Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 550, 2026 г.

Е. А. Ефимов, В. Г. Осмоловский

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ДВУХФАЗОВЫХ УПРУГИХ СРЕД, ДОПУСКАЮЩИХ НАЛИЧИЕ СМЕШАННЫХ ФАЗ

§1. Введение

1. Состояния равновесия двухфазовых сред, допускающих лишь чистые фазы. Начнём с краткого обзора задачи о равновесии двухфазовых сред с чистыми фазами. Считается, что в квадратичном приближении плотности энергии каждой из фаз двухфазовой упругой среды определяются равенствами [1]

$$\begin{gathered} F^{\pm}(M) = \langle A^{\pm}(e(M) - \zeta^{\pm}), e(M) - \zeta^{\pm}\rangle, \\ M \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad e(M) = \frac{1}{2}(M + M^*), \quad \zeta^{\pm} \in \mathbb{R}^{m\times m}_s, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\mathbb{R}^{m\times m}$ – пространство $m\times m$-матриц со скалярным произведением

$$\langle \alpha, \beta\rangle = \operatorname{tr}\alpha\beta^*, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

$\mathbb{R}^{m\times m}_s$ – его подпространство, состоящее из всех симметричных матриц, $A^{\pm}$ – линейные отображения $\mathbb{R}^{m\times m}_s \to \mathbb{R}^{m\times m}_s$ со свойствами

$$\begin{gathered} \langle A^{\pm}\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, A^{\pm}\beta\rangle, \quad \nu|\alpha|^2 \le \langle A^{\pm}\alpha, \alpha\rangle \le \nu^{-1}|\alpha|^2, \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{m\times m}_s, \quad \nu \in (0, 1), \end{gathered}$$

а функционал энергии деформации имеет вид

$$\begin{gathered} I[u, \chi, t, \Omega] = \int_{\Omega} \{\chi(x)\big(F^+(\nabla u(x)) + t\big) + \big(1 - \chi(x)\big)F^-(\nabla u(x))\}\, dx, \\ u \in \mathbb{X}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, \mathbb{R}^m), \\ \chi \in \mathbb{Z}'(\Omega) = \{\chi \text{ – измеримые характеристические функции}\}, \end{gathered} \tag{1.2}$$

Ключевые слова: невыпуклые вариационные задачи, релаксация, фазовые переходы в механике сплошных сред.

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ИПМаш РАН (тема 124041500009-8).

где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ – ограниченная область. Некоторые из представленных ниже результатов обобщаются на функции u с ненулевыми граничными условиями. Функция $u(x)$ интерпретируется как поле смещений,

$e(\nabla u)$ – тензор деформации $(2e_{ij}(\nabla u) = u^i_{x_j} + u^j_{x_i})$,

$2A^{\pm}, \zeta^{\pm}$ – тензоры модулей упругости и остаточной деформации каждой из фаз, соответственно,

параметр $t \in \mathbb{R}$ – температура, не зависящая от $x \in \Omega$.

Функция χ в функционале (1.2) заведует распределением фаз. В тех точках, где $\chi(x) = 1$, расположена среда с плотностью энергии F^+, а в точках, где $\chi(x) = 0$ – с плотностью энергии F^-. Таким образом, в почти каждой точке $x \in \Omega$ располагается среда лишь одной из фаз, но не их смесь. Учитывая это, будем говорить, что функционал (1.2) задаёт энергию деформации двухфазовой среды, допускающей только чистые фазы.

Под состоянием равновесия двухфазовой среды при температуре t будем понимать решение вариационной задачи

$$I[\hat{u}_t, \hat{\chi}_t, t, \Omega] = \inf_{\substack{u \in \mathbb{X}(\Omega), \\ \chi \in \mathbb{Z}'(\Omega)}} I[u, \chi, t, \Omega], \quad \hat{u}_t \in \mathbb{X}(\Omega), \ \ \hat{\chi}_t \in \mathbb{Z}'(\Omega) \tag{1.3}$$

— равновесное поле смещений $\hat{u}_t$ и равновесное распределение фаз $\hat{\chi}_t$. В случае её разрешимости положим

$$\hat{Q}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \hat{\chi}_t(x)\, dx \tag{1.4}$$

(здесь и далее модулем измеримого подмножества из $\mathbb{R}^m$ обозначается его m-мерная лебегова мера; это обозначение относится и к множеству $\partial\Omega$). Состояние равновесия назовём однофазовым, если на множестве полной меры выполняется одно из равенств $\hat{\chi}_t(x) = 0$ или $\hat{\chi}_t(x) = 1$, и двухфазовым в противном случае.

2. Свойства решений задачи (1.3). Приведём ряд известных результатов, используемых при дальнейшем изложении.

(1) Перепишем функционал (1.2) в виде

$$
\begin{aligned}
&|\Omega|^{-1}I[u,\chi,t,\Omega]=Q(F^+(0)+t)+(1-Q)F^-(0)+|\Omega|^{-1}\Lambda[u,\chi,\Omega],\\
&\Lambda[u,\chi,\xi,\Omega]=\int\limits_\Omega\{\langle(\chi A^+ +(1-\chi)A^-)e(\nabla u),e(\nabla u)\rangle\\
&\qquad\qquad -2(\chi-Q)\langle\xi,e(\nabla u)\rangle\}dx,\\
&\Lambda[u,\chi,\Omega]=\Lambda[u,\chi,\xi,\Omega]\quad\text{при}\quad \xi=[A\zeta]=A^+\zeta^+-A^-\zeta^-,\\
&Q=\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\chi(x)\,dx.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

В работе [2] установлено существование такой функции $g(Q,\xi)$, $Q\in[0,1]$, $\xi\in\mathbb{R}^{m\times m}_s$, что

$$
\begin{gathered}
\inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}'_Q(\Omega)}}\Lambda[u,\chi,\xi,\Omega]=|\Omega|g(Q,\xi),\\
\mathbb{Z}'_Q(\Omega)=\{\chi\in\mathbb{Z}'(\Omega):\ \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\chi(x)\,dx=Q\}.
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

Эта функция не зависит от области Ω, непрерывна и выпукла по $Q\in[0,1]$ при фиксированном ξ. Для неё справедливы доказанные в [3] неравенства

$$
-\nu^{-1}|\xi|^2\min\{Q,1-Q\}\le g(Q,\xi)\le-\nu c_m|\xi|^2\min\{Q,1-Q\}
\tag{1.7}
$$

(константа $c_m\in(0,1)$ зависит только от размерности пространства), в силу которых она локально ограничена. Поскольку функционал Λ линеен по ξ, функция g вогнута по ξ при каждом Q. Последнее гарантирует непрерывность $g(Q,\xi)$ по ξ при фиксированном Q.

Таким образом,

$$
\begin{gathered}
\inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}'_Q(\Omega)}}I[u,\chi,t,\Omega]=|\Omega|G(Q,t),\\
\inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}'(\Omega)}}I[u,\chi,t,\Omega]=|\Omega|\min_{Q\in[0,1]}G(Q,t),\\
G(Q,t)=Q(F^+(0)+t)+(1-Q)F^-(0)+g(Q,[A\zeta]).
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

(2) Рассмотрим задачу

$$
G(\bar Q(t),t)=\min_{Q\in[0,1]}G(Q,t),\quad \bar Q(t)\in[0,1].
\tag{1.9}
$$

Существуют такие числа $t_\pm$ (назовём их температурами фазовых переходов, независимость $t_\pm$ от области Ω очевидна), что

$$t_- \le t^* \le t_+ \quad t^* = -[\langle A\zeta, \zeta\rangle] = \langle A^-\zeta^-, \zeta^-\rangle - \langle A^+\zeta^+, \zeta^+\rangle$$

(оба равенства $t_\pm = t^*$ могут реализоваться только одновременно, критерием их реализации служит полученное в [4] условие $[A\zeta] = 0$). При этом, если $t_\pm = t^*$, то

$$\begin{gathered} \bar{Q}(t)=1,\ \ t<t^*; \quad \bar{Q}(t)=0,\ \ t>t^*; \\ \bar{Q}(t)\in[0,1] \text{ – произвольно при } t=t^*, \end{gathered} \tag{1.10}$$

Далее, если $t_- < t_+$, а функция $g(\cdot, [A\zeta]) \in C^k[0,1]$, $k \ge 1$ и строго выпукла, то

$$\begin{gathered} \bar{Q}(\cdot) \in C(\mathbb{R}), \quad \bar{Q}(t) = 1, \quad t \le t_-; \quad \bar{Q}(t) = 0, \quad t \ge t_+; \\ \bar{Q}(t) \ \text{ строго монотонно убывает по } \ \ t \in [t_-, t_+]; \end{gathered} \tag{1.11}$$

Наконец, при $k \ge 2$ и $g''(\cdot, [A\zeta]) > 0$ функция $\bar{Q}(\cdot) \in C^{k-1}[t_-, t_+]$.

При наличии решения $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ задачи (1.3) число (1.4) обязано быть решением задачи (1.9). В случае $t^\pm = t^*$ задача (1.3) разрешима для всех t. Её решения исчерпываются парами $\hat{u}_t \equiv 0, \hat{\chi}_t$, а $\hat{\chi}_t \equiv 1$ при $t < t^*$, $\hat{\chi}_t \equiv 0$ при $t > t^*$ и $\hat{\chi}_t$ – произвольный элемент множества $\mathbb{Z}'(\Omega)$ при $t = t^*$. В случае $t_- < t_+$ задача (1.3) разрешима при всех $t \notin (t_-, t_+)$, её решения при указанных температурах имеют вид $\hat{u}_t \equiv 0, \hat{\chi}_t$, а $\hat{\chi}_t \equiv 1$ при $t \le t_-$, $\hat{\chi}_t \equiv 0$, при $t \ge t_+$.

При этом существуют как плотности энергии (1.1), для которых задача (1.3) при всех $t \in (t_-, t_+) \ne \emptyset$ имеет решение, так и плотности, для которых при всех указанных температурах решений нет (см., например, работы [5], [6]).

(3) Легко видеть, что расширение области определения функционала (1.2) посредством замены множества $\mathbb{Z}'(\Omega)$ на более широкое $\mathbb{Z}''(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}''(\Omega) = \{\chi \in L_2(\Omega) : 0 \le \chi(x) \le 1 \text{ при п.в. } x \in \Omega\}, \\ &\mathbb{Z}''_Q(\Omega) = \Big\{\chi \in \mathbb{Z}''(\Omega) : \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega \chi(x)\,dx = Q\Big\}, \quad Q \in [0,1]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

не уменьшает его инфимум, то есть справедливо равенство

$$\inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}'(\Omega)}} I[u,\chi,t,\Omega] = \inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}''(\Omega)}} I[u,\chi,t,\Omega]. \tag{1.13}$$

Множества $\mathbb{Z}''(\Omega)$, $\mathbb{Z}''_Q(\Omega)$ слабо (следовательно и сильно) замкнуты в пространстве $L_2(\Omega)$. Поскольку $\|\chi\|_{L_\infty(\Omega)} \le 1$ для всех $\chi \in \mathbb{Z}''(\Omega)$, слабая сходимость в пространстве $L_2(\Omega)$ последовательности $\chi_n \in \mathbb{Z}''(\Omega)$ к функции χ (такую сходимость будем обозначать стрелкой $\stackrel{L_2}{\rightharpoonup}$) эквивалентна соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f(x)\chi_n(x)\,dx = \int\limits_\Omega f(x)\chi(x)\,dx \quad \text{для любой функции} \quad f \in L_1(\Omega). \tag{1.14}$$

Кроме того, для любого $\chi \in \mathbb{Z}''_Q(\Omega)$ найдётся такая последовательность $\chi_n \in \mathbb{Z}'_Q(\Omega)$, что

$$\chi_n \stackrel{L_2}{\rightharpoonup} \chi. \tag{1.15}$$

Утверждение (1.15) получается несущественной корректировкой доказательства леммы 1.2 (стр. 61) из [7].

3. Состояния равновесия двухфазовых сред, допускающих наличие смешанных фаз. Для рассмотрения смешанных фаз будем использовать множество (1.12). В качестве функционала энергии двухфазовой упругой среды, допускающей наличие смешанных фаз, предлагается взять функционал

$$\mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega] = \int\limits_\Omega \mathcal{F}(\nabla u,\chi,t)\,dx, \quad u \in \mathbb{X}(\Omega), \quad \chi \in \mathbb{Z}''(\Omega), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.16}$$

с непрерывной при каждом $t \in \mathbb{R}$ по совокупности переменных $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in [0,1]$ плотностью $\mathcal{F}(M,Q,t)$.

Будем предполагать, что функционал (1.16) принимает только конечные значения и обладает следующим свойствами (стрелка $\rightharpoonup$ означает слабую сходимость в пространстве $\mathbb{X}(\Omega)$):

$$\mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega] \le \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{I}[u_n,\chi_n,t,\Omega] \quad \text{для всех} \quad u, u_n \in \mathbb{X}(\Omega), \quad \chi,\chi_n \in \mathbb{Z}''(\Omega), \quad u_n \rightharpoonup u, \quad \chi_n \stackrel{L_2}{\rightharpoonup} \chi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.17}$$

$$\mathcal{I}[u_n,\chi,t,\Omega] \to \infty \ \text{при} \ \|u_n\|_{\mathbb{X}} \to \infty \quad \text{для каждого } t \text{ равномерно по } \chi \in \mathbb{Z}''(\Omega), \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega]\le I[u,\chi,t,\Omega] \ \text{ для всех } \ u\in\mathbb{X}(\Omega),\ \chi\in\mathbb{Z}''(\Omega),\ t\in\mathbb{R},\\ &\mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega]=I[u,\chi,t,\Omega] \ \text{ для всех } \ u\in\mathbb{X}(\Omega),\ \chi\in\mathbb{Z}'(\Omega),\ t\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}''(\Omega)}} \mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega] = \inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}'(\Omega)}} I[u,\chi,t,\Omega], \quad t\in\mathbb{R}. \tag{1.20}$$

Свойство (1.19) позволяют считать функционал (1.16) распространением функционала (1.2) на множество $\mathbb{Z}''(\Omega)$, а свойства (1.17), (1.18) делают его слабо полунепрерывным снизу и коэрцитивным.

Существование функционала со свойствами (1.17)–(1.20) априори не очевидно. В частности, функционал (1.2) с областью определения $u \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}''(\Omega)$ нельзя взять в качестве функционала (1.16), поскольку он обладает свойством (1.17) лишь при вырождении: $A^+ = A^-$, $\zeta^+ = \zeta^-$ [8].

Переход от описания распределения фаз с помощью функций $\chi \in \mathbb{Z}'(\Omega)$ к его описанию с помощью $\chi \in \mathbb{Z}''(\Omega)$ будем интерпретировать как переход от задачи о двухфазовых средах с чистыми фазами, к задаче для сред со смесью фаз. Тогда равновесное поле смещений $\check{u}_t$ и равновесное распределений фаз $\check{\chi}_t$ при температуре t будут решениями вариационной задачи

$$\mathcal{I}[\check{u}_t,\check{\chi}_t,t,\Omega] = \inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}''(\Omega)}} \mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega], \quad \check{u}_t\in\mathbb{X}(\Omega), \quad \check{\chi}_t\in\mathbb{Z}''(\Omega). \tag{1.21}$$

Поскольку $\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Z}''(\Omega)$ является слабо замкнутым подмножеством гильбертова пространства $\mathbb{X}(\Omega)\times L_2(\Omega)$, задача (1.21) разрешима для каждого t при наличии свойств (1.17), (1.18). Нам будет полезно обозначение

$$\check{Q}(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} \check{\chi}_t(x)\,dx. \tag{1.22}$$

Если выполняются условия (1.19), (1.20), то любое решение задачи (1.3) является решением задачи (1.21). По аналогии с задачей (1.3) состояние равновесия $\check{u}_t$, $\check{\chi}_t$ назовём однофазовым, если на множестве полной меры выполняется одно из равенств $\check{\chi}_t(x) = 0$ или $\check{\chi}_t(x) = 1$, и двухфазовым в противном случае.

Для выполнения свойств (1.17) – (1.20) плотность энергии $\mathcal{F}(M,Q,t)$ обязана обладать определённой регулярностью. Поскольку для обсуждаемой в следующем параграфе конструкции она непрерывна, требование непрерывности заложено в определение.

4. Содержание работы. В §2 рассмотрена предложенная в работе [9] конструкция функционала (1.16). Для него мы доказываем, что выполнение свойства (1.17) влечёт справедливость свойств (1.18)–(1.20).

В следующих параграфах исследованы конкретные примеры функционалов (1.16), установлена для них справедливость свойства (1.17) и описаны множества решений задачи (1.21): §3 посвящён одномерной задаче, §4 – многомерной с одинаковыми тензорами модулей упругости для каждой из фаз. Оригинальность нашего подхода заключается в использовании определённой в (1.6) функции $g(Q,\xi)$ для вычисления по ней релаксированной плотности $\mathcal{F}(M,Q,t)$. В частности, знание явного выражения для функции $g(Q,\xi)$ (например, как в случае задач из §3 и §4) позволяет выписать явную формулу для плотности $\mathcal{F}(M,Q,t)$.

В конце §2 и §4 приведены ссылки на имеющиеся результаты других авторов.

§2. Функционал (1.16)

1. Формула для функционала (1.16). Согласно предложенной в [9] схеме построения регуляризации интегрального функционала с разнохарактерными аргументами (в нашем случае это функции $u \in \mathbb{X}(\Omega)$ и $\chi \in \mathbb{Z}''(\Omega)$), рекомендуется искать плотность $\mathcal{F}(M,Q,t)$ в виде

$$\begin{gathered}|\Omega|\mathcal{F}(M,Q,t)\\ = \inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}'_Q(\Omega)}} \int_\Omega \{\chi(x)(F^+(\nabla u(x)+M)+t) + (1-\chi(x))F^-(\nabla u(x)+M)\}\,dx,\\ M\in\mathbb{R}^{m\times m},\quad Q\in[0,1],\quad t\in\mathbb{R}. \quad (2.1)\end{gathered}$$

Поскольку прибавление к ∇u слагаемого M сводится к замене $\zeta^\pm$ на $\zeta^\pm - e(M)$, с помощью (1.6) получаем

$$\mathcal{F}(M,Q,t) = Q(F^+(M)+t)+(1-Q)F^-(M)+g(Q,[A\zeta]-[A]e(M)), \quad (2.2)$$

где $[A] = A^+ - A^-$, а функция $g(Q,\xi)$ определена в (1.6). В этом случае функционал (1.16) задаётся равенством

$$\begin{gathered}\mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega] = I[u,\chi,t,\Omega]\\ + \int_\Omega g\big(\chi(x),[A\zeta]-[A]e(\nabla u(x))\big)\,dx, \quad u\in\mathbb{X}(\Omega), \quad \chi\in\mathbb{Z}''(\Omega). \quad (2.3)\end{gathered}$$

Так как функция $g(Q,\xi)$ одинакова для всех областей Ω, плотность (2.2) также не зависит от области, участвующей в определении (2.1).

2. Свойства функционала (2.3).

(1). *Плотность* (2.1) *непрерывна:*

$$\mathcal{F}(\cdot,\cdot,t) \in C(\mathbb{R}^{m\times m} \times [0,1]), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Функционал (2.3) *принимает только конечные значения и непрерывен по совокупности переменных* $u \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}''(\Omega)$ *для каждого* t *и любой области* Ω.

В силу (2.2) для доказательства (2.4) достаточно установить непрерывность функции $g(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ по совокупности переменных. В работе [4] доказано, что

$$-\nu^{-1}|\xi|^2 \le g'(Q\pm 0,\xi) \le \nu^{-1}|\xi|^2, \quad Q\in(0,1), \quad \xi \in \mathbb{R}^{m\times m}_s$$

(здесь $g'(Q,\xi)$ – производная функции g по первому аргументу). Следовательно,

$$|g(Q_2,\xi) - g(Q_1,\xi)| \le \nu^{-1}|\xi|^2|Q_2-Q_1|, \quad Q_1,Q_2 \in [0,1], \quad \xi \in \mathbb{R}^{m\times m}_s.$$

Пусть $Q_k, Q \in [0,1]$, $\xi_k,\xi \in \mathbb{R}^{m\times m}_s$, $Q_k \to Q$, $\xi_k \to \xi$ при $k \to \infty$. Поскольку, как отмечалось во введении, функция $g(Q,\cdot)$ непрерывна, имеем

$$\begin{aligned}|g(Q_k,\xi_k) - g(Q,\xi)| &\le |g(Q_k,\xi_k) - g(Q,\xi_k)| + |g(Q,\xi_k) - g(Q,\xi)| \\ &\le \nu^{-1}|\xi_k|^2|Q_k - Q| + |g(Q,\xi_k) - g(Q,\xi)| \to 0.\end{aligned}$$

Непрерывность функции $g(\cdot,\cdot)$ доказана.

Благодаря (1.7), (2.2)

$$|\mathcal{F}(M,Q,t)| \le C(|M|^2 + |t| + 1), \quad M \in \mathbb{R}^{m\times m}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

где константа $C > 0$ не зависит от M, Q, t. Оценка (2.5) гарантирует непрерывность при каждом t оператора Немыцкого

$$u \in \mathbb{X}(\Omega), \ \chi \in \mathbb{Z}''(\Omega) \mapsto \mathcal{F}(\nabla u, \chi, t) \in L_1(\Omega). \tag{2.6}$$

Поэтому функционал (2.3) принимает только конечные значения и непрерывен.

(2). *Пусть функционал* $\mathcal{I}[\cdot,\cdot,t,\Omega]$ *является выпуклым на выпуклом замкнутом подмножестве* $\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Z}''(\Omega)$ *пространства* $\mathbb{X}(\Omega)\times L_2(\Omega)$. *Тогда он обладает свойством* (1.17).

Это утверждение хорошо известно, см. например [19]. Очевидно, что выпуклость плотности (2.2) на множестве $\mathbb{R}_s^{m\times m}\times[0,1]$ гарантирует выпуклость функционала $\mathcal{I}[\cdot,\cdot,t]$.

(3). *Функционал* (2.3) *обладает свойством* (1.18).

Условие (2.4) обеспечивает (здесь и далее) корректное определение функционала (2.3). Учитывая положительную определённость отображений $A^{\pm}$ и осуществляя перегруппировку слагаемых, для всех $u\in\mathbb{X}(\Omega)$, $\chi\in\mathbb{Z}'(\Omega)$ приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&\chi\langle A^+(e(\nabla u)-(\zeta^+-e(M)),e(\nabla u)-(\zeta^+-e(M))\rangle\\
&\qquad+(1-\chi)\langle A^-(e(\nabla u)-(\zeta^--e(M)),e(\nabla u)-(\zeta^--e(M))\rangle\\
&\quad\geq\nu\big(\chi|e(M)+(e(\nabla u)-\zeta^+)|^2+(1-\chi)|e(M)+(e(\nabla u)-\zeta^-)|^2\big)\\
&\qquad\geq\nu\big(\frac{1}{2}|e(M)|^2-2(\chi|\zeta^+|^2+(1-\chi)|\zeta^-|^2)+2\langle e(M),e(\nabla u)\rangle\big).
\end{aligned}$$

Интегрирование этого неравенства по области Ω с учётом определения (2.1) даёт

$$\mathcal{F}(M,Q,t)\geq\frac{\nu}{2}|e(M)|^2-2\nu(Q|\zeta^+|^2+(1-Q)|\zeta^-|^2)+Qt,\tag{2.8}$$

что приводит к (1.18).

(4). *Для функционала* (2.3) *справедливы соотношения* (1.19).

Оценка (1.7) и её следствие $g(0,\xi)=g(1,\xi)=0$, применённые к (2.2), делают (1.19) очевидным.

(5). *Пусть функционал* (2.3) *обладает свойством* (1.17), *а* $|\partial\Omega|=0$. *Тогда выполняется равенство* (1.20).

В этом пункте используется утверждение, доказательство которого аналогично доказательству предложения 3.1 из [10]: *в области* Ω *с* $|\partial\Omega|=0$ *для любой пары* $u\in\mathbb{X}(\Omega)$, $\chi\in\mathbb{Z}''_Q(\Omega)$ *существует такая последовательность* $u_n\in\mathbb{X}(\Omega)$, $\chi_n\in\mathbb{Z}''_Q(\Omega)$, *что*

$$\begin{gathered}
u_n\rightharpoonup u^0\equiv0,\quad \chi_n\overset{L_2}{\rightharpoonup}\chi^0\equiv Q,\quad n\to\infty,\\
\mathcal{I}[u_n,\chi_n,t,\Omega]=\mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega],\quad n=1,2,\ldots
\end{gathered}\tag{2.9}$$

В силу предполагаемой справедливости свойства (1.17) и доказанного в п.(3) соотношения (1.18) задача (1.21) с функционалом (2.3) имеет решение $u=\check{u}_t$, $\chi=\check{\chi}_t$ каждом t. Определим $\check{Q}(t)$ формулой

(1.22) и построим последовательность (2.9) с $Q = \check{Q}(t)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&|\Omega| \min_{Q\in[0,1]} G(Q,t) \\
&\qquad \le |\Omega| G(\check{Q}(t),t) = \mathcal{I}[u^0,\chi^0,t,\Omega] \le \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{I}[u_n,\chi_n,t,\Omega] \\
&\qquad\qquad = \mathcal{I}[\check{u}_t,\check{\chi}_t,t,\Omega] = \inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}''(\Omega)}} \mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega] \\
&\qquad\qquad \le \inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}''(\Omega)}} I[u,\chi,t,\Omega] = \inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}'(\Omega)}} I[u,\chi,t,\Omega] \\
&\qquad\qquad\qquad = |\Omega| \min_{Q\in[0,1]} G(Q,t).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

В (2.10) первое, четвёртое и пятое соотношения очевидны, второе имеет место в силу (2.3) и последнего равенства в (1.8), третье вытекает из предполагаемой справедливости (1.17), шестое – из (1.19), седьмое совпадает с (1.13), а восьмое содержится в (1.8). Из (2.10) следует (1.20), а также соотношения

$$
\begin{aligned}
G(\check{Q}(t),t) &= \min_{Q\in[0,1]} G(Q,t), \\
\mathcal{I}[u^0,\chi^0,t,\Omega] &= \inf_{\substack{u\in\mathbb{X}(\Omega),\\ \chi\in\mathbb{Z}''(\Omega)}} \mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega], \quad u^0 \equiv 0, \quad \chi^0 \equiv \check{Q}(t).
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Подведём итог этого раздела.

Лемма 2.1 *При выполнении* (1.17) *в областях* Ω *с* $|\partial\Omega| = 0$ *функционал* (2.3) *принимает только конечные значения, непрерывен и обладает свойствами* (1.18)–(1.20).

3. Общие свойства решений задачи (1.21) с функционалом (2.3). В формулировке ближайшей теоремы использованы: определение (1.6) функции $g(Q,\xi)$, решение $\bar{Q}(t)$ задачи (1.9), температуры фазовых переходов $t_\pm$ и число t^*, информация о которых дана в (1.10), (1.11).

Теорема 2.1. *При выполнении условия* (1.17) *в областях* Ω *с* $|\partial\Omega| = 0$ *задача* (1.21) *для функционала* (2.3) *разрешима при всех* t *и для её решений* $\check{u}_t$, $\check{\chi}_t$ *справедливы утверждения:*

(1) *для каждого* t *множество решений замкнуто относительно слабой сходимости в* $\mathbb{X}(\Omega)$ *и слабой сходимости в* $L_2(\Omega)$ *для полей смещений и распределений фаз соответственно;*

(2) *если* $t_\pm = t^*$, *то множество всех решений исчерпывается парами* $\check{u}_t = 0$ *и* $\check{\chi}_t = 1$ *при* $t < t^*$, $\check{\chi}_t = 0$ *при* $t > t^*$, $\check{\chi}_t$ *– произвольная функция из множества* $\mathbb{Z}''(\Omega)$ *при* $t = t^*$;

(3) *если* $t_- < t_+$, *функция* $g(\cdot, [A\zeta]) \in C^1[0,1]$ *и строго выпукла, то для функции* (1.22) *при всех* $t \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство* $\check{Q}(t) = \bar{Q}(t)$, *а для решений* $\check{u}_t$, $\check{\chi}_t$ *выполняются соотношения* $\check{u}_t = 0$, $\check{\chi}_t = 1$ *при* $t \le t_-$, $\check{u}_t = 0$, $\check{\chi}_t = 0$, *при* $t \ge t_+$, *для* $t \in (t_-, t_+)$ *все решения двухфазовые;*

(4) *при выполнении предположений предыдущего пункта, при всех* $t \in \mathbb{R}$ *пара* $\check{u}_t \equiv 0$, $\check{\chi}_t \equiv \bar{Q}(t)$ *является решением задачи.*

Доказательство. Разрешимость задачи (1.21) для функционала (2.3) при каждом t является следствием леммы 2.1 и предположений теоремы.

(1) Слабая замкнутость множества всех решений при фиксированном t вытекает из (1.17).

(2) При $t_\pm = t^*$ выполняется равенство $[A\zeta] = 0$. Поэтому $g(\cdot, [A\zeta]) = 0$ и функционал (2.3) совпадает с функционалом (1.2), определённым на парах $u \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}''(\Omega)$. Учитывая равенство $[A\zeta] = 0$ и (1.5), имеем

$$\begin{aligned} I[u,\chi,t,\Omega] &= |\Omega| Q(t - t^*) \\ &\quad + \int\limits_\Omega \langle (\chi A^+ + (1-\chi)A^-) e(\nabla u), e(\nabla u)\rangle\, dx + |\Omega| \langle A^-\zeta^-, \zeta^-\rangle. \end{aligned}$$

Третье слагаемое правой части последнего равенства не зависит от u и χ. Второе при каждом χ является положительно определённой квадратичной формой по u, эквивалентной квадрату нормы в пространстве $\mathbb{X}(\Omega)$. Поэтому оно достигает минимума при каждом χ только при $u = 0$. Минимизация первого слагаемого по χ приводит к очевидным результатам. Приведённые рассуждения завершают доказательство (2).

(3) В силу условий этого пункта теоремы и (1.11), функция $\bar{Q}(t)$ однозначна. Тогда первое равенство (2.11) приводит к соотношению $\check{Q}(t) = \bar{Q}(t)$. Поэтому при $t \in (t_-, t_+)$ все решения двухфазовые. Поскольку для функции (2.2) справедливы равенства $\mathcal{F}(M,0,t) = F^-(M)$, $\mathcal{F}(M,1,t) = F^+(M) + t$, пары $\check{u}_t$, $\check{\chi}_t \equiv 0$ и $\check{u}_t$, $\check{\chi}_t \equiv 1$ минимизируют функционал (2.3) только при $\check{u}_t \equiv 0$.

(4) Последнее утверждение теоремы вытекает из второго равенства (2.11). □

4. Замечание. В работе [9] конструкция (2.1) упоминалась, но не исследовалась. Содержательные утверждения о свойствах функционала (1.16) для аналога плотности (2.1), порождённой формулой гораздо более общего, чем (1.1) вида, изложены в [11]. Напрямую воспользоваться ими не удаётся из-за ограничений в [11], невыполнимых для плотности (1.1). Главная неприятность для нас в подходе [11] кроется в потере формулы (2.2), дающей возможность явного вычисления плотности релаксированного функционала. В работе [12] изучалась регулярность плотности определённой в [11] релаксации.

§3. Задача (1.21) для функционала (2.3) в одномерном случае

Чтобы понять, что следует ожидать от задачи (1.21) при $m \geq 2$, рассмотрим сначала одномерный случай. Для него плотности (1.1) и функционал энергии (1.2) имеют вид

$$F^{\pm}(M) = a_{\pm}(M - c_{\pm})^2, \quad a_{\pm}, c_{\pm}, M \in \mathbb{R}, \quad a_{\pm} > 0, \quad \Omega = (0, \ell),$$

$$I[u, \chi, t, \ell] = \int\limits_0^{\ell} \{\chi(x)(F^+(u'(x)) + t) + (1 - \chi(x))F^-(u'(x))\}\, dx, \tag{3.1}$$

$$u \in \mathbb{X}(0, \ell), \quad \chi \in \mathbb{Z}'(0, \ell), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Задача (1.3) для функционала (3.1). Сформулируем ряд необходимых для дальнейшего фактов, полученных в [13].

Справедливо равенство

$$I[u, \chi, t, \ell] = \int\limits_0^{\ell} (\chi(x)a_+ + (1-\chi(x))a_-)(u'(x) - \alpha(Q)(\chi(x) - Q))^2\, dx$$

$$+ \ell\{\big(Q(F^+(0) + t) + (1 - Q)F^-(0)\big) - [ac]^2 \frac{Q(1-Q)}{a_+(1-Q) + a_- Q}\},$$

$$Q = \frac{1}{\ell}\int\limits_0^{\ell} \chi(x)\, dx, \quad \alpha(Q) = \frac{[ac]}{a_+(1-Q) + a_- Q}, \quad [ac] = a_+c_+ - a_-c_-. \tag{3.2}$$

Поэтому для определённой в (1.8) функции $G(Q,t)$ получается формула

$$\begin{aligned} G(Q,t) &= Q(F^+(0)+t)+(1-Q)F^-(0)+g(Q,[ac]),\\ g(Q,\xi) &= -\xi^2\frac{Q(1-Q)}{a_+(1-Q)+a_-Q}, \quad \xi\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

позволяющая вычислить температуры фазовых переходов

$$t_\pm = t^*\pm\frac{[ac]^2}{a_\pm}, \quad t^* = -[ac^2], \quad [ac^2] = a_+c_+^2 - a_-c_-^2. \tag{3.4}$$

Функция $g(Q,\xi)$ из (3.3) бесконечно дифференцируема по совокупности переменных и $g_{QQ}(Q,\xi)>0$, $Q\in[0,1]$, $\xi\neq 0$. Поэтому для решений с ней задачи (1.9) справедливы все перечисленные в (1.11) свойства. Для функции $\bar{Q}(t)$ имеются явные формулы, но ввиду их громоздкости они здесь не приводятся. Зная функцию $\bar{Q}(t)$, с помощью представления (3.2) можно при каждом t выписать в явном виде все решения задачи (1.3) для одномерного случая:

$$\begin{gathered} \hat{\chi}_t \text{ – произвольный элемент множества } \mathbb{Z}'_{\bar{Q}(t)},\\ \hat{u}_t(x) = \alpha(\bar{Q}(t))\int_0^x(\hat{\chi}_t(y)-\bar{Q}(t))\,dy. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь функция $\alpha(Q)$ определена в (3.2).

2. Плотность энергии (2.2) и функционал (2.3) в одномерном случае. Используя формулы (2.2), (2.3) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(M,Q,t) &= Q(F^+(M)+t)+(1-Q)F^-(M)\\ &\quad -\big([a]M-[ac]\big)^2\frac{Q(1-Q)}{a_+(1-Q)+a_-Q}, \quad [a]=a_+-a_-. \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[u,\chi,t,\ell] &= \int_0^\ell\{\chi(x)(F^+(u'(x))+t)+(1-\chi(x))F^-(u'(x))\}\,dx\\ &\quad -\int_0^\ell\big([a]u'(x)-[ac]\big)^2\frac{\chi(x)(1-\chi(x))}{a_+(1-\chi(x))+a_-\chi(x)}\,dx,\\ &\qquad u\in\mathbb{X}(0,\ell), \quad \chi\in\mathbb{Z}''(0,\ell). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Лемма 3.1 *Матрица вторых производных функции* (3.6) *по переменным* $M \in \mathbb{R}$, $Q \in [0,1]$ *вырождена и неотрицательна.*

Доказательство. Непосредственные вычисления дают

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{MM}(M,Q,t) &= \frac{2a_+a_-}{a_+(1-Q)+a_-Q}, \\
\mathcal{F}_{QQ}(M,Q,t) &= \frac{2a_+a_-}{(a_+(1-Q)+a_-Q)^3}([a]M-[ac])^2, \\
\mathcal{F}_{MQ}(M,Q,t) &= 2([a]M-[ac])\frac{a_+a_-}{(a_+(1-Q)+a_-Q)^2}.
\end{aligned}$$

Тогда для матрицы вторых производных

$$\mathcal{F}''(M,Q,t) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{MM}(M,Q,t), & \mathcal{F}_{MQ}(M,Q,t) \\ \mathcal{F}_{MQ}(M,Q,t), & \mathcal{F}_{QQ}(M,Q,t) \end{pmatrix}$$

при всех значениях аргументов справедливы соотношения $\operatorname{tr}\mathcal{F}''(M,Q,t) > 0$, $\det\mathcal{F}''(M,Q,t) = 0$. Следовательно, её квадратичная фома не принимает отрицательных значений. $\square$

Оказывается, что для функционала (3.7) справедлива аналогичная (3.2) формула с определённой в (3.3) функцией $G(Q,t)$.

Лемма 3.2 *При всех* $u \in \mathbb{X}(0,\ell)$, $\chi \in \mathbb{Z}''(0,\ell)$ *для функционала* (3.7) *выполняется равенство*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}[u,\chi,t,\ell] = &\int_0^\ell \frac{a_+a_-}{a_+(1-\chi(x))+a_-\chi(x)}\big(u'(x)-\alpha(Q)(\chi(x)-Q)\big)^2 dx \\
&+\ell G(Q,t), \qquad (3.8) \\
Q = &\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \chi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Доказательство. Для всех $u \in \mathbb{X}(0,\ell)$, $\chi \in \mathbb{Z}''(0,\ell)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} &I[u,\chi,t,\ell] \\ &= \int\limits_0^\ell \{\chi(x)a_+(u'(x)-\alpha(Q)(1-Q))^2 + (1-\chi(x))a_-(u'(x)+\alpha(Q)Q)^2\}\,dx \\ &\qquad + \ell G(Q,t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Оно совпадает с (3.2) в случае $\chi \in \mathbb{Z}'(0,\ell)$. Для проверки этого факта следует заметить совпадение подынтегральных выражений в (3.9) и (3.2) по отдельности при $\chi(x) = 1$ и $\chi(x) = 0$. Поскольку при фиксированном u функционал (3.1) и правая часть (3.9) непрерывны по $\chi \in \mathbb{Z}''(0,\ell)$ относительно слабой сходимости в $L_2(0,\ell)$, для распространения (3.9) на множество $\mathbb{Z}''(0,\ell)$ нужно воспользоваться свойством (1.15).

Учитывая (3.9), перепишем (3.7) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}[u,\chi,t,\ell] \\ &= \int\limits_0^\ell \big(\chi(x)a_+(u'(x)-\alpha(Q)(1-Q))^2 + (1-\chi(x))a_-(u'(x)+\alpha(Q)Q)^2\big)\,dx \\ &\qquad - \int\limits_0^\ell \big(([a]u'(x)-[ac]\big)^2 \frac{\chi(x)(1-\chi(x))}{a_+(1-\chi(x))+a_-\chi(x)} + \ell G(Q,t). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Для числового аргумента $M \in \mathbb{R}$ и параметра $\chi \in [0,1]$ определим функции

$$\begin{aligned} h(M) &= \chi a_+(M-\alpha(Q)(1-Q))^2 + (1-\chi)a_-(M+\alpha(Q)Q)^2 \\ &\quad - ([a]M-[ac])^2 \frac{\chi(1-\chi)}{a_+(1-\chi)+a_-\chi}, \\ k(M) &= (M-\alpha(Q)(\chi-Q))^2. \end{aligned}$$

Для доказательства равенства (3.8) достаточно установить, что

$$h(M) = \frac{a_+a_-}{a_+(1-\chi)+a_-\chi} k(M). \tag{3.11}$$

Так как

$$
\begin{aligned}
h(0) &= \alpha^2(Q)(\chi a_+(1-Q)^2 + (1-\chi)a_-Q^2) - [ac]^2\frac{\chi(1-\chi)}{a_+(1-\chi)+a_-\chi},\\
h'(0) &= -2\alpha(Q)(\chi a_+(1-Q) - (1-\chi)a_-Q) + 2[a][ac]\frac{\chi(1-\chi)}{a_+(1-\chi)+a_-\chi},\\
h''(0) &= 2(\chi a_+ + (1-\chi)a_-) - 2[a]^2\frac{\chi(1-\chi)}{a_+(1-\chi)+a_-\chi}, \quad [a] = a_+ - a_-,\\
k(0) &= \alpha^2(Q)(\chi-Q)^2, \quad k'(0) = -2\alpha(Q)(\chi-Q), \quad k''(0) = 2,
\end{aligned}
$$

учитывая вытекающую из (3.2) формулу $[ac] = \alpha(Q)(a_+(1-Q)+a_-Q)$, имеем

$$
h(0)=\beta k(0), \quad h'(0)=\beta k'(0), \quad h''(0)=\beta k''(0), \quad \beta=\frac{a_+a_-}{a_+(1-\chi)+a_-\chi}.
$$

Поскольку $h(M)$ и $k(M)$ суть полиномы от M степени не выше двух, из последних соотношений следует справедливость (3.11). Легко видеть, что при $\chi \in \mathbb{Z}'(0,l)$ подынтегральные выражения в формулах (3.2) и (3.8) совпадают. $\square$

3. Решения задачи (1.21) для функционала (3.7). Благодаря лемме 3.1 функционал (3.7) обладает свойством (1.17). Таким образом, справедливы все условия теоремы 2.1. Однако в одномерном случае все утверждения теоремы 2.1 (и даже больше) вытекают из формулы (3.8).

Теорема 3.1 (1) *Множество всех решений задачи* (1.21) *для функционала* (3.7) *при каждом* t *исчерпывается парами*

$$
\begin{aligned}
&\check{\chi}_t \text{ – произвольный элемент множества } \mathbb{Z}''_{\bar{Q}(t)},\\
&\check{u}_t(x) = \alpha(\bar{Q}(t))\int\limits_0^x(\check{\chi}_t(y) - \bar{Q}(t))\,dy.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

где $\bar{Q}(t)$ *– решение задачи* (1.9) *для определённой в* (3.3) *функции* $G(Q,t)$.

(2) *Множество всех решений задачи* (1.21) *для функционала* (3.7) *совпадает со слабым замыканием множества всех решений задачи* (1.3) *для функционала* (3.1).

Доказательство. Утверждение (1) являются непосредственным следствием формулы (3.8). Утверждение (2) получается сравнением (3.5) и (3.12). □

§4. Многомерная задача (1.21) с одинаковыми модулями упругости

В случае $A^{\pm} = A$ плотности энергии $F^{\pm}(M)$ задаются равенствами

$$\begin{gathered} F^{\pm}(M) = \langle A(e(M) - \zeta^{\pm}), e(M) - \zeta^{\pm} \rangle, \\ M \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \zeta^{\pm} \in \mathbb{R}_s^{m \times m}, \quad m \geq 2. \end{gathered} \tag{4.1}$$

По каждому $\bar{k} \in \mathbb{R}^m$, $|\bar{k}| = 1$ определим подпространство $V_{\bar{k}} \subset \mathbb{R}_s^{m \times m}$, состоящее из элементов $e(\bar{k} \otimes c)$, $c \in \mathbb{R}^m$. Отображение $A^{1/2}$ переводит $V_{\bar{k}}$ в подпространство $A^{1/2}V_{\bar{k}}$. Обозначим через $\pi_{A^{1/2}V_{\bar{k}}}$ и $\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar{k}}}$ ортопроекторы в $\mathbb{R}_s^{m \times m}$ на пространство $A^{1/2}V_{\bar{k}}$ и его ортогональное дополнение. Поскольку $\pi_{A^{1/2}V_{\bar{k}}}\xi$ непрерывно по $\bar{k}$ при фиксированном ξ (см., например, [14], стр. 222), величина

$$|\xi|_A = \sup_{|k|=1} |\pi_{A^{1/2}V_{\bar{k}}} A^{1/2}\xi| \tag{4.2}$$

конечна и реализуется в какой-то точке на единичной сфере в $\mathbb{R}^m$. Легко проверяется, что $|\cdot|_A$ является нормой в $\mathbb{R}_s^{m \times m}$.

1. Задача (1.3) для функционала с плотностями (4.1). Для плотностей (4.1) функции $g(Q, \xi)$, $\bar{Q}(t)$ и температуры фазовых переходов $t_{\pm}$ определяются формулами

$$\begin{gathered} g(Q, \xi) = -|\xi|_A^2 Q(1 - Q), \quad \bar{Q}(t) = \frac{t_+ - t}{t_+ - t_-}, \, t \in [t_-, t_+], \\ t_{\pm} = t^* \pm |[\zeta]|_A^2, \quad t^* = -(|A^{1/2}\zeta^+|^2 - |A^{1/2}\zeta^-|^2). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Первая из них получена в [9], остальные – в [15]. Среди плотностей энергии (4.1) имеются как такие, для которых задача (1.3) разрешима при всех $t \in (t_-, t_+) \neq \emptyset$, так и такие, для которых решения при всех указанных t отсутствуют. Примером первой из них является плотность с

$$\begin{gathered} A\cdot = a \cdot + b\langle \cdot, \mathrm{i} \rangle \, \mathrm{i}, \; [\zeta] = c\, \mathrm{i}, \quad \mathrm{i} - \text{единичная матрица в } \mathbb{R}^m, \\ a, b, c \in \mathbb{R}, \; a > 0, \; a + mb > 0. \end{gathered}$$

второй – с

$$A - \text{любое}, \; 0 \neq [\zeta] = e(k \otimes c), \; k, c \in \mathbb{R}^m, \tag{4.4}$$

соответственно [16, 17].

2. Плотность энергии (2.2) и функционал (2.3) при условии $A^{\pm} = A$. С помощью первой формулы (4.3) и равенств (2.2), (2.3) получаем

$$\mathcal{F}(M,Q,t) = Q(F^{+}(M)+t) + (1-Q)F^{-}(M) - |[\zeta]|_A^2 Q(1-Q), \quad (4.5)$$

$$\mathcal{I}[u,\chi,t,\Omega] = \int\limits_{\Omega} \{\chi(F^{+}(\nabla u)+t) + (1-\chi)F^{-}(\nabla u)\}\,dx - \int\limits_{\Omega} |[\zeta]|_A^2 \chi(1-\chi)\,dx. \quad (4.6)$$

3. Вспомогательные утверждения. Цель этого раздела – исследование выпуклости функционала (4.6).

Лемма 4.1 *В случае* $A^{\pm} = A$ *для функции*

$$F(M,Q,t) = Q(F^{+}(M)+t) + (1-Q)F^{-}(M), \quad M \in \mathbb{R}_s^{m\times m}, \quad Q \in [0,1], \quad t \in \mathbb{R}$$

при всех $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_s^{m\times m}$, $Q_1, Q_2 \in [0,1]$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$ *справедливо равенство*

$$\begin{aligned} 0 = F(\lambda M_1 + (1-\lambda)M_2, \lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2, t) \\ - \lambda F(M_1,Q_1,t) - (1-\lambda)F(M_2,Q_2,t) \\ + \lambda(1-\lambda)\big(|A^{1/2}(e(M_2-M_1) - (Q_2-Q_1)[\zeta])|^2 - |A^{1/2}[\zeta]|^2(Q_2-Q_1)^2\big). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Доказательство. Вывод равенства (4.7) основан на громоздких преобразованиях первого слагаемого правой части. Намного проще проверить его справедливость. При фиксированных $M_{1,2}$, $Q_{1,2}$, t обозначим через $h(\lambda)$ правую часть (4.7) с произвольным $\lambda \in \mathbb{R}$. Из формулы для $h(\lambda)$ вытекают представление $h(\lambda) = \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ с некоторыми коэффициентами $\alpha_i = \alpha_i(M_{1,2}, Q_{1,2}, t)$, $i = 0, \ldots, 3$, а также легко устанавливаемые факты $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$, $h(0) = h(1) = 0$, приводящие к равенству $h(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Следствием равенства (4.7) и тождества

$$(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2)(1-(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2)) \\ \equiv \lambda^2 Q_1(1-Q_1) + \lambda(1-\lambda)(Q_1(1-Q_2) + Q_2(1-Q_1)) \\ + (1-\lambda)^2 Q_2(1-Q_2)$$

(справедливость последнего при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ вытекает из легко проверяемой его справедливости при $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1/2$) станет соотношение

$$\mathcal{F}(\lambda M_1 + (1-\lambda)M_2, \lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2, t) \\ = \lambda\mathcal{F}(M_1, Q_1, t) + (1-\lambda)\mathcal{F}(M_2, Q_2, t) \\ - \lambda(1-\lambda)|A^{1/2}(e(M_2 - M_1) - (Q_2 - Q_1)[\zeta])|^2 \\ + \lambda(1-\lambda)\big(|A^{1/2}[\zeta]|^2 - |[\zeta]|_A^2\big)(Q_2 - Q_1)^2. \quad (4.8)$$

В произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ определим функционал

$$J[w,\psi,\Omega] = \int_\Omega |A^{1/2}\big(e(\nabla w(x)) - \psi(x)[\zeta]\big)|^2\, dx, \\ w \in \mathbb{X}(\Omega), \ \ \psi \in L_2(\Omega). \quad (4.9)$$

Наша цель – получить для него оценку снизу.

Лемма 4.2. *Справедливо неравенство*

$$J[w,\psi,\Omega] \geq \big(|A^{1/2}[\zeta]|^2 - |[\zeta]|_A^2\big)\|\psi\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (4.10)$$

Доказательство. (1). На первом этапе докажем неравенство (4.10) для области Ω, совпадающей со стандартным кубом $K = (-\pi,\pi)^m$. Для такой области его справедливость устанавливается способом, аналогичным изложенному в [9].

Для функций $w \in \mathbb{X}(K)$, $\psi \in L_2(K)$ справедливы разложения в ряды Фурье

$$w(x) = \sum_{k\in\mathcal{N}} c_k v_k(x),\ c_k \in \mathbb{C}^m, \quad \psi(x) = \sum_{k\in\mathcal{N}} \psi_k v_k(x),\ \chi_k \in \mathbb{C}, \\ v_k(x) = \frac{1}{|K|^{1/2}} e^{ik\cdot x},\ k \in \mathcal{N}, \quad (4.11)$$

где $\mathcal{N}$ – множество всех векторов из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами. Первый ряд (4.11) будет сходится в подпространстве периодических функций из $W_2^1(K,\mathbb{C}^m)$, второй – в $L_2(K)$. Положим

$$c_k = c_k' + ic_k'',\ c_k', c_k'' \in \mathbb{R}^m, \quad \psi_k = \psi_k' + i\psi_k'',\ \psi_k', \psi_k'' \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

В силу вещественности функций $w(x)$ и $\psi(x)$ для коэффициентов Фурье обязаны выполняться соотношения

$$c_k' = c_{-k}',\ c_k'' = -c_{-k}'', \quad \psi_k' = \psi_{-k}',\ \psi_k'' = -\psi_{-k}'', \quad k \in \mathcal{N}. \tag{4.13}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &|K|^{1/2}\big(e(\nabla w) - \psi[\zeta]\big) \\ &= -\sum_{k\in\mathcal{N}} \{\big(e(k\otimes c_k') - \psi_k''[\zeta]\big)\sin(k\cdot x) + \big(e(k\otimes c_k'') + \psi_k'[\zeta]\big)\cos(k\cdot x)\} \\ &\ +i\sum_{k\in\mathcal{N}} \{\big(e(k\otimes c_k') - \psi_k''[\zeta]\big)\cos(k\cdot x) - \big(e(k\otimes c_k'') + \psi_k'[\zeta]\big)\sin(k\cdot x)\}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Благодаря (4.13) вторая сумма правой части (4.14) обнуляется. Поэтому

$$\begin{aligned} &|K|^{1/2}A^{1/2}\big(e(\nabla w) - \psi[\zeta]\big) \\ &= -\sum_{k\in\mathcal{N}} A^{1/2}\{\big(e(k\otimes c_k') - \psi_k''[\zeta]\big)\sin(k\cdot x) + \big(e(k\otimes c_k'') + \psi_k'[\zeta]\big)\cos(k\cdot x)\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Возвращаясь от синусов и косинусов к экспонентам:

$$\frac{\sin(k\cdot x)}{|K|^{1/2}} = \frac{1}{2i}(v_k(x) - v_{-k}(x)), \qquad \frac{\cos(k\cdot x)}{|K|^{1/2}} = \frac{1}{2}(v_k(x) + v_{-k}(x)),$$

получаем

$$A^{1/2}(e(\nabla w) - \psi[\zeta]) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{N}} A^{1/2}\{(\beta_k - i\alpha_k)v_k + (\beta_k + i\alpha_k)v_{-k}\},$$

$$\alpha_k = e(k\otimes c_k') - \psi_k''[\zeta], \quad \beta_k = e(k\otimes c_k'') + \psi_k'[\zeta].$$

Учитывая (4.13), имеем $\alpha_{-k} = -\alpha_k$, $\beta_{-k} = \beta_k$. Следовательно,

$$A^{1/2}(e(\nabla w) - \psi[\zeta]) = \sum_{k\in\mathcal{N}} A^{1/2}(\beta_k - i\alpha_k)v_k. \tag{4.16}$$

Так как в комплексифицированном пространстве $\mathbb{R}_s^{m\times m}$ по определению $|\beta - i\alpha|^2 = |\beta|^2 + |\alpha|^2$, применение к (4.16) равенства Парсеваля даёт

$$\begin{gathered} J[w,\psi,K]=\int\limits_K |A^{1/2}\big(e(\nabla w)-\psi[\zeta]\big)|^2\,dx \\ =\sum_{k\in\mathcal{N}}|A^{1/2}\big(e(k\otimes c_k')-\psi_k''[\zeta]\big)|^2+\sum_{k\in\mathcal{N}}|A^{1/2}\big(e(k\otimes c_k'')+\psi_k'[\zeta]\big)|^2. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Поскольку при $k\neq 0$

$$\begin{aligned} &A^{1/2}\big(e(k\otimes c_k')-\psi_k''[\zeta]\big)=A^{1/2}e(k\otimes c_k') \\ &\qquad -\psi_k''\pi_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta]-\psi_k''\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta], \\ &A^{1/2}\big(e(k\otimes c_k'')+\psi_k'[\zeta]\big)=A^{1/2}e(k\otimes c_k'')+\psi_k'\pi_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta] \\ &\qquad +\psi_k'\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta], \\ &A^{1/2}e(k\otimes c_k'),\ \ A^{1/2}e(k\otimes c_k'')\in A^{1/2}V_{\bar k}, \quad \bar k=k|k|^{-1}, k\in\mathcal{N}, \end{aligned}$$

а

$$\psi_0''=0, \quad \psi_0=\psi_0'=|K|^{-1/2}\int\limits_K \psi(x)\,dx,$$

из (4.17) получаем

$$\begin{aligned} J[w,\psi,K]&=|A^{1/2}[\zeta]|^2|\psi_0|^2+\sum_{0\neq k\in\mathcal{N}}(|\psi_k'|^2+|\psi_k''|^2)|\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta]|^2 \\ &+\sum_{0\neq k\in\mathcal{N}}|A^{1/2}e(k\otimes c_k')-\psi_k''\pi_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta]|^2 \\ &+\sum_{0\neq k\in\mathcal{N}}|A^{1/2}e(k\otimes c_k'')+\psi_k'\pi_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta]|^2 \\ &\geq |A^{1/2}[\zeta]|^2|\psi_0|^2+\sum_{0\neq k\in\mathcal{N}}|\psi_k|^2|\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta]|^2. \end{aligned}$$

Используя последнее неравенство, имеем

$$\begin{aligned} J[w,\psi,K] \geq \big(\min_{\bar{k}\in S_1} |\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar{k}}} A^{1/2}[\zeta]|^2\big) \sum_{k\in\mathcal{N}} |\psi_k|^2 \\ + \big(|A^{1/2}[\zeta]|^2 - \min_{\bar{k}\in S_1} |\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar{k}}} A^{1/2}[\zeta]|^2\big)|\psi_0|^2 \\ = \min_{\bar{k}\in S_1} |\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar{k}}} A^{1/2}[\zeta]|^2 \,\|\psi\|^2_{L_2(K)} \\ + \big(|A^{1/2}[\zeta]|^2 - \min_{\bar{k}\in S_1} |\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar{k}}} A^{1/2}[\zeta]|^2\big)|\psi_0|^2 \\ = \big(|A^{1/2}[\zeta]|^2 - |[\zeta]|^2_A\big)\|\psi\|^2_{L_2(K)} + |[\zeta]|^2_A|\psi_0|^2, \quad (4.18) \end{aligned}$$

что завершает доказательство (4.10) для $\Omega = K$.

(2) На втором этапе установим справедливость (4.10) в $\Omega = K_l$ – кубе с ребром $(-l\pi, l\pi)$, $l > 0$. Пусть $w \in \mathbb{X}(K_l)$, $\psi \in L_2(K_l)$. Положим

$$\bar{w}(y) = l^{-1}w(ly), \quad \bar{\psi}(y) = \psi(ly), \quad y \in K.$$

Замена переменных в интеграле (4.9) и полученная в кубе K оценка (4.10) дают

$$J[w,\psi,K_l] = l^m J[\bar{w},\bar{\psi},K] \geq l^m\big(|A^{1/2}[\zeta]|^2 - |[\zeta]|^2_A\big)\|\bar{\psi}\|^2_{L_2(K)}.$$

Осталось заметить, что $l^m\|\bar{\psi}\|^2_{L_2(K)} = \|\psi\|^2_{L_2(K_l)}$.

(3) На третьем этапе докажем оценку (4.10) в произвольной области Ω. Для этого подберём такое l, что $\Omega \subset K_l$. Пусть $w \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$. Обозначим через $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}$ продолжение нулём функций w, ψ в куб K_l. Очевидно, что $\tilde{w} \in \mathbb{X}(K_l)$, $\tilde{\psi} \in L_2(K_l)$, $\|\tilde{\psi}\|_{L_2(K_l)} = \|\psi\|_{L_2(\Omega)}$. Тогда

$$J[w,\psi,\Omega] = J[\tilde{w},\tilde{\psi},K_l] \geq \big(|A^{1/2}[\zeta]|^2 - |[\zeta]|^2_A\big)\|\psi\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad \square$$

Лемма 4.3. *Критерием выпуклости функции $\mathcal{F}(\cdot,\cdot,t)$ на $\mathbb{R}^{m\times m}_s \times [0,1]$ служит наличие таких $k, c \in \mathbb{R}^m$, что*

$$[\zeta] = e(k \otimes c). \tag{4.19}$$

Даже при наличии представления (4.19) *функция $\mathcal{F}(\cdot,\cdot,t)$ не является строго выпуклой на множестве $\mathbb{R}^{m\times m}_s \times [0,1]$.*

Доказательство. При условии (4.19) выпуклость функции $\mathcal{F}(.,.,t)$ является следствием положительности A, равенства $|A^{1/2}[\zeta]| = |[\zeta]|_A$ и (4.8).

Фиксируем $Q_1, Q_2 \in [0,1]$, $Q_1 \neq Q_2$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}_s^{m\times m}$,

$$\xi_2 - \xi_1 = (Q_2 - Q_1)[\zeta].$$

Для них из (4.8) получаем

$$\mathcal{F}(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, \lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2, t) = \lambda\mathcal{F}(\xi_1, Q_1, t) + (1-\lambda)\mathcal{F}(\xi_2, Q_2, t) \\ + \lambda(1-\lambda)(|A^{1/2}[\zeta]|^2 - |[\zeta]|_A^2)(Q_2 - Q_1)^2. \quad (4.20)$$

Необходимость условия (4.19) является следствием (4.20). Поскольку пары $\{\xi_1, Q_1\}$, $\{\xi_2, Q_2\}$ не совпадают, при выполнении (4.19) из (4.20) вытекает отсутствие строгой выпуклости у функции $\mathcal{F}(\cdot,\cdot,t)$ на множестве $\mathbb{R}_s^{m\times m} \times [0,1]$. □

В итоговой лемме раздела речь пойдёт о выпуклости функционала (4.6) по совокупности переменных $u \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}''(\Omega)$ в произвольной области Ω и при любом $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 4.4 *Функционал* (4.6) *является выпуклым на множестве* $\mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Z}''(\Omega)$. *В случае* $0 \neq [\zeta] = e(k \otimes c)$ *с некоторыми* $k, c \in \mathbb{R}^m$ *он строго выпуклый.*

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{Z}''(\Omega)$. Положим $v = u_2 - u_1$, $\phi = \chi_2 - \chi_1$. Учитывая (4.8), для всех $\lambda \in (0,1)$ получаем

$$\mathcal{I}[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \lambda\chi_1 + (1-\lambda)\chi_2, t, \Omega] \\ = \lambda\mathcal{I}[u_1, \chi_1, t, \Omega] + (1-\lambda)\mathcal{I}[u_2, \chi_2, t, \Omega] \\ -\lambda(1-\lambda)\Big(\int_\Omega |A^{1/2}(e(\nabla v) - \phi[\zeta])|^2\,dx - (|A^{1/2}[\zeta]|^2 - |[\zeta]|_A^2)\int_\Omega \phi^2\,dx\Big). \quad (4.21)$$

Выражение в больших скобках (4.21) не отрицательно в силу (4.10), что приводит к требуемой выпуклости.

Предположим, что $0 \neq [\zeta] = e(k \otimes c)$, но функционал $\mathcal{I}[.,.,t,\Omega]$ не является строго выпуклым: найдутся несовпадающие пары u_1, χ_1, u_2, χ_2, для которых

$$\mathcal{I}[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \lambda\chi_1 + (1-\lambda)\chi_2, t, \Omega] = \lambda\mathcal{I}[u_1, \chi_1, t, \Omega] + (1-\lambda)\mathcal{I}[u_2, \chi_2, t, \Omega].$$

Учитывая равенство $|A^{1/2}[\zeta]| = |[\zeta]|_A$ и соотношение (4.21), приходим к выводу, что определённые этими парами функции $v = u_2 - u_1$ и $\phi = \chi_2 - \chi_1$ подчинены условию $e(\nabla v) = \phi[\zeta]$. Из него при $[\zeta] \neq 0$

аналогично доказательству леммы 5.1 в [17] получаем равенства $v = 0$, $\phi = 0$, противоречащие несовпадению пар. $\square$

4. Решения задачи (1.21) для функционала (4.6). Итоговым результатом параграфа является теорема.

Теорема 4.1 *В произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ с $|\partial\Omega| = 0$ для множества всех решений задачи* (1.21) *с функционалом* (4.6) *справедливы утверждения теоремы* 2.1. *В случае $0 \neq [\zeta] = e(k \otimes c)$ с некоторыми $k, c \in \mathbb{R}^m$ для каждого t решение $\check{u}_t = 0$, $\check{\chi}_t = \bar{Q}(t)$ единственно.*

Доказательство. Гладкость плотности (4.5) и неравенство

$$g_{QQ}(Q, [\zeta]) > 0$$

при $[\zeta] \neq 0$ очевидны. Выпуклость функционала (4.6) установлена в лемме 4.4. Следовательно, для задачи (1.21) выполняются все предположения теоремы 2.1. Единственность при каждом t решения этой задачи в случае $0 \neq [\zeta] = e(k \otimes c)$ вытекает из строгой выпуклости функционала. $\square$

Замечания. (1) Утверждение теоремы 4.1 о единственности решения можно рассматривать как доказательство неразрешимости задачи (1.3) для плотности (4.4) при всех $t \in (t_-, t_+)$. Этот факт следует из того, что при $t \in (t_-, t_+)$ у указанного в теореме единственного решения функция $\check{\chi}_t \notin \mathbb{Z}'(\Omega)$.

(2) В [9, 18] для плотностей (4.1) изучалась регуляризация функционала энергии на основе построения для функции

$$\mathcal{F}(M, t) = \min\{F^+(M) + t, F^-(M)\}$$

квазивыпуклой оболочки. В случае (4.19) при $k, c \neq 0$ для такой регуляризации состояние равновесия также единственно [18].

Список литературы

1. М. А. Гринфельд, *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений*, Наука, М. (1990).
2. В. Г. Осмоловский, *Достаточные условия отсутствия двухфазовых состояний равновесия упругих сред при несовпадающих температурах фазовых переходов*. — Пробл. мат. анал. **100** (2019), 121–131.

3. В. Г. Осмоловский, *Температуры фазовых переходов для вариационной задачи о равновесии двухфазовых сред с ограничениями.* — Пробл. мат. анал. **114** (2022), 63–70.
4. В. Г. Осмоловский, *Метод расщепления в вариационной задаче теории фазовых переходов в механике двухфазовых сплошных сред.* — Пробл. мат. анал. **126** (2024), 39–50.
5. G. Allaire, V. Lods, *Minimizers for a double-well problem with affine boundary conditions.* — Proc. R. Soc., Edinb., Sect. A, Math. **129**, N-. 3 (1999), 439–446.
6. В. Г. Осмоловский, *Двумерная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред с одинаковыми модулями упругости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **536** (2024), 228–246.
7. В. Г. Осмоловский, *Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред.* — St.Petersburg Mathematical Society Preprint 2014-04. http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2014/14-04.pdf
8. В. Г. Осмоловский, *Критерий слабой полунепрерывности снизу функционала энергии двухфазовой упругой среды.* — Пробл. мат. анал. **26** (2003), 215–254.
9. R. V. Kohn, *The relaxation of a double-well energy.* — Continuum Mechanics and Thermodynamics **3** (1991), 193–236.
10. В. Г. Осмоловский, *Минимизирующие последовательности и равновесная энергия для вариационной задачи теории упругости двухфазовых сред.* — Пробл. мат. анал. **94** (2018), 73–80.
11. I. Fonseca, D. Kinderlehrer, P. Pedregal, *Energy functional depending on elastic strain and chemical composition.* — Calculus of variations **2** (1994), 283–313.
12. G. Carita, A. Ribeiro, E. Zappale, *An homogenization result in* $W^{1,p} \times L^q$. — J. Convex Analysis **18**, No. 4 (2011), 1093–1126.
13. V. G. Osmolovskii, *Boundary value problems with the free surface in the theory of phase transitions.* — Differ. Equ. **53**, No. 13 (2017), 1734–1763.
14. И. М. Глазман, Ю. И. Любич, *Конечномерный анализ*, Наука, М. (1969).
15. В. Г. Осмоловский, *Фазовые переходы для двухфазовых сред с одинаковым модулями упругости.* — Пробл. мат. анал. **106** (2020), 136–147.
16. В. Г. Осмоловский, *Точные решения вариационной задачи теории фазовых переходов в механике сплошных сред.* — Пробл. мат. анал. **27** (2004), 171–206.
17. В. Г. Осмоловский, *Модельная вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред.* — Пробл. мат. анал. **108** (2021) 113–124.
18. Г. А. Серёгин, *Единственность решений одной вариационной задачи теории фазовых переходов в механике сплошных сред.*— Пробл. мат. анал. **15** (1995), 220–232.
19. А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М. (1988).

Efimov E. A., Osmolovskii V. G. Variational problem of two-phase elastic media equilibriumin in presence of mixed phases.

For one approach to relaxation of the energy functional of a two-phase elastic medium, a method for obtaining the relaxed energy density in

explicit form is suggested. Some examples confirming its effectiveness are provided.

Поступило 9 марта 2026 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Институт проблем машиноведения
Российской академии наук
С.-Петербург, Россия
E-mail: egorefimov256@gmail.com

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: victor.osmolovskii@gmail.com