nabla_x), \mathcal{E}_\beta] \varphi)_\Omega. \end{aligned}$$

Заметим, что коммутатор $[D(\nabla_x), \mathcal{E}_\beta]$ есть не что иное, как оператор умножения на матрицу-функцию $x \mapsto D(\nabla_x) \mathcal{E}_\beta(x)$, и к тому же

$$|\mathcal{E}_{-\beta}(x) [D(\nabla_x), \mathcal{E}_\beta(x)]| \leq C_D (\beta_z + \beta_y |y| (1 + |y|^2)^{-1/2}) \leq C_D (\beta_z + \beta_y).$$

В итоге находим такие малые положительные показатели β_z и β_y , что билинейная форма из левой части тождества (41), которое в случае

$\mathcal{E}_\beta f \in L^2(\Omega)^K$ по замыканию распространяется на все пробные вектор-функции $\varphi \in H_0^1(\Omega)^K$, удовлетворяет неравенству

$$\widehat{E}_\beta(v, v; \Omega) \leq c_\beta (\|\nabla_x v; L^2(\Omega)\|^2 + \|v; L^2(\Omega)\|^2) \leq C_\beta E^0(v, v; \Omega).$$

В итоге при помощи леммы Лакса–Мильграма устанавливаем следующий результат, в котором фигурируют пространства Лебега $\mathcal{W}_\beta^0(\Omega)$ и Соболева $\mathcal{W}_\beta^1(\Omega)$ с весом (40), а именно, пространство $\mathcal{W}_\beta^1(\Omega)$ состоит из функций $w \in H_{loc}^1(\overline{\Omega})$, обладающих конечной нормой $\|\mathcal{E}_\beta w; H^1(\Omega)\|$, и подпространство $\mathcal{W}_{\beta,0}^1(\Omega)$ выделено краевым условием (2).

Предложение 2. Пусть справедливы неравенства (20) и (39). Тогда найдутся такие положительные показатели β_z и β_y , что задача (38) с билинейной формой $E^0(\cdot, \cdot; \Omega) = (A^0 D(\nabla_x) \cdot, D(\nabla_x) \cdot)_\Omega$, параметром (39) и правой частью $f \in \mathcal{W}_\beta^0(\Omega)^K$ при $\beta = (\beta_y, \beta_z)$ имеет единственное решение $u \in \mathcal{W}_{\beta,0}^1(\Omega)^K \subset H_0^1(\Omega)^K$ и для него верна оценка

$$\|u; \mathcal{W}_\beta^1(\Omega)\| \leq c_{A,\beta} \|f; \mathcal{W}_\beta^0(\Omega)\|, \quad (42)$$

причём множитель $c_{A,\beta}$ не зависит от вектор-функции f .

Конечно же, предложение 2 сохраняет силу при замене правой части $f \in \mathcal{W}_\beta^0(\Omega)^K$ линейным непрерывным функционалом f из сопряжённого пространства $(\mathcal{W}_{-\beta,0}^1(\Omega)^K)^*$, причём под $(\cdot, \cdot)_\Omega$ подразумеваем подходящее расширение скалярного произведения в пространстве $L^2(\Omega)^K$. Такую подмену осуществим в финальном утверждении для оператора $B_\beta(\lambda)$ задачи (1), (2) в экспоненциальных весовых классах. Именно, этот оператор и сопряжённый $B_{-\beta}(\lambda) = B_\beta(\lambda)^*$ для него (ввиду симметричности билинейной формы $E(\cdot, \cdot; \Omega)$) обслуживают интегральные тождества

$$E(u^\pm, \psi^\pm; \Omega) = (f^\pm, \psi^\pm)_\Omega \quad \forall \psi^\pm \in \mathcal{W}_{\mp\beta,0}^1(\Omega)^K \quad (43)$$

и действуют следующим образом:

$$\mathcal{W}_{\pm\beta,0}^1(\Omega)^K \ni u^\pm \mapsto B_{\pm\beta}(\lambda)u^\pm = f^\pm \in (\mathcal{W}_{\mp\beta,0}^1(\Omega)^K)^* \quad (44)$$

Теорема 3. При выполнении условия (20) и ограничения (39) задача (43) со знаком плюс имеет решение $u \in \mathcal{W}_{\beta,0}^1(\Omega)^K$ с показателями β_z и β_y , указанными предложением 2, в том и только в том случае, если функционал $f \in (\mathcal{W}_{-\beta,0}^1(\Omega)^K)^*$ из правой части интегрального тождества удовлетворяет условиям ортогональности

$$(f, u^-)_\Omega = 0 \quad \forall u^- \in \ker B_{-\beta}(\lambda). \quad (45)$$

Это решение определено с точностью до слагаемого из ядра $\ker B_{+\beta}(\lambda)$ отображения (44) со знаком плюс, но, будучи подчинено условиям

$$(u, u^+)_{\Omega} = 0 \quad \forall u^+ \in \ker B_{\beta}(\lambda) \quad (46)$$

становится единственным и удовлетворяющим оценке (42) с правой частью $c_{A,\beta} \|f\|; (\mathcal{W}_{-\beta,0}^1(\Omega)^K)^*$.

Доказательство. Как обычно, для проверки фредгольмовости достаточно построить регуляризатор (параметрикс), т.е. такое отображение

$$R_{\beta}(\lambda) : (\mathcal{W}_{\beta,0}^1(\Omega)^K)^* \rightarrow \mathcal{W}_{\beta,0}^1(\Omega)^K, \quad (47)$$

что $B_{\beta}(\lambda)R_{\beta}(\lambda) - \text{Id}$ – компактный оператор; здесь Id – тождественное отображение.

По причине стабилизации элементов матрицы $A(x)$ (см., в частности, формулу (8)) замена

$$A(x) \mapsto A^{\rho}(x) = A^0(y) + \chi_{\rho}(x)(A(x) - A^0(y)), \quad (48)$$

где $\chi_{\rho}(x) = \chi(|x|/\rho)$ и χ – срезающая функция (14), порождает оператор $B_{\beta}^{\rho}(\lambda)$ соответствующей задачи, который малым слагаемым отличается от оператора $B_{\beta}^0(\lambda)$ задачи (38) и, следовательно, становится обратимым при достаточно большом $\rho > 0$. В качестве первого фрагмента регуляризатора возьмём $R_{\beta}^{\rho}(f) = \chi_{\rho} B_{\beta}^{\rho}(\lambda)^{-1} f \chi_{\rho}$, где функционал $\psi \mapsto (f_{\rho}, \psi)_{\Omega} = (f \chi_{\rho}, \psi)_{\Omega}$ имеет носитель вне ограниченного множества $\Omega_{\rho} = \{x \in \Omega : |x| < \rho\}$. Оставшаяся правая часть $f^{\circ} = f(1 - \chi_{\rho}^2) + \tilde{f}$, в которой слагаемое \tilde{f} вызвано заменой (48) и потому включает срезку $1 - \chi_{\rho}$, имеет компактный носитель, где весовой множитель (40) не играет никакой роли. Таким образом, ввиду эллиптичности задачи можно применить к $f^{\circ} \in (H_0^1(\Omega_{2\rho})^K)^*$ стандартный регуляризатор $R_{2\rho}^{\circ}$ для задачи Дирихле в области $\Omega_{2\rho}$, продолженный нулём на всю бесконечную область Ω . В результате сумма $f \mapsto R_{\beta}^{\rho}(f) + (1 - \chi_{2\rho-1})R_{2\rho}^{\circ}(f^{\circ})$ как раз и является искомым регуляризатором (47).

Итак, оператор $B_{\beta}(\lambda)$ фредгольмов, и поэтому формулы (45) и (46) стали очевидными. Вместе с тем описание его ядра и коядра ещё предстоит получить (см. следствие 1 и замечание 3) и, в частности, проверить равенство $\ker B_{\beta}(\lambda) = \ker B_{-\beta}(\lambda)$, означающее, в частности, что индекс $\text{Ind } B_{\beta}(\lambda)$ нулевой. Отметим, что по доказанному оператор $B_{\beta}^0(\lambda)$ – изоморфизм, однако $B_{\beta}(\lambda)$ не является его компактным

возмущением и, вообще говоря, индекс $\text{Ind } B_\beta^0(\lambda) = 0$ может измениться. \square

§5. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ В СТЕПЕННОМ ВЕСОВОМ КЛАССЕ

Пусть в задаче (3) матрица $A(x)$ заменена матрицей $A^0(y)$ и параметр λ совпадает с “критическим” (19). Тогда соотношение (20) и классическое неравенство Харди [31]

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{dV}{dz}(z) \right|^2 dz \geq \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} |V(z)|^2 \frac{dz}{z^2} \quad \forall V \in C_c^\infty(0, +\infty) \quad (49)$$

приводят к оценке

$$\begin{aligned} E^0(u, u; \Omega) - \lambda_+ \|u; L^2(\Omega)\|^2 &\geq \varrho \|\partial_z u; L^2(\Omega)\|^2 \\ &\geq \frac{\varrho}{4} \|(1+z^2)^{-1/2} u; L^2(\Omega)\|^2. \end{aligned} \quad (50)$$

Весовой множитель z^{-2} уменьшен в неравенстве (49) до $(1+z^2)^{-1}$ для удобства.

Обозначим через $\mathcal{V}_0^1(\Omega)^K$ пополнение линейала $C_c^\infty(\Omega)^K$ по “энергетической” норме

$$\|u; \mathcal{V}_0^1(\Omega)\| = (E^0(u, u; \Omega) - \lambda_+ \|u; L^2(\Omega)\|^2)^{1/2}. \quad (51)$$

Нужные свойства этой квадратичной формы обеспечены, в частности, оценкой (50) (см. также ниже соотношение (52)). Пространство $\mathcal{V}_0^1(\Omega)^K$ состоит из тех вектор-функций $u \in H_{loc}^1(\overline{\Omega})^K$, которые удовлетворяют условию Дирихле (3) и имеют конечную норму (51).

Предложение 3. *Если справедливы неравенство (20) и включение $(1+z^2)^{1/2} f \in L^2(\Omega)^K$, то задача*

$$E^0(u, \psi; \Omega) - \lambda_+(u, \psi)_\Omega = (f, \psi)_\Omega \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_0^1(\Omega)^K$$

имеет единственное решение $u \in \mathcal{V}_0^1(\Omega)^K$ причём верна оценка

$$\begin{aligned} \|(1+z^2)^{-1/2} \nabla_x u; L^2(\Omega)\|^2 + \|(1+z^2)^{-1/2} u; L^2(\Omega)\|^2 \\ \leq c_0 \|u; \mathcal{V}_0^1(\Omega)\|^2 \leq C_0 \|(1+z^2)^{1/2} f; L^2(\Omega)\|^2, \end{aligned} \quad (52)$$

а множители c_0 и C_0 не зависят от u и f .

Доказательство. Ввиду теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве достаточно проверить первое неравенство в цепочке (52). Вспомним соотношение (50) и разбиение области Ω на ячейки \square_{Θ}^m и \square_{jk}^m , введённое при доказательстве леммы 1. В неравенстве Корна (6)

$$\begin{aligned} \|\nabla_x u; L^2(\square_{\dots})\|^2 \leq c_{\square_{\dots}} (E^0(u, u; \square_{\dots}) - \lambda_{\dagger} \|u; L^2(\square_{\dots})\|^2) \\ + c_{\square_{\dots}} \lambda_{\dagger} \|u; L^2(\square_{\dots})\|^2 \end{aligned} \quad (53)$$

фигурируют только $1 + J$ разных коэффициентов $c_{\square_{\dots}}$. Умножим обе части формулы (53) на $(1 + |x_{\dots}^m|^2)^{-1} \leq 1$, где x_{jk}^m – центр куба \square_{jk}^m или точка $(0, 0, m - 1/2)$ в случае ячейки \square_{Θ}^m . Благодаря формулам

$$c_{\square}(1 + |x|^2) \leq 1 + |x_{\dots}^m|^2 \leq C_{\square}(1 + |x|^2) \text{ при } x \in \square_{\dots}^m$$

с общими для всех ячеек положительными постоянными c_{\square} и C_{\square} заносим весовые множители под знаки норм, но множитель при функционале энергии увеличиваем до единицы. В итоге приходим к оценкам

$$\begin{aligned} \|(1 + |x|^2)^{-1/2} \nabla_x u; L^2(\square_{\dots})\|^2 \\ \leq C \left(E^0(u, u; \square_{\dots}) - \lambda_{\dagger} \|u; L^2(\square_{\dots})\|^2 + c \|(1 + |x|^2)^{-1/2} u; L^2(\square_{\dots})\|^2 \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Осталось просуммировать неравенства (54) по всем ячейкам и воспользоваться формулой (50) (без средней её части). Предложение 3 доказано. \square

Следующее утверждение проверяется аналогично доказательству теоремы 3. Пространство $\mathcal{V}_0^1(\Omega)^K$, снабжённое “энергетической” нормой, гильбертово, оператор $B_{\mathcal{V}} : \mathcal{V}_0^1(\Omega)^K \rightarrow (\mathcal{V}_0^1(\Omega)^K)^*$ вариационной задачи

$$E(u, \psi; \Omega) - \lambda_{\dagger}(u, \psi)_{\Omega} = (f, \psi)_{\Omega} \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_0^1(\Omega)^K \quad (55)$$

совпадает со своим сопряжённым, а значит, его индекс заведомо равен нулю.

Теорема 4. Пусть справедливо неравенство (20). Задача (55) имеет решение $u \in \mathcal{V}_0^1(\Omega)^K$ тогда и только тогда, когда функционал $f \in (\mathcal{V}_0^1(\Omega)^K)^*$ из правой части интегрального тождества удовлетворяет условиям ортогональности $(f, \mathbf{u}_{(q)})_{\Omega} = 0$, $q = 1, \dots, Q$, где $\mathbf{u}_{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{(Q)} \in \mathcal{V}_0^1(\Omega)^K$ – базис в конечномерном пространстве решений однородной ($f = 0$) задачи (55). Само решение определено с точностью до линейной комбинации названных решений, но, будучи

подчинено условиям ортогональности $(u, \mathbf{u}_{(q)})_{\Omega} = 0$ при $q = 1, \dots, Q$, становится единственным и удовлетворяющим оценке

$$\|u; \mathcal{V}_0^1(\Omega)\| \leq C \|f; (\mathcal{V}_0^1(\Omega)^K)^*\|.$$

§6. ИЗУЧЕНИЕ КВАДРАТИЧНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

Приступая собственно к изучению асимптотики решений задачи (3) (или (1), (2) в дифференциальной форме при гладких данных; см. §1), следуем общей схеме теории Кондратьева [3] (см. также, например, монографии [22] и [32]) и сначала рассматриваем модельную задачу в “цельном цилиндре” $\Pi \times \mathbb{R}$ с матрицей $A^0(y)$

$$E^0(u, \psi; \Pi \times \mathbb{R}) - \lambda_{\dagger}(u, \psi)_{\Pi \times \mathbb{R}} = (f, \psi)_{\Pi \times \mathbb{R}} \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Pi \times \mathbb{R})^K.$$

Применим формально преобразование Фурье $\mathcal{F}_{z \rightarrow t}$ на прямой $\mathfrak{L}_T = \{t \in \mathbb{C} : \text{Im } t = T\}$ в комплексной плоскости, которая (прямая) параллельна вещественной оси. В результате получим семейство задач

$$E^0(U, \Psi; \Pi, t) - \lambda_{\dagger}(U, \Psi)_{\Pi} = (F, \Psi)_{\Pi} \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Pi)^K,$$

где фигурирует полуторалинейная эрмитова форма

$$E^0(U, \Psi; \Pi, t) = (A^0 D(\nabla_y, it)U, D(\nabla_y, -it)\Psi)_{\Pi},$$

с параметром $t \in \mathfrak{L}_T$ и его комплексно сопряжённым \bar{t} , а также функционалом $F = F(\cdot, t) \in (H_0^1(\Pi)^K)^*$. Это семейство порождает полиномиальный (квадратичный) операторный пучок

$$\mathfrak{S} \ni t \mapsto \mathfrak{B}(t; \lambda_{\dagger}) : H_0^1(\Pi)^K \rightarrow (H_0^1(\Pi)^K)^*. \quad (56)$$

К сожалению, из-за неограниченности области Π и отсутствия свойства компактности у вложения $H_0^1(\Pi) \subset L^2(\Pi)$ не удаётся воспользоваться общей теорией [33] несамосопряжённых операторных пучков, в частности, аналитической альтернативой Фредгольма (см., например, [33, теорема 1.5.1]). Поэтому изучим пучок $\mathfrak{B}(\cdot; \lambda_{\dagger})$ непосредственно. Отметим, что спектр $\mathfrak{S} \subset \mathbb{C}$ пучка (56) обладает двойной симметрией по причине симметричности и вещественности матрицы A^0 , т.е. для его дискретной части \mathfrak{S}_d верна формула

$$t \in \mathfrak{S}_d \Rightarrow \pm \bar{t} \in \mathfrak{S}_d. \quad (57)$$

Пространство Соболева $H_0^1(\Pi)$, которое снабжено эквивалентной нормой

$$(\|\nabla_y v; L^2(\Pi)\|^2 + (1 + s^2)\|v; L^2(\Pi)\|^2)^{1/2},$$

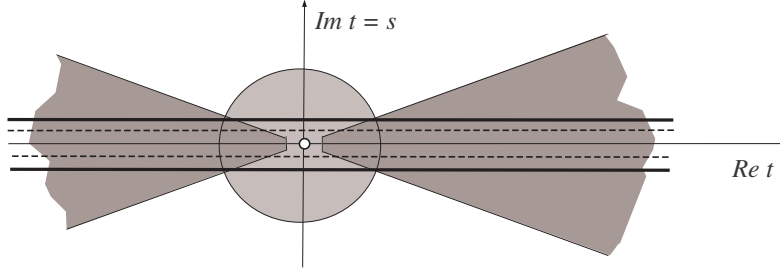


Рис. 3. Круг $\odot(\mathfrak{r})$ тонирован, а двойной угол $\bowtie(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ с обломанными кончиками тонирован глубоко. Прямые интегрирования $\mathfrak{L}_{\pm\gamma}$ отмечены штрих-пунктирными линиями, а прямые $\mathfrak{L}_{\pm\mathfrak{b}}$ – полужирными.

зависящей от параметра $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, обозначим через $H_0^1(\Pi; s)$.

Убедимся в том, что при $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathfrak{L}_0 \setminus \{0\}$ существует обратный оператор $\mathfrak{B}(t; \lambda_{\dagger})^{-1}$. Неравенство (20) после преобразования Фурье показывает, что

$$\|U; L^2(\Pi)\|^2 \leq \varrho^{-1} t^{-2} (E^0(U, U; \Pi, t) - \lambda_{\dagger} \|U; L^2(\Pi)\|^2). \quad (58)$$

Теперь лемма 1 обеспечивает ещё одно неравенство

$$\begin{aligned} \|\nabla_x U; L^2(\Pi)\|^2 &\leq C_{A^0} E^0(U, U; \Pi, t) \\ &\leq C_{A^0} (1 + \lambda_{\dagger} \varrho^{-1} t^{-2}) (E^0(U, U; \Pi, t) - \lambda_{\dagger} \|U; L^2(\Pi)\|^2). \end{aligned}$$

которое вместе с соотношениями (58) устанавливает, что оператор $\mathfrak{B}(t; \lambda_{\dagger})$ обратим. Вместе с тем рост $O(t^{-2})$ при $t \rightarrow 0$ мажорант в указанных неравенствах приводит к следующей оценке:

$$\left\| \mathfrak{B}(t; \lambda_{\dagger})^{-1}; (H_0^1(\Pi; t)^K)^* \rightarrow H_0^1(\Pi; t)^K \right\| \leq \mathfrak{C}(1 + t^{-2}). \quad (59)$$

Формула (59) наводит на мысль, что у пучка (56) в точке $t = 0$ есть полюс второго порядка – подтвердим это подозрение. Понятно, что корневое подпространство оператора $\mathfrak{B}(0; \lambda_{\dagger})$ натянута на собственные векторы $\mathfrak{U}_1^0 = U^1, \dots, \mathfrak{U}_{\mathfrak{x}}^0 = U^{\mathfrak{x}}$ оператора $\mathfrak{B}^0(0)$, отвечающие его собственному числу $\Lambda_1(0) = \lambda_{\dagger}$ (см. текст перед формулой (17)). Построим присоединённые векторы \mathfrak{U}_p^1 первого порядка, которые, как обычно,

следует искать из абстрактного уравнения

$$\mathfrak{B}(0; \lambda_{\dagger})\mathfrak{U}_p^1 = -\frac{d\mathfrak{B}}{dt}(0; \lambda_{\dagger})\mathfrak{U}_p^0. \quad (60)$$

В согласии с определением (56) пучка и со строением матрицы $D(\nabla_x)$ это уравнение принимает вид интегрального тождества

$$\begin{aligned} E^0(\mathfrak{U}_q^1, \Psi; \Pi) - \lambda_{\dagger}(\mathfrak{U}_q^1, \Psi)_{\Pi} &= \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_q^0, \Psi) \\ &:= -(A^0 D(0, 0, i)\mathfrak{U}_q^0, D(\nabla_y, 0)\Psi)_{\Pi} - (A^0 D(\nabla_y, 0)\mathfrak{U}_q^0, D(0, 0, -i)\Psi)_{\Pi} \\ &\quad \forall \Psi \in H_0^1(\Pi)^K. \end{aligned}$$

Таким образом, условиями разрешимости семейства уравнений (60) служат равенства

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{U}_q^0, \mathfrak{U}_p^0) = 0, \quad p, q = 1, \dots, \varkappa. \quad (61)$$

Поскольку собственные векторы $\mathfrak{U}_1^0, \dots, \mathfrak{U}_{\varkappa}^0$, а также элементы матрицы A^0 и коэффициенты дифференциального оператора $D(\nabla_y, 1)$ вещественные, равенства (61) выполнены очевидным образом, т.е. присоединённые векторы $\mathfrak{U}_1^1, \dots, \mathfrak{U}_{\varkappa}^1$ на самом деле существуют, причём их можно считать чисто мнимыми вектор-функциями.

Присоединённые векторы $\mathfrak{U}_1^2, \dots, \mathfrak{U}_{\varkappa}^2$ второго порядка ищутся как решения уравнений

$$\mathfrak{B}(0; \lambda_{\dagger})\mathfrak{U}_p^2 = -\frac{d\mathfrak{B}}{dt}(0; \lambda_{\dagger})\mathfrak{U}_p^1 - \frac{1}{2} \frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2}(0; \lambda_{\dagger})\mathfrak{U}_p^0 \quad (62)$$

(см., например, [33, гл. 1], [22, гл. 1] и др.) или, что то же, интегральных тождеств

$$\begin{aligned} E^0(\mathfrak{U}_p^2, \Psi; \Pi) - \lambda_{\dagger}(\mathfrak{U}_p^2, \Psi)_{\Pi} &= \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_p^1, \Psi) - (A^0 D(0, 0, i)\mathfrak{U}_p^0, D(0, 0, -i)\Psi)_{\Pi} \\ &\quad \forall \Psi \in H_0^1(\Pi)^K. \end{aligned}$$

Уравнения (62) при $p = 1, \dots, \varkappa$ не имеют решений и тем самым жордановы цепочки $\{\mathfrak{U}_p^0, \mathfrak{U}_p^1\}$ пучка (56) для его собственного числа $t = 0$ непродолжимы в том и только в том случае, если является неособенной $(\varkappa \times \varkappa)$ -матрица \mathfrak{M} с элементами

$$\mathfrak{M}_{pq} = (A^0 D(0, 0, i)\mathfrak{U}_p^0, D(0, 0, -i)\mathfrak{U}_q^0)_{\Pi} - \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_p^1, \mathfrak{U}_q^0), \quad p, q = 1, \dots, \varkappa. \quad (63)$$

Для проверки формулы $\det \mathfrak{M} \neq 0$ воспользуемся известным подобием алгоритма построения жордановых цепочек пучков и процедурой вычисления асимптотики собственных чисел операторных пучков.

Именно, учитывая проверенные равенства (62), согласно общим процедурам [34, гл. 9]⁴, [35, гл. 6] ищем собственные числа $\Lambda(t)$ оператора $\mathcal{B}^0(t)$ при малом вещественном параметре t в виде

$$\Lambda_p(t) = \Lambda_1(0) + t^2 \Lambda_p'' + \tilde{\Lambda}_p(t), \quad (64)$$

а соответствующие собственные векторы – в виде

$$U_p(\cdot, t) = \mathcal{U}_p^0(\cdot, t) + t \mathcal{U}_p'(\cdot, t) + t^2 \mathcal{U}_p''(\cdot, t) + \tilde{U}_p(\cdot, t). \quad (65)$$

Здесь

$$\mathcal{U}_p^0(y, t) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q^p U_q(y, t) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q^p \mathcal{U}_q^0(y, t), \quad (66)$$

а столбец $a^p = (a_1^p, \dots, a_{\infty}^p)^\top$, число Λ_p'' и вектор-функции $\mathcal{U}_p'(\cdot, t)$, $\mathcal{U}_p''(\cdot, t)$ подлежат определению. Подчеркнём, что требуется провести лишь формальный асимптотический анализ – его обоснование, в частности, уточнение второго и третьего слагаемых разложения собственной вектор-функции, а также оценки асимптотических остатков обеспечены общими результатами цитированных монографий и других источников, например, оригинальной статьи [36].

Подставим формулы (64) и (65) в спектральную задачу

$$E^0(U, \Psi; \Pi, t) = \Lambda(t)(U, \Psi)_\Pi \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Pi)^K \quad (67)$$

и соберём в ней множители при одинаковых степенях параметра t . Ясно, что, положив

$$\mathcal{U}_p'(y, t) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q^p \mathcal{U}_q^1(y, t),$$

уничтожаем в формуле (67) суммы коэффициентов при t (слагаемые порядка единицы исчезают, так как $\{\lambda_\dagger; \mathcal{U}_p^0\}$ – собственные пары). То же самое произойдёт и с суммой коэффициентов при t^2 , если найти пару $\{\Lambda_p''; \mathcal{U}_p''\}$ из интегрального тождества

$$\begin{aligned} E^0(\mathcal{U}_p'', \Psi; \Pi) - \lambda_\dagger(\mathcal{U}_p'', \Psi)_\Pi &= (\mathcal{F}_p'', \Psi) := \Lambda_p''(\mathcal{U}_p^0, \Psi)_\Pi \\ &- (A^0 D(0, 0, i) \mathcal{U}_p', D(\nabla_y, 0) \Psi)_\Pi - (A^0 D(\nabla_y, 0) \mathcal{U}_p', D(0, 0, -i) \Psi)_\Pi \\ &- (A^0 D(0, 0, i) \mathcal{U}_p^0, D(0, 0, -i) \Psi)_\Pi \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Pi)^K. \end{aligned} \quad (68)$$

⁴Эта монография имеет дело с линейными пучками, но сведение квадратичного пучка к линейному несамосопряжённому очевидно.

В силу формулы (64) и соотношения (17) условия $(\mathcal{F}_p, U^q)_\Pi = 0$, $q = 1, \dots, \varkappa$, разрешимости задачи (68) принимают вид системы линейных алгебраических уравнений в количестве \varkappa штук

$$\mathfrak{M}a^p = \Lambda_p'' a^p.$$

Её собственные числа $\Lambda_1'', \dots, \Lambda_\varkappa''$ конкретизируют разложения (64), а собственные векторы a^1, \dots, a^\varkappa – главные члены (66) разложений (65). Если случилось, что хотя бы одно собственное число Λ_m'' равно нулю, то при учёте известной (см., например, [34, гл. 9]) оценки асимптотического остатка $\tilde{\Lambda}_m(t) \leq c|t|^3$ при малом t видим, что требование (18) нарушено. Следовательно, при введённых ограничениях матрица \mathfrak{M} с элементами (63) невырожденная.

Учитывая малость возмущения $\mathfrak{B}(t; \lambda_\dagger) - \mathfrak{B}(0; \lambda_\dagger)$ при $t \in \mathbb{C}$ и $t \rightarrow 0$ обнаруживаем, что в круге \odot_\dagger некоторого радиуса \mathfrak{r} располагается только одно собственное число $t = 0$ пучка (56) с геометрической кратностью \varkappa (см., например, [36] и [34, гл. 9]). Употребим ещё следствие неравенства (59). Поскольку при вещественных t и s операторная норма разности $\mathfrak{B}(t; \lambda_\dagger) - \mathfrak{B}(t + is; \lambda_\dagger)$ не превосходит $c(|s| + s^2)$, найдутся такие $\mathfrak{h} \in (0, \mathfrak{r}/2]$ и $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathfrak{h}) > 0$, что в двойном угле с обломанными кончиками

$$\bowtie(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}) = \{t + is \in \mathbb{C} : |t| \geq \mathfrak{h}, |s| < \mathfrak{a}|t|\}$$

сохраняется оценка (59), а значит, спектр пучка отсутствует. Важный аргумент: из-за роста мажоранты в обсуждаемой оценке уменьшение размера \mathfrak{h} провоцирует сужение угла за счёт убывание коэффициента \mathfrak{a} , однако радиус \mathfrak{r} никак не зависит от названных величин, и поэтому в самом деле верен следующий важный результат.

Теорема 5. *При выполнении условий (18), (20) и наличии (минимального) \varkappa -кратного собственного числа $\lambda_\dagger = \Lambda_1(0)$ в дискретном спектре оператора $\mathcal{B}^0(0)$ найдутся такие положительные величины \mathfrak{r} , \mathfrak{h} , \mathfrak{a} и \mathfrak{b} , что на множестве (см. рис. 3)*

$$\sphericalangle(\mathfrak{r}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a}) = \odot(\mathfrak{r}) \cup \bowtie(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}),$$

содержащем полюсу $\mathfrak{F}(\mathfrak{b}) = \{t \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} t| < \mathfrak{b}\}$, шириной $2\mathfrak{b} > 0$ у пучка (56) есть единственное собственное число $t = 0$ с геометрической кратностью \varkappa , причём длины всех жордановых цепочек равны двум, т.е. $2\varkappa$ – его полная алгебраическая кратность.

Замечание 2. Ограничение (18), введённое в §2, означает, что по крайней мере в окрестности точки $(0, \lambda_\dagger)$ график функции $\mathbb{R} \ni t \mapsto$

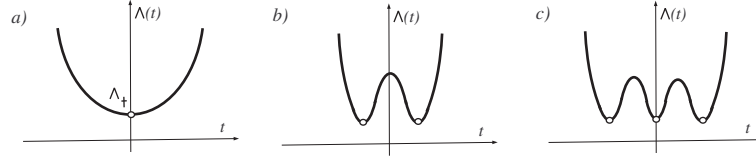


Рис. 4. “Перевернутые одно- и двугорбый верблюды” (а и b): возможные графики первых собственных чисел пучков. Несколько точек минимума помечены значком \circ (с).

$\Lambda_1(t)$ имеет форму на рис. 4, а, с одной точкой минимума. Известно (см., например, публикации [37, 38] и приведенную в них литературу), что в задачах о распространении волн в анизотропных упругих средах [11, 39] возникают пучки, у которых график первого собственного числа на рис. 4, b, имеет две точки $\pm t_\Delta \neq 0$, где реализуется $\min \Lambda_1(t)$. В принципе разрабатываемый подход может быть реализован и для задач с многими экстремальными точками (рис. 4, с), однако при этом нужны новые обозначения и более громоздкие вычисления, а также дополнительные требования к пучку. Для сокращения объёма статьи рассматриваем наиболее простую ситуацию. Иные доступные обобщения обсуждаем в §8.

§7. ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Всё подготовлено для того, чтобы реализовать обычную и широко используемую схему исследования асимптотики решений эллиптических краевых задач в цилиндрических областях (см. [3], а также [40, 41] и, например, [22, гл. 3, §1]) – изложим её без особо подробных комментариев.

По обыкновению введём пространство $W_{0,\gamma}^1(\Omega)$ как пополнение линейного множества $C_c^\infty(\Omega)$ по экспоненциальной весовой норме

$$\left(\|e^{\gamma z} \nabla_x u; L^2(\Omega)\|^2 + \|e^{\gamma z} u; L^2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2}. \quad (69)$$

Пусть $\gamma \in (0, \mathbf{b})$, где показатель \mathbf{b} взят из теоремы 5, и $u \in \mathcal{V}^1(\Omega)^K$ – решение задачи (3) с функционалом $f \in (W_{0,-\gamma}^1(\Omega)^K)^* \subset (\mathcal{V}^1(\Omega)^K)^* \subset (W_{0,\gamma}^1(\Omega)^K)^*$ в правой части (см. §5). Поместим вектор-функцию u в

пространство $W_{0,-\gamma}^1(\Omega)^K$ с меньшим весом и, вспомнив условие стабилизации из §1

$$|A(y, z) - A^0(y)| \leq c_z e^{-\alpha_z z} \text{ при почти всех } y \in \Pi, z > 0 \text{ и } \alpha_z > 0, \quad (70)$$

присоединим разность $E(u, \psi; \Omega) - E^0(u, \psi; \Omega)$ к правой части интегрального тождества, которая теперь принадлежит пространству $(W_{0,-\min\{\gamma, \alpha_z - \gamma\}}^1(\Omega)^K)^*$. Кроме того, умножим вектор-функцию u , а значит, и функционал f на срезку (14) и продолжим произведение $u_{-\gamma} := \chi u$ нулём на “цельный цилиндр” $\Pi \times \mathbb{R}$, а возникший коммутатор с носителем в слое $\{x : z \in [0, 1]\}$ перенесём направо. В результате, сохранив обозначения u и f для новых решения и правой части, придём к интегральному тождеству

$$E^0(u, \psi; \Pi \times \mathbb{R}) - \lambda_{\dagger}(u, \psi)_{\Pi \times \mathbb{R}} = (f, \psi)_{\Pi \times \mathbb{R}} \quad \forall \psi \in W_{0,\gamma}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K. \quad (71)$$

Подчеркнём, что из-за разных знаков у весовых показателей $\pm\gamma$ оба слагаемых в левой части соотношения (71) определены корректно, а функционал f в правой части с носителем на множестве $\bar{\Omega}$ попадает в пространство $(W_{0,-\gamma_1}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K)^* \cap (W_{0,-\gamma}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K)^*$, где $\gamma_1 = \min\{\gamma, \alpha_z - \gamma\}$. Иными словами, новый функционал f сохраняет затухание при $z \rightarrow -\infty$, но может потерять его при $z \rightarrow +\infty$ в случае $\alpha_z < \gamma$.

Если $\gamma \in (-b, b) \setminus \{0\}$ и $f \in (W_{0,-\gamma}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K)^*$, то по теореме 5 для решения $u_{-\gamma} \in W_{0,-\gamma}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K$ задачи (71) справедливо интегральное представление

$$u_{-\gamma} = \mathfrak{F}_{\gamma}^{-1} \mathfrak{B}(\cdot; \lambda_{\dagger})^{-1} \mathfrak{F}_{\gamma} f, \quad (72)$$

где фигурирует преобразование Фурье \mathfrak{F}_{γ} на прямой $\mathfrak{L}_{\gamma} \ni t$ в комплексной плоскости \mathbb{C} , т.е.

$$(\mathfrak{F}_{\gamma} \psi)(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} \psi(y, z) dz, \quad (73)$$

причём $e^{-itz} = e^{-i\operatorname{Re} t z} e^{\gamma z}$ и равенство Парсевала устанавливает изометрию весового пространств $W_{\gamma,0}^1(\Pi \times \mathbb{R})$ и пространства Лебега абстрактных функций $L^2(\mathfrak{L}_{\gamma}; (2\pi)^{-1/2} H_0^1(\Pi; \operatorname{Re} t))$.

Пусть $\gamma, \gamma_1 \in (-\beta, \beta) \setminus \{0\}$, $\gamma > \gamma_1$ и $f \in (W_{0,-\gamma}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K)^* \cap (W_{0,-\gamma_1}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K)^*$. Задача (71) имеет два решения $u \in W_{0,-\gamma}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K$ и $u^1 \in W_{0,-\gamma_1}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K$, разность которых в силу формул (72) и (73) представима в виде предела при $T \rightarrow +\infty$ контурного интеграла по границе прямоугольника $\mathfrak{Q}_T = \{t \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} t| < T, \operatorname{Im} t \in (-\gamma_1, -\gamma)\}$.

Подчеркнём, что образ Фурье $\mathcal{F}_{z \rightarrow t}$ функционала f – абстрактная аналитическая функция в полосе Ω_∞ , непрерывная вплоть до сторон полосы, а интегралы от этой абстрактной функции по боковым сторонам прямоугольника Ω_T исчезают при $T \rightarrow +\infty$. В этих условиях возможно применение теоремы Коши о вычетах (подробности см. в [3] или [22, гл. 3, §1]). Следовательно, возможны две ситуации.

Во-первых, при отсутствии в полосе Ω_∞ собственных чисел пучка (56) справедливо равенство $u = u^1$. Таким образом, рассматриваемое решение u попадает в пространство $W_{0, -\gamma_1}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K$, более узкое, чем исходное $W_{0, -\gamma}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K$, и, если правая часть f обладает более быстрым затуханием на бесконечности, то возвращаемся к прежней ситуации с заменой $\gamma \mapsto \gamma_1$.

Во-вторых, в случае $\gamma > 0 > \gamma_1$ в полосе Ω_∞ располагается собственное число пучка (56) и нужно учесть вычет, порождённый полюсом резольвенты $\mathfrak{B}(\cdot; \lambda_\dagger)^{-1}$ (подробности опять см. в [3] или [22, гл. 3, §1]). Таким образом, согласно теореме 5 и вычислениям из §6 справедливо представление

$$u(x) = u^1(x) + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{c}_p^0 U^p(y) + \mathbf{c}_p^1 (z U^p(y) + U^{p'}(y))) =: u^1(x) + \mathbf{S}(x),$$

где \mathbf{c}_p^0 и \mathbf{c}_p^1 – некоторые постоянные, а именно, линейные функционалы от правой части f , а $U^p = \mathfrak{U}_p^0$ и $U^{p'} = \mathfrak{U}_p^1$ – собственные и присоединённые векторы пучка $\mathfrak{B}(\cdot; \lambda_\dagger)$ в точке $t = 0$.

Введём вектор-функцию $\hat{u} = u - \chi \mathbf{S}$. Сама сумма \mathbf{S} удовлетворяет формально задаче Дирихле в $\Pi \times \mathbb{R}$ с дифференциальным оператором $L^0(y, \nabla_x)$, однако умножение на срезку (14) и возмущение оператора, вызванное формулой (70), присоединяют к правой части f два функционала, один с носителем в слое $\{x : z \in [0, 1]\}$ и другой из пространства $(W_{0, -\hat{\gamma}}^1(\Pi \times \mathbb{R})^K)^*$ с любым показателем, подчинённым неравенствам $\hat{\gamma} < \alpha_z$ и $\hat{\gamma} \leq \gamma_1$. Отметим, что вектор-функции \hat{u} и u совпадают при $z < 0$, и поэтому новая правая часть \hat{f} попадает в указанное пространство, т.е. воспроизводится первая ситуация для нового решения \hat{u} , может быть, с уменьшенным весовым показателем.

Теорема 6. Пусть выполнены предположения (18), (20), а $u \in W_{0,-\gamma}^1(\Omega)^K$ – решение задачи (3) с коэффициентом $\lambda = \lambda_{\dagger}$ и функционалом $f \in (W_{0,\gamma_f}^1(\Omega)^K)^*$ в правой части, причём весовые показатели удовлетворяют соотношениям $\gamma, \gamma_f \in (-\mathbf{b}, \mathbf{b}) \setminus \{0\}$ и $\gamma > 0$ (допускается экспоненциальный рост решения). Тогда справедливо представление

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \chi(z) \sum_{p=1}^{\varkappa} (c_p^0 U^p(y) + c_p^1 (z U^p(y) + U^{p'}(y))) \quad (74)$$

с коэффициентами c_p^q , $q=0, 1$, $p=1, \dots, \varkappa$, и остатком $\tilde{u} \in W_{0,-\tilde{\gamma}}^1(\Omega)^K$, удовлетворяющими оценке

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}; W_{0,-\tilde{\gamma}}^1(\Omega)\| + \sum_{p=1}^{\varkappa} (|c_p^0| + |c_p^1|) \\ \leq c(\|u; W_{0,-\gamma}^1(\Omega)\| + \|f; (W_{0,\gamma_f}^1(\Omega)^K)^*\|). \end{aligned} \quad (75)$$

В случае $\gamma_f > 0$ (правая часть растёт экспоненциально) верны равенства $c_p^0 = c_p^1 = 0$ и $\tilde{\gamma} = \gamma_f$. Если же $\gamma_f < 0$ (правая часть затухает), то c_p^q – линейные функционалы от правой части f (см. оценку (75)), а показатель $\tilde{\gamma} \leq \gamma_f$ дополнительно строго меньше числа α_z из условия стабилизации (70).

Доказательство. При $\gamma_f > 0$ реализуется первая из рассмотренных ситуаций, обеспечивающая нужное утверждение. Если же $\gamma_f < 0$, то подберём (малый) размер $\delta > 0$ так, чтобы $\gamma - \delta N > 0 > \gamma - \delta(N+1)$ при некотором $N \in \mathbb{N}$. Первые N шагов описанной выше процедуры помещают решение u в пространство $W_{0,-\gamma+\delta N}^1(\Omega)^K$, сохраняя функционал f , а шаг с номером N обеспечивает представление (74), но при этом изменяют правую часть, отправляя её в пространство $(W_{0,-\tilde{\gamma}+\delta(N+1)}^1(\Omega)^K)^*$. Остальные шаги процедуры устанавливают нужное включение для остатка \tilde{u} . Теорема доказана. \square

Просматривая материал из §6, видим, что при $\lambda < \lambda_{\dagger}$ и некотором $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\lambda) > 0$ в полосе $\mathfrak{B}(\mathbf{b})$ нет точек спектра пучка $\mathfrak{B}(\cdot, \lambda)$. Это наблюдение обеспечивает очередные два утверждения, которые относятся к изменённой (ср. интегральное тождество (43)) постановке задачи (3)

$$E(u, \psi; \Omega) - \lambda(u, \psi)_{\Omega} = (f, \psi)_{\Omega} \quad \forall \psi \in \mathcal{W}_{(\gamma, -\beta_y), 0}^1(\Omega)^K, \quad (76)$$

уточняют теорему 3 и повторяют теорему 5 в упрощённом виде. При этом решение ищется в пространстве $\mathcal{W}_{(-\gamma, \beta_y), 0}^1(\Omega)^K$, а в правой части фигурирует функционал $f \in (\mathcal{W}_{(\gamma, -\beta_y), 0}^1(\Omega)^K)^*$, но в очередном утверждении он считается затухающим на бесконечности.

Теорема 7. Пусть в условиях теоремы 6, но при $\lambda < \lambda_\dagger$ вектор-функция $u \in \mathcal{W}_{(-\gamma, \beta_y), 0}^1(\Omega)^K$ является решением задачи (76) с правой частью $f \in (\mathcal{W}_{(-\gamma, -\beta_y), 0}^1(\Omega)^K)^* \subset (\mathcal{W}_{(\gamma, -\beta_y), 0}^1(\Omega)^K)^*$, причём $\gamma \in (0, \mathfrak{b})$ и $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\lambda)$ (см. выше), а показатель β_y взят из теоремы 3. Тогда $u \in \mathcal{W}_{(\gamma, \beta_y), 0}^1(\Omega)^K$ и верна такая оценка с не зависящим от u и f множителем c_λ :

$$\|u; \mathcal{W}_{(\gamma, \beta_y), 0}^1(\Omega)\| \leq c_\lambda (\|u; \mathcal{W}_{(-\gamma, \beta_y), 0}^1(\Omega)\| + \|f; (\mathcal{W}_{(-\gamma, -\beta_y), 0}^1(\Omega)^K)^*\|).$$

Следствие 1. В условиях теоремы 7 оператор задачи (76)

$$B_{(\gamma, \beta_y)}(\lambda) : \mathcal{W}_{(\gamma, \beta_y), 0}^1(\Omega)^K \rightarrow (\mathcal{W}_{(-\gamma, -\beta_y), 0}^1(\Omega)^K)^*$$

и аналогичный оператор $B_{(-\gamma, -\beta_y)}(\lambda)$ (с весовыми показателями противоположных знаков) взаимно сопряжены, а их индексы равны нулю.

Доказательство. Дефектные функционалы $(\cdot, u_{(q)})_\Omega$, $q = 1, \dots, Q$, оператора $B_{(\gamma, \beta_y)}(\lambda)$ включают решения однородной ($f = 0$) задачи (76) в классе $\mathcal{W}_{(-\gamma, -\beta_y), 0}^1(\Omega)^K$, однако теорема 7 помещает эти решения в ядро $\ker B_{(\gamma, \beta_y)}(\lambda) \subset \mathcal{W}_{(\gamma, \beta_y), 0}^1(\Omega)^K$ оператора $B_{(\gamma, \beta_y)}(\lambda)$. Осталось заметить, что в силу формулы Грина любой элемент $u \in \ker B_{(\gamma, \beta_y)}(\lambda)$ порождает дефектный функционал. \square

Замечание 3. 1) Согласно следствию 1 в теореме 3 справедливо равенство $\ker B_{-\beta}(\lambda) = \ker B_{+\beta}(\lambda)$, подтверждающее сказанное в конце §4.

2) В отличие от теоремы 6 в теореме 7 фигурируют функциональные пространства с экспоненциальным весом в поперечных направлениях y_1 и y_2 . Такое изменение стало возможным благодаря условию $\lambda < \lambda_\dagger$ (см. доказательство теоремы 3). Причины использования только стандартных кондратьевских норм (69) в ситуации $\lambda = \lambda_\dagger$ пояснены в замечании 1, однако в примерах из §3 подмена обычных пространств Соболева $H_0^1(\Pi)$ весовыми $W_{\beta_y, 0}^1(\Pi)$ (при определённых ограничениях на весовой показатель) доступна как в теореме 5, так и в теореме 6.

§8. ЕЩЁ ТРИ ЗАМЕЧАНИЯ

1. *Геометрия.* Без сколь-нибудь заметных изменений в аргументации полученные результаты сохраняют силу и при возмущении “получилиндра” $\Omega = \Pi \times \mathbb{R}_+$ внутри шара $\mathbb{B}_R = \{x : |x| < R\}$ какого-либо радиуса $R \in \mathbb{R}_+$. Другое доступное обобщение, оставленное без внимания для упрощения изложения, – переход к большим размерностям $d > 3$. Именно, под $\Pi \subset \mathbb{R}^{d-1} \ni y = (y_1, \dots, y_{d-1})$ можно подразумевать липшицеву область, образованную конечным ядром $\Theta \in \mathbb{R}^d$ и полуцилиндрами $\varpi_j = \omega_j \times \mathbb{R}_+ \ni (\eta_1^j, \dots, y_{d-2}^j, \zeta_j)$ с сечениями $\omega_j \subset \mathbb{R}^{d-2}$, имеющими липшицевы границы и компактные замыкания.

2. *Краевые условия.* На примере системы уравнений Ламе (см. §3) покажем, какие проблемы возникают при смене типа краевого условия. Замена на торце $\Pi \times \{0\} \subset \partial\Omega$ условий Дирихле (2) в смещениях (зажатый край) условиями Неймана в напряжениях (свободный край)

$$\sigma_{j3}(u; y, 0) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad y \in \Pi, \quad (77)$$

(см. формулы (26)) вынуждает использовать функционал истинной упругой энергии (27) вместо квазиэнергии (28), а значит, нарушается ключевое неравенство $E^L(u, u; \Omega) \geq \mu \|\nabla_x u; L^2(\Omega)\|^2$. Впрочем, влияние условия (77) можно ослабить, так как существование решений проверяется при помощи неравенства Корна (см. доказательство леммы 1), а при выводе асимптотических разложений на бесконечности решение u умножается на срезающую функцию (14), после чего интегрированием по частям упругая энергия преобразуется в квазиэнергию. Вместе с тем такая смешанная краевая задача требует аккуратного анализа и дополнительных соображений.

В случае постановки условий Неймана на одной из боковых сторон каждой полуполосы $\varpi_1, \dots, \varpi_j$ непрерывный спектр смешанной краевой задачи в Π при $t = 0$ имеет положительную точку отсечки λ_+ , а ниже её зачастую располагается собственное число $\Lambda_1(0)$ из дискретного спектра (см., например, [21, 30]). Вместе с тем появление в интегральном тождестве полуторалинейной формы истинной упругой энергии не позволяет при $t \neq 0$ изучить её непрерывный и дискретный спектры посредством использованных в данной работе вариационных методов.

Вопрос об исследовании асимптотики на бесконечности смешанных краевых задач для упругих тел типа $\Omega = \Pi \times \mathbb{R}_+$ остаётся в значительной степени открытым. Впрочем, для двух специальных групп условий

на “торце” полуцилиндра Ω

$$\sigma_{13}(u; y, 0) = \sigma_{23}(u; y, 0) = 0, \quad u_3(y, 0) = 0, \quad y \in \Pi, \quad (78)$$

и

$$u_1(y, 0) = u_2(y, 0) = 0, \quad \sigma_{33}(u; y, 0) = 0, \quad y \in \Pi, \quad (79)$$

все полученные в статье результаты остаются в полной сохранности. Дело в том, что в случае (78) (в случае (79)) чётное для u_1 и u_3 (для u_3) и нечётное для u_3 (для u_1 и u_2) продолжения относительно переменной z сберегают систему уравнений Ламе на “цельном цилиндре” $\Pi \times \mathbb{R}$ и назначают всюду на его границе условия Дирихле (2). Соотношения (78) называются линеаризованными условиями Синьорини, так как имитируют идеальный контакт без трения с абсолютно жёстким полупространством \mathbb{R}_-^3 (см. [12, 42]). Условия (79), наоборот, требуют бесконечный коэффициент трения и абсолютную податливость полупространства.

3. *Осциллирующие волны.* В статье рассмотрен случай $\lambda \leq \lambda_{\dagger}$, гарантирующий существование разве лишь одного собственного числа $t = 0$ пучка $\mathfrak{B}(\cdot, \lambda)$ в полосе $\{t \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} t| < \mathfrak{b}\}$, где $\mathfrak{b} > 0$ – величина из теоремы 5. Если разность $\lambda - \lambda_{\dagger}$ положительна, но мала, то нетрудно предсказать, что на вещественной оси появляется симметричный ($t_k^{\pm} = -t_k^{\mp}$ – см. формулу (57) и рис. 4, b и c) набор ненулевых собственных чисел $t_1^{\pm}, \dots, t_N^{\pm}$ пучка (56). Как обычно (см., например, [22, гл. 5]), такие собственные числа инициируют появление “осциллирующих волн” $e^{it_k^{\pm} z} U_{(\pm)}^k(y)$ в асимптотике (74). В принципе разработанный подход позволяет изучить и такую ситуацию, однако ввиду направленности работы на исследование явления пограничных слоёв в коробчатых тонкостенных конструкциях и для сокращения объёма статьи такое доступное обобщение проигнорировано.

Автор благодарен анонимному рецензенту за полезные замечания по улучшению изложения материала и найденный массив опечаток в тексте и формулах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. М., Наука, 1973.
2. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. М., Мир, 1971.

3. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Труды Московск. матем. общества **16** (1967), 219–292.
4. A. Nazarov, S. Nazarov, G. Zavorokhin, *On symmetric wedge mode of an elastic solid*. — Euro. J. Applied Math. (2021).
5. С. А. Назаров, *Лакуны в спектре тонкостенного прямоугольного бесконечного короба Дирихле с периодическим семейством перегородок*. — Матем. сборник **214**, No. 7 (2023), 91–133.
6. С. А. Назаров, *Асимптотическое строение спектра тонкой однотавровой балки Дирихле*. — Доклады РАН. Физика. Техн. науки **518** (2024), 57–63.
7. С. А. Назаров, *Асимптотика решения краевой задачи в тонком цилиндре с негладкой боковой поверхностью*. — Известия РАН, Серия матем **57**, No. 1 (1993), 202–239.
8. С. А. Назаров, *Асимптотические разложения на бесконечности решений задачи теории упругости в слое*. — Труды Московск. матем. общества **60** (1998), 3–97.
9. Ю. А. Кругляк, *Нанoeлектроника “снизу-вверх”*. Одесса, ТЭС, 2015.
10. P. Exner, H. Kovarik, *Quantum waveguides*. Cham, Springer, 2015.
11. В. В. Новожилов, *Теория упругости*. М., Судпромгиз, 1958.
12. Ю. Н. Работнов, *Механика деформируемого твердого тела*. М., Наука, 1988.
13. J. Nečas, *Les méthodes in théorie des équations elliptiques*. Paris-Prague, Masson-Academia, 1967.
14. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*. — Успехи матем. наук **54**, No. 5 (1999), 77–142.
15. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. Л., изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
16. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*. М., 1980.
17. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна*. — Успехи матем. наук **43**, No. 5 (1988), 55–98.
18. С. А. Назаров, *Дискретный спектр колеччатых, разветвляющихся и периодических волноводов*. — Алгебра и анализ **23**, No. 2 (2011), 206–247.
19. Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости*. М., Мир, 1974.
20. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области*. — Проблемы матем. анализа. Вып. 19. Новосибирск, Научн. книга (1999), 105–148.
21. С. А. Назаров, *Упругие волны, захваченные полубесконечной полосой с защемленными боковыми сторонами и изломанным торцом*. — Прикладная матем. и механика **87**, No. 2 (2023), 265–279.
22. S. A. Nazarov, V. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. Berlin, New York, Walter de Gruyter. 1994.
23. D. S. Jones, *The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains*. — Proc. Camb. Phil. Soc. **49** (1953), 668–684.
24. А. Н. Попов, *О существовании собственных колебаний резонатора, открытого в волновод*. — Журнал технической физики **56**, No. 10 (1986), 1916–1922.

25. P. Duclos, P. Exner, *Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions*. — Review Math. Phys. **7**, No. 1 (1995), 73–102.
26. В. В. Грушин, *О собственных значениях финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечных цилиндрических областях*. — Матем. заметки **75**, No. 3 (2004), 360–371.
27. Р. Р. Гадьльшин, *О локальных возмущениях квантовых волноводов*. — Теор. матем. физика **145**, No. 3 (2005), 358–371.
28. С. А. Назаров, *Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра*. — Сибирск. матем. журнал **51**, No. 5 (2010), 1086–1101.
29. S. A. Nazarov, K. Ruotsalainen, P. Uusitalo, *The Y-junction of quantum waveguides*. — ZAMM **94**, No. 6 (2014), 477–486.
30. С. А. Назаров, *Собственные колебания упругой полуполосы при различном расположении участков фиксации ее краев*. — Акустический журнал **69**, No. 4 (2023), 398–409.
31. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*. М., ИЛ, 1948.
32. V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*. Providence, Amer. Math. Soc. 1997.
33. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. М., Наука, 1965.
34. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*. М., Наука, 1969.
35. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*. М., Мир, 1972.
36. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений*. I. Успехи матем. наук **15**, No. 3 (1960), 3–80.
37. A. V. Pichugin, G. A. Rogerson, *A two-dimensional model for extensional motion of a pre-stressed incompressible elastic layer near cut-off frequencies*. — IMA J. Appl. Math. **66** (2001), 357–385.
38. Y. D. Kaplunov, Y. V. Nolde, *Long-wave vibrations of a nearly incompressible isotropic plate with fixed faces*. — Quart. J. Mech. Appl. Math. **55**, No 3 (2002), 345–356.
39. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, 2-е изд. М., Наука, 1977.
40. S. Agmon, L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space*. — Comm. Pure. Appl. Math. **16** (1963), 121–239.
41. А. Разу, *Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space*. — Arch. Rational Mech. Anal. **24** (1967), 193–218.
42. И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек, *Решение вариационных неравенств в механике*. М., Мир. 1986.

Nazarov S. A. Asymptotics of solutions to the Dirichlet problem for a formally self-adjoint elliptic system in a junction of quarter-layers.

We examine the Dirichlet problem for a formally self-adjoint system of second-order differential equations in an infinite box-like construction,

namely a cylindrical junction of several quarters of layers. Under certain restrictions we prove the Fredholm property of the problem operator in weighted Sobolev spaces and derive asymptotic formulas for solutions at infinity. We mention simple generalizations of the developed approach and formulate open questions.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 марта 2026 г.

E-mail: srgnazarov108@gmail.com, serna108@mail.ru