

Ф. Д. Мироненко

**ОЦЕНКИ НОРМЫ ГЁЛЬДЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ
ВИДА “КНИЖКА”**

Целью данной работы является получение оценок нормы Гёльдера для решений параболических линейных и квазилинейных уравнений второго порядка в недивергентной форме на простейшем стратифицированном множестве – “книжке” с K листами.

Аналогичные результаты для $K = 1$ (этот случай соответствует задаче Вентцеля) были получены Д. Е. Апушкинской и А. И. Назаровым в [1]. Несколькими годами позднее теми же авторами в работе [2] результат был обобщён на случай двухфазной задачи Вентцеля ($K = 2$). Заметим, что, в отличие от этих случаев, при $K > 2$ рассматриваемое стратифицированное множество (имеющее размерность n) не вкладывается в \mathbb{R}^n .

Основные идеи настоящей работы, хотя и основаны на методе, ведущем начало от классических статей Н. В. Крылова – М. В. Сафонова [3] и О. А. Ладыженской – Н. Н. Уральцевой [5], потребовали существенной модификации.

Отметим, что доказательство одной из ключевых вспомогательных лемм – “леммы о косом цилиндре” – в работах [1] и [2] содержит пробел. В настоящей работе этот пробел устранён (см. §2.2).

Статья состоит из трёх параграфов. В §1 даётся постановка задачи и формулируется основной результат работы – теорема 1.1. В §2 формулируются и доказываются вспомогательные утверждения об оценке решения линейной задачи. Наконец, §3 содержит теорему 3.1 об оценке осцилляции и доказательство теоремы 1.1.

Используемые обозначения. $(x', x_n) = x \in \mathbb{R}^n$, где $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

B_R^n – шар радиуса R в \mathbb{R}^n с центром в начале координат.

Ключевые слова: стратифицированное множество, параболическое уравнение, оценка нормы Гёльдера.

Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

$Q_R := (-R^2, 0) \times B_R^n$ – цилиндр высоты R^2 над шаром B_R^n .

$B_R^0 := B_R^{n-1} \times \{0\}$ – вложение $(n-1)$ -мерного шара в \mathbb{R}^n .

$B_R(x^0) := \{x + x^0 \mid x \in B_R^n\}$ – сдвиг шара B_R^n на вектор x^0 .

$Q_R(t^0, x^0) := \{(t, x) + (t^0, x^0) \mid (t, x) \in Q_R\}$ – сдвиг цилиндра Q_R на вектор (t^0, x^0) .

$\mathbb{R}_\pm^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \gtrless 0\}$.

$\mathbb{R}_{0,\pm}^n := \mathbb{R}_\pm^n \cup \{x_n = 0\}$.

$u_\pm := \max\{0, \pm u\}$ – положительная и отрицательная часть функции u соответственно.

$Du = (D_1u, \dots, D_nu)$ – градиент функции u ; $\partial_t u$ – производная по t .

$\|\cdot\|_{q, Q_R}$ – норма в пространстве Лебега $L_q(Q_R)$.

$W_q^{1,2}(Q_R)$ – анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_q^{1,2}(Q_R)} = \|\partial_t u\|_{q, Q_R} + \|D(Du)\|_{q, Q_R} + \|u\|_{q, Q_R}.$$

Точки векторного пространства мы будем нумеровать верхними индексами: x^i , а компоненты вектора $x \in \mathbb{R}^n$ – нижними: x_i . Различные константы мы будем обозначать буквой N и в скобках указывать величины, от которых они зависят.

Стратифицированное множество. Выберем и фиксируем натуральное число K – количество стратов. В \mathbb{R}^{n+1} рассмотрим K n -мерных гиперплоскостей, пересекающихся по $\mathbb{R}^{n-1} \times \{(0, 0)\}$, и обозначим их $\mathbb{R}^{n, [k]}$, $k = 1, \dots, K$. На каждой гиперплоскости выделим n -ю координату $x_n^{[k]}$, а первые $n-1$ координат для всех гиперплоскостей положим общими. Стратифицированным множеством вида “книжка” назовём множество

$$\mathbb{R}^\otimes := \bigcup_{k=1}^K \mathbb{R}_{0,+}^{n, [k]}.$$

Стратифицированным шаром будем называть шар в \mathbb{R}^\otimes

$$\mathbb{B}_R := \left\{x \in \mathbb{R}^\otimes \mid |x| < R\right\} = B_R^0 \cup \bigcup_{k=1}^K B_R^{[k]}.$$

$(n-1)$ -мерный страт $B_R^0 = \mathbb{B}_R \cap \{x_n = 0\}$ будем называть “переплётком”, а n -мерные страты – полушары $B_R^{[k]} = \mathbb{B}_R \cap \mathbb{R}_+^{n, [k]}$ – “листами”. Сдвиг

стратифицированного шара на вектор $x^0 = (x^{0'}, 0)$ будем обозначать

$$\mathbb{B}_R(x^0) = \{x + x^0 \mid x \in \mathbb{B}_R\}.$$

Введём также стратифицированный цилиндр

$$\mathbb{Q}_R := (-R^2, 0) \times \mathbb{B}_R = Q_R^0 \cup \bigcup_{k=1}^K Q_R^{[k]},$$

где $Q_R^0 = (-R^2, 0) \times B_R^0$ – переплёт, а $Q_R^{[k]} = (-R^2, 0) \times B_R^{[k]}$ – листы.

Для более общего стратифицированного цилиндра $Q = (t^0, t^1) \times \mathbb{B}_R(x^0)$ введём аналогичные обозначения для его переплёта и листов

$$Q^0 = Q \cap \{x_n = 0\}, \quad Q^{[k]} = Q \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{n, [k]}).$$

Параболической границей такого цилиндра называется множество

$$\partial'Q = (t^0, t^1) \times \partial\mathbb{B}_R(x^0) \cup \{t^0\} \times \mathbb{B}_R(x^0).$$

В дальнейшем вместо “стратифицированный цилиндр” будем писать просто “цилиндр”.

Для точек $x, y \in \mathbb{B}_R$ через $\text{dist}_{\mathbb{B}}(x, y)$ будем обозначать внутреннее расстояние на стратифицированном шаре. На цилиндре \mathbb{Q}_R введём параболическое расстояние:

$$\rho_{par}((t^1, x^1), (t^2, x^2)) = \text{dist}_{\mathbb{B}}(x^1, x^2) + |t^1 - t^2|^{\frac{1}{2}}.$$

Наконец, для функции $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}_R})$ и показателя $\gamma \in (0, 1]$ через $[u]_{\gamma, \mathbb{Q}_R}$ будем обозначать полунорму Гёльдера:

$$[u]_{\gamma, \mathbb{Q}_R} = \sup_{(t^1, x^1) \neq (t^2, x^2) \in \mathbb{Q}_R} \frac{|u(t^1, x^1) - u(t^2, x^2)|}{\left(\rho_{par}((t^1, x^1), (t^2, x^2))\right)^\gamma}.$$

Для произвольного стратифицированного цилиндра $Q = (t^0, t^1) \times \mathbb{B}_R(x^0)$ введём функциональное пространство

$$\mathcal{V}(Q) = \bigcap_{k=1}^K W_{n+1}^{1,2}(Q^{[k]}) \cap W_n^{1,2}(Q^0) \cap \mathcal{C}(\overline{Q}).$$

В дальнейшем индексы i, j меняются от 1 до n , а индексы l, m – от 1 до $n - 1$. При этом по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

На листах $Q_R^{[k]}$ будем рассматривать параболические уравнения вида

$$\partial_t u - a_{ij}^{[k]}(t, x, u, Du) D_i D_j u = a^{[k]}(t, x, u, Du), \quad (1)$$

функции $a_{ij}^{[k]}$, $a^{[k]}$ измеримы, матрицы старших коэффициентов удовлетворяют условию равномерной эллиптичности с константой $\nu > 0$:

$$\nu |\xi|^2 \leq a_{ij}^{[k]} \xi_i \xi_j \leq \nu^{-1} |\xi|^2 \quad \text{для любого } \xi \in \mathbb{R}^n; \quad (2)$$

функции $a^{[k]}$ при любых $(t, x) \in Q_R^{[k]}$, $z \in \mathbb{R}$ и $p \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют неравенствам

$$|a^{[k]}(t, x, z, p)| \leq \mu |p|^2 + B^{[k]}(t, x) |p| + \Phi^{[k]}(t, x), \quad (3)$$

где $\mu \geq 0$, $B^{[k]} \in L_{n+2}(Q_R^{[k]})$, $\Phi^{[k]} \in L_{n+1}(Q_R^{[k]})$.

На переплёте Q_R^0 рассмотрим уравнение

$$\partial_t u - \alpha_{lm}(t, x', u, D'u) D_l D_m u = \alpha(t, x', u, D'u) + \sum_{k=1}^K \mathcal{B}^{[k]}(t, x', u, D^{[k]}u), \quad (4)$$

где

$$D^{[k]}u = (D'u, D_n^{[k]}u), \quad D_n^{[k]}u = \lim_{x_n^{[k]} \rightarrow 0^+} D_n u(t, x', x_n^{[k]}),$$

функции α_{lm} , α измеримы,

$$\nu |\xi'|^2 \leq \alpha_{lm} \xi_l \xi_m \leq \nu^{-1} |\xi'|^2 \quad \text{для любого } \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}; \quad (5)$$

функция α при любых $(t, x', 0) \in Q_R^0$, $z \in \mathbb{R}$, $p' \in \mathbb{R}^{n-1}$ удовлетворяет неравенству

$$|\alpha(t, x', z, p')| \leq \mu |p'|^2 + B^0(t, x') |p'| + \Phi^0(t, x'),$$

где $B^0 \in L_{n+1}(Q_R^0)$, $\Phi^0 \in L_n(Q_R^0)$.

Наконец, каждая функция $\mathcal{B}^{[k]}(t, x', z, p^{[k]})$ дифференцируема по переменной $p_n^{[k]}$ и удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} 0 &\leq \partial_{p_n^{[k]}} \mathcal{B}^{[k]}(t, x', z, p^{[k]}) \leq B^0(t, x'), \\ |\mathcal{B}^{[k]}(t, x', z, p^{[k]})| &\leq B^0(t, x') |p^{[k]}| + \Phi^0(t, x'). \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 1.1. Пусть $R \leq 1$. Рассмотрим функцию $u \in \mathcal{V}(\mathbb{Q}_R)$, удовлетворяющую уравнениям (1), (4). Существует показатель $\gamma \in (0, 1)$, зависящий от n, ν , такой что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ полунорма Гёльдера на подцилиндре $\mathbb{Q}_{(1-\varepsilon)R}$ оценивается как

$$[u]_{\gamma, \mathbb{Q}_{(1-\varepsilon)R}} \leq \frac{N}{(\varepsilon R)^\gamma}, \quad (7)$$

где константа N зависит от $n, K, \nu, \mu, M_0 = \sup_{\mathbb{Q}_R} |u|$, норм $\|\Phi^{[k]}\|_{n+1, \mathbb{Q}_{R_0}^{[k]}}$ ($k = 1, \dots, K$), $\|\Phi^0\|_{n, \mathbb{Q}_{R_0}^0}$, а также от модулей интегральной непрерывности $B^{[k]}(t, x)$ в $L_{n+2}(\mathbb{Q}_R^{[k]})$ и $B^0(t, x')$ в $L_{n+1}(\mathbb{Q}_R^0)$.

§2. ОЦЕНКИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Пусть на каждом $\mathbb{Q}_R^{[k]}$ задан линейный параболический оператор:

$$\mathcal{M}^{[k]}u = \partial_t u - a_{ij}^{[k]} D_i D_j u + b_i^{[k]} D_i u,$$

коэффициенты $a_{ij}^{[k]}$ измеримы и удовлетворяют условию (2), $b_i^{[k]} \in L_{n+2}(\mathbb{Q}_R^{[k]})$.

На переплёте \mathbb{Q}_R^0 задан оператор

$$\mathcal{N}u = \partial_t u - \alpha_{lm} D_l D_m u + \beta_l D_l u + \mathcal{J}u,$$

коэффициенты α_{lm} измеримы и удовлетворяют условию (5), $\beta_l \in L_{n+1}(\mathbb{Q}_R^0)$, а \mathcal{J} – оператор сопряжения, определяемый формулой

$$\mathcal{J}u = \sum_{k=1}^K \beta_n^{[k]}(t, x') D_n^{[k]} u. \quad (8)$$

с $\beta_n^{[k]} \in L_{n+1}(\mathbb{Q}_R^0)$. Обозначим

$$\mathbf{b}^{[k]} = (b_1^{[k]}, \dots, b_n^{[k]}); \quad \boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}); \\ \boldsymbol{\beta}_* = (\beta_n^{[1]}, \dots, \beta_n^{[K]}) \in \mathbb{R}^K.$$

Для функций $u \in \mathcal{V}(\mathbb{Q}_R)$ введём функционал

$$\mathcal{F}[u] = R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, \mathbb{Q}_R^{[k]}} + R^{\frac{n-1}{n}} \|(\mathcal{N}u)_-\|_{n, \mathbb{Q}_R^0}. \quad (9)$$

2.1. Лемма об узком множестве. Следующая лемма показывает, что если неотрицательная функция $u \in \mathcal{V}(\mathbb{Q}_R)$ принимает малые значения (значения, меньшие некоторого уровня) на достаточно малой части переплёта, то на переплёте половинного размера она допускает квалифицированную оценку снизу.

Лемма 2.1. Пусть $R \leq 1$, $u \in \mathcal{V}(\mathbb{Q}_R)$, а также $u \geq 0$ на $\overline{\mathbb{Q}_R}$. Тогда для любого $\delta_1 \in (0, 1)$ существуют константы $\sigma_1 > 0$, зависящая от n, K, ν, δ_1 ; $\varepsilon_1 \in (0, 1)$, зависящая от n, ν, δ_1 , такие что при любом $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ выполнение условий

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+2, Q_R^{[k]}} \leq \sigma_1, \quad \|\beta'\|_{n+1, Q_R^0} \leq \sigma_1, \quad \|\beta_*\|_{n+1, Q_R^0} \leq \sigma_1, \\ |Q_R^0 \cap \{u \geq \gamma_1\}| \geq \varepsilon_1 \cdot |Q_R^0| \end{aligned} \quad (10)$$

влечёт выполнение следующей оценки на $Q_{R/2}^0$:

$$u \geq (1 - \delta_1)\gamma_1 - N_1(n, \nu) \cdot \mathcal{F}[u]. \quad (11)$$

Доказательство. Случай $\gamma_1 \leq 0$ тривиален. Не умаляя общности, положим $\gamma_1 = 1$ и будем считать, что $\sigma_1 \leq \nu$. Пусть (t^0, x^0) – точка минимума u на $Q_{R/2}^0$. Ясно что тогда $x_n^0 = 0$ и $Q_{R/2}(t^0, x^0) \subset \mathbb{Q}_R$. Введём вспомогательную функцию $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\otimes} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\psi(t, x) = 1 - \frac{4}{R^2} \left(|x' - x^{0'}|^2 + (t^0 - t) \right) + \frac{C}{R^2} x_n^2 - \frac{2C^{\frac{1}{2}}}{R} x_n,$$

где константа $C > 0$ будет выбрана позже. Заметим, что на всём \mathbb{R}^{\otimes} величина x_n по определению неотрицательна. Рассмотрим множество

$$Q = Q_{R/2}(t^0, x^0) \cap \{x_n < RC^{-\frac{1}{2}}\}$$

и положим $Q^0 = Q \cap \{x_n = 0\}$, $Q^{[k]} = Q \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{n, [k]})$. Нетрудно видеть, что $(\psi - u)|_{\partial' Q} \leq 0$. Применяя принцип максимума Александра–Бакельмана–Крылова для стратифицированных множеств [7, теорема 5.1], получаем, что в любой точке $(t, x) \in Q$:

$$\begin{aligned} \psi - u \leq N(n) \times \left(C_1 \cdot \sum_{k=1}^K \left\| (\mathcal{M}^{[k]}(\psi - u))_+ \right\|_{n+1, Q^{[k]} \cap \{\psi > u\}} \right. \\ \left. + C_2 \cdot \left\| (\mathcal{N}(\psi - u))_+ \right\|_{n, Q^0 \cap \{\psi > u\}} \right), \end{aligned}$$

где

$$C_1 = R^{\frac{n}{n+1}} + \nu^{-\frac{n^2}{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^K \|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+1, Q^{[k]}}^n + \nu^{-\frac{n(n-1)}{n+1}} \cdot \|\beta'\|_{n, Q^0}^{\frac{n^2}{n+1}}, \quad (12)$$

$$C_2 = R^{\frac{n-1}{n}} + \nu^{-(n-1)} \cdot \sum_{k=1}^K \|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+1, Q^{[k]}}^{\frac{n^2-1}{n}} + \nu^{-\frac{(n-1)^2}{n}} \cdot \|\beta'\|_{n, Q^0}^{n-1}. \quad (13)$$

Оценим нормы младших коэффициентов:

$$\|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+1, Q^{[k]}} \leq \|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+2, Q^{[k]}} \cdot |Q^{[k]}|^{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} \leq N(n) \cdot \sigma_1 \cdot R^{\frac{1}{n+1}}, \quad (14)$$

$$\|\beta'\|_{n, Q^0} \leq \|\beta'\|_{n+1, Q^0} \cdot |Q^0|^{\frac{1}{n(n+1)}} \leq N(n) \cdot \sigma_1 \cdot R^{\frac{1}{n}}. \quad (15)$$

$$\|\beta_\star\|_{n, Q^0} \leq \|\beta_\star\|_{n+1, Q^0} \cdot |Q^0|^{\frac{1}{n(n+1)}} \leq N(n) \cdot \sigma_1 \cdot R^{\frac{1}{n}}, \quad (16)$$

Пользуясь неравенствами (14) и (15) и учитывая, что $\sigma_1 \leq \nu$, получаем:

$$\begin{aligned} \psi - u &\leq N(n, \nu) \cdot \left(R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \left\| (\mathcal{M}^{[k]}(\psi - u))_+ \right\|_{n+1, Q^{[k]} \cap \{\psi > u\}} \right. \\ &\quad \left. + R^{\frac{n-1}{n}} \left\| (\mathcal{N}(\psi - u))_+ \right\|_{n, Q^0 \cap \{\psi > u\}} \right) \\ &\leq N(n, \nu) \cdot \left(R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \left(\left\| (\mathcal{M}^{[k]}\psi)_+ \right\|_{n+1, Q^{[k]} \cap \{\psi > u\}} + \left\| (\mathcal{M}^{[k]}u)_- \right\|_{n+1, Q^{[k]} \cap \{\psi > u\}} \right) \right. \\ &\quad \left. + R^{\frac{n-1}{n}} \left(\left\| (\mathcal{N}\psi)_+ \right\|_{n, Q^0 \cap \{\psi > u\}} + \left\| (\mathcal{N}u)_- \right\|_{n, Q^0 \cap \{\psi > u\}} \right) \right). \end{aligned}$$

Применяя оператор $\mathcal{M}^{[k]}$ к ψ на множестве $Q^{[k]}$, получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{[k]}\psi &= \partial_t \psi - a_{ij}^{[k]} D_i D_j \psi + b_i^{[k]} D_i \psi = \frac{4}{R^2} + \left(\sum_{l=1}^{n-1} \frac{8}{R^2} a_{ll}^{[k]} - \frac{2C}{R^2} a_{nn}^{[k]} \right) \\ &\quad + \left(- \sum_{l=1}^{n-1} \frac{8}{R^2} b_l^{[k]} (x_l - x_l^0) + \frac{2b_n^{[k]} C}{R^2} x_n - \frac{2b_n^{[k]} C^{\frac{1}{2}}}{R} \right) \\ &\leq \frac{4}{R^2} + \frac{8}{R^2} \frac{n-1}{\nu} - \frac{2C}{R^2} \nu - \frac{8}{R^2} \langle b^{[k]'}, x' - x^{0'} \rangle + \frac{2C b_n^{[k]}}{R^2} (x_n - x_n^0) - \frac{2b_n^{[k]} C^{\frac{1}{2}}}{R}. \end{aligned}$$

Выбирая $C = \frac{1}{2\nu}(4 + 8^{\frac{n-1}{\nu}})$, получаем:

$$\mathcal{M}^{[k]}\psi \leq \frac{2C|x - x^0|}{R^2} |\mathbf{b}^{[k]}| + \frac{2C^{\frac{1}{2}}}{R} |b_n^{[k]}| \leq \frac{N(n, \nu)}{R} \cdot |\mathbf{b}^{[k]}|.$$

Аналогично, применяя к ψ оператор \mathcal{N} на множестве Q^0 , получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\psi &= \partial_t \psi - \alpha_{lm} D_l D_m \psi + \beta_l D_l \psi + \sum_{k=1}^K \beta_n^{[k]} D_n^{[k]} \psi \\ &= \frac{4}{R^2} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{8}{R^2} \alpha_{ll} - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{8}{R^2} \beta_l (x_l - x_l^0) + \sum_{k=1}^K \beta_n^{[k]} \left(\frac{2C}{R^2} x_n^{[k]} - \frac{2C^{\frac{1}{2}}}{R} \right) \Big|_{x_n^{[k]}=0} \\ &\leq \frac{N(n, \nu)}{R} \cdot \left(\frac{1}{R} + |\beta'| + |\beta_*| \right). \end{aligned}$$

Заметим, что на множестве $Q \cap \{\psi > u\}$ также выполнено $u < 1$. Продолжим имеющуюся оценку, расширяя множество интегрирования:

$$\begin{aligned} \psi - u &\leq N(n, \nu) \cdot \left(R^{-\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q^{[k]} \cap \{u < 1\}} + R^{\frac{n-1}{n}} \|(\mathcal{N}u)_-\|_{n, Q^0 \cap \{u < 1\}} \right) \\ &+ \frac{N(n, \nu)}{R} R^{-\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+1, Q^{[k]} \cap \{u < 1\}} + \frac{N(n, \nu)}{R} R^{-\frac{n-1}{n}} \left\| \frac{1}{R} + |\beta'| + |\beta_*| \right\|_{n, Q^0 \cap \{u < 1\}} \\ &\stackrel{*}{\leq} N(n, \nu) \cdot \mathcal{F}[u] + K \cdot \frac{N(n, \nu)}{R} R \sigma_1 + \frac{N(n, \nu)}{R} R^{-\frac{n-1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{R} |Q_R^0|^{\frac{1}{n}} (1 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{n}} + R^{\frac{1}{n}} \sigma_1 \right) \\ &\leq N(n, \nu) \cdot \mathcal{F}[u] + N(n, \nu) \cdot (K + 1) \sigma_1 + N(n, \nu) \cdot (1 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{n}} |Q_R^0|^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

В неравенстве (*) мы воспользовались условием (10) и оценками (14)–(16).

При достаточно малых σ_1 и $(1 - \varepsilon_1)$ последние слагаемые не превосходят δ_1 . Рассматривая неравенство в точке (t^0, x^0) , получаем неравенство (11). \square

Следующая лемма показывает, что для неотрицательной функции u из квалифицированной оценки снизу на переплёте следует квалифицированная оценка снизу в достаточно малом стратифицированном цилиндре.

Лемма 2.2. Пусть $R \leq 1$, $u \in \bigcap_{k=1}^K W_{n+1}^{1,2}(Q_R^{[k]}) \cap C(\overline{Q_R})$, а также $u \geq 0$ в $\overline{Q_R}$. Тогда для любого $\delta_2 \in (0, 1)$ существуют $\sigma_2 > 0, \varepsilon_2 \in (0, 1)$, зависящие только от n, ν, δ_2 , такие что при любом $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ выполнение условий

$$\|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+2, Q_R^{[k]}} \leq \sigma_2,$$

$$u \geq \gamma_2 \text{ на } Q_R^0$$

влечёт выполнение следующей оценки на $\mathbb{Q}_{\varepsilon_2 R}$:

$$u \geq (1 - \delta_2)\gamma_2 - N_2(n, \nu) \cdot R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q_R^{[k]}}. \quad (17)$$

Доказательство. Случай $\gamma_2 \leq 0$ тривиален. Не умаляя общности, будем считать $\gamma_2 = 1$ и $\sigma_2 \leq \nu$. Рассмотрим барьерную функцию

$$\psi(t, x) = 1 - \frac{1}{R^2}(|x'|^2 - t) + \frac{C}{4R^2}x_n^2 - \frac{C^{\frac{1}{2}}}{R}x_n.$$

Введём вспомогательные цилиндры $Q^{[k]} = Q_R^{[k]} \cap \{x_n < 2RC^{-\frac{1}{2}}\}$, $k = 1, \dots, K$. Нетрудно видеть, что при таком выборе барьерной функции на $\partial'Q^{[k]}$ выполняется неравенство $\psi - u \leq 0$. Полагая $C = \frac{2}{\nu}(1 + 2\frac{n-1}{\nu})$, аналогично лемме 2.1 получаем

$$|\mathcal{M}^{[k]}\psi| \leq \frac{C}{2R^2}|\mathbf{b}^{[k]}| \cdot |x| + \frac{C^{\frac{1}{2}}}{R}|\mathbf{b}_n^{[k]}| \leq \frac{N_1(n, \nu)}{R} \cdot |\mathbf{b}^{[k]}|.$$

Применим оценку из [6, теорема 1] к функции $\psi - u$ на $Q^{[k]}$. Учитывая неравенство (14), а также $\sigma_2 \leq \nu$, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{Q^{[k]}}(\psi - u) &\leq N(n) \cdot R^{\frac{n}{n+1}} \left(1 + \frac{1}{R} \|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+1, Q^{[k]}}^{n+1}\right) \cdot \|(\mathcal{M}^{[k]}(\psi - u))_+\|_{n+1, Q^{[k]}} \\ &\leq N(n) \cdot R^{\frac{n}{n+1}} \left(1 + N(n)\sigma_2^{n+1}\right) \cdot \left(\|(\mathcal{M}^{[k]}\psi)_+\|_{n+1, Q^{[k]}} + \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q^{[k]}}\right) \\ &\leq N(n, \nu) \cdot R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \left(\frac{N(n, \nu)}{R} \|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+1, Q^{[k]}} + \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q^{[k]}}\right) \\ &\leq N(n, \nu)\sigma_2 + N(n, \nu)R^{\frac{n}{n+1}} \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q^{[k]}}. \end{aligned}$$

Таким образом, на $Q^{[k]}$ при всех $k = 1, \dots, K$ выполняется неравенство:

$$u \geq \psi - N(n, \nu)\sigma_2 - N(n, \nu)R^{\frac{n}{n+1}} \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q^{[k]}}.$$

Поскольку $\psi(0, 0) = 1$, для некоторого $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(n, \nu, \delta_2) < 2C^{-\frac{1}{2}}$ выполняется неравенство $\psi \geq 1 - \frac{\delta_2}{2}$ на $\mathbb{Q}_{\varepsilon_2 R}$. Выбирая σ_2 , зависящее от n, ν, δ_2 , так что $N(n, \nu)\sigma_2 \leq \frac{\delta_2}{2}$, и расширяя область интегрирования с $Q^{[k]}$ до $Q_R^{[k]}$, получаем на $Q_{\varepsilon_2 R}^{[k]}$:

$$u \geq (1 - \delta_2) - N(n, \nu)R^{\frac{n}{n+1}} \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q_R^{[k]}}.$$

Наконец, совмещая оценки по всем листам, получаем неравенство (17) на $\mathbb{Q}_{\varepsilon_2 R}$. \square

2.2. Лемма о косом цилиндре. Следующая лемма – технически наиболее сложная в работе. Она показывает, что для неотрицательной функции квалифицированная оценка снизу на стратифицированном шаре малого радиуса в начальный момент времени порождает квалифицированную оценку снизу на большом стратифицированном шаре, начиная с некоторого момента.

Лемма 2.3. Пусть $\kappa \in (0, 1)$, $t^0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\tau > 0$ и $\rho > 0$, удовлетворяющие соотношениям

$$\kappa R^2 \leq \tau \leq \kappa^{-1} R^2, \quad \kappa R \leq \rho \leq \kappa^{-1} R. \quad (18)$$

Для x^0 такого, что $x_n^0 = 0$, рассмотрим стратифицированный цилиндр

$$Q = (t^0, t^0 + \tau) \times \mathbb{B}_\rho(x^0).$$

Принимая во внимание ограничения (18), введём “сжатый” цилиндр

$$Q' = (t^0 + \kappa R^2, t^0 + \tau) \times \mathbb{B}_{\rho - \kappa R}(x^0).$$

Пусть $R \leq 1$, $u \in \mathcal{V}(Q)$, а также $u \geq 0$ на \bar{Q} . Тогда существуют константы δ_3, p , зависящие от n, ν, κ , такие что для любого $\varepsilon_3 \in (0, 1)$ найдётся константа $\sigma_3 > 0$, зависящая от $n, K, \nu, \kappa, \varepsilon_3$, такая что при любых $\gamma_3 \in \mathbb{R}$, $x^1 \in B_{\rho - \kappa R}^0(x^0)$ выполнение условий

$$\|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+2, Q^{[k]}} \leq \sigma_3, \quad \|\mathbf{b}'\|_{n+1, Q^0} \leq \sigma_3, \quad \|\mathbf{b}_*\|_{n+1, Q^0} \leq \sigma_3, \quad (19)$$

$$u \geq \gamma_3 \text{ на } \{t^0\} \times \mathbb{B}_{\varepsilon_3 R}(x^1). \quad (20)$$

влечёт выполнение следующей оценки на сжатом цилиндре Q' :

$$u \geq \delta_3 \varepsilon_3^{2p+1} \gamma_3 - N_3(n, \nu) \cdot \left(R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q^{[k]}} + R^{\frac{n-1}{n}} \|(\mathcal{N}u)_-\|_{n, Q^0} \right). \quad (21)$$

Доказательство. Случай $\gamma_3 \leq 0$ тривиален. Не умаляя общности будем считать $\gamma_3 = 1$, $\sigma_3 \leq \nu$, $x^0 = 0$, $x^1 = 0$, $t^0 = 0$, $\varepsilon_3 \leq \kappa/\sqrt{2}$. Обозначим через (t^*, x^*) точку минимума u на \bar{Q}' , а через k^* номер

страта, в который она попала: $(t^*, x^*) \in Q^{[k^*]}$ (если $(t^*, x^*) \in Q^0$, положим $k^* = 1$). Можно считать $t^* = \tau$, поскольку τ можно уменьшить до t^* . Рассмотрим линейное отображение

$$X(t) = \frac{t}{\tau} x^*$$

и введём вспомогательную функцию

$$\mathcal{K}(t) = \sqrt{\frac{\kappa^3 t}{2R^2} + \varepsilon_3^2}.$$

На Q , по аналогии с [3, лемма 1.3], введём функцию

$$r(t, x) = \frac{\text{dist}_{\mathbb{B}}(x, X(t))}{\mathcal{K}(t)} \quad (22)$$

и для параметра $w \in (0, 1]$ обозначим

$$\mathcal{Q}_w = \{(t, x) \mid r(t, x) < wR, 0 < t < \tau\}.$$

Ясно что для $w_1 < w_2$ выполняется вложение $\mathcal{Q}_{w_1} \subset \mathcal{Q}_{w_2}$. На \mathcal{Q}_1 по определению выполнено неравенство

$$\text{dist}_{\mathbb{B}}(x, X(t)) < \mathcal{K}(t)R.$$

Далее, в силу того, что $t < \tau$, и ограничения (18) на \mathcal{Q}_1 также выполнено

$$\mathcal{K}(t) < \sqrt{\frac{\kappa^3 \tau}{2R^2} + \varepsilon_3^2} \leq \sqrt{\frac{\kappa^2 R^2}{2R^2} + \frac{\kappa^2}{2}} = \kappa.$$

Поэтому для любых $(t, x) \in \mathcal{Q}_1$ выполнено $\text{dist}_{\mathbb{B}}(x, X(t)) < \kappa R$. Далее, $x^* \in \mathbb{B}_{\rho - \kappa R}$, поэтому и $X(t) = \frac{t}{\tau} x^* \in \mathbb{B}_{\rho - \kappa R}$. Таким образом, получаем $\text{dist}_{\mathbb{B}}(x, \mathbb{B}_{\rho - \kappa R}) < \kappa R$, и тем самым для любого $w \in (0, 1]$ имеем $\mathcal{Q}_w \subset \mathcal{Q}_1 \subset Q$.

По аналогии с [3, лемма 1.3], введём семейство функций, зависящих от того же параметра $w \in (0, 1]$:

$$\varphi_w(t, x) = \begin{cases} \varepsilon_3^{2p+1} \frac{((wR)^2 - r(t, x)^2)^2}{R^4 \mathcal{K}(t)^{2p}}, & (t, x) \in \overline{\mathcal{Q}_w} \\ 0, & (t, x) \in ([0, \tau] \times \mathbb{R}^n) \setminus \overline{\mathcal{Q}_w} \end{cases} \quad (23)$$

(здесь p – параметр, который будет выбран позднее) и установим несколько их ключевых свойств.

Утверждение 2.1. Для $w_1 < w_2$ на $\overline{\mathcal{Q}_{w_1}}$ выполняется

$$\varphi_{w_1} < \varphi_{w_2}.$$

Это утверждение тривиальным образом следует из того что $Q_{w_1} \subset Q_{w_2}$, а также $(w_2R)^2 - r(t, x)^2 > (w_1R)^2 - r(t, x)^2 \geq 0$ на Q_{w_1} . \square

Утверждение 2.2. Для любого $w \in (0, 1]$ выполняется неравенство $\varphi_w - u \leq 0$ на $\partial' Q_w = \{(t, x) \in \overline{Q_w} \mid r(t, x) = wR\} \cup (\overline{Q_w} \cap \{t = 0\})$.

Доказательство. На боковой границе $\{(t, x) \in \overline{Q_w} \mid r(t, x) = wR\}$ очевидным образом выполняется $\varphi_w = 0$, и учитывая, что $u \geq 0$ на всём \overline{Q} , получаем искомое. На $\overline{Q_w} \cap \{t = 0\}$, по определению Q_w , выполнено

$$|x| = \text{dist}_{\mathbb{B}}(x, X(0)) < w\mathcal{K}(0)R = w\varepsilon_3R \leq \varepsilon_3R.$$

По условию (20) отсюда следует, что на $\overline{Q_w} \cap \{t = 0\}$ выполнено неравенство $u \geq \gamma_3 = 1$. А с другой стороны, на $\overline{Q_w} \cap \{t = 0\}$ имеем

$$\varphi_w(0, x) < \varepsilon_3^{2p+1} \frac{(wR)^4}{R^4 \varepsilon_3^{2p}} < 1. \quad \square$$

Вычислим теперь все производные φ_w , входящие в $\mathcal{M}^{[k]}\varphi_w$ и $\mathcal{N}\varphi_w$:

$$\begin{aligned} \partial_t r^2(t, x) &= -2 \frac{\langle x - X(t), \partial_t X(t) \rangle}{\mathcal{K}(t)^2} - \frac{|x - X(t)|^2}{\mathcal{K}(t)^4} \frac{\kappa^3}{2R^2} \\ &= -2 \frac{\langle x - \frac{t}{\tau}x^*, \frac{1}{\tau}x^* \rangle}{\mathcal{K}(t)^2} - \frac{r(t, x)^2}{\mathcal{K}(t)^2} \frac{\kappa^3}{2R^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^{-(2p+1)} \partial_t \varphi(t, x) &= 4 \frac{((wR)^2 - r^2) \langle x - \frac{t}{\tau}x^*, \frac{1}{\tau}x^* \rangle}{R^4 \mathcal{K}^{2p+2}} \\ &\quad + 2 \frac{((wR)^2 - r^2) r^2}{R^4 \mathcal{K}^{2p+2}} \frac{\kappa^3}{2R^2} - p \frac{((wR)^2 - r^2)^2}{R^4 \mathcal{K}^{2p+2}} \frac{\kappa^3}{2R^2}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_3^{-(2p+1)} D_i \varphi(t, x) = -4 \frac{((wR)^2 - r^2) (x_i - \frac{t}{\tau}x_i^*)}{R^4 \mathcal{K}^{2p+2}}, \quad (25)$$

$$\varepsilon_3^{-(2p+1)} D_i D_j \varphi(t, x) = 8 \frac{(x_i - \frac{t}{\tau}x_i^*) (x_j - \frac{t}{\tau}x_j^*)}{R^4 \mathcal{K}^{2p+4}} - 4 \delta_{ij} \frac{((wR)^2 - r^2)}{R^4 \mathcal{K}^{2p+2}}. \quad (26)$$

Утверждение 2.3 (Неравенства Крылова–Сафонова). При достаточно большом $p = p(n, \nu, \kappa, w)$ выполняются неравенства

$$\partial_t \varphi_w - a_{ij}^{[k]} D_i D_j \varphi_w \leq 0 \quad \text{на } Q_w^{[k]}.$$

Кроме того, если для некоторых $\tilde{t} \leq \tau$, $\tilde{w} < w$ выполнено $\frac{\tilde{t}}{\tau} x_n^* / \mathcal{K}(\tilde{t}) \leq \tilde{w}R$, то при достаточно большом $p = p(n, \nu, \kappa, \tilde{w})$ выполняется неравенство

$$\partial_t \varphi_w - \alpha_{lm} D_l D_m \varphi_w \leq 0 \quad \text{на } (\mathcal{Q}_w)^0 \cap \{t \leq \tilde{t}\}.$$

Доказательство. Неравенства на $\mathcal{Q}_w^{[k]}$ доказываются аналогично [3, лемма 1.3]. Доказательство неравенства на $(\mathcal{Q}_w)^0$ по большей части не отличается от неравенств на листах, но для удобства читателя приведём его здесь.

Домножая левую часть на положительную функцию и группируя слагаемые из формул (24), (25), (26), разложим целевую величину в сумму:

$$\varepsilon_3^{-(2p+1)} R^4 \mathcal{K}^{2p+2} \cdot (\partial_t \varphi_w - \alpha_{lm} D_l D_m \varphi_w) = A_1 + A_2 + A_3,$$

где

$$A_1 = -p \cdot ((wR)^2 - r^2)^2 \frac{\kappa^3}{2R^2},$$

$$\begin{aligned} A_2 &= -8 \frac{\alpha_{lm} (x_l - \frac{t}{\tau} x_l^*) (x_m - \frac{t}{\tau} x_m^*)}{\mathcal{K}^2} \\ &\stackrel{*}{\leq} -8 \frac{\nu |x' - \frac{t}{\tau} x^{*'}|^2}{\mathcal{K}^2} \stackrel{**}{=} -8\nu r^2 + 8\nu \left(\frac{t x_n^*}{\mathcal{K}} \right)^2 \stackrel{***}{\leq} -8\nu r^2 + 8\nu (\tilde{w}R)^2 \\ &= 8\nu ((wR)^2 - r^2) - 8\nu R^2 (w^2 - \tilde{w}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= 2((wR)^2 - r^2) \cdot \left(2\alpha_{lm} \delta_{lm} + \frac{2}{\tau} (x_l - \frac{t}{\tau} x_l^*) x_l^* + r^2 \frac{\kappa^3}{2R^2} \right) \\ &\leq ((wR)^2 - r^2) \cdot N(n, \nu, \kappa). \end{aligned}$$

В определении A_2 неравенство (*) выполнено ввиду (2); равенство (**) выполнено, поскольку $x_n = 0$ на $(\mathcal{Q}_w)^0$; а неравенство (***) – по условию. Неравенство в определении A_3 обусловлено тем, что все слагаемые в большой скобке ограничены сверху некоторыми величинами, зависящими лишь от n, ν и κ .

Разделим оценку на две части. Во-первых, поскольку $A_1 \leq 0$, оценим сумму $A_2 + A_3$:

$$A_2 + A_3 \leq ((wR)^2 - r^2) (8\nu + N(n, \nu, \kappa)) - 8\nu R^2 (w^2 - \tilde{w}^2).$$

Нетрудно видеть, что для выполнения $A_2 + A_3 \leq 0$ достаточно

$$r^2 \geq (\widehat{w}R)^2 := (wR)^2 - \frac{8\nu R^2(w^2 - \widehat{w}^2)}{8\nu + N(n, \nu, \kappa)}.$$

Рассмотрим теперь случай $r < \widehat{w}R$. Из неравенства (*) в определении A_2 видно что $A_2 \leq 0$. Оценим сумму $A_1 + A_3$:

$$A_1 + A_3 \leq ((wR)^2 - r^2) \left(N(n, \nu, \kappa) - p(w^2 - \widehat{w}^2) \frac{\kappa^3}{2} \right).$$

Для выполнения $A_1 + A_3 \leq 0$ достаточно положить $p \geq \frac{N(n, \nu, \kappa)}{\frac{\kappa^3}{2}(w^2 - \widehat{w}^2)}$. \square

Завершим перечисление свойств функции φ_w , оценив величину её градиента на \mathcal{Q}_w по формуле (25)

$$\begin{aligned} |D\varphi_w| &= 4\varepsilon_3^{2p+1} \frac{((wR)^2 - r^2)}{R^4 \mathcal{K}^{2p+2}} \cdot \left| x - \frac{t}{\tau} x^* \right| \\ &= 4 \cdot \frac{\varepsilon_3^{2p+1}}{\mathcal{K}^{2p+1}} \cdot \frac{((wR)^2 - r^2)r}{R^4} \leq \frac{4w^3}{R}. \end{aligned} \quad (27)$$

Вернёмся к доказательству леммы 2.3. Проведём его в два шага. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mathcal{S}(t) = 1 - \frac{\frac{t}{\tau} x_n^*}{\mathcal{K}(t)R}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{S}(0) = 1$ и \mathcal{S} не возрастает при $t \geq 0$, поскольку $\frac{\frac{t}{\tau} x_n^*}{\mathcal{K}(t)}$ не убывает. Если $x_n^* \neq 0$, то \mathcal{S} строго убывает, и чем больше величина $x_n^* > 0$, тем меньше значение $\mathcal{S}(\tau)$. Рассмотрим момент

$$\tau^* = \max_{t \in [0, \tau]} \left\{ t \mid \mathcal{S}(t) \geq \frac{1}{2} \right\}. \quad (28)$$

Если $\mathcal{S}(\tau) < \frac{1}{2}$, то τ^* является единственным решением уравнения $\mathcal{S}(t) = \frac{1}{2}$ на $(0, \tau)$, и доказательство будет проведено в два шага. Первым шагом для $t \in [0, \tau^*]$, где выполнено $\frac{1}{2}\mathcal{K}(t)R - \frac{t}{\tau}x_n^* \geq 0$, мы построим оценку для функции $\varphi_1 - u$ на $\mathcal{Q}_1 \cap \{t \leq \tau^*\}$. Вторым шагом для $t \in [\tau^*, \tau]$, где выполнено $\frac{1}{2}\mathcal{K}(t)R - \frac{t}{\tau}x_n^* \leq 0$, мы оценим $\varphi_{\frac{1}{2}} - u$ на $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}} \cap \{t \geq \tau^*\}$.

Если же x_n^* настолько мало, что $\mathcal{S}(t) \geq \frac{1}{2}$ на всём промежутке $[0, \tau]$, то $\tau^* = \tau$, и нам потребуется лишь первый шаг. Далее мы будем рассматривать более сложный случай, когда $\mathcal{S}(\tau) < \frac{1}{2}$.

Шаг 1. Пользуясь Утверждением 2.2 и применяя теорему 5.1 из [7], получаем неравенство на $\mathcal{Q}_1 \cap \{t \leq \tau^*\}$:

$$\begin{aligned} \varphi - u &\leq N(n) \cdot \left(C_1 \cdot \sum_{k=1}^K \left\| (\mathcal{M}^{[k]}(\varphi - u))_+ \right\|_{n+1, \mathcal{Q}_1^{[k]} \cap \{t \leq \tau^*\}} \right. \\ &\quad \left. + C_2 \cdot \left\| (\mathcal{N}(\varphi - u))_+ \right\|_{n, \mathcal{Q}_1^0 \cap \{t \leq \tau^*\}} \right) \\ &\leq N(n, \nu) \cdot \left(R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \left(\left\| (\mathcal{M}^{[k]}\varphi)_+ \right\|_{n+1, \mathcal{Q}_1^{[k]} \cap \{t \leq \tau^*\}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\| (\mathcal{M}^{[k]}u)_- \right\|_{n+1, \mathcal{Q}_1^{[k]} \cap \{t \leq \tau^*\}} \right) \right. \\ &\quad \left. + R^{\frac{n-1}{n}} \left(\left\| (\mathcal{N}\varphi)_+ \right\|_{n, \mathcal{Q}_1^0 \cap \{t \leq \tau^*\}} + \left\| (\mathcal{N}u)_- \right\|_{n, \mathcal{Q}_1^0 \cap \{t \leq \tau^*\}} \right) \right). \end{aligned}$$

где C_1, C_2 – константы аналогичные (12) и (13). По определению τ^* на промежутке $(0, \tau^*)$ выполняется неравенство $\frac{1}{2}\mathcal{K}(t) - \frac{t}{\tau}x_n^* \geq 0$. Таким образом, мы находимся в условиях утверждения 2.3 с $w = 1$, $\tilde{w} = \frac{1}{2}$, $\tilde{t} = \tau^*$, и выполняются оценки

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}^{[k]}\varphi)_+ &\leq (b_i^{[k]}D_i\varphi)_+ \text{ на } \mathcal{Q}_1^{[k]}, \\ (\mathcal{N}\varphi)_+ &\leq (\beta_l D_l\varphi + \mathcal{J}\varphi)_+ \text{ на } \mathcal{Q}_1^0 \cap \{t \leq \tau^*\}. \end{aligned}$$

Применяя оценку (27) для градиента φ , получаем неравенство на $\mathcal{Q}_1 \cap \{t \leq \tau^*\}$:

$$\begin{aligned} \varphi - u &\leq N(n, \nu) \cdot \left(R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \left\| (\mathcal{M}^{[k]}u)_- \right\|_{n+1, \mathcal{Q}_1^{[k]} \cap \{t \leq \tau^*\}} \right. \\ &\quad \left. + R^{\frac{n-1}{n}} \left\| (\mathcal{N}u)_- \right\|_{n, \mathcal{Q}_1^0 \cap \{t \leq \tau^*\}} \right. \\ &\quad \left. + R^{-\frac{1}{n+1}} \sum_{k=1}^K \left\| \mathbf{b}^{[k]} \right\|_{n+1, \mathcal{Q}_1^{[k]} \cap \{t \leq \tau^*\}} + R^{-\frac{1}{n}} \left\| \boldsymbol{\beta}' \right\|_{n, \mathcal{Q}_1^0 \cap \{t \leq \tau^*\}} \right. \\ &\quad \left. + R^{-\frac{1}{n}} \left\| \boldsymbol{\beta}_* \right\|_{n, \mathcal{Q}_1^0 \cap \{t \leq \tau^*\}} \right). \end{aligned}$$

Из неравенств (14)–(16) и условия (19) следует, что последние три слагаемых в скобках не превосходят $N(n) \cdot (K + 2)\sigma_3$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \varphi - u \leq & N(n, \nu) \cdot \left(R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \left\| (\mathcal{M}^{[k]}u)_- \right\|_{n+1, \mathcal{Q}_1^{[k]} \cap \{t \leq \tau^*\}} \right. \\ & \left. + R^{\frac{n-1}{n}} \left\| (\mathcal{N}u)_- \right\|_{n, \mathcal{Q}_1^0 \cap \{t \leq \tau^*\}} \right) + N(n, \nu) \cdot (K + 2)\sigma_3. \end{aligned}$$

Правую часть последнего неравенства обозначим через $\gamma_3' \geq 0$.

Шаг 2. Заметим, что на множестве \mathcal{Q}_w величина $w\mathcal{K}(t)R - \frac{t}{\tau}x_n^*$ играет важную роль: если в момент t она не положительна, то в этот момент множество \mathcal{Q}_w целиком лежит в страте k^* , в который попала точка минимума x^* .

Ввиду определения (28) при $t \geq \tau^*$ имеем $\frac{1}{2}\mathcal{K}(t)R - \frac{t}{\tau}x_n^* \leq 0$, и $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}} \cap \{t \geq \tau^*\}$ целиком лежит в страте k^* . Рассмотрим функцию $\varphi_{\frac{1}{2}} - u - \gamma_3'$. По Утверждению 2.2 на боковой границе $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}$ выполняется неравенство $\varphi_{\frac{1}{2}} - u - \gamma_3' \leq 0$. На предыдущем шаге было показано, что в момент $t = \tau^*$ выполняется неравенство $\varphi - u - \gamma_3' \leq 0$ на \mathcal{Q}_1 . По Утверждению 2.1 $\varphi_{\frac{1}{2}} < \varphi$ на $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}$, поэтому на $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}} \cap \{t = \tau^*\}$ выполняется $\varphi_{\frac{1}{2}} - u - \gamma_3' < 0$. И тем самым на всей параболической границе $\partial'(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}} \cap \{t > \tau^*\})$ выполняется $\varphi - u - \gamma_3' \leq 0$. Применяя принцип максимума Александрова–Бакельмана–Крылова для нестратифицированного случая [6, теорема 1] на $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}} \cap \{t > \tau^*\}$, получаем аналогично шагу 1:

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{1}{2}} - u - \gamma_3' & \leq N(n) \cdot R^{\frac{n}{n+1}} \left(1 + \frac{1}{R} \left\| \mathbf{b}^{[k^*]} \right\|_{n+1, \mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}^{[k^*]}}^{n+1} \right) \\ & \quad \times \left\| (\mathcal{M}^{[k^*]}(\varphi_{\frac{1}{2}} - u))_+ \right\|_{n+1, \mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}^{[k^*]} \cap \{t > \tau^*\}} \\ & \leq N(n, \nu) R^{\frac{n}{n+1}} \left\| (\mathcal{M}^{[k^*]}u)_- \right\|_{n+1, \mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}^{[k^*]} \cap \{t > \tau^*\}} + N(n, \nu)\sigma_3. \end{aligned}$$

Завершение доказательства. Из определений (22) и (23) нетрудно видеть, что в точке (τ, x^*) выполняется неравенство $\varphi_{\frac{1}{2}}(\tau, x^*) \geq$

$\frac{1}{16} \frac{\varepsilon_3^{2p+1}}{\kappa^{2p}}$. Учитывая определение величины γ'_3 , на всём цилиндре Q' получаем

$$u \geq u(\tau, x^*) \geq \frac{1}{16} \frac{\varepsilon_3^{2p+1}}{\kappa^{2p}} - N(n, \nu) \cdot K \sigma_3 - N(n, \nu) \cdot \left(R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \left\| (\mathcal{M}^{[k]} u)_- \right\|_{n+1, Q^{[k]}} + R^{\frac{n-1}{n}} \left\| (\mathcal{N} u)_- \right\|_{n, Q^0} \right)$$

Выбирая $\sigma_3 = \varepsilon_3^{2p+1} / (2 \cdot 16 \kappa^{2p} K \cdot N(n, \nu))$, $\delta_3 = 1 / (2 \cdot 16 \kappa^{2p})$, получаем (21). \square

2.3. Применение леммы о покрытии. Обозначим

$$\mathfrak{Q} = Q_{R/2}^0(-3R^2/4, 0). \quad (29)$$

Для $(\theta, y) \in \mathfrak{Q}$ рассмотрим некоторое r , при котором цилиндр $Q_r^0(\theta, y)$ содержится в \mathfrak{Q} . Ясно что любое такое r не превосходит $R/2$. Для этого цилиндра и некоторого $h \geq 0$ определим его “шапочку” на переплёте:

$$H_0(h, r; \theta, y) = \left(B_{3r}^0(y) \cap B_{R/2}^0 \right) \times ((\theta, \theta + hr^2) \cap (\theta, 0)).$$

Шапочка $H_0(h, r; \theta, y)$ целиком содержится в Q_R^0 . При этом она может вылезать из \mathfrak{Q} вверх, но её основание в момент θ содержится в \mathfrak{Q} . Введём также стратифицированную шапочку:

$$H(h, r; \theta, y) = \left(\mathbb{B}_{3r}(y) \cap \mathbb{B}_{R/2} \right) \times ((\theta, \theta + hr^2) \cap (\theta, 0)).$$

Следующая лемма – следствие лемм 2.1–2.3. Она показывает, что если неотрицательная функция в некотором стратифицированном цилиндре принимает значения, меньшие некоторого уровня, на достаточно малой части переплёта, то она допускает квалифицированную оценку снизу на стратифицированной шапочке этого цилиндра.

Лемма 2.4. Пусть $R \leq 1$, $h > 0$, $u \in \mathcal{V}(\mathbb{Q}_R)$, а также $u \geq 0$ в $\overline{\mathbb{Q}_R}$. Тогда существуют константы $\sigma_4 > 0$, зависящая от n, K, ν, h ; и $\delta_4 \in (0, 1)$, зависящая от n, ν, h , такие что для $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(n, \nu, \frac{1}{2})$ из леммы 2.1, при любом $\gamma_4 \in \mathbb{R}$ и любом цилиндре $Q_r^0(\theta, y) \subset \mathfrak{Q}$ выполнение условий

$$\|b^{[k]}\|_{n+2, Q_R^{[k]}} \leq \sigma_4, \quad \|\beta'\|_{n+1, Q_R^0} \leq \sigma_4, \quad \|\beta_*\|_{n+1, Q_R^0} \leq \sigma_4,$$

$$|Q_r^0(\theta, y) \cap \{u \geq \gamma_4\}| \geq \varepsilon_1 \cdot |Q_r^0(\theta, y)|$$

влечёт выполнение следующей оценки на $H(h, r; \theta, y)$:

$$u \geq \delta_4 \gamma_4 - N_4(n, \nu, h) \cdot \mathcal{F}[u], \quad (30)$$

где $\mathcal{F}[u]$ определяется в (9).

Доказательство. Случай $\gamma_4 \leq 0$ тривиален. Первым шагом применим лемму 2.1 в цилиндре $Q_{r/2}^0(\theta - r^2/2, y)$, передвинув начало координат в $(\theta - r^2/2, y)$ и взяв $R = r/2$. Для $\delta_1 = 1/2$, существуют $\sigma_1 = \sigma_1(n, K, \nu, \frac{1}{2})$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(n, \nu, \frac{1}{2})$, такие что для $\gamma_1 = \gamma_4$ выполнение неравенства

$$|Q_{r/2}^0(\theta - r^2/2, y) \cap \{u \geq \gamma_4\}| \geq \varepsilon_1 \cdot |Q_{r/2}^0(\theta - r^2/2, y)|$$

влечёт оценку на переплёте $Q_{r/4}^0(\theta - r^2/2, y)$:

$$\begin{aligned} u \geq \frac{\gamma_4}{2} - N(n, \nu) \cdot \left((r/2)^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q_{r/2}^{[k]}(\theta - r^2/2, y)} \right. \\ \left. + (r/2)^{\frac{n-1}{n}} \|(\mathcal{N}u)_-\|_{n, Q_{r/2}^0(\theta - r^2/2, y)} \right) \geq \gamma_2, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_2 = \frac{\gamma_4}{2} - N(n, \nu) \cdot \mathcal{F}[u].$$

Далее, по лемме 2.2, применяемой на цилиндре $Q_{r/4}(\theta - r^2/2, y)$: для $\delta_2 = 1/2$ существуют $\sigma_2 = \sigma_2(n, \nu, \frac{1}{2})$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(n, \nu, \frac{1}{2})$, такие что при $u \geq \gamma_2$ на $Q_{r/4}^0(\theta - r^2/2, y)$, имеет место оценка на цилиндре $Q_{\varepsilon_2 r/4}(\theta - r^2/2, y)$:

$$\begin{aligned} u \geq \frac{\gamma_2}{2} - N(n, \nu) \cdot (r/4)^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q_{r/4}^{[k]}(\theta - r^2/2, y)} \\ \geq \frac{\gamma_2}{2} - N(n, \nu) \cdot R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q_R^{[k]}} \geq \gamma_3, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_3 = \frac{\gamma_4}{4} - N(n, \nu) \cdot \mathcal{F}[u].$$

В частности, мы получили оценку $u \geq \gamma_3$ на $\{\theta - r^2/2\} \times \mathbb{B}_{\varepsilon_2 r/4}(y)$. Наконец, применим лемму 2.3, взяв r вместо R , с

$$t^0 = \theta - r^2/2, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2/4, \quad x^1 = y, \quad \tau = \min \left\{ \left(h + \frac{1}{2} \right) r^2, -t_0 \right\},$$

$$\kappa = \min \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{2h+1} \right\}.$$

Для выбора ρ и x^0 из условия леммы 2.3 понадобится рассмотреть два случая. Если $4r \leq R/2$, то шар $\mathbb{B}_{4r}(y)$ содержится в \mathbb{B}_R , поскольку $y \in B_0(R/2)$, и можно выбрать $\rho = 4r < \kappa^{-1}r$, $x^0 = y$. Если же $4r \geq R/2$, выберем $\rho = R \leq 8r \leq \kappa^{-1}r$ и $x^0 = 0$. Тогда, по выбору t_0, τ и ρ , цилиндры Q и Q' из леммы 2.3 в обоих случаях содержатся в \mathbb{Q}_R . По лемме 2.3 существуют

$$\delta_3 = \delta_3(n, \nu, \kappa), \quad p = p(n, \nu, \kappa), \quad \sigma_3 = \sigma_3(n, K, \nu, \kappa, \varepsilon_3)$$

(заметим, что эти величины зависят только от n, ν, h), при которых справедлива оценка на $Q' = (t_0 + \kappa r^2, t_0 + \tau) \times \mathbb{B}_{\rho - \kappa r}(x^0)$:

$$u \geq \delta_3 \varepsilon_3^{2p+1} \gamma_3 - N(n, \nu) \cdot \left(r^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|(\mathcal{M}^{[k]}u)_-\|_{n+1, Q^{[k]}} + r^{\frac{n-1}{n}} \|(\mathcal{N}u)_-\|_{n, Q^0} \right)$$

$$\geq \frac{\delta_3 \varepsilon_3^{2p+1} \gamma_4}{4} - N(n, \nu) \delta_3 \varepsilon_3^{2p+1} \cdot \mathcal{F}[u].$$

По выбору t_0, τ, κ получаем $(\theta, \min\{\theta + hr^2, 0\}) \subset (t_0 + \kappa r^2, t_0 + \tau)$. Кроме того, по выбору ρ, x^0, κ в первом случае имеем $\rho = 4r, x^0 = y$, и тогда $\mathbb{B}_{3r}(y) \subset \mathbb{B}_{\rho - \kappa r}(x^0)$. А во втором случае $\rho = R, x^0 = 0$, и $\mathbb{B}_{R/2} \subset \mathbb{B}_{\rho - \kappa r}(x^0)$, поскольку $r \leq R/2$. Таким образом, в обоих случаях $H(h, r; \theta, y) \subset Q'$. Выбирая

$$\sigma_4 = \min\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \quad \delta_4 = \delta_3 \varepsilon_3^{2p+1} / 4$$

получаем неравенство (30). \square

Для фиксированных $\gamma > 0, \varepsilon > 0$, и для Ω из (29) введём систему цилиндров:

$$\mathcal{D}_{\gamma, \varepsilon} = \left\{ Q_r^0(\theta, y) \subset \Omega, \left| |Q_r^0(\theta, y) \cap \{u \geq \gamma\}| \geq \varepsilon |Q_r^0(\theta, y)| \right. \right\}. \quad (31)$$

Для некоторого $\eta \in (0, 1]$, значение которого будет определено ниже, рассмотрим шапочки высоты $h = 4\eta^{-1}$. Обозначим объединение всех

шапочек на переплёте для цилиндров семейства $\mathcal{D}_{\gamma,\varepsilon}$

$$\mathcal{H}_{\gamma,\varepsilon,\eta} = \bigcup_{Q_r^0(\theta,y) \in \mathcal{D}_{\gamma,\varepsilon}} H_0(4\eta^{-1}, r; \tau, y).$$

Следующее важное утверждение, доказанное в [3, лемма 2.5], известно как “лемма о покрытии”.

Предложение 2.1. *Если $0 < |\Omega \cap \{u \geq \gamma\}| \leq \varepsilon \cdot |\Omega|$, то*

$$\varepsilon(1 + \eta) \cdot |\mathcal{H}_{\varepsilon,\gamma,\eta}| \geq |\Omega \cap \{u \geq \gamma\}|.$$

Следующая лемма показывает, что если неотрицательная функция в некотором стратифицированном цилиндре принимает значения, меньшие некоторого уровня, на большей части переплёта (не удовлетворяет условию леммы 2.1), то эту часть можно квалифицированно уменьшить за счёт уменьшения уровня.

Лемма 2.5. *Пусть $R \leq 1$, $u \in \mathcal{V}(\mathbb{Q}_R)$, а также $u \geq 0$ в $\overline{\mathbb{Q}_R}$. Тогда для любого $\varepsilon_5 \in (0, \varepsilon_1)$ (здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(n, \nu, \frac{1}{2})$ из леммы 2.1) существует σ_5 , зависящее от n, K, ν, ε_5 , такое что при любом $\gamma_5 \in \mathbb{R}$ выполнение неравенств*

$$\|b^{[k]}\|_{n+2, Q_R^{[k]}} \leq \sigma_5, \quad \|\beta'\|_{n+1, Q_R^0} \leq \sigma_5, \quad \|\beta_*\|_{n+1, Q_R^0} \leq \sigma_5,$$

$$\varepsilon_5 \cdot |\Omega| \leq |\Omega \cap \{u \geq \gamma_5\}| \leq \varepsilon_1 \cdot |\Omega| \quad (32)$$

(обозначение Ω введено в (29)) влечёт выполнение хотя бы одного из двух неравенств:

а) для некоторого $\delta_5 = \delta_5(n, \nu, \varepsilon_5)$

$$u \geq \delta_5 \gamma_5 - N_5(n, \nu, \varepsilon_5) \cdot \mathcal{F}[u] \quad \text{на } \mathbb{Q}_{R/2}, \quad (33)$$

б) для некоторых $\underline{\gamma}_5 = \underline{\gamma}_5(n, \nu, \gamma_5, \varepsilon_5) > 0$, $\eta = \eta(n, \nu, \varepsilon_5)$:

$$|\Omega \cap \{u \geq \underline{\gamma}_5\}| > (1 + \eta) \cdot |\Omega \cap \{u \geq \gamma_5\}| \quad (34)$$

Доказательство. Случай $\gamma_5 \leq 0$ тривиален. Рассмотрим систему цилиндров из (31) с $\gamma = \gamma_5$, $\varepsilon = \varepsilon_1$:

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\gamma_5, \varepsilon_1} = \left\{ Q_r^0(\theta, y) \subset \Omega, \quad \left| |Q_r^0(\theta, y) \cap \{u \geq \gamma_5\}| \geq \varepsilon_1 |Q_r^0(\theta, y)| \right. \right\}$$

и соответствующее множество $\mathcal{H}_{\gamma_5, \varepsilon_1, \eta}$, где η будет выбрано позже:

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\gamma_5, \varepsilon_1, \eta} = \bigcup_{Q_r^0(\theta,y) \in \mathcal{D}_{\gamma_5, \varepsilon_1}} H_0(4\eta^{-1}, r; \tau, y).$$

Применяя лемму 2.4 для каждого $Q_r^0(\theta, y) \in \mathcal{D}$ с $\gamma_4 = \gamma_5$, получаем оценки на $H(4\eta^{-1}, r, \theta, y)$ с константами $\delta_4 = \delta_4(n, \nu, 4\eta^{-1})$, $\sigma_4 = \sigma_4(n, K, \nu, 4\eta^{-1})$:

$$u \geq \delta_4 \gamma_5 - N_4(n, \nu, 4\eta^{-1}) \cdot \mathcal{F}[u].$$

Будем предполагать, что

$$\frac{\delta_4 \gamma_5}{2} > N_4(n, \nu, 4\eta^{-1}) \cdot \mathcal{F}[u], \quad (35)$$

поскольку в противном случае неравенство (33) с $N_5 = N_4$, $\delta_5 = \delta_4/2$ тривиально следует из $u \geq 0$. Из (35) следует, что на каждой стратифицированной шапочке $H(4\eta^{-1}, r; \theta, y)$ выполняется

$$u \geq \underline{\gamma}_5 := \frac{\delta_4 \gamma_5}{2}. \quad (36)$$

Получаем следующее включение:

$$\mathcal{H} \cap \Omega \subset \Omega \cap \{u \geq \underline{\gamma}_5\},$$

и тем самым

$$|\Omega \cap \{u \geq \underline{\gamma}_5\}| \geq |\mathcal{H} \cap \Omega| = |\mathcal{H}| - |\mathcal{H} \setminus \Omega|. \quad (37)$$

Поскольку по условию $|\Omega \cap \{u \geq \underline{\gamma}_5\}| \leq \varepsilon_1 |\Omega|$, предложение 2.1 даёт:

$$|\mathcal{H}| \geq \frac{|\Omega \cap \{u \geq \underline{\gamma}_5\}|}{\varepsilon_1(1+\eta)}.$$

Выберем $\eta = \eta(\varepsilon_1, \varepsilon_5) = \eta(n, \nu, \varepsilon_5) \in (0, 1]$ так, что

$$\frac{1}{\varepsilon_1(1+\eta)} > 1 + \eta + 4\eta\varepsilon_5^{-1}.$$

Получаем:

$$|\mathcal{H}| > (1 + \eta + 4\eta\varepsilon_5^{-1}) \cdot |\Omega \cap \{u \geq \underline{\gamma}_5\}|. \quad (38)$$

Предположим, что все “шапочки”, переплёты которых выходят из Ω , имеют малый радиус $r \leq \eta R/2$. Поскольку шапочки могут выходить из Ω вверх не более чем на $4\eta^{-1}r^2 \leq \eta R^2$, имеем:

$$|\mathcal{H} \setminus \Omega| \leq \eta R^2 \frac{|\Omega|}{(R/2)^2} = 4\eta |\Omega| \leq 4\eta\varepsilon_5^{-1} |\Omega \cap \{u \geq \underline{\gamma}_5\}|. \quad (39)$$

В последнем неравенстве мы воспользовались условием (32). Подставляя (38) и (39) в (37), получим (34).

Рассмотрим теперь другой случай, когда для некоторого цилиндра $Q_r^0(\theta, y)$ с радиусом $r > \eta R/2$ шапочка $H_0(4\eta^{-1}, r; \theta, y)$ выходит за пределы Ω . Пользуясь леммой 2.4, в частности, получаем

$$u \geq \underline{\gamma}_5 \quad \text{на } \{-3R^2/4\} \times \mathbb{B}_{\eta R/2}(y).$$

Применяя лемму 2.3 с

$$\begin{aligned} t_0 &= -3R^2/4, & x^0 &= 0, & x^1 &= y, & \kappa &= 1/2, \\ \tau &= 3R^2/4, & \rho &= R, & \gamma_3 &= \underline{\gamma}_5, & \varepsilon_3 &= \eta/2, \end{aligned}$$

при выполнении условия (19) получаем неравенство на $Q' = \mathbb{Q}_{R/2}$

$$u \geq \delta_3 \left(\frac{\eta}{2}\right)^{2p+1} \underline{\gamma}_5 - N(n, \nu) \cdot \mathcal{F}[u].$$

Легко видеть, что δ_3 и p зависят лишь от n, ν , а σ_3 из условия (19) – ещё и от η . Пользуясь тем что по определению (36) $\underline{\gamma}_5 = \delta_4 \gamma_5/2$, и выбирая

$$\delta_5 = \frac{\delta_3 \delta_4}{2} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{2p+1}, \quad \sigma_5 = \min\{\sigma_4, \sigma_3\}$$

получаем неравенство (33). \square

Заключительная лемма этого раздела выводится из лемм 2.4 и 2.5 так же, как [5, лемма 2.5] – из [5, леммы 2.3, 2.4].

Лемма 2.6. Пусть $R \leq 1$, $u \in \mathcal{V}(\mathbb{Q}_R)$, а также $u \geq 0$ в $\overline{\mathbb{Q}_R}$. Тогда для любого $\varepsilon_6 \in (0, 1)$ существуют константы σ_6 , зависящая от n, K, ν, ε_6 ; и δ_6 , зависящая от n, ν, ε_6 , такие что для любого $\gamma_6 \in \mathbb{R}$ выполнение неравенств

$$\|\mathbf{b}^{[k]}\|_{n+2, Q_R^{[k]}} \leq \sigma_6, \quad \|\mathbf{b}'\|_{n+1, Q_R^0} \leq \sigma_6, \quad \|\mathbf{b}_*\|_{n+1, Q_R^0} \leq \sigma_6,$$

$$|Q_{R/2}^0(-3R^2/4, 0) \cap \{u \geq \gamma_6\}| \geq \varepsilon_6 \cdot |Q_{R/2}^0(-3R^2/4, 0)|$$

влечёт выполнение следующего неравенства в $\mathbb{Q}_{R/2}$:

$$u \geq \delta_6 \gamma_6 - N_6(n, \nu, \varepsilon_6) \cdot \mathcal{F}[u].$$

§3. ОЦЕНКА НОРМЫ ГЁЛЬДЕРА

Теорема 3.1. Пусть $R_0 \leq 1$. Рассмотрим функцию $u \in \mathcal{V}(\mathbb{Q}_{R_0})$, удовлетворяющую неравенствам:

$$\left| \partial_i u - a_{ij}^{[k]} D_i D_j u \right| \leq \mu |Du|^2 + B^{[k]}(t, x) |Du| + \Phi^{[k]}(t, x) \quad \text{на } Q_{R_0}^{[k]},$$

$$\left| \partial_t u - \alpha_{lm} D_l D_m u + \mathcal{J}u \right| \leq \mu |D'u|^2 + B^0(t, x') |D'u| + \Phi^0(t, x') \text{ на } Q_{R_0}^0, \quad (40)$$

где матрицы старших коэффициентов $(a_{ij}^{[k]})_{i,j=1}^n$ и $(\alpha_{lm})_{l,m=1}^{n-1}$ удовлетворяют условиям (2) и (5) соответственно; коэффициенты оператора сопряжения \mathcal{J} (см. (8)) удовлетворяют ограничениям

$$\beta_n^{[k]} \in L_{n+1}(Q_{R_0}^0), \quad \beta_n^{[k]} \leq 0;$$

коэффициенты в правых частях удовлетворяют:

$$B^{[k]} \in L_{n+2}(Q_{R_0}^{[k]}), \quad B^0 \in L_{n+1}(Q_{R_0}^0);$$

$$\Phi^{[k]} \in L_{n+1}(Q_{R_0}^{[k]}), \quad \Phi^0 \in L_n(Q_{R_0}^0);$$

$$\mu \geq 0.$$

Пусть также для $\sigma = \sigma_6(n, K, \nu, \frac{1}{2})$ из леммы 2.6 выполнено:

$$\|B^{[k]}\|_{n+2, Q_{R_0}^{[k]}} \leq \sigma, \quad \|B^0\|_{n+1, Q_{R_0}^0} \leq \sigma, \quad \|\beta_*\|_{n+1, Q_{R_0}^0} \leq \sigma.$$

Тогда существуют показатель $\gamma \in (0, 1)$, зависящий от n, ν , и константа N , зависящая от $n, K, \nu, \mu, M_0 = \sup_{Q_{R_0}} |u|$ и норм $\|\Phi^{[k]}\|_{n+1, Q_{R_0}^{[k]}}$

($k = 1, \dots, K$), $\|\Phi^0\|_{n, Q_{R_0}^0}$, такие что для любого $R \leq R_0$ выполнена оценка

$$\text{osc}_{Q_R} u := \sup_{Q_R} u - \inf_{Q_R} u \leq N \left(\frac{R}{R_0} \right)^\gamma. \quad (41)$$

Доказательство. Для $R \leq R_0$ обозначим

$$u_1 = \inf_{Q_R} u, \quad u_2 = \sup_{Q_R} u, \quad \omega = u_2 - u_1$$

и не умаляя общности положим $\omega > 0$.

Сначала рассмотрим случай $\mu > 0$ и для $h = 1, 2$ и некоторого $\lambda \geq \frac{\omega\mu}{\nu}$ введём функции

$$v^{(h)}(t, x) = 1 - e^{-(\lambda/\omega) \cdot |u(t, x) - u_h|}.$$

Заметим, что $|u(t, x) - u_1| = u(t, x) - u_1$ и $|u(t, x) - u_2| = u_2 - u(t, x)$, и поэтому $v^{(h)}$ принадлежит тому же классу дифференцируемости, что и u . Введём модифицированные младшие коэффициенты для $h = 1, 2$:

$$\mathbf{b}^{[k],(h)}(t, x) = B^{[k]}(t, x) \frac{Dv^{(h)}(t, x)}{|Dv^{(h)}(t, x)|},$$

$$\beta^{(h)}(t, x') = B_0(t, x') \frac{D'v^{(h)}(t, x')}{|D'v^{(h)}(t, x')|}$$

и в точках где $|Dv^{(h)}(t, x)| = 0$ и $|D'v^{(h)}(t, x')| = 0$ соответственно, доопределим их как

$$\mathbf{b}^{[k],(h)}(t, x) = \left(\frac{B^{[k]}(t, x)}{n^{\frac{1}{2}}} \right)_{i=1}^n,$$

$$\beta^{(h)}(t, x') = \left(\frac{B_0(t, x')}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} \right)_{l=1}^{n-1}.$$

Лемма 3.1. Для $h = 1, 2$ выполняются неравенства:

$$\mathcal{M}^{[k],(h)}v^{(h)} := \partial_t v^{(h)} - a_{ij}^{[k]} D_i D_j v^{(h)} + b_i^{[k],(h)} D_i v^{(h)} \geq -\frac{\lambda}{\omega} \Phi^{[k]},$$

$$\mathcal{N}^{(h)}v^{(h)} := \partial_t v^{(h)} - \alpha_{lm} D_l D_m v^{(h)} + \beta_l^{(h)} D_l + \mathcal{J}v^{(h)} \geq -\frac{\lambda}{\omega} \Phi^0.$$

Доказательство. Фактически в данной лемме содержатся $2(K+1)$ неравенств. Мы докажем неравенство для $\mathcal{N}^{(2)}$ и $v^{(2)}$, а остальные неравенства доказываются аналогично. Прямым вычислением производных получаем:

$$\mathcal{N}^{(2)}v^{(2)} = \frac{\lambda}{\omega} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\omega}(u_2-u)}$$

$$\times \left(-\partial_t u + \alpha_{lm} D_l D_m u + \frac{\lambda}{\omega} \alpha_{lm} D_l u \cdot D_m u - \beta_l^{(h)} D_l u - \mathcal{J}u \right).$$

Из неравенства (40) получаем:

$$-\partial_t u + \alpha_{lm} D_l D_m u - \mathcal{J}u \geq -\mu |D'u|^2 - B_0(t, x') |D'u| - \Phi^0(t, x').$$

Кроме того, $\lambda \geq \frac{\omega\mu}{\nu}$, и поэтому

$$\frac{\lambda}{\omega} \alpha_{lm} D_l u \cdot D_m u \geq \frac{\lambda}{\omega} \nu |D'u|^2 \geq \mu |D'u|^2.$$

Если $|D'u| = 0$, все слагаемые с $D_l u$ пропадают. Рассмотрим случай $|D'u| \neq 0$. Из определения $\beta^{(h)}$ получаем:

$$-\beta_l^{(h)} D_l u = -B_0(t, x') \frac{-\frac{\lambda}{\omega} e^{-\frac{\lambda}{\omega}(u_2-u)} D_l u}{\left| -\frac{\lambda}{\omega} e^{-\frac{\lambda}{\omega}(u_2-u)} D'u \right|} D_l u = B_0(t, x') |D'u|.$$

Наконец, поскольку $u_2 \geq u$ на \mathbb{Q}_R , то $e^{-\frac{\lambda}{\omega}(u_2-u)} \leq 1$. Собирая все неравенства вместе, получаем искомое. \square

Продолжим доказательство теоремы. Очевидно, что в каждой точке $(t, x) \in \mathbb{Q}_{R_0}$ выполнено хотя бы одно из неравенств $|u - u_2| \leq \frac{\omega}{2}$ или $|u - u_1| \leq \frac{\omega}{2}$, и соответствующая функция $v^{(h)}$ удовлетворяет неравенству

$$v^{(h)} \geq 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}.$$

Поэтому хотя бы одна из функций $v^{(h)}$ удовлетворяет условию

$$|Q_{R/2}^0(-3R^2/4, 0) \cap \{v^{(h)} \geq 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}\}| \geq \frac{1}{2}|Q_{R/2}^0(-3R^2/4, 0)|.$$

Применяя лемму 2.6 с $\varepsilon_6 = \frac{1}{2}$, $\gamma_6 = 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}$, и лемму 3.1, получаем неравенство на $\mathbb{Q}_{R/2}$:

$$\begin{aligned} v^{(h)} &\geq \delta_6 \gamma_6 - N_6(n, \nu, \frac{1}{2}) \\ &\times \left(R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|(\mathcal{M}^{[k],(h)} v^{(h)})_-\|_{n+1, Q_R^{[k]}} + R^{\frac{n-1}{n}} \|(\mathcal{N}^{(h)} v^{(h)})_-\|_{n, Q_R^0} \right) \\ &\geq \delta_6 \gamma_6 - N_6(n, \nu, \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{\omega} \cdot \left(R^{\frac{n}{n+1}} \sum_{k=1}^K \|\Phi^{[k]}\|_{n+1, Q_R^{[k]}} + R^{\frac{n-1}{n}} \|\Phi^0\|_{n, Q_R^0} \right). \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $R \leq R_0 \leq 1$, и увеличивая области интегрирования, выводим:

$$v^{(h)} \geq \delta_6 \gamma_6 - N_6(n, \nu, \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{\omega} \cdot R^{\frac{n-1}{n}} \left(\sum_{k=1}^K \|\Phi^{[k]}\|_{n+1, Q_{R_0}^{[k]}} + \|\Phi^0\|_{n, Q_{R_0}^0} \right). \quad (42)$$

Рассмотрим два случая. Если

$$N_6(n, \nu, \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{\omega} \cdot R^{\frac{n-1}{n}} \left(\sum_{k=1}^K \|\Phi^{[k]}\|_{n+1, Q_{R_0}^{[k]}} + \|\Phi^0\|_{n, Q_{R_0}^0} \right) \geq \frac{\delta_6 \gamma_6}{2},$$

то

$$\operatorname{osc}_{\mathbb{Q}_{R/2}} u \leq \omega \leq N_6(n, \nu, \frac{1}{2}) \cdot \frac{2\lambda}{\delta_6 \gamma_6} \cdot R^{\frac{n-1}{n}} \left(\sum_{k=1}^K \|\Phi^{[k]}\|_{n+1, Q_{R_0}^{[k]}} + \|\Phi^0\|_{n, Q_{R_0}^0} \right).$$

Если же выполнено обратное неравенство, то из (42) получаем неравенство на $\mathbb{Q}_{R/2}$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{\lambda}{\omega}|u - u_h|} = v^{(h)} &\geq \frac{\delta_6 \gamma_6}{2} \iff |u - u_h| \geq \omega \varkappa, \\ \varkappa &= -\frac{1}{\lambda} \ln \left(1 - \frac{\delta_6 \gamma_6}{2} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{osc}_{\mathbb{Q}_{R/2}} u \leq (1 - \varkappa)\omega.$$

Согласно лемме 4.8 главы II из [4], из этой альтернативы следует оценка (41) с $\gamma = \min\{\frac{n-1}{n}, -\log_2(1 - \varkappa)\}$.

Заметим, что в полученном неравенстве показатель γ зависит от $\lambda \geq \frac{\omega\mu}{\nu}$, и для ω нам вначале известна лишь мажоранта $2M_0$. Избавиться от этой зависимости можно так же, как в теореме 2.2 из [5].

В случае $\mu = 0$ рассуждения аналогичны, если положить $v^{(h)} = \frac{1}{\omega}|u - u_h|$. \square

Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим $\sigma = \sigma_6(n, K, \nu, \frac{1}{2})$ из леммы 2.6. Существует радиус $R_\sigma \leq R$, зависящий от модулей интегральной непрерывности $B^{[k]}$ и B^0 , такой что для любого $r \leq R_\sigma$ и цилиндра $\mathbb{Q}_r(t, x', 0) \subset \mathbb{Q}_R$ выполнено

$$\|B^{[k]}\|_{n+2, \mathbb{Q}_r^{[k]}(t, x', 0)} \leq \sigma, \quad \|B^0\|_{n+1, \mathbb{Q}_r^0(t, x', 0)} \leq \frac{\sigma}{K+1},$$

и для любого цилиндра $\mathbb{Q}_r(t, x)$, целиком лежащего в некотором страте $\mathbb{Q}_R^{[k]}$, выполнено

$$\|B^{[k]}\|_{n+2, \mathbb{Q}_r(t, x)} \leq \sigma.$$

Рассмотрим точки $(t^1, x^1), (t^2, x^2) \in \mathbb{Q}_{(1-\varepsilon)R}$. Если

$$\mathfrak{r} := \rho_{\text{пар}}((t^1, x^1), (t^2, x^2)) \geq \frac{R_\sigma}{2},$$

то для любого γ

$$\frac{|u(t^1, x^1) - u(t^2, x^2)|}{\mathfrak{r}^\gamma} \leq \frac{2^{\gamma+1}M_0}{R_\sigma^\gamma} \leq \frac{2^{\gamma+1}M_0}{R_\sigma^\gamma} \cdot \frac{1}{(\varepsilon R)^\gamma}. \quad (43)$$

Здесь последнее неравенство выполнено поскольку $\varepsilon \leq 1, R \leq 1$. Далее, если $\mathfrak{r} \geq \frac{\varepsilon R}{2}$, то для любого γ

$$\frac{|u(t^1, x^1) - u(t^2, x^2)|}{\mathfrak{r}^\gamma} \leq 2^{\gamma+1}M_0 \cdot \frac{1}{(\varepsilon R)^\gamma}. \quad (44)$$

Наконец, положим $R_0 = \frac{1}{2} \min\{R_\sigma, \varepsilon R\}$ и рассмотрим случай $\mathfrak{r} < R_0$. Обозначим через \tilde{x} середину отрезка, соединяющего точки x^1, x^2 на стратифицированном шаре, и положим $\tilde{t} = \max\{t^1, t^2\}$.

Рассмотрим шар B радиуса R_0 с центром в \tilde{x} . Предположим сначала, что B целиком лежит в одном страте $B_R^{[k]}$, то есть $\tilde{x}_n^{[k]} \geq R_0$. Нетрудно видеть, что цилиндр $Q := (\tilde{t} - R_0, \tilde{t}) \times B$ содержится в $\mathbb{Q}_R^{[k]}$,

и выполнены включения $(t^1, x^1), (t^2, x^2) \in Q$. Применяя теорему 3.2 из [5] с $\rho_0 = R_0$, $\rho = \mathfrak{r}$, получаем

$$|u(t^1, x^1) - u(t^2, x^2)| \leq \underset{Q_\tau(\tilde{t}, \tilde{x})}{\text{osc}} u \leq c_1 \left(\frac{\mathfrak{r}}{R_0} \right)^{\hat{\gamma}} \leq \frac{N}{(\varepsilon R)^{\hat{\gamma}}} \cdot \mathfrak{r}^{\hat{\gamma}}, \quad (45)$$

где $\hat{\gamma}$ и c_1 – показатель и константа из [5, теорема 3.2], а $N = \frac{c_1(2\varepsilon R)^{\hat{\gamma}}}{\min\{R_\sigma, \varepsilon R\}^{\hat{\gamma}}}$.

Предположим теперь, что шар B пересекает переплёт. Тогда рассмотрим шар радиуса $2R_0$ с центром в точке $(\tilde{x}', 0)$ на переплёте. Снова выполнено $(\tilde{t}, \tilde{x}', 0) \in \mathbb{Q}_{(1-\varepsilon)R}$, $\mathbb{Q}_{2R_0}(\tilde{t}, \tilde{x}', 0) \subset \mathbb{Q}_R$, а также

$$(t^1, x^1), (t^2, x^2) \in \mathbb{Q}_{2R_0}(\tilde{t}, \tilde{x}', 0).$$

Покажем, что в цилиндре $\mathbb{Q}_{2R_0}(\tilde{t}, \tilde{x}', 0)$ применима теорема 3.1.

Поскольку функции $\mathcal{B}^{[k]}(t, x', z, p^{[k]})$ дифференцируемы по $p_n^{[k]}$, перепишем уравнение на переплёте (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \partial_t u - \alpha_{lm}(t, x', u, D'u) D_l D_m u = \alpha(t, x', u, D'u) \\ & + \sum_{k=1}^K \left(\mathcal{B}^{[k]}(t, x', u, D'u, 0) + \int_0^1 \partial_{p_n^{[k]}} \mathcal{B}^{[k]}(t, x', u, D'u, \varepsilon D_n^{[k]} u) d\varepsilon \cdot D_n^{[k]} u \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\beta_n^{[k]}(t, x') = - \int_0^1 \partial_{p_n^{[k]}} \mathcal{B}^{[k]}(t, x', u, D'u, \varepsilon D_n^{[k]} u) d\varepsilon.$$

Из свойств (6) имеем

$$-B^0(t, x') \leq \beta_n^{[k]}(t, x') \leq 0.$$

Переносим слагаемые $\beta_n^{[k]}(t, x') D_n^{[k]} u$ в левую часть и пользуясь условиями (3), (6), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \partial_t u - \alpha_{lm}(t, x', u, D'u) D_l D_m u + \sum_{k=1}^K \beta_n^{[k]}(t, x') D_n^{[k]} u \right| \\ & \leq |\alpha(t, x', u, D'u)| + \sum_{k=1}^K |\mathcal{B}^{[k]}(t, x', u, D'u, 0)| \\ & \leq \mu |D'u|^2 + (K+1) B^0(t, x') |D'u| + (K+1) \Phi^0(t, x'). \end{aligned}$$

Применяя теорему 3.1 в цилиндре $\mathbb{Q}_{2R_0}(\tilde{t}, \tilde{x}', 0)$, получаем

$$|u(t^1, x^1) - u(t^2, x^2)| \leq \underset{\mathbb{Q}_{\mathbf{r}}(\tilde{t}, \tilde{x}', 0)}{\text{osc}} u \leq N \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{2R_0}\right)^\gamma \leq \frac{N \cdot (\varepsilon R)^\gamma}{\min\{R_\sigma, \varepsilon R\}^\gamma} \cdot \frac{1}{(\varepsilon R)^\gamma} \cdot \mathbf{r}^\gamma. \quad (46)$$

Из неравенств (43), (44), (45), (46) вытекает (7). \square

Я благодарен своему научному руководителю, А. И. Назарову, за постановку задачи, советы и помощь в редактировании статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, *Hölder estimates of solutions to initial-boundary value problems for parabolic equations of nondivergent form with Venttsel boundary condition*. — Amer. Math. Soc. Transl. **64** (1995), 1–13.
2. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Квазилинейные двухфазные задачи Вентцеля*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **271** (2000), 11–38.
3. Н. В. Крылов, М. В. Сафонов, *Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами*. — Изв. АН СССР. Сер. мат. **44**, No. 1 (1980), 161–175.
4. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука (1973).
5. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Оценки константы Гельдера для функций, удовлетворяющих равномерно эллиптическому или равномерно параболическому квазилинейному неравенству с неограниченными коэффициентами*. — Зап. научн. сем. ЛОМИ **147** (1985), 72–94.
6. А. И. Назаров, Н. Н. Уралцева, *Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения*. — Зап. научн. сем. ЛОМИ **147** (1985), 95–109.
7. Ф. Д. Мироненко, *Оценки максимума для решений эллиптического и параболического уравнений на стратифицированном множестве вида “книжка”*. — Сиб. мат. журнал **64**, No. 6 (2023), 1263–1278.

Mironenko F. D. Hölder norm estimates for solutions to parabolic equation on a “book”-type stratified set.

We obtain local Hölder norm estimates for solution of parabolic equation on a simple stratified set of the “book” type. Such a set is the union of K half-balls of dimension n (“pages”) in \mathbb{R}^{n+1} with a common flat $(n-1)$ -dimensional boundary (“binding”).

In this paper, local Hölder norm estimates are obtained for arbitrary natural K . In cases $K = 1, 2$ (one-phase and two-phase Venttsel problems),

such estimates were obtained earlier by D. E. Apushkinskaya and A. I. Nazarov. In the case $K > 2$, the stratified ball cannot be embedded into \mathbb{R}^n , which complicates the arguments.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mironenko.foma@gmail.com

Поступило 25 мая 2026 г.