Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 550, 2026 г.

И. В. Денисова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

§1. Введение

Первым, кто применил аналитические методы для исследования устойчивости и неустойчивости форм вращающейся массы жидкости, был А. М. Ляпунов [1, 2]. Он проанализировал вторую вариацию функционала энергии относительно малых возмущений границы фигуры. Положительность этой вариации гарантирует устойчивость системы, поскольку её энергия имеет минимум в этом состоянии. Обзор работ Ляпунова по теории устойчивости фигур равновесия небесных тел можно найти в [3].

В. А. Солонников развил метод Ляпунова на случай вращающейся капиллярной жидкости посредством анализа соответствующей эволюционной задачи со свободной границей в [4, 5]. Совместно с Солонниковым мы распространили описанную выше методику на случай конечной массы двух вращающихся несжимаемых капиллярных самогравитирующих несмешивающихся жидкостей, разделенных неизвестной границей близкой к границе раздела фигуры равновесия. Теперь эта техника применяется для анализа устойчивости вращения конечной массы двухфазной жидкости. Существование фигур равновесия в двухфазном случае было получено в [6]. Кроме того, мы используем результат о повышенной гладкости глобального решения двухжидкостной задачи без вращения [7, 8] в случае более гладких правых частей и функции давления, так как наша система отличается от описанной только слабыми членами. Исследование линеаризованной

Ключевые слова: двухфазная задача с неизвестной границей раздела, вязкая жидкость, устойчивость решения, учет массовых сил, система Навье–Стокса, пространства Соболева–Слободецкого, экспоненциальное убывание.

Работа выполнена по теме государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ для ИПМаш РАН № 124040800009-8.

задачи о вращающейся двухфазной капле в пространствах Соболева–Слободецкого выполнено автором в [9], где можно найти доказательство априорного экспоненциального неравенства для обобщенной энергии системы по методу Падулы–Солонникова. На этой основе была получена глобальная разрешимость линейной однородной задачи. Краткая формулировка результата дана в [10].

Случай вращающейся двухслойной несжимаемой жидкой массы был изучен в [11, 12]. Здесь мы обобщаем некоторые утверждения оттуда на двухфазный случай и доказываем глобальную однозначную разрешимость нелинейной задачи при условии малости данных задачи, близости начальных поверхностей к границам равновесных фигур и положительной определённости квадратичной формы, порождённой граничным оператором.

В полной постановке задача о неустановившемся движении двух разнородных жидкостей, заполняющих всё $\mathbb{R}^3$ и разделённых замкнутой неизвестной поверхностью, была впервые рассмотрена в [13], где была получена её локальная (по времени) разрешимость в пространствах Соболева–Слободецкого.

Сформулируем эту задачу для конечного объёма жидкостей.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в ограниченной области $\Omega_0^+ \subset \mathbb{R}^3$ находится несжимаемая жидкость с динамической вязкостью μ^+ и плотностью $\rho^+ > 0$, а в области Ω_0^-, окружающей Ω_0^+, находится сжимаемая жидкость с динамическими вязкостmями μ^- и μ_1^-,

$$\mu^{\pm} > 0, \qquad 2\mu^- + 3\mu_1^- \geqslant 0.$$

При $t \geqslant 0$ $\Omega_t \equiv \overline{\Omega_t^+} \cup \Omega_t^-$ ограничена свободной поверхностью Γ_t^-. Внутренняя область Ω_t^+ отделена от Ω_t^- неизвестной замкнутой границей Γ_t^+, при этом в начальный момент $\Gamma_0^{\pm}$ заданы и не пересекаются. На обеих границах действуют силы поверхностного натяжения. Сжимаемая жидкость считается баротропной. Эта двухфазная система вращается вокруг вертикальной оси x_3 с угловой скоростью ω.

При $t > 0$ необходимо найти поверхности Γ_t^-, Γ_t^+, векторное поле скоростей $\boldsymbol{v}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$ обеих жидкостей, а также давление несжимаемой жидкости $p^+(x,t)$ в Ω_t^+ и плотность $\rho(x,t) > 0$ сжимаемой в Ω_t^-, удовлетворяющие задаче дифракции для системы Навье–Стокса

$$\rho^+\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\big) - \nabla\cdot\mathbb{T} = \rho^+\boldsymbol{f}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_t^+, \quad t > 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\rho\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\big) - \nabla\cdot\mathbb{T} = \rho\boldsymbol{f}, \quad \mathcal{D}_t\rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_t^-, \quad t>0,\\
&\quad \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0(x) \quad \text{в } \Omega_0^-\cup\Omega_0^+, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x) \quad \text{в } \Omega_0^-,\\
&\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{n}\big|_{\Gamma_t^-} = \sigma^- H^-\boldsymbol{n} \quad \text{на } \Gamma_t^-, \qquad\qquad (1.1)\\
&[\boldsymbol{v}]\big|_{\Gamma_t^+} \equiv \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t^+,\\ x\in\Omega_t^+}} \boldsymbol{v}(x,t) - \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t^+,\\ x\in\Omega_t^-}} \boldsymbol{v}(x,t) = 0,\\
&[\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{n}]\big|_{\Gamma_t^+} = \sigma^+ H^+\boldsymbol{n} \text{ на } \Gamma_t^+,\\
&\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = V_{\boldsymbol{n}} \quad \text{на } \Gamma_t = \Gamma_t^+\cup\Gamma_t^-.
\end{aligned}
$$

Здесь $\mathcal{D}_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, тензор напряжений задаётся по-разному в двух областях:

$$
\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p) = \begin{cases} -p^+\mathbb{I} + \mu^+\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) & \text{в } \Omega_t^+,\\ \big(-p^-(\rho) + \mu_1^-\nabla\cdot\boldsymbol{v}\big)\mathbb{I} + \mu^-\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) & \text{в } \Omega_t^-, \end{cases} \qquad (1.2)
$$

где $\big(\mathbb{S}(\boldsymbol{v})\big)_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ – удвоенный тензор скоростей деформации, $\mathbb{I}$ – единичная матрица; постоянная плотность $\rho^+ > 0$ в Ω_t^+; $\boldsymbol{f}$ – заданный вектор внешних сил в $\cup\Omega_t^\pm$; давление сжимаемой жидкости заданно известной гладкой возрастающей функцией плотности $p^-(\rho)$ в Ω_t^-; $\boldsymbol{v}_0(x)$ и $\rho_0(x) > 0$ – начальные значения скорости и плотности жидкостей, $\boldsymbol{n}$ – вектор внешней нормали к областям Ω_t^+ и Ω_t; $H^\pm(x,t)$ – удвоенные средние кривизны поверхностей $\Gamma_t^\pm$ (причем $H^+ < 0$ в точках выпуклости Γ_t^+ в сторону Ω_t^-); $\sigma^-, \sigma^+ > 0$ – коэффициенты поверхностного натяжения на Γ_t^- и Γ_t^+ соответственно; $V_{\boldsymbol{n}}$ – скорость эволюции поверхностей Γ_t^- и Γ_t^+ в направлении $\boldsymbol{n}$. Предполагается, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ введена декартова система координат $\{x\}$. Точка означает декартово скалярное произведение.

Мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3, если они обозначены латинскими буквами, и от 1 до 2, если греческими. Векторы и векторные пространства помечаются жирным шрифтом. Запись $\nabla\cdot\mathbb{T}$ означает вектор с компонентами $(\nabla\cdot\mathbb{T})_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}$, $j = 1,2,3$.

Кинематическое граничное условие $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = V_{\boldsymbol{n}}$ исключает перенос массы через границы жидкостей. Оно следует из предположения, что частицы жидкости не покидают границ $\Gamma_t^\pm$ с течением времени.

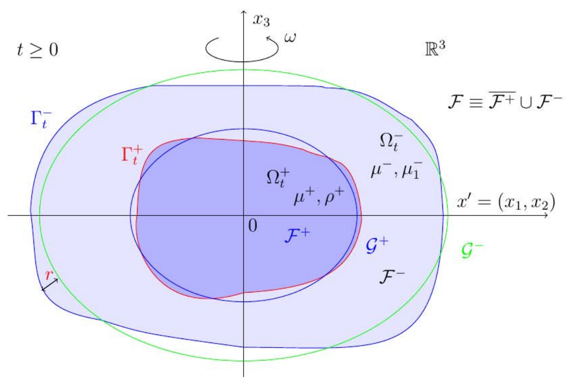

Рис. 1. Двухфазное тело.

В ограниченной области локальную (по времени) разрешимость задачи (1.1) можно доказать, если учесть оценки для модельной задачи для сжимаемой жидкости в полупространстве [14].

Как уже отмечалось, глобальная разрешимость двухфазной нелинейной задачи без вращения была получена в [8]. Там же была доказана устойчивость состояния покоя двухфазной жидкости в контейнере с начальной границей раздела сред близкой к шару. Аналогичный анализ был проведён для двухкомпонентной несжимаемой жидкости с вращением в [11, 12, 15], где было доказано существование глобального (по времени) решения нелинейной задачи при малых данных сначала в пространствах Соболева [11, 12], а затем и Гёльдера [15].

Мы предполагаем отсутствие силы тяжести, т. е. описанное двухфазное тело можно рассматривать, например, как планету с газовой атмосферой, вращающуюся в безвоздушном пространстве.

Предположим, что области Ω_0^+, Ω_0 мало отличаются от фигур равновесия $\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{F}$, причём

$$|\Omega_0^+| = |\mathcal{F}^+|. \tag{1.3}$$

Введём обозначения: $\mathcal{F}^- = \mathcal{F} \setminus \overline{\mathcal{F}^+}$, $\mathcal{G}^+ = \partial\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{G}^- = \partial\mathcal{F}$ (см. рис. 1).

Предполагая сохранение массы жидкостей с течением времени, имеем:

$$m^+ \equiv \rho^+|\Omega_t^+| = \rho^+|\mathcal{F}^+|, \qquad m^- \equiv \rho_*^-|\Omega_0^-| = \int\limits_{\Omega_t^-} \rho(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{1.4}$$

где ρ_*^- – средняя плотность сжимаемой жидкости в начальный момент времени $t = 0$. Без ограничения будем считать, что при $t = 0$ центр масс нашей системы находится в нуле. Если массовые силы $\boldsymbol{f}$ ортогональны всем векторам жесткого движения, т. е.

$$\int\limits_{\cup\Omega_t^\pm} \tilde{\tilde{\rho}}\boldsymbol{f}(x,t)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int\limits_{\cup\Omega_t^\pm} \tilde{\tilde{\rho}}\boldsymbol{f}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad i = 1,2,3, \tag{1.5}$$

где $\tilde{\tilde{\rho}} = \rho^+$ в Ω_t^+ и $\tilde{\tilde{\rho}} = \rho(x,t)$ в Ω_t^-, то можно показать, что решение задачи (1.1) также удовлетворяет и другим законам сохранения при $t > 0$:

$$\rho^+\int\limits_{\Omega_t^+} x_j\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_t^-} \rho(x,t)x_j\,\mathrm{d}x = \rho^+\int\limits_{\Omega_0^+} x_j\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_0^-} \rho(x,0)x_j\,\mathrm{d}x \equiv 0,$$

$$j = 1,2,3, \ \text{(сохранение центра тяжести)},$$

$$\rho^+\int\limits_{\Omega_t^+}\boldsymbol{v}(x,t)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_t^-}\rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)\,\mathrm{d}x = \rho^+\int\limits_{\Omega_0^+}\boldsymbol{v}_0(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_0^-}\rho_0(x)\boldsymbol{v}_0(x)\,\mathrm{d}x \equiv 0$$

$$\text{(сохранение импульса)}, \tag{1.6}$$

$$\rho^+\int\limits_{\Omega_t^+} \boldsymbol{v}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_t^-} \rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \rho^+\int\limits_{\Omega_0^+} \boldsymbol{v}_0(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_0^-} \rho_0(x)\boldsymbol{v}_0(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x \equiv \beta\delta_i^3$$

$$\text{(сохранение углового момента)},$$

где β – угловой момент вращающейся двухфазной жидкости, $\boldsymbol{\eta}_i(x) = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{x}$, $i = 1,2,3$, $\boldsymbol{e}_i$ – i-ый базисный вектор, δ_i^k – символы Кронекера.

Движение двухфазной жидкой массы, равномерно вращающейся вокруг оси x_3 с постоянной угловой скоростью ω, описывается однородными стационарными уравнениями Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \rho^+(\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathcal{V}} - \nabla\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P}) = 0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{V}} = 0 \quad \text{в } \mathcal{F}^+, \\ \varrho(\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathcal{V}} - \nabla\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P}) = 0, \qquad \nabla\cdot(\varrho\boldsymbol{\mathcal{V}}\ ) = 0 \quad \text{в } \mathcal{F}^- \end{aligned} \tag{1.7}$$

(здесь ρ и $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ зависят только от x) и граничными условиями

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}(\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P})\boldsymbol{n}\big|_{\mathcal{G}^-} - \sigma^-\mathcal{H}^-\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^-, \\ &[\boldsymbol{\mathcal{V}}]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \qquad [\mathbb{T}(\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P})\boldsymbol{n}]\big|_{\mathcal{G}^+} - \sigma^+\mathcal{H}^+\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^+, \\ &\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на } \mathcal{G} = \mathcal{G}^+\cup\mathcal{G}^-, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\mathbb{T}$ задаётся равенствами (1.2), а векторное поле скоростей – это $\boldsymbol{\mathcal{V}}(x) = \omega\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{x} \equiv \omega(-x_2, x_1, 0)$, $\mathcal{H}^-$, $\mathcal{H}^+$ – удвоенные средние кривизны $\mathcal{G}^-$, $\mathcal{G}^+$, при этом градиент функции давления задаётся в областях $\mathcal{F}^\pm$ формулами:

$$\begin{aligned} \nabla\mathcal{P}^+(x) = \rho^+\omega^2 x' \equiv \rho^+\frac{\omega^2}{2}\nabla|x'|^2 \quad \text{в } \mathcal{F}^+, \\ \nabla\mathcal{P}^-(\varrho) = \varrho\omega^2 x' \equiv \varrho(x)\frac{\omega^2}{2}\nabla|x'|^2 \quad \text{в } \mathcal{F}^-. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь $\varrho(x) > 0$ – функция плотности сжимаемой жидкости $\mathcal{F}^-$, $|x'|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Обратим внимание, что стационарное давление несжимаемой жидкости $\mathcal{P}^+(x)$ определяется из первой формулы в (1.9) как $\rho^+\big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2 + c^+\big)$ при заданной константе ρ^+, тогда как давление сжимаемой жидкости $\mathcal{P}^-(\varrho)$ задано при постановке задачи как функция плотности $\varrho(x)$, которая подлежит определению. При этом $\mathcal{P}^{-'}(\varrho) > 0$. Последнее соотношение в (1.8) следует из граничного условия $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = V_{\boldsymbol{n}}$ в (1.1).

Предположим, что ϱ зависит только от $|x'|$ и что угловой момент двухфазной капли совпадает с угловым моментом фигуры равновесия, который выражается формулой

$$\beta = \omega\Big(\rho^+\int\limits_{\mathcal{F}^+}|x'|^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\varrho(|x'|)|x'|^2\,\mathrm{d}x\Big).$$

Будем считать его параметром задачи, при этом угловая скорость ω будет зависимой величиной.

Равенства (1.9) эквивалентны следующим:

$$\nabla\mathcal{P}^+(x)=\rho^+\nabla\Big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2\Big),\qquad \nabla\mathcal{P}^-(\varrho)=\mathcal{P}^{-'}(\varrho)\nabla\Big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2\Big).$$

Введем $\mathcal{Q}(\varrho)$ такую, что

$$\nabla\mathcal{Q}(\varrho)\equiv\frac{\mathcal{P}^{-'}(\varrho)\nabla\varrho}{\varrho}=\nabla\Big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2\Big). \tag{1.10}$$

Функция $\mathcal{Q}(\varrho)=\int\limits_{\varrho_1}^{\varrho}\frac{\mathcal{P}^{-'}(s)}{s}\,\mathrm{d}s$, $\varrho_1\geqslant 0$. Поскольку $\mathcal{Q}'(\varrho)=\frac{\mathcal{P}^{-'}(\varrho)}{\varrho}>0$, то $\mathcal{Q}>0$ и существует обратная функция $\mathcal{Q}^{-1}>0$. И из (1.10) следует, что

$$\varrho(|x'|)=\mathcal{Q}^{-1}\Big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2+C^-\Big)\ \text{в}\ \mathcal{F}^- \tag{1.11}$$

с произвольной константой C^-.

Подставляя $\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P}$ и ϱ в граничные условия в (1.8), получаем уравнения для поверхности $\mathcal{G}^-$ области $\mathcal{F}$ и границы раздела $\mathcal{G}^+$ между жидкостями

$$\begin{aligned}&\sigma^-\mathcal{H}^-(x)+\mathcal{P}^-\Big(\mathcal{Q}^{-1}\big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2+C^-\big)\Big)=0,\quad x\in\mathcal{G}^-,\\ &\sigma^+\mathcal{H}^+(x)+\rho^+\Big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2+c^+\Big)-\mathcal{P}^-\Big(\mathcal{Q}^{-1}\big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2+C^-\big)\Big)=0,\ \ x\in\mathcal{G}^+.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Зададим массу сжимаемой жидкости m^-. Тогда, учитывая (1.11), имеем:

$$m^-=\int\limits_{\mathcal{F}^-}\varrho(x')\,\mathrm{d}x\equiv\int\limits_{\mathcal{F}^-}\mathcal{Q}^{-1}\Big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2+C^-\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{1.13}$$

Таким образом, мы получили уравнение для определения константы C^-.

Заданный угловой момент β определяет угловую скорость ω:

$$\beta\equiv\int\limits_{\cup\mathcal{F}^\pm}\widetilde{\rho}\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\boldsymbol{\eta}_3\,\mathrm{d}x=\omega\rho^+\int\limits_{\mathcal{F}^+}|x'|^2\,\mathrm{d}x+\omega\int\limits_{\mathcal{F}^-}\mathcal{Q}^{-1}\Big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2+C^-\Big)|x'|^2\,\mathrm{d}x, \tag{1.14}$$

где $\bar\rho=\rho^+$ в $\mathcal{F}^+$ и $\bar\rho=\varrho(|x'|)$ в $\mathcal{F}^-$.

Будем считать, что формы фигур $\mathcal{F}^+$, $\mathcal{F}$ близки к шарам $B_{R_0^\pm}\equiv\{x\in\mathbb{R}^3:|x|\leqslant R_0^\pm\}$ радиусов $R_0^\pm$ ($R_0^+<R_0^-$) таким, что $|B_{R_0^+}|=|\Omega_0^+|$ и $|B_{R_0^-}|=|\Omega_0^+|+|\Omega_0^-|$, а движение жидкостей близко к состоянию покоя, т. е. скорость $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ мала, а плотность $\bar\rho(x')$ совпадает с $\rho^+>0$

для несжимаемой жидкости и мало отличается от средней плотности $\rho_*^- > 0$ в Ω_0^- для сжимаемой жидкости. Кроме того, из (1.3) следует, что $|\mathcal{F}^+| = |B_{R_0^+}| \equiv \frac{4}{3}\pi {R_0^+}^3$.

В покое вложенные шарообразные жидкости с равномерным распределением плотностей будут иметь кусочно-постоянное давление:

$$
\begin{aligned}
&p(\rho^+) = \frac{2\sigma^+}{R_0^+} + \frac{2\sigma^-}{R_0^-} \quad \text{ в } B_{R_0^+},\\
&p(\rho^-) \equiv \mathcal{P}^-(\rho_*^-) = \frac{2\sigma^-}{R_0^-} \quad \text{ в } B_{R_0^-} \setminus B_{R_0^+},
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

где $\rho^- \equiv \rho_*^-$ – средняя плотность в кольце $B_{R_0^-} \setminus B_{R_0^+}$. Таким образом, произведение $\rho^+ c^+ \equiv p_0^+$ в (1.12) можно найти из первого соотношения в (1.15): $p_0^+ = p(\rho^+)$.

Пусть S_1 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $\xi = \frac{x}{|x|} \in S_1$. Предположим, что $\mathcal{G}^\pm$ задаются вращательно симметричными функциями $R^\pm(\xi)$ на S_1, т. е. $R^\pm(\xi)$ зависят только от $|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ и ξ_3.

Обозначим через C^s, $s \notin \mathbb{Z}$, $s > 0$, гёльдеровское пространство функций f на сфере S_1 с нормой

$$
\begin{aligned}
|f|_{C^s(S_1)} \equiv \max_{k=\{1,\dots,N\}} \Big(&\sum_{|\boldsymbol{j}|<s} \sup_{\xi\in\zeta_k} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{j}} f(\xi)| \\
&+ \sum_{|\boldsymbol{j}|=[s]} \sup_{\xi,\bar{\xi}\in\zeta_k} |\xi - \bar{\xi}|^{-(s-[s])} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{j}} f(\xi) - \mathcal{D}^{\boldsymbol{j}} f(\bar{\xi})| \Big),
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{D}^{\boldsymbol{j}} f$ – это $|\boldsymbol{j}|$-ая производная от f, вычисленная в локальных координатах на подобласти ζ_k единичной сферы S_1, $k=1,\dots,N$; $\bigcup\limits_{k=1}^{N} \zeta_k = S_1$. Под $\widetilde{C}^s(S_1)$ мы подразумеваем подпространство $C^s(S_1)$, состоящее из вращательносимметричных функций, которые чётны относительно ξ_3.

Приведём теорему о существовании поверхностей $\mathcal{G}^-$, $\mathcal{G}^+$, удовлетворяющих уравнениям (1.12) и близких к вложенным шарам.

Теорема 1.1 ([6])**.** *Пусть* $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ *и* $\mathcal{P}^-(\varrho) \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}_+)$ *– положительная возрастающая функция такая, что для неё выполняется второе равенство в* (1.15). *Здесь* $\mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. *Предположим* *также, что данные задачи* (1.7), (1.8) *подчиняются условию*

$$\frac{2\sigma^-({R_0^-}^3-{R_0^+}^3)}{3\rho_*^-{R_0^-}^4}-{\mathcal{P}^-}'(\rho_*^-)\neq 0.$$

Тогда для произвольного β, *удовлетворяющего оценке*

$$|\beta|<\varepsilon$$

при достаточно малом ε, *существует единственное решение* $(R^\pm,\omega,C^-)\in\widetilde{C}^{2+\alpha}(S_1)\times\widetilde{C}^{2+\alpha}(S_1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *системы* (1.12)–(1.14) *и выполняется неравенство*

$$\sum_\pm|R^\pm-R_0^\pm|_{C^{2+\alpha}(S_1)}+|\omega|+|\mathcal{Q}^{-1}(C^-)-\rho_*^-|<c|\beta|. \tag{1.16}$$

Так как найденные фигуры $\mathcal{F}^\pm$ осесимметричны и имеют симметрию относительно плоскости $x_3=0$, то

$$\rho^+\int_{\mathcal{F}^+}x_i\,\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{F}^-}\varrho(|x'|)x_i\,\mathrm{d}x=0,\quad i=1,2,3, \tag{1.17}$$

$$\rho^+\int_{\mathcal{F}^+}x_3x_j\,\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{F}^-}\varrho(|x'|)x_3x_j\,\mathrm{d}x=0,\quad j=1,2.$$

Условие (1.17) соответствует первому соотношению в (1.6), которое означает, что барицентр жидкостей все время совпадает с началом координат. Предполагая совпадение импульсов и угловых моментов фигур равновесия и двухслойной капли в начальный момент $t=0$, из (1.6) мы выводим эти равенства и во все моменты $t>0$. Они принимают вид:

$$\rho^+\int_{\Omega_t^+}\boldsymbol{v}(x,t)\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_t^-}\rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)\,\mathrm{d}x=\rho^+\int_{\mathcal{F}^+}\boldsymbol{\mathcal{V}}(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{F}^-}\varrho(|x'|)\boldsymbol{\mathcal{V}}(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\begin{aligned}\rho^+&\int_{\Omega_t^+}\boldsymbol{v}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_t^-}\rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x\\&=\rho^+\int_{\mathcal{F}^+}\boldsymbol{\mathcal{V}}(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{F}^-}\varrho(|x'|)\boldsymbol{\mathcal{V}}(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x=\delta_i^3\beta,\quad i=1,2,3.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Рассмотрим задачу для возмущений скорости, давления и плотности сжимаемой жидкости

$$\boldsymbol{v}_r(x,t) = \boldsymbol{v}(x,t) - \boldsymbol{\mathcal{V}}(x), \quad p_r^+(x,t) = p^+(x,t) - \mathcal{P}^+(x),$$
$$p_r^-(x,t) = \mathcal{P}^-(\rho(x,t)) - \mathcal{P}^-(\varrho(|x'|)), \quad \rho_r(x,t) = \rho(x,t) - \varrho(|x'|),$$

записанную в системе координат, вращающейся вокруг оси x_3 с угловой скоростью ω.

Введем новые координаты $\{y_i\}$ и новые неизвестные функции $(\widetilde{\boldsymbol{v}}, \widetilde{p})$ по формулам

$$x = \mathcal{Z}(\omega t)y,$$
$$\widetilde{\boldsymbol{v}}(y,t) = \mathcal{Z}^{-1}(\omega t)\boldsymbol{v}_r(\mathcal{Z}(\omega t)y,t),$$
$$\widetilde{p}(y,t) = p_r(\mathcal{Z}(\omega t)y,t), \quad \widetilde{\rho}(y,t) = \rho_r(\mathcal{Z}(\omega t)y,t),$$

где

$$\mathcal{Z}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\mathcal{Z}^{-1}(\omega t)(\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla_x)\boldsymbol{v}_r = \omega\big(\boldsymbol{\eta}_3(x)\cdot\nabla_x\big)\widetilde{\boldsymbol{v}}(y,t) = \omega\big(\mathcal{Z}\boldsymbol{\eta}_3(y)\cdot\mathcal{Z}^{-T}\nabla_y\big)\widetilde{\boldsymbol{v}}$$
$$= \omega\big(\boldsymbol{\eta}_3(y)\cdot\nabla_y\big)\widetilde{\boldsymbol{v}}(y,t) = \omega\big(y_2\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{v}}}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{v}}}{\partial y_2}\big),$$

$\mathcal{Z}^{-T} = (\mathcal{Z}^{-1})^T$, верхний индекс “$T$” обозначает транспонирование, и $\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}_r|_{x=\mathcal{Z}y} = \mathcal{D}_t\boldsymbol{v}_r(\mathcal{Z}y,t) - (\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_r$. Подставляя эти формулы в (1.1), учитывая (1.7) и действуя оператором $\mathcal{Z}^{-1}$, приходим к задаче для возмущений скорости $\widetilde{\boldsymbol{v}}$, давления $\widetilde{p}$ и плотности $\widetilde{\rho}$

$$\begin{aligned}
&\rho^+\big(\mathcal{D}_t\widetilde{\boldsymbol{v}} + (\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\widetilde{\boldsymbol{v}} + 2\omega(e_3\times\widetilde{\boldsymbol{v}})\big) - \mu^+\nabla^2\widetilde{\boldsymbol{v}} + \nabla\widetilde{p} = \rho^+\widetilde{\boldsymbol{f}},\\
&\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}} = 0 \qquad \text{в } \widetilde{\Omega}_t^+ \equiv \widetilde{\Omega}_t^+, \qquad t>0,\\
&\rho(\mathcal{Z}y,t)\big(\mathcal{D}_t\widetilde{\boldsymbol{v}} + (\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\widetilde{\boldsymbol{v}} + 2\omega(e_3\times\widetilde{\boldsymbol{v}})\big) - \mu^-\nabla^2\widetilde{\boldsymbol{v}} - \mu_1^-\nabla(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}})\\
&\ + \mathcal{P}'(\rho)\nabla\rho(\mathcal{Z}y,t) - \mathcal{P}'(\varrho)\nabla\varrho(|\mathcal{Z}y'|) = 0,\\
&\mathcal{D}_t\widetilde{\rho} + \nabla\cdot\big(\rho(\mathcal{Z}y,t)\widetilde{\boldsymbol{v}}\big) = 0 \quad \text{в } \widetilde{\Omega}_t^-,\ t>0,\\
&\widetilde{\boldsymbol{v}}(y,0) = \boldsymbol{v}_0(y) - \boldsymbol{\mathcal{V}}(y) \equiv \widetilde{\boldsymbol{v}}_0(y), \quad y\in\cup\widetilde{\Omega}_0^{\pm} \equiv \widetilde{\Omega}_0^- \cup \widetilde{\Omega}_0^+,\\
&\widetilde{\rho}(y,0) = \rho_0(y) - \varrho(y') \equiv \widetilde{\rho}_0(y) \quad \text{в } \widetilde{\Omega}_0^-, \qquad\qquad (1.19)\\
&\mathbb{T}(\widetilde{\boldsymbol{v}},\widetilde{p})\widetilde{\boldsymbol{n}}\big|_{\widetilde{\Gamma}_t^-} = \big(\sigma^-H^-(y,t) + \mathcal{P}^-\big(\varrho(y')\big)\big)\widetilde{\boldsymbol{n}}, \quad y\in\widetilde{\Gamma}_t^-, \quad [\widetilde{\boldsymbol{v}}]\big|_{\widetilde{\Gamma}_t^+} = 0,
\end{aligned}$$

$$[\mathbb{T}(\widetilde{\boldsymbol{v}},\widetilde{p})\widetilde{\boldsymbol{n}}]\big|_{\widetilde{\Gamma}_t^+}=\Big(\sigma^+H^+(y,t)+\rho^+\frac{\omega^2}{2}|y'|^2+p_0^+-\mathcal{P}^-\big(\varrho(y')\big)\Big)\widetilde{\boldsymbol{n}},\quad y\in\widetilde{\Gamma}_t^+,$$
$$\widetilde{V}_{\widetilde{\boldsymbol{n}}}=\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}\quad \text{на } \widetilde{\Gamma}_t\equiv\widetilde{\Gamma}_t^-\cup\widetilde{\Gamma}_t^+,$$

где $\widetilde{\Omega}_t^\pm=\mathcal{Z}^{-1}(\omega t)\Omega_t^\pm$, $\widetilde{\Gamma}_t^\pm=\mathcal{Z}^{-1}(\omega t)\Gamma_t^\pm$, $\widetilde{\boldsymbol{n}}$ – внешняя нормаль к $\widetilde{\Gamma}_t$, $\boldsymbol{n}=\mathcal{Z}\widetilde{\boldsymbol{n}}$, $y'=(y_1,y_2,0)$, p_0^-, p_0^+ – константы на $\widetilde{\Gamma}_t^-$ и $\widetilde{\Gamma}_t^+$ соответственно.

Заметим, что кинематическое граничное условие в (1.1)

$$V_{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n},$$

где $V_{\boldsymbol{n}}$ – нормальная скорость Γ_t, инвариантно относительно нашего преобразования. Действительно, пусть $x(t)$ – точка Γ_t. Имеем $V_{\boldsymbol{n}}=\mathcal{D}_t\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}$, и поскольку $\mathcal{D}_t\boldsymbol{x}=\omega\mathcal{D}_\theta\big|_{\theta=\omega t}\mathcal{Z}\boldsymbol{y}+\mathcal{Z}\mathcal{D}_t\boldsymbol{y}$, $\mathcal{Z}^T=\mathcal{Z}^{-1}$, то $\mathcal{D}_t\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y})\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}+\mathcal{D}_t\boldsymbol{y}\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}$. С другой стороны, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}+\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y})\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}$. Следовательно, $\mathcal{D}_t\boldsymbol{y}\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}=\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}$, что означает $\widetilde{V}_{\widetilde{\boldsymbol{n}}}=\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}$.

Соотношения (1.4), (1.6), (1.18) переходят в

$$|\widetilde{\Omega}_t^+|=|\mathcal{F}^+|,\qquad \int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^-}\rho(y,t)\,\mathrm{d}y=\int\limits_{\mathcal{F}^-}\varrho(|z'|)\,\mathrm{d}z\equiv\rho_*^-|\Omega_0^-|,\tag{1.20}$$

$$\rho^+\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^+}y_j\,\mathrm{d}y+\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^-}\rho(y,t)y_j\,\mathrm{d}y=0,\quad j=1,2,3,\quad \text{(сохранение барицентра)},$$

$$\rho^+\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^+}\widetilde{\boldsymbol{v}}(y,t)\,\mathrm{d}y+\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^-}\rho(y,t)\widetilde{\boldsymbol{v}}(y,t)\,\mathrm{d}y=0\quad \text{(сохранение импульса)},$$

$$\begin{aligned}&\rho^+\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^+}\widetilde{\boldsymbol{v}}(y,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y+\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^-}\rho(y,t)\widetilde{\boldsymbol{v}}(y,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y\\&\quad+\omega\rho^+\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^+}\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y+\omega\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^-}\rho(y,t)\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y\\&=\omega\rho^+\int\limits_{\mathcal{F}^+}\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y+\omega\int\limits_{\mathcal{F}^-}\varrho(|y'|)\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y=\beta\delta_i^3\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(сохранение углового момента)},\end{aligned}\tag{1.21}$$

где $\boldsymbol{\eta}_i(y) = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{y}$, $i = 1, 2, 3$. Дополнительное слагаемое в законе о сохранении импульса $\omega\rho^+ \int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^+} \boldsymbol{\eta}_3 \,\mathrm{d}y + \omega \int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^-} \rho(y,t)\boldsymbol{\eta}_3 \,\mathrm{d}y$ отсутствует вследствие того, что оно равно нулю, в силу сохранение центра тяжести, ведь $\boldsymbol{\eta}_3 = (-y_2, y_1, 0)$.

Предположим, что поверхности $\widetilde{\Gamma}_t^{\pm}$ могут быть заданы соотношениями

$$\widetilde{\Gamma}_t^{\pm} = \{y = z + \boldsymbol{N}(z)r(z,t), \quad z \in \mathcal{G}^{\pm}\},$$

и отобразим $\widetilde{\Omega}_t^{\pm}$ на $\mathcal{F}^{\pm}$ с помощью преобразования Ханзавы, обратное которому есть

$$y = z + \boldsymbol{N}^*(z)r^*(z,t) \equiv e_r(z,t), \tag{1.22}$$

где $\boldsymbol{N}^*$ и r^* являются продолжениями $\boldsymbol{N}$ и r с $\cup\mathcal{G}^{\pm}$ в $\mathcal{F}$ соответственно.

Ввиду соотношений (1.12) граничные условия

$$\mathbb{T}(\widetilde{\boldsymbol{v}},\widetilde{p})\widetilde{\boldsymbol{n}}\big|_{\widetilde{\Gamma}_t^-} = \Big(\sigma^- H^-(y,t) + \mathcal{P}^-\big(\varrho(|y'|)\big)\Big)\widetilde{\boldsymbol{n}}, \quad y \in \widetilde{\Gamma}_t^-,$$

$$[\mathbb{T}(\widetilde{\boldsymbol{v}},\widetilde{p})\widetilde{\boldsymbol{n}}]\big|_{\widetilde{\Gamma}_t^+} = \Big(\sigma^+ H^+(y,t) + \rho^+\frac{\omega^2}{2}|y'|^2 + p_0^+ - \mathcal{P}^-\big(\varrho(|y'|)\big)\Big)\widetilde{\boldsymbol{n}}, \ \ y \in \widetilde{\Gamma}_t^+,$$

в (1.19) эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} -\widetilde{p}\widetilde{\boldsymbol{n}} + \mathbb{T}'(\widetilde{\boldsymbol{v}})\widetilde{\boldsymbol{n}}\big|_{\widetilde{\Gamma}_t^-} &= \Big\{\sigma^-\big(H^-(y,t) - \mathcal{H}^-(z)\big) + \mathcal{P}^-\big(\varrho(|y'|)\big) \\ &\quad - \mathcal{P}^-\big(\varrho(|z'|)\big)\Big\}\widetilde{\boldsymbol{n}}, \quad y \in \widetilde{\Gamma}_t^-, \ z \in \mathcal{G}^-, \\ [-\widetilde{p}\widetilde{\boldsymbol{n}} + \mathbb{T}'(\widetilde{\boldsymbol{v}})\widetilde{\boldsymbol{n}}]\big|_{\widetilde{\Gamma}_t^+} &= \Big\{\sigma^+\big(H^+(y,t) - \mathcal{H}^+(z)\big) + \rho^+\frac{\omega^2}{2}\big(|y'|^2 - |z'|^2\big) \\ &\quad - \mathcal{P}^-\big(\varrho(|y'|)\big) + \mathcal{P}^-\big(\varrho(|z'|)\big)\Big\}\widetilde{\boldsymbol{n}}, \quad y \in \widetilde{\Gamma}_t^+, \ z \in \mathcal{G}^+. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Нашей следующей целью является линеаризация задачи (1.19). Для этого нам нужно вычислить первую вариацию по r выражений $H(y,t) - \mathcal{H}(z)$, $\mathcal{P}^-\big(\varrho(|y'|)\big) - \mathcal{P}^-\big(\varrho(|z'|)\big)$ и $|y'|^2 - |z'|^2$, где y связано с z соотношением (1.22).

Будем вычислять вариацию функционала $R[r]$ по r согласно формуле

$$\delta_0 R[r] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}R[sr]\big|_{s=0}.$$

Ясно, что

$$\delta_0\big(|y'|^2 - |z'|^2\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(|\boldsymbol{z}' + \boldsymbol{N}'sr|^2 - |\boldsymbol{z}'|^2\big)\big|_{s=0} = 2\boldsymbol{z}' \cdot \boldsymbol{N}'r, \ \ \boldsymbol{N}' = (N_1, N_2, 0),$$

$$\delta_0\Big(\mathcal{P}^-\big(\varrho(|y'|)\big)-\mathcal{P}^-\big(\varrho(|z'|)\big)\Big)=\mathcal{P}^{-'}\big(\varrho(|z'|)\big)\nabla\varrho(|z'|)\cdot\boldsymbol{N}'r=\varrho(|z'|)\omega^2\boldsymbol{z}'\cdot\boldsymbol{N}'r,$$

и, согласно [16],

$$\delta_0\big(H^\pm(y,t)-\mathcal{H}^\pm(z)\big)=\Delta^\pm r(z,t)+\big(\mathcal{H}^{\pm^2}(z)-2\mathcal{K}^\pm(z)\big)r(z,t),$$

где $\Delta^\pm$ – это операторы Лапласа–Бельтрами на $\mathcal{G}^\pm$ соответственно, $\mathcal{K}^\pm$ – гауссовы кривизны поверхностей $\mathcal{G}^\pm$.

При преобразовании (1.22) кинематическое условие для $V_{\boldsymbol{n}}\equiv\mathcal{D}_t\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{n}|_{\mathcal{G}}$ принимает вид

$$\mathcal{D}_t r\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}=\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{1.24}$$

Применяя преобразование Ханзавы, обратное к (1.22), и заменяя нелинейные члены их первыми вариациями, приходим к линейной задаче относительно $(\boldsymbol{w},\theta^\pm,r)$, соответствующей (1.19), (1.23):

$$\begin{aligned}
&\rho^+\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\big)-\mu^+\nabla^2\boldsymbol{w}+\nabla\theta^+=\rho^+\boldsymbol{f},\\
&\qquad\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{w}=h^+\quad \text{в } \mathcal{F}^+,\quad t>0,\\
&\varrho(|z'|)\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\big)-\mu^-\nabla^2\boldsymbol{w}-\mu_1^-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{w})+p_1\nabla\theta^-=\varrho(|z'|)\boldsymbol{f},\\
&\qquad\qquad\mathcal{D}_t\theta^-+\nabla\cdot\big(\varrho(|z'|)\boldsymbol{w}\big)=h^-\quad \text{в } \mathcal{F}^-,\quad t>0,\\
&\boldsymbol{w}(z,0)=\boldsymbol{v}_0(z)-\boldsymbol{\mathcal{V}}(z)\equiv\boldsymbol{w}_0(z),\quad z\in\mathcal{F}\equiv\mathcal{F}^-\cup\mathcal{F}^+,\\
&\qquad\qquad\theta^-(z,0)=\theta_0^-(z),\quad z\in\mathcal{F}^-,\\
&-p_1\theta^-+\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^-r=\boldsymbol{d}^-\quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{w}]\big|_{\mathcal{G}^+}=0,\quad -\theta^++p_1\theta^-+[\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+}+\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^+r=\boldsymbol{d}^+\quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_t r-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}=g\quad \text{на } \mathcal{G}\equiv\mathcal{G}^-\cup\mathcal{G}^+,\qquad r\big|_{t=0}=r_0\quad \text{на } \mathcal{G},
\end{aligned} \tag{1.25}$$

где $p_1=\mathcal{P}^{-'}(\rho_*^-)>0$, ρ_*^- – средняя плотность сжимаемой жидкости в кольце $B_{R_0^-}\setminus B_{R_0^+}$, $\mathbb{T}'(\boldsymbol{u})=\mathbb{T}(\boldsymbol{u},0)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0^-r&=-\sigma^-\Delta^-r-b^-(z)r,\quad z\in\mathcal{G}^-,\\
\mathcal{B}_0^+r&=-\sigma^+\Delta^+r-b^+(z)r,\quad z\in\mathcal{G}^+
\end{aligned} \tag{1.26}$$

с

$$\begin{aligned}
b^-(z)&=\sigma^-(\mathcal{H}^{-^2}-2\mathcal{K}^-)+\varrho(z')\omega^2\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{z}',\\
b^+(z)&=\sigma^+(\mathcal{H}^{+^2}-2\mathcal{K}^+)+(\rho^+-\varrho(z'))\omega^2\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{z}',
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{z}'=(z_1,z_2,0)$, $\boldsymbol{f},h^\pm,\boldsymbol{d},g$, $\boldsymbol{w}_0,r_0$ – заданные функции.

Напомним определение пространств Соболева–Слободецкого, которые мы используем в настоящей статье. Изотропное пространство $W_2^l(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, есть пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^l(\Omega)} = \sum_{0\leqslant|\boldsymbol{j}|\leqslant l} \|\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{j}} u\|^2_\Omega \equiv \sum_{0\leqslant|\boldsymbol{j}|\leqslant l} \int\limits_\Omega |\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{j}} u(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

если $l = [l]$, т. е. l – целое число, и

$$\|u\|^2_{W_2^l(\Omega)} = \|u\|^2_{W_2^{[l]}(\Omega)} + \sum_{|\boldsymbol{j}|=[l]} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{j}} u(x) - \mathcal{D}_y^{\boldsymbol{j}} u(y)|^2 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y|^{n+2\lambda}},$$

если $l = [l] + \lambda$, $\lambda \in (0,1)$. Как обычно, $\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{j}} u$ обозначает (обобщенную) частную производную $\frac{\partial^{|\boldsymbol{j}|} u}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}$, где $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \ldots j_n)$ и $|\boldsymbol{j}| = j_1 + \ldots + j_n$.

Введем анизотропные пространства

$$W_2^{l,0}(Q_T) = L_2\big((0,T), W_2^l(\Omega)\big), \quad W_2^{0,l/2}(Q_T) = W_2^{l/2}\big((0,T), L_2(\Omega)\big),$$

$Q_T = \Omega \times (0,T)$, и $W_2^{l,l/2}(Q_T) \equiv W_2^{l,0}(Q_T) \cap W_2^{0,l/2}(Q_T)$.

Кроме того, полагая $u = 0$ для $t < 0$, мы введём также полунорму

$$\|u\|_{\dot W_2^{0,l/2}(Q_T)} \equiv \Big(\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^{1+l}} \int_{-\infty}^T \|u(\cdot,t) - u(\cdot, t-\tau)\|^2_\Omega\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}$$

и норму

$$|u|^{(s+l,l/2)}_{Q_T} \equiv \|u\|_{W_2^{s+l,0}(Q_T)} + \|u\|_{W_2^{l/2}\left(0,T;W_2^s(\Omega)\right)}, \quad s > 0.$$

Пространства функций, заданных на гладких поверхностях, в частности, на $\mathcal{G}^\pm$ и на $G_T^\pm = \mathcal{G}^\pm \times (0,T)$, $T \leqslant \infty$, вводятся стандартным образом с помощью локальных карт и разбиения единицы.

Наконец, положим $\|u\|^2_{W_2^l(\cup\mathcal{F}^\pm)} \equiv \|u\|^2_{W_2^l(\mathcal{F}^+)} + \|u\|^2_{W_2^l(\mathcal{F}^-)}$, $\|u\|_\Omega \equiv \|u\|_{L_2(\Omega)}$.

§2. Линейная задача

Как уже упоминалось, линеаризация задачи со свободными границами для уравнений Навье – Стокса (1.19) с начальными данными, близкими к режиму вращения двухфазной капли как твердого тела (см. рис. 1), изучалась в [9]. Кратко этот результат изложен в [10].

Для удобства читателя мы приводим формулировки теорем существования для неоднородной и однородной задачи (1.25).

Теорема 2.1 (Локальная разрешимость линейной задачи)**.** *Пусть* $\mathcal{G} \in W_2^{3/2+l}$ *и* $r_0 \in W_2^{2+l}(\mathcal{G})$ *с* $l \in (1/2, 1)$. *Для произвольных* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(D_T)$ *и* $h^+ \in W_2^{1+l,0}(Q_T^+)$ *такого, что* $\mathcal{D}_t h^+ = \nabla \cdot \boldsymbol{H} + h_1$, *где* $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{W}_2^{0,l/2}(Q_T^+), h_1 \in W_2^{0,l/2}(Q_T^+)$, *а также*

$$h^-\in W_2^{1+l,0}(Q_T^-) \cap W_2^{l/2}\big((0,T); W_2^1(\mathcal{F}^-)\big),$$

$\boldsymbol{w}_0 \in \boldsymbol{W}_2^{1+l}(\mathcal{F})$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_\tau + d\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{d}_\tau \in \boldsymbol{W}_2^{l+\frac{1}{2},\frac{l}{2}+\frac{1}{4}}(G_T)$, $d \in W_2^{l+\frac{1}{2},0}(G_T) \cap W_2^{l/2}\big((0,T); W_2^{1/2}(\mathcal{G})\big)$, $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{d}_\tau = 0$, *и* $g \in W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)$ *при* $T < \infty$, *удовлетворяющих условиям согласования*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}_0 = h^+|_{t=0} \quad \text{в } \mathcal{F}^+, \quad [\boldsymbol{w}_0]|_{\mathcal{G}^+} = 0,$$
$$[\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{d}_\tau|_{t=0}, \quad \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^-} = \boldsymbol{d}_\tau|_{t=0},$$

$$\Pi_{\mathcal{G}}\boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{g} - \boldsymbol{N}(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{N}),$$

задача (1.25) *имеет единственное решение* $(\boldsymbol{w}, \theta^\pm, r)$ *на любом конечном промежутке времени* $(0, T]$ *такое, что* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_2^{2+l,1+\frac{l}{2}}(D_T)$, $\theta \in W_2^{l,\frac{l}{2}}(D_T)$, $\nabla\theta \in \boldsymbol{W}_2^{l,\frac{l}{2}}(D_T)$, $\mathcal{D}_t\theta^- \in W_2^{1+l,0}(Q_T^-) \cap W_2^{l/2}\big((0,T); W_2^1(\mathcal{F}^-)\big)$, $r(\cdot, t) \in W_2^{2+l}(\mathcal{G})$ *для любого* $t \in (0, T]$, *и для этого решения верно неравенство*

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}^{2+l,1+l/2}(D_T)} + |\theta|_{D_T}^{(1+l,l/2)} + |\mathcal{D}_t\theta^-|_{Q_T^-}^{(1+l,l/2)} \\
&\quad + \|r\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_T)} + \|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)} \\
&\leqslant c(T)\Big(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(D_T)} + \|h^+\|_{W_2^{1+l,0}(Q_T^+)} + \|\boldsymbol{H}\|_{\boldsymbol{W}_2^{0,l/2}(Q_T^+)} \\
&\quad + \|h_1\|_{W_2^{0,l/2}(Q_T^+)} + |h^-|_{Q_T^-}^{(1+l,l/2)} + \\
&\quad + \|\boldsymbol{d}_\tau\|_{\boldsymbol{W}_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} + |d|_{G_T}^{(l+1/2,l/2)} + \|g\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)} \\
&\quad + \|\boldsymbol{w}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} + \|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\Big),
\end{aligned}$$

где $c(T)$ *– неубывающая функция от* T.

Замечание 2.1. *Из теоремы о следах для* $\rho \in W_2^{1,1}(G_T)$ *следует оценка*

$$\|\rho(\cdot, t)\|_{W_2^{1/2}(\mathcal{G})} \leqslant c\Big\{\|\rho\|_{W_2^{1,0}(G_T)} + \|\mathcal{D}_t\rho\|_{G_T}\Big\}, \ t \in [0, T],$$

которая влечет неравенство

$$\|r(\cdot,t)\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})} \leqslant c\Big\{\|r\|_{W_2^{5/2+l,0}(G_T)} + \|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,0}(G_T)}\Big\}.$$

А это означает, что $\Gamma_t^\pm \in W_2^{2+l}$ *для всех* $t \in [0,T]$.

Рассмотрим однородную начально-краевую задачу (1.25) для уравнений Стокса в заданной двухфазной области, разделенной осесимметричной поверхностью вращения $\mathcal{G}^+$ и ограниченной осесимметричной поверхностью $\mathcal{G}^-$, относительно неизвестного векторного поля скорости $\boldsymbol{w}$, функции отклонения давления θ^+ от стационарного и отклонения плотности сжимаемой жидкости θ^- от равновесной функции $\varrho(|x'|)$:

$$\begin{aligned}
&\rho^+(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w} + 2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})) - \mu^+\nabla^2\boldsymbol{w} + \nabla\theta^+ = 0,\ \ \nabla\cdot\boldsymbol{w} = 0 \ \text{ в } \mathcal{F}^+,\ \ t>0,\\
&\varrho(x')\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w} + 2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\big) - \mu^-\nabla^2\boldsymbol{w} - \mu_1^-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{w}) + p_1\nabla\theta^- = 0,\\
&\qquad\qquad \mathcal{D}_t\theta^- + \nabla\cdot\big(\varrho(x')\boldsymbol{w}\big) = 0 \quad \text{в } \mathcal{F}^-, \quad t>0,\\
&\boldsymbol{w}\big|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0 \quad \text{в } \mathcal{F}, \qquad \theta^-\big|_{t=0} = \theta_0^- \quad \text{в } \mathcal{F}^-,\\
&-p_1\theta^-\boldsymbol{N} + \mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-} + \boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^- r = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{w}]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad (-\theta^+ + p_1\theta^-)\boldsymbol{N} + [\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} + \boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^+ r = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_t r - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N} = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}, \qquad r\big|_{t=0} = r_0 \quad \text{на } \mathcal{G},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где ω – угловая скорость вращения, $p_1 = \mathcal{P}^{-'}(\rho_*^-)$, $r(x,t)$ – неизвестная функция, определяющая поверхности $\Gamma_t^\pm$, $\mathbb{T}'(\boldsymbol{u}) \equiv \mathbb{T}(\boldsymbol{u},0)$, $\boldsymbol{N}$ – внешняя единичная нормаль к $\mathcal{G}^-\cup\mathcal{G}^+$, $\boldsymbol{w}_0, r_0$ – заданные функции, выражения $\mathcal{B}_0^\pm r$ определяются формулами (1.26).

Предположим, что области $\mathcal{F}^\pm$ симметричны относительно x_1, x_2, x_3 и что исходные данные удовлетворяют, в соответствии с линеаризацией предположений (1.20), (1.21), условиям ортогональности

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{G}^+} r_0(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0, \quad \int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|x'|)r_0(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int\limits_{\mathcal{G}^+}\varrho(|x'|)r_0(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta_0^-\,\mathrm{d}x = 0,\\
&\int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|x'|)r_0(x)x_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+}\big(\rho^+ - \varrho(|x'|)\big)r_0(x)x_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta_0^- x_j\,\mathrm{d}x = 0, \quad j = 1,2,3,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\rho^+\int\limits_{\mathcal{F}^+}\boldsymbol{w}_0(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\varrho(x')\boldsymbol{w}_0(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\rho^+ \int\limits_{\mathcal{F}^+} \boldsymbol{w}_0(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_j(x)\, \mathrm{d}x + \int\limits_{\mathcal{F}^-} \varrho(x')\boldsymbol{w}_0(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_j(x)\, \mathrm{d}x + \omega\Big(\int\limits_{\mathcal{F}^-} \theta_0^- \boldsymbol{\eta}_3(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_j(x)\, \mathrm{d}x$$
$$+ \int\limits_{\mathcal{G}^-} \varrho(x') r_0(x) \boldsymbol{\eta}_3(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_j(x)\, \mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+} \big(\rho^+ - \varrho(x')\big) r_0(x) \boldsymbol{\eta}_3(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_j(x)\, \mathrm{d}\mathcal{G}\Big) = 0. \tag{2.3}$$

Введем обозначения: $Q_T^\pm = \mathcal{F}^\pm \times (0,T)$, $G_T^\pm = \mathcal{G}^\pm \times (0,T)$, $D_T = Q_T^+ \cup Q_T^-$, $Q_T = Q_T^+ \cup \overline{Q_T^-}$, $G_T = G_T^+ \cup G_T^-$; $\bar\mu = \mu^+$ в $\mathcal{F}^+$ и $\bar\mu = \mu^-$ в $\mathcal{F}^-$.

Предложение 2.1. *Решение задачи* (2.1) – (2.3) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.3) *для всех* $t > 0$.

Для однородной задачи (2.1) с $\boldsymbol{w}_0$ и r_0, удовлетворяющими условиям ортогональности (2.2), (2.3), в [9] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.2 (Глобальная разрешимость линейной однородной задачи)**.** *Пусть* $\rho^+ > \varrho(x')$ *на* $\mathcal{G}^+$. *Если функционал*

$$R_0(r) = \int\limits_{\mathcal{G}} r \mathcal{B}_0^\pm r \, \mathrm{d}\mathcal{G} \tag{2.4}$$

является положительно определённым, т. е.

$$c^{-1}\|r\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})} \leqslant R_0(r) \leqslant c\|r\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})} \tag{2.5}$$

для произвольного $r(x)$, *удовлетворяющего* (2.2), *то при малом угловом моменте* β *задача* (2.1) *с начальными данными* $\boldsymbol{w}_0 \in W_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)$, $\theta_0^- \in W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)$, $r_0 \in W_2^{2+l}(\mathcal{G})$, $l \in (1/2, 1)$, *удовлетворяющими однородным условиям согласования*

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot \boldsymbol{w}_0 = 0 \quad \text{в } \mathcal{F}^+, \quad \mu^- \Pi_{\mathcal{G}} \mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^-} = 0 \\ &[\boldsymbol{w}_0]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\bar\mu \Pi_{\mathcal{G}} \mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

и ортогональности (2.2), (2.3), *имеет единственное решение* $(\boldsymbol{w}, \theta^\pm, r)$ *такое, что*

$$\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(D_\infty),\ \ \theta^\pm \in W_2^{1+l,0}(D_\infty),\ \ \theta^\pm \in W_2^{l/2}\big((0,\infty); W_2^1(\cup\mathcal{F}^\pm)\big),$$

$\mathcal{D}_t\theta^- \in W_2^{1+l,0}(Q_\infty^-) \cap W_2^{l/2}\big((0,\infty); W_2^1(\mathcal{F}^-)\big)$, $r(\cdot,t) \in W_2^{2+l}(\mathcal{G})$ *для любого* $t \in (0,\infty)$. *Это решение подчиняется экспоненциальному неравенству*

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{e}^{\alpha t}\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+\frac{l}{2}}(D_\infty)} + |\mathrm{e}^{\alpha t}\theta|_{D_\infty}^{(1+l,l/2)} + |\mathrm{e}^{\alpha t}\mathcal{D}_t\theta^-|_{Q_\infty^-}^{(1+l,l/2)} \\
&\quad + \|\mathrm{e}^{\alpha t} r\|^2_{W_2^{\frac{5}{2}+l,\frac{5}{4}+\frac{l}{2}}(G_\infty)} + \|\mathrm{e}^{\alpha t}\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{\frac{3}{2}+l,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}}(G_\infty)} \\
&\quad \leqslant c\big\{\|\boldsymbol{w}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} + \|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\big\}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

с некоторыми постоянными $\alpha > 0$ *и* $c > 0$.

§3. Нелинейная задача

После преобразования (1.22) и разделения нормальной и касательной частей в граничных условиях, с учётом (1.24) и (1.26), задачу (1.19) можно записать аналогично [18, 8] в виде:

$$\begin{aligned}
&\rho^+\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{u} + 2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{u})\big) - \mu^+\nabla^2\boldsymbol{u} + \nabla\theta^+ = \rho^+\widehat{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{l}_1^+(\boldsymbol{u},\theta^+,r), \\
&\qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = l_2^+(\boldsymbol{u},r) \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},r) \quad \text{в } \mathcal{F}^+,\ t>0, \\
&\varrho(z')\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{u} + 2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{u})\big) - \mu^-\nabla^2\boldsymbol{u} - \mu_1^-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + p_1\nabla\theta^- = \big(\varrho(z') + \theta^-\big)\widehat{\boldsymbol{f}} \\
&\qquad + \boldsymbol{l}_1^-(\boldsymbol{u},\theta^-,r), \qquad \mathcal{D}_t\theta^- + \nabla\cdot\big(\varrho(z')\boldsymbol{u}\big) = l_2^-(\boldsymbol{u},\theta^-,r) \quad \text{в } \mathcal{F}^-,\ t>0, \\
&\quad \boldsymbol{u}\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{в } \mathcal{F}, \qquad \theta^-\big|_{t=0} = \theta_0^- \quad \text{в } \mathcal{F}^-, \\
&\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} = \boldsymbol{l}_3^-(\boldsymbol{u},r) \quad \text{на } \mathcal{G}^-, \\
&-p_1\theta^- + \boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} + \mathcal{B}_0^- r = l_4^-(\boldsymbol{u},r) + l_5^-(r) \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\ \ t>0, \\
&[\boldsymbol{u}]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \qquad [\mu^\pm\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{l}_3^+(\boldsymbol{u},r) \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\ \ t>0, \\
&-\theta^+ + p_1\theta^- + [\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} + \mathcal{B}_0^+ r = l_4^+(\boldsymbol{u},r) + l_5^+(r) \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\ \ t>0, \\
&\mathcal{D}_t r - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N} = l_6(\boldsymbol{u},r) \quad \text{на } \mathcal{G},\ \ t>0, \quad r\big|_{t=0} = r_0 \quad \text{на } \mathcal{G},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(z,t) = \widetilde{\boldsymbol{v}}\big(e_r(z,t),t\big), \quad \boldsymbol{u}_0(z) = \widetilde{\boldsymbol{v}}\big(e_{r_0}(z,0),0\big), \\
&\theta^+(z,t) = \widetilde{p}\big(e_r(z,t),t\big) + \mathcal{P}^-(\rho_*^-), \quad \theta^-(z,t) = \widetilde{p}\big(e_r(z,t),t\big) - \varrho(|z'|), \\
&\widehat{p^-}(z,t) = \widetilde{p^-}\big(e_r(z,t),t\big), \quad \widehat{\boldsymbol{f}}(z,t) = \widetilde{\boldsymbol{f}}\big(e_r(z,t),t\big),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{l}_1^+(\boldsymbol{u},\theta^+,r) &= \mu^+(\widetilde{\nabla}^2-\nabla^2)\boldsymbol{u}+(\nabla-\widetilde{\nabla})\theta^+\\
&\quad+\rho^+\mathcal{D}_t r^*(\mathcal{L}^{-1}\boldsymbol{N}^*\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\rho^+(\mathcal{L}^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\\
\boldsymbol{l}_1^-(\boldsymbol{u},\theta^-,r) &= \mu^-(\widetilde{\nabla}^2-\nabla^2)\boldsymbol{u}+\big(\varrho+\theta^-\big)\mathcal{D}_t r^*(\mathcal{L}^{-1}\boldsymbol{N}^*\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\\
&\quad-\big(\varrho+\theta^-\big)(\mathcal{L}^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\widetilde{\nabla}\big(\mathcal{P}(\varrho+\theta^-)-\mathcal{P}(\varrho)-p_1\theta^-\big)\\
&\quad+p_1(\nabla-\widetilde{\nabla})\theta^--\theta^-\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{u}+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{u})\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_2^+(\boldsymbol{u},r) &= (\mathcal{I}-\widehat{\mathcal{L}}^T)\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},r),\quad \boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},r)=(\mathcal{I}-\widehat{\mathcal{L}})\boldsymbol{u},\\
l_2^-(\boldsymbol{u},\theta^-,r) &= (\nabla-\widetilde{\nabla})\cdot\big(\varrho(z')\boldsymbol{u}\big)-\widetilde{\nabla}\cdot(\theta^-\boldsymbol{u}),\\
\boldsymbol{l}_3^-(\boldsymbol{u},r) &= \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\big(\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}-\widetilde{\Pi}\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u})\widetilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\big)\big|_{\mathcal{G}^-},\\
\boldsymbol{l}_3^+(\boldsymbol{u},r) &= \big[\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\big(\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}-\widetilde{\Pi}\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u})\widetilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\big)\big]\big|_{\mathcal{G}^+},\\
l_4^-(\boldsymbol{u},\theta^-,r) &= \big(\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}-\widetilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\cdot\widetilde{\mathbb{T}}'(\boldsymbol{u})\widetilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\big)\big|_{\mathcal{G}^-}\\
&\quad+\big(\mathcal{P}^-(\varrho+\theta^-)-\mathcal{P}^-(\varrho)-p_1\theta^-\big)\big|_{\mathcal{G}^-},\\
l_4^+(\boldsymbol{u},\theta^-,r) &= \big[\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}-\widetilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\cdot\widetilde{\mathbb{T}}'(\boldsymbol{u})\widetilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\big]\big|_{\mathcal{G}^+}\\
&\quad-\big(\mathcal{P}^-(\varrho+\theta^-)-\mathcal{P}^-(\varrho)-p_1\theta^-\big)\big|_{\mathcal{G}^+},\\
l_5^-(r) &= \sigma^-\int_0^1(1-s)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\Big(\mathcal{L}^{-T}(z,sr)\nabla_{\mathcal{G}}\cdot\frac{\widehat{\mathcal{L}}^T(z,sr)\boldsymbol{N}}{|\widehat{\mathcal{L}}^T(z,sr)\boldsymbol{N}|}\Big)\,\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{\omega^2}{2}\rho^-|\boldsymbol{N}'|^2r^2,\\
l_5^+(r) &= \sigma^+\int_0^1(1-s)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\Big(\mathcal{L}^{-T}(z,sr)\nabla_{\mathcal{G}}\cdot\frac{\widehat{\mathcal{L}}^T(z,sr)\boldsymbol{N}}{|\widehat{\mathcal{L}}^T(z,sr)\boldsymbol{N}|}\Big)\,\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{\omega^2}{2}[\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}|\boldsymbol{N}'|^2r^2,\\
l_6(\boldsymbol{u},r) &= \Big(\frac{\widehat{\mathcal{L}}^T\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N}\cdot\widehat{\mathcal{L}}^T\boldsymbol{N}}-\boldsymbol{N}\Big)\cdot\boldsymbol{u},
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$\mathcal{I}$ — единичная матрица, $\mathcal{L}$ — матрица Якоби преобразования (1.22), $L\equiv\det\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}\equiv L\mathcal{L}^{-1}$. Очевидно,

$$
\mathcal{L}(z,r)=\Big\{\delta^i_j+\frac{\partial\big(r^*(z,t)N^*_i(z)\big)}{\partial z_j}\Big\}_{i,j=1}^3\qquad \widetilde{\boldsymbol{n}}=\frac{\widehat{\mathcal{L}}^T(z,r)\boldsymbol{N}}{|\widehat{\mathcal{L}}^T(z,r)\boldsymbol{N}|};
$$

$\widetilde{\nabla} = \mathcal{L}^{-T}\nabla$ — это преобразованный градиент ∇_x, $\mathcal{L}^{-T} \equiv (\mathcal{L}^{-1})^T$, $\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u}) = \widetilde{\nabla}\boldsymbol{u}+(\widetilde{\nabla}\boldsymbol{u})^T$ — это преобразованный удвоенный тензор скорости деформации; $\widetilde{\Pi}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}-\widetilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{b}\widetilde{\boldsymbol{n}}$ — это проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на касательную плоскость к $\widetilde{\Gamma}_t$, $\nabla_{\mathcal{G}} = \Pi_{\mathcal{G}}\nabla$.

Следуя [17], вычислим разность

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^+} f(y,1)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{\mathcal{F}^+} f(z,0)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{\mathcal{F}^+} f(e_r(z),1)L(z,r)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\mathcal{F}^+} f(z,0)\,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_0^1 \mathrm{d}s \int\limits_{\mathcal{F}^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(f\big(e_{sr}(z),s\big)L(z,sr)\Big)\,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_0^1 \mathrm{d}s \int\limits_{\mathcal{F}^+} \Big\{\Big(\nabla f\big(e_{sr}(z),s\big)\cdot(r^*\boldsymbol{N}^*) + \frac{\partial}{\partial s} f\big(e_{sr}(z),s\big)\Big)L(z,sr) \\
&\quad + f\big(e_{sr}(z),s\big)\frac{\partial(r^*N_i^*)}{\partial z_j}\widehat{L}_{ji}(z,sr)\Big\}\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям в последнем члене и учитывая равенство $\frac{\partial\widehat{\mathcal{L}}_{ji}(z,sr)}{\partial z_j} = 0$, $i = 1,2,3$, получаем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^+} f(y,1)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{\mathcal{F}^+} f(z,0)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \mathrm{d}s\Big\{ &\int\limits_{\mathcal{F}^+} \frac{\partial}{\partial s} f\big(e_{sr}(z),s\big)L(z,sr)\,\mathrm{d}z \\
&+ \int\limits_{\mathcal{G}^+} f\big(e_{sr}(z),s\big) r N_i N_j \widehat{\mathcal{L}}_{ji}(z,sr)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Согласно [17] $N_iN_j\widehat{\mathcal{L}}_{ji}(z,sr) = 1 - sr\mathcal{H}^+ + s^2r^2\mathcal{K}^+$. Тогда условия сохранения масс (1.20) можно выразить через r следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^+} \mathrm{d}y - \int\limits_{\mathcal{F}^+} \mathrm{d}z = \int\limits_{\mathcal{G}^+} \varphi^+(z,r)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0, \quad \varphi^+(z,r) = r - \frac{r^2}{2}\mathcal{H}^+(z) + \frac{r^3}{3}\mathcal{K}^+(z), \\
&\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t^-} \rho(y,t)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{\mathcal{F}^-} \varrho(|z'|)\,\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \mathrm{d}s \Big\{ \int_{\mathcal{F}^-} \frac{\partial}{\partial s} \Big(\varrho(|z'|) + s\theta^-\big(e_{sr}(z), t\big) \Big) L(z, sr)\, \mathrm{d}z \\
&\quad + \int_{\mathcal{G}^-} \Big(\varrho(|z'|) + s\theta^-\big(e_{sr}(z), t\big) \Big) (r - sr^2\mathcal{H}^- + s^2 r^3 \mathcal{K}^-)\, \mathrm{d}\mathcal{G} \\
&\quad - \int_{\mathcal{G}^+} \Big(\varrho(|z'|) + s\theta^-\big(e_{sr}(z), t\big) \Big) (r - sr^2\mathcal{H}^+ + s^2 r^3 \mathcal{K}^+)\, \mathrm{d}\mathcal{G} \Big\} \\
&= \int_{\mathcal{F}^-} \int_0^1 \theta^-\big(e_{sr}(z)\big) L(z, sr)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}z \\
&\quad + \int_{\mathcal{G}^-} \varrho(|z'|) \varphi^-(z, r)\, \mathrm{d}\mathcal{G} - \int_{\mathcal{G}^+} \varrho(|z'|) \varphi^+(z, r)\, \mathrm{d}\mathcal{G} \\
&\quad + \int_0^1 \mathrm{d}s \Big\{ \int_{\mathcal{G}^-} \theta^-\big(e_{sr}(z), t\big) (sr - s^2 r^2 \mathcal{H}^- + s^3 r^3 \mathcal{K}^-)\, \mathrm{d}\mathcal{G} \\
&\quad - \int_{\mathcal{G}^+} \theta^-\big(e_{sr}(z), t\big) (sr - s^2 r^2 \mathcal{H}^+ + s^3 r^3 \mathcal{K}^+)\, \mathrm{d}\mathcal{G} \Big\} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\varphi^-(z, r) = r - \frac{r^2}{2} \mathcal{H}^-(z) + \frac{r^3}{3} \mathcal{K}^-(z).
$$

Закон сохранения центра тяжести переходит в равенство

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\tilde{\Omega}_t^-} \rho(y, t) \boldsymbol{y}\, \mathrm{d}y + \int_{\tilde{\Omega}_t^+} \rho^+ \boldsymbol{y}\, \mathrm{d}y - \int_{\mathcal{F}^-} \varrho(|z'|) \boldsymbol{z}\, \mathrm{d}z - \int_{\mathcal{F}^+} \rho^+ \boldsymbol{z}\, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}s \Big\{ \int_{\mathcal{F}^-} \theta^-\big(e_{sr}(z), t\big) (\boldsymbol{z} + sr\boldsymbol{N}) L(z, sr)\, \mathrm{d}z \\
&\quad + \int_{\mathcal{G}^-} \Big(\varrho(|z'|) + s\theta^-\big(e_{sr}(z), t\big) \Big) (\boldsymbol{z} + sr\boldsymbol{N}) \big(r - sr^2\mathcal{H}^- + s^2 r^3 \mathcal{K}^-\big)\, \mathrm{d}\mathcal{G} \\
&\quad - \int_{\mathcal{G}^+} \Big(\varrho(|z'|) + s\theta^-\big(e_{sr}(z), t\big) \Big) (\boldsymbol{z} + sr\boldsymbol{N}) \big(r - sr^2\mathcal{H}^+ + s^2 r^3 \mathcal{K}^+\big)\, \mathrm{d}\mathcal{G}
\end{aligned}
$$

$$+\int\limits_{\mathcal{G}^+}\rho^+(\boldsymbol{z}+sr\boldsymbol{N})\big(r-sr^2\mathcal{H}^++s^2r^3\mathcal{K}^+\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big\},$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathcal{F}^-}\int\limits_0^1\theta^-\big(e_{sr}(z)\big)(\boldsymbol{z}+sr\boldsymbol{N})L(z,sr)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z+\int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|z'|)\boldsymbol{\psi}^-(z,r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$
$$+\int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\boldsymbol{\psi}^+(z,r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$
$$+\int\limits_0^1\Big\{\int\limits_{\mathcal{G}^-}\theta^-\big(e_{sr}(z),t\big)(\boldsymbol{z}+sr\boldsymbol{N})\big(sr-s^2r^2\mathcal{H}^-+s^3r^3\mathcal{K}^-\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$
$$-\int\limits_{\mathcal{G}^+}\theta^-\big(e_{sr}(z),t\big)(\boldsymbol{z}+sr\boldsymbol{N})\big(sr-s^2r^2\mathcal{H}^++s^3r^3\mathcal{K}^+\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big\}\,\mathrm{d}s=0,\quad(3.5)$$

где $\bar\rho=\rho^+$ в $\mathcal{F}^+$ и $\bar\rho=\varrho(|z'|)$ в $\mathcal{F}^-$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}^+(z,r)&=\varphi^+(z,r)\boldsymbol{z}+\boldsymbol{N}(z)\Big(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\mathcal{H}^+(z)+\frac{r^4}{4}\mathcal{K}^+(z)\Big),\\ \boldsymbol{\psi}^-(z,r)&=\varphi^-(z,r)\boldsymbol{z}+\boldsymbol{N}(z)\Big(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\mathcal{H}^-(z)+\frac{r^4}{4}\mathcal{K}^-(z)\Big).\end{aligned}\quad(3.6)$$

Законы сохранения импульса и углового момента выглядят так:

$$\int\limits_{\mathcal{F}^+}\rho^+\boldsymbol{u}(z,t)L(z,r)\,\mathrm{d}z+\int\limits_{\mathcal{F}^-}\big(\varrho(|z'|)+\theta^-(z,t)\big)\boldsymbol{u}(z,t)L(z,r)\,\mathrm{d}z=0,$$

$$\int\limits_{\mathcal{F}}\bar{\bar\rho}\boldsymbol{u}(z,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(e_r)L(z,r)\,\mathrm{d}z$$
$$+\,\omega\Big(\int\limits_{\mathcal{F}}\bar{\bar\rho}\boldsymbol{\eta}_3(e_r)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(e_r)L(z,r)\,\mathrm{d}z-\int\limits_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z\Big)$$
$$=\int\limits_{\mathcal{F}}\bar{\bar\rho}\boldsymbol{u}(z,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(e_r)L(z,r)\,\mathrm{d}z$$
$$+\,\omega\int\limits_0^1\mathrm{d}s\Big\{\int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-\big(e_{sr}(z),t\big)\boldsymbol{\eta}_3(e_{sr})\cdot\boldsymbol{\eta}_j(e_{sr})L(z,sr)\,\mathrm{d}z$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_{\mathcal{G}^+} \Big(\rho^+ - \varrho(|z'|) - s\theta^-\big(e_{sr}(z),t\big)\Big)\boldsymbol{\eta}_3(e_{sr}) \\
&\qquad\qquad \cdot \boldsymbol{\eta}_j(e_{sr})\big(r - sr^2\mathcal{H}^+ + s^2r^3\mathcal{K}^+\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G} \\
&+\int\limits_{\mathcal{G}^-} \Big(\varrho(|z'|) + s\theta^-\big(e_{sr}(z),t\big)\Big)\boldsymbol{\eta}_3(e_{sr}) \\
&\qquad\qquad \cdot \boldsymbol{\eta}_j(e_{sr})\big(r - sr^2\mathcal{H}^- + s^2r^3\mathcal{K}^-\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big\} = 0,
\end{aligned}
$$

где $j = 1,2,3$, $\bar{\bar{\rho}} = \rho^+$ в $\mathcal{F}^+$ и $\bar{\bar{\rho}} = \varrho(|z'|) + \theta^-(z,t)$ в $\mathcal{F}^-$. При этом мы применили формулу (3.3) в члене с ω.

Предложение 3.1. *Для произвольных чисел $l^\pm$, постоянных векторов $\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{M} = (M_1,M_2,M_3)$, функций $\theta^- \in L_2(\mathcal{F}^-)$, $f_0 \in W_2^l(\mathcal{F}^+)$ и векторного поля $\boldsymbol{b}_0 \in W_2^{l+1/2}(\mathcal{G})$ существуют $r \in W_2^{2+l}(\mathcal{G})$ и $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^{1+l}(\mathcal{F})$, удовлетворяющие условиям*

$$
\begin{gathered}
\rho^+\int\limits_{\mathcal{G}^+} r(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = l^+, \quad \int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|z'|)r(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int\limits_{\mathcal{G}^+}\varrho(|z'|)r(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\,\mathrm{d}z = l^-, \\
\int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|z'|)r(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar{\rho}]|_{\mathcal{G}^+}r(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z = \boldsymbol{l}, \\
\int\limits_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{u}(z)\,\mathrm{d}z = \boldsymbol{m}, \\
\int\limits_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{u}(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z + \omega\Big(\int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|z'|)r(z)\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z \\
+\int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar{\rho}]|_{\mathcal{G}^+}r(z)\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big) = M_j, \quad j=1,2,3, \\
\nabla\cdot\boldsymbol{u} = f_0 \quad \text{в } \mathcal{F}^+, \quad \boldsymbol{b}_0\cdot\boldsymbol{N} = 0 \text{ на } \mathcal{G}^\pm, \\
\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} = \boldsymbol{b}_0 \quad \text{на } \mathcal{G}^-, \qquad [\boldsymbol{u}]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{b}_0 \quad \text{на } \mathcal{G}^+
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

и неравенству

$$
\begin{aligned}
&\|r\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})} + \|\boldsymbol{u}\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})} \\
&\leqslant c\Big(|l^+| + |l^-| + |\boldsymbol{l}| + |\boldsymbol{m}| + |\boldsymbol{M}| + \|\theta^-\|_{\mathcal{F}^-} + \|f_0\|_{W_2^l(\mathcal{F})} + \|\boldsymbol{b}_0\|_{W_2^{l+1/2}(\mathcal{G})}\Big).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Положим

$$r^+(z) = \frac{l^+\boldsymbol{N}(z)\cdot\boldsymbol{z}}{3\rho^+|\mathcal{F}^+|} + \frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{N}(z)}{\rho^+|\mathcal{F}^+|}, \quad z\in\mathcal{G}^+,$$

$$r^-(z) = \frac{\Big(l^- - \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\mathcal{G}^+}\varrho(|z'|)\big(\frac{l^+\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{N}(z)}{3\rho^+|\mathcal{F}^+|} + \frac{C^+\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{N}(z)}{\rho^+|\mathcal{F}^+|}\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big)\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{N}(z)}{3\varrho(|z'|)|\mathcal{F}|}$$
$$+\frac{\big(\boldsymbol{l} - \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}r^+(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G}\big)\cdot\boldsymbol{N}(z)}{\varrho(|z'|)|\mathcal{F}|}, \quad z\in\mathcal{G}^-. \tag{3.8}$$

Поскольку $\boldsymbol{l}$ является постоянным вектором, то $\int\limits_{\mathcal{G}^\pm}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{N}(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0.$ Кроме того,

$$\int\limits_{\mathcal{G}^-}\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int\limits_{\mathcal{F}}\nabla\cdot\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z = 3|\mathcal{F}|.$$

Таким образом, соотношения в первой строке в (3.7) выполняются.

Учитываем, что

$$\int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|z'|)r(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}r(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{l^- - \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\,\mathrm{d}z + \ldots}{3|\mathcal{F}|}\int\limits_{\mathcal{F}}\Big(\nabla\cdot(z_1\boldsymbol{z}), \nabla\cdot(z_2\boldsymbol{z}), \nabla\cdot(z_3\boldsymbol{z})\Big)\,\mathrm{d}z$$
$$+\frac{\boldsymbol{l} - \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}r(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G}}{|\mathcal{F}|}\cdot\int\limits_{\mathcal{F}}\big(\nabla z_1, \nabla z_2, \nabla z_3\big)\,\mathrm{d}z$$
$$+\int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}r(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{2\big(l^- - \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\,\mathrm{d}z + \ldots\big)}{3|\mathcal{F}|}\int\limits_{\mathcal{F}}\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z + \boldsymbol{l}.$$

В силу зеркальности фигуры $\mathcal{F}$ интеграл справа в последнем равенстве равен нулю. Значит, вторая строка в соотношениях (3.7) для (3.8) тоже верна.

Далее мы построим вектор $\boldsymbol{u}_1$, удовлетворяющий уравнениям

$$\begin{aligned} &\rho^+\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1 = f_0^+ \quad \text{в } \mathcal{F}^+, \qquad \nabla\cdot(\varrho(|z'|)\boldsymbol{u}_1) = f_0^- \quad \text{в } \mathcal{F}^-, \\ &[\boldsymbol{u}_1]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \qquad \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{N} = f_1 \quad \text{на } \mathcal{G}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$f_1(z) = \frac{\boldsymbol{N}(z)\cdot\boldsymbol{z}}{3\rho^+|\mathcal{F}^+|}\int\limits_{\mathcal{F}^+} f_0^+(z)\,\mathrm{d}z + \frac{\boldsymbol{K}^+\cdot\boldsymbol{N}(z)}{\rho^+|\mathcal{F}^+|}, \quad z\in\mathcal{G}^+,$$

$$f_1(z) = \frac{\boldsymbol{N}(z)\cdot\boldsymbol{z}}{3\varrho(z')|\mathcal{F}|}\Big(\int\limits_{\mathcal{F}^-} f_0^-(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathcal{G}^+}\varrho(z')f_1(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big) + \frac{\boldsymbol{K}^-\cdot\boldsymbol{N}(z)}{\varrho(z')|\mathcal{F}^-|}, \quad z\in\mathcal{G}^-,$$

с некоторыми векторами $\boldsymbol{K}^\pm$, которые определим ниже. Поскольку

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathcal{G}^+}\rho^+ f_1(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int\limits_{\mathcal{F}^+} f_0^+(z)\,\mathrm{d}z, \\ &\int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(z')f_1(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int\limits_{\mathcal{G}^+}\varrho(z')f_1(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int\limits_{\mathcal{F}^-} f_0(z)\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

то необходимые условия согласования выполнены и существует $\boldsymbol{u}_1$, удовлетворяющее (3.9) и неравенству

$$\|\boldsymbol{u}_1\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})} \leqslant c\big(\|f_0\|_{W_2^l(\mathcal{F})} + \|f_1\|_{W_2^{l+1/2}(\mathcal{G})}\big).$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{F}^+}\rho^+(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z &= -\int\limits_{\mathcal{F}^+}\rho^+\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}z + \rho^+\int\limits_{\mathcal{G}^+}(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G}, \\ \int\limits_{\mathcal{F}^-}\nabla\cdot\big(\varrho(|z'|)\boldsymbol{u}_1\big)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z &= -\int\limits_{\mathcal{F}^-}\varrho(|z'|)\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\mathcal{G}^+}\big(\varrho(|z'|)\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{N}\big)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} \\ &\quad + \int\limits_{\mathcal{G}^-}\big(\varrho(|z'|)\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{N}\big)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G}, \end{aligned}$$

$$\int\limits_{\mathcal{G}^+}\rho^+ f_1\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \boldsymbol{K}^+, \quad \int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(z')f_1\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \boldsymbol{K}^-$$

мы можем заключить, что

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{\mathcal{F}^+} f_0^+\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\mathcal{F}^-} f_0^-\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z + \boldsymbol{K}^+ + \boldsymbol{K}^-$$
$$- \int\limits_{\mathcal{G}^+} \big(\varrho(|z'|)\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{N}\big)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \boldsymbol{m}$$

при

$$\boldsymbol{K}^+ = \int\limits_{\mathcal{F}^+} f_0^+\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z, \qquad \boldsymbol{K}^- = \boldsymbol{m} + \int\limits_{\mathcal{F}^-} f_0^-\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\mathcal{G}^+} \varrho(|z'|)f_1\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G}.$$

Значит,

$$\|\boldsymbol{u}_1\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})} \leqslant c\big(\|f_0\|_{W_2^l(\mathcal{F})} + |\boldsymbol{m}|\big).$$

Теперь найдем векторное поле $\boldsymbol{u}_2$, удовлетворяющее равенствам

$$\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{b}_0(z) - \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{b}'(z), \quad z\in\mathcal{G}^-,$$
$$[\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{b}_0(z) - [\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} \equiv \boldsymbol{b}'(z), \quad z\in\mathcal{G}^+.$$

Следуя [18], положим $\boldsymbol{u}_2 = \mathrm{rot}\boldsymbol{\Phi}(z)$, где $\boldsymbol{\Phi}\in W_2^{2+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)$,

$$\boldsymbol{\Phi}(z) = \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(z)}{\partial\boldsymbol{N}} = 0, \quad \frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}(z)}{\partial\boldsymbol{N}^2} = \boldsymbol{b}'(z)\times\boldsymbol{N}, \quad z\in\mathcal{G}^-,$$
$$\boldsymbol{\Phi}(z) = \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(z)}{\partial\boldsymbol{N}} = 0, \quad \Big[\bar{\mu}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}(z)}{\partial\boldsymbol{N}^2}\Big]\Big|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{b}'(z)\times\boldsymbol{N}, \quad z\in\mathcal{G}^+,$$

и потребуем, чтобы

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_{W_2^{2+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} \leqslant c\|\boldsymbol{b}'\|_{W_2^{l+1/2}(\cup\mathcal{G}^\pm)}.$$

Наконец, определим

$$\boldsymbol{u}_3(z) = \sum_{k=1}^3 \widehat{M}_k\mathrm{rot}\big(\boldsymbol{e}_kA(z)\big),$$

где $A\in C_0^\infty(\mathcal{F}^+)$, $\int\limits_{\mathcal{F}^-} \rho^+A(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}$ и

$$\widehat{M}_k = M_k - \int\limits_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\big(\boldsymbol{u}_1(z)+\boldsymbol{u}_2(z)\big)\cdot\boldsymbol{\eta}_k(z)\,\mathrm{d}z$$
$$-\omega\Big(\int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|z'|)r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_k\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar{\rho}]|_{\mathcal{G}^+}r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_k\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big).$$

Имеем: $\int\limits_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{u}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z = \widehat{M}_j$ и

$$\|\boldsymbol{u}_3\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})} \leqslant c|\widehat{\boldsymbol{M}}|.$$

Нетрудно видеть, что функция r, определенная в (3.8), и вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$ удовлетворяют всем необходимым требованиям. Утверждение доказано. □

Теорема 3.1 (Локальная разрешимость нелинейной задачи)**.** *Пусть* $T_0 < \infty$, $\mathcal{P}^-(\varrho) \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}_+)$ *– положительная возрастающая функция такая, что для неё выполняется второе равенство в* (1.15), $\boldsymbol{f}$, $\nabla\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})$, $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{W}_2^{1+l}(\mathcal{F})$, $\theta_0 \in W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)$, $r_0 \in W_2^{5/2+l}(\mathcal{G})$, $l \in (1/2, 1)$, *и пусть выполнены условия согласования*

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0 = l_2^+(\boldsymbol{u}_0, r_0) \quad \textit{в } \mathcal{F}^+, \qquad \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{l}_3^-(\boldsymbol{u}_0, r_0) \quad \textit{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{u}_0]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{l}_3^+(\boldsymbol{u}_0, r_0) \quad \textit{на } \mathcal{G}^+.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Тогда существует значение $\varepsilon(T_0) \ll 1$ *такое, что задача* (3.1) *с малыми данными:*

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} + \|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}&\\
+\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + \|\nabla\boldsymbol{f}\|_{Q_{T_0}} \leqslant \varepsilon&,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

имеет единственное решение $(\boldsymbol{u}, \theta^\pm, r)$ *на интервале* $(0, T_0]$ *и выполнены неравенства*

$$Y_{0,T_0}(\boldsymbol{u}, \theta^\pm, r) \leqslant c(\varepsilon)\Big\{N(\boldsymbol{u}_0, \theta_0^-, r_0) + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})}\Big\}, \tag{3.12}$$

$$N(\boldsymbol{u}(\cdot, T_0), \theta^-(\cdot, T_0), r(\cdot, T_0)) \leqslant \vartheta N(\boldsymbol{u}_0, \theta_0^-, r_0) + c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})}, \tag{3.13}$$

где $\vartheta < 1/2$,

$$\begin{aligned}
Y_{0,T}(\boldsymbol{u}, \theta^\pm, r) \equiv \|\boldsymbol{u}\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(D_T)}&\\
+ \|\theta\|_{W_2^{l,l/2}(D_T)} + |\theta|_{D_T}^{(1+l,l/2)} + |\mathcal{D}_t\theta^-|_{Q_T^-}^{(1+l,l/2)}&\\
+ \|r\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_T)} + \|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)}&
\end{aligned}$$

и

$$N(\boldsymbol{w}, \theta^-, \rho) \equiv \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\mathcal{F})} + \|\theta^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|\rho\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}.$$

Доказательство теоремы 3.1 опирается на теорему 2.1 и на следующие оценки нелинейных членов.

Предложение 3.2. *Если*

$$\|r(\cdot,t)\|_{W_2^{3/2+l}(\mathcal{G})}+\|\mathcal{D}_t r(\cdot,t)\|_{W_2^{1/2+l}(\mathcal{G})}+\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})}\\ +\|\theta^-(\cdot,t)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}\leqslant\delta,\quad t\leqslant T,\quad(3.14)$$

где δ — определенное малое положительное число, то нелинейные члены (3.2) *и $\widehat{\boldsymbol{f}}(z,t)\equiv\widetilde{\boldsymbol{f}}(e_r(z,t),t)$ подчиняются неравенствам*

$$Z_{0,T}(\boldsymbol{u},\theta^\pm,r)\equiv\|\boldsymbol{l}_1^\pm(\boldsymbol{u},\theta^\pm,r)\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,\frac{l}{2}}(D_T)}\\ +\|l_2^\pm(\boldsymbol{u},\theta^-,r)\|_{W_2^{1+l,0}(D_T)}+\|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},r)\|_{W_2^{0,1+\frac{l}{2}}(Q_T^+)}\\ +\|\boldsymbol{l}_3^\pm(\boldsymbol{u},r)\|_{W_2^{\frac12+l,\frac14+\frac{l}{2}}(G_T)}+\big|l_4^\pm(\boldsymbol{u},\theta^-,r)\big|_{G_T}^{(\frac12+l,\frac{l}{2})}+\big|l_5^\pm(r)\big|_{G_T}^{(\frac12+l,\frac{l}{2})}\\ +\|l_6(\boldsymbol{u},r)\|_{W_2^{\frac32+l,\frac34+\frac{l}{2}}(G_T)}\leqslant cY_{0,T}^2(\boldsymbol{u},\theta^\pm,r),\quad(3.15)$$

$$\|\widehat{\boldsymbol{f}}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,\frac{l}{2}}(Q_T)}\\ \leqslant c\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,\frac{l}{2}}(Q_T)}+\sup_{t<T}\Big(\|\mathcal{D}_t r(\cdot,t)\|_{W_2^{l+\frac12}(\mathcal{G})}+\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_{\Omega}\Big)\|\nabla\boldsymbol{f}\|_{Q_T}\Big\}.$$

Если $(\boldsymbol{u},\theta,r)$ и $(\boldsymbol{u}',\theta',r')$ удовлетворяют условию (3.14), *то*

$$\begin{gathered}Z_{0,T}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}',\theta-\theta',r-r')\leqslant c\delta Y_{0,T}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}',\theta-\theta',r-r'),\\ \|\widetilde{\boldsymbol{f}}-\widetilde{\boldsymbol{f}}'\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_T)}\leqslant c\delta Y_{0,T}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}',q-q',r-r'),\end{gathered}\qquad(3.16)$$

где $\widehat{\boldsymbol{f}}'=\widetilde{\boldsymbol{f}}(e_{r'}(z,t),t)$.

Доказательство. Аналогичное утверждение было доказано для одной и двух несжимаемых жидкостей в [20, 18] (предложение 3.2) (см. также [19], §12). Оценим недостающие члены, следуя [8].

Приведём некоторые вспомогательные неравенства (см. [21, 20]) Если u,v зависят от $t\in(0,T)$, то

$$\|uv\|_{W_2^{m,0}(\mathfrak{Q}_T)}\leqslant c\|u\|_{W_2^{m,0}(\mathfrak{Q}_T)}\sup_{t\in(0,T)}\|v(\cdot,t)\|_{W_2^{n/2+\gamma}(\mathfrak{Q})},\\ \mathfrak{Q}_T=\mathfrak{Q}\times(0,T),\qquad(3.17)$$

где $m<n/2$, $\mathfrak{Q}\subset\mathbb{R}^n$, $\gamma>0$. Кроме того, из

$$\|\triangle_t(-h)(uv)\|_{\mathfrak{Q}}\leqslant\|\triangle_t(-h)u(\cdot,t)\|_{\mathfrak{Q}}\sup_{\mathfrak{Q}}|v(y,t)|\\ +\|u\|_{L_p(\mathfrak{Q})}\|\triangle_t(-h)v\|_{L_q(\mathfrak{Q})}\qquad(3.18)$$

в силу теорем вложения следует неравенство

$$\|uv\|_{\dot W_2^{0,m/2}(\mathfrak{Q}_T)} \leqslant c\|u\|_{\dot W_2^{0,m/2}(\mathfrak{Q}_T)} \sup_{\mathfrak{Q}_T}|v(y,t)| \\ + c\sup_{t<T}\|u(\cdot,t)\|_{W_2^m(\mathfrak{Q})}\|v\|_{W_2^{m/2}\left((0,T);W_2^{n/2-m}(\mathfrak{Q})\right)},$$

где $m-n/2+n/p\geqslant 0$, $1/q=1/2-1/p$, $m<n/2$.

В $\boldsymbol{l}_1^-(\boldsymbol{u},\theta^-,r)$ рассмотрим член с давлением

$$P\equiv \mathcal{P}^{-\prime}(\varrho+\theta^-)\tilde\nabla(\varrho+\theta^-)-\mathcal{P}^{-\prime}(\varrho)\tilde\nabla\varrho-\mathcal{P}^{-\prime}(\rho_*^-)\tilde\nabla\theta^-\pm\mathcal{P}^{-\prime}(\varrho)\tilde\nabla(\varrho+\theta^-)$$
$$=\tilde\nabla(\varrho+\theta^-)\theta^-\int_0^1\mathcal{P}^{-\prime\prime}(\varrho+s\theta^-)\,\mathrm{d}s-\mathcal{P}^{-\prime}(\rho_*^-)\tilde\nabla\theta^-+\mathcal{P}^{-\prime}(\varrho)\Big(\tilde\nabla(\varrho+\theta^-)-\tilde\nabla\varrho\Big)$$
$$=\tilde\nabla(\varrho+\theta^-)\theta^-\int_0^1\mathcal{P}^{-\prime\prime}(\varrho+s\theta^-)\,\mathrm{d}s+(\varrho-\rho_*^-)\int_0^1\mathcal{P}^{-\prime\prime}\big(\rho_*^-+s(\varrho-\rho_*^-)\big)\,\mathrm{d}s\tilde\nabla\theta^-.$$

Так как $\mathcal{P}^-\in C^{3+1}(\min\rho^-,\max\rho^-)$, то согласно (3.17), (3.18) с показателями $p=3$, $q=6$, $m=l$ и $\gamma=l-1/2$ имеем

$$\|P\|_{W_2^{l,0}(Q_T^-)}\leqslant c\|\theta^-\|_{W_2^{1+l,0}(Q_T^-)}\big(\sup_{t<T}\|\theta^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}+\|\varrho-\rho_*^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}\big),$$
$$\|\triangle_t(-h)P\|_{L_2(\mathcal{F}^-)}\leqslant c\Big(\|\triangle_t(-h)\nabla\theta^-\|_{L_2(\mathcal{F}^-)}\big(\sup_{Q_T^-}|\theta^-|+\sup_{\mathcal{F}^-}|\varrho-\rho_*^-|\big) \\ +\big(\|\nabla\varrho\|_{L_3(\mathcal{F}^-)}+\|\nabla\theta^-\|_{L_3(\mathcal{F}^-)}\big)\|\triangle_t(-h)\theta^-\|_{L_6(\mathcal{F}^-)}\Big)$$
$$\leqslant c\|\triangle_t(-h)\theta^-\|_{W_2^1(\mathcal{F}^-)}\big(\|\theta^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}+\|\varrho-\rho_*^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}\big)$$
$$\leqslant c\int_0^h\|\mathcal{D}_t\theta^-(\cdot,t-\tau)\|_{W_2^1(\mathcal{F}^-)}\,\mathrm{d}t\big(\|\theta^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}+\|\varrho-\rho_*^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}\big),$$

что в силу теоремы 1.1 для функции ϱ (1.11) влечёт неравенство

$$\|P\|_{W_2^{l,l/2}(Q_T^-)}\leqslant c(T)\big(\|\mathcal{D}_t\theta^-\|_{W_2^{1,0}(Q_T^-)}+\|\theta^-\|_{W_2^{1+l,0}(Q_T^-)}\big) \\ \times\big(\sup_{t<T}\|\theta^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}+\|\varrho-\rho_*^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}\big) \\ \leqslant c(\delta+|\beta|)\big(\|\mathcal{D}_t\theta^-\|_{W_2^{1+l,0}(Q_T^-)}+\|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}\big).$$

Поясним, что функция $\mathcal{Q}^{-1} \in C^{2+1}$, по крайней мере. Значит, с учётом (1.16) справедлива оценка

$$\|\varrho-\rho_*^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} \leqslant c\Big|\mathcal{Q}^{-1}\Big(\frac{\omega^2}{2}|z'|^2+C^-\Big)-\mathcal{Q}^{-1}(C^-)\Big|_{C^{1+1}}+|\mathcal{Q}^{-1}(C^-)-\rho_*^-| \\ \leqslant c(|\omega|+|\beta|).$$

Кроме того, мы также учли (3.14) и тот факт, что

$$\|\theta^-(\cdot,t)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} \leqslant \|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \int\limits_0^t \|\mathcal{D}_t\theta^-(\cdot,\tau)\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}\,\mathrm{d}\tau.$$

Член в l_4, состоящий из выражения $(\mathcal{P}^-(\varrho+\theta^-)-\mathcal{P}^-(\varrho)-p_1\theta^-)\big|_{\Gamma_0}$, оценивается аналогично. $\square$

Основной результат настоящей статьи заключается в следующем:

Теорема 3.2 (Глобальная разрешимость нелинейной задачи)**.** *Пусть* $\mathcal{P}^- \in C^{3+1}(\min\rho^- \max\rho^-)$ *– положительная возрастающая функция такая, что для неё выполняется второе равенство в* (1.15)*,* $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{W}_2^{1+l}(\mathcal{F})$, $\theta_0 \in W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)$, $r_0 \in W_2^{5/2+l}(\mathcal{G})$, $l \in (1/2,1)$. *Предположим, что выполнены условия согласования* (3.10) *и малости*

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})} + \|\theta_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})} \leqslant \varepsilon \ll 1, \tag{3.19}$$

а также неравенство (2.5) *и ограничения* (3.4) *при* $t=0$. *Более того, мы предполагаем, что* $\boldsymbol{f}$, $\nabla\boldsymbol{f} \in W_2^{l,l/2}(Q_\infty)$ $\boldsymbol{f}\in W_2^{l_1}\big((0,\infty);W_2^l(\Omega)\big)\cap W_2^{0,l_1+l/2}(Q_\infty)$ *с* $l_1 \in (1/2,1)$, *вектор* $\boldsymbol{f}$ *подчиняется условиям ортогональности* (1.5) *и имеет малые нормы*:

$$\|e^{\alpha_1 t}\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_\infty)} \leqslant \varepsilon, \quad \alpha_1>0, \qquad \sup_{\tau>0}\|\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{f}\|_{Q_{\tau,\tau+T_0}} \leqslant \varepsilon, \quad |\boldsymbol{i}|=1,2, \tag{3.20}$$

где $Q_\infty=\Omega\times(0,\infty)$, $T_0>2$ *– некоторое фиксированное число.*

Тогда задача (3.1) *имеетединственное решение, определенное на бесконечном временном интервале* $t>0$, *и*

$$\|\mathrm{e}^{\alpha t}\boldsymbol{u}\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(D_\infty)} + |\mathrm{e}^{\alpha t}\theta|_{D_\infty}^{(1+l,l/2)} + |\mathrm{e}^{\alpha t}\mathcal{D}_t\theta^-|_{Q_\infty^-}^{(1+l,l/2)} \\ + \|\mathrm{e}^{\alpha t}r\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_\infty)} + \|\mathrm{e}^{\alpha t}\mathcal{D}_t r\|^2_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_\infty)} \\ \leqslant c_1(\varepsilon)\Big\{\|\mathrm{e}^{\alpha_1 t}\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_\infty)} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})} + \|\theta_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\Big\} \tag{3.21}$$

с некоторым $0<\alpha<\alpha_1$; $c_1(\varepsilon)$ *является ограниченной функцией от* ε.

Доказательство. Изложим основные идеи доказательства.

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде суммы

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'', \quad \theta = \theta' + \theta'', \quad r = r' + r''.$$

Запишем условия сохранения масс с учётом (3.4) в форме

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{G}^+} r^+ \,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int\limits_{\mathcal{G}^+} \big(r^+ - \varphi^+(z, r^+)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G} \equiv l^+(r^+),\\
&\int\limits_{\mathcal{G}^-} \varrho(|z'|) r^- \,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int\limits_{\mathcal{G}^+} \varrho(|z'|) r^+ \,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-} \theta^-(z)\,\mathrm{d}z\\
&\quad = \int\limits_{\mathcal{F}^-} \Big(\theta^-(z) - \int\limits_0^1 \theta^-\big(e_{sr}(z)\big) L(z, sr)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}z\\
&\quad + \int\limits_{\mathcal{G}^-} \varrho(|z'|)\big(r^- - \varphi^-(z, r^-)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int\limits_{\mathcal{G}^+} \varrho(|z'|)\big(r^+ - \varphi^+(z, r^+)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\quad - \int\limits_0^1 \mathrm{d}s\Big\{\int\limits_{\mathcal{G}^-} \theta^-\big(e_{sr}(z), t\big)(sr - s^2 r^2 \mathcal{H}^- + s^3 r^3 \mathcal{K}^-)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\quad - \int\limits_{\mathcal{G}^+} \theta^-\big(e_{sr}(z), t\big)(sr - s^2 r^2 \mathcal{H}^+ + s^3 r^3 \mathcal{K}^+)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big\} \equiv l^-(r^+, r^-, \theta^-).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Линеаризуем также закон сохранения центра масс (3.5), (3.6):

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{G}^-} \varrho(|z'|) r^- \boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+} [\overline{\rho}]|_{\mathcal{G}^+} r^+ \boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-} \theta^-(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z\\
&\quad = \int\limits_{\mathcal{F}^-} \Big(\theta^-(z)\boldsymbol{z} - \int\limits_0^1 \theta^-\big(e_{sr}(z)\big)(\boldsymbol{z} + sr\boldsymbol{N}) L(z, sr)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}z\\
&\quad + \int\limits_{\mathcal{G}^-} \varrho(|z'|)\big(r^-\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\psi}^-(z, r^-)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+} [\overline{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}\big(r^+\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\psi}^+(z, r^+)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\quad - \int\limits_0^1 \Big\{\int\limits_{\mathcal{G}^-} \theta^-\big(e_{sr}(z), t\big)(\boldsymbol{z} + sr\boldsymbol{N})\big(sr - s^2 r^2 \mathcal{H}^- + s^3 r^3 \mathcal{K}^-\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$- \int\limits_{\mathcal{G}^+} \theta^-\big(e_{sr}(z),t\big)\big(\boldsymbol{z}+sr\boldsymbol{N}\big)\big(sr - s^2r^2\mathcal{H}^+ + s^3r^3\mathcal{K}^+\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big\}\,\mathrm{d}s$$
$$\equiv \boldsymbol{l}(r^+,r^-,\theta^-).$$

Законы сохранения количества движения и углового момента перейдут в

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \bar\rho\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathcal{F}} \bar\rho\boldsymbol{u}\big(1-L(z,r)\big)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\mathcal{F}^-} \theta^-(z,t)\boldsymbol{u}(z,t)L(z,r)\,\mathrm{d}z \equiv \boldsymbol{m}(\boldsymbol{u},r,\theta^-),$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{F}} \bar\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}z + \omega\Big(\int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z)\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|z'|)r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big)\\
&\quad= \int\limits_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}\cdot\big(\boldsymbol{\eta}_j(z)-\boldsymbol{\eta}_j(e_r)L(z,r)\big)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(z,t)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\eta}_j(e_r)L(z,r)\,\mathrm{d}z\\
&\quad+\omega\int\limits_0^1\mathrm{d}s\Big\{\int\limits_{\mathcal{F}^-}\Big(\theta^-(z)\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_j - \theta^-\big(e_{sr}(z),t\big)\boldsymbol{\eta}_3(e_{sr})\cdot\boldsymbol{\eta}_j(e_{sr})L(z,sr)\Big)\,\mathrm{d}z\\
&\quad+\int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|z'|)r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\quad-\int\limits_{\mathcal{G}^+}\Big([\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+} - s\theta^-\big(e_{sr}(z),t\big)\Big)\boldsymbol{\eta}_3(e_{sr})\cdot\boldsymbol{\eta}_j(e_{sr})\big(r - sr^2\mathcal{H}^+ + s^2r^3\mathcal{K}^+\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\quad-\int\limits_{\mathcal{G}^-}\Big(\varrho(|z'|) + s\theta^-\big(e_{sr}(z),t\big)\Big)\boldsymbol{\eta}_3(e_{sr})\cdot\boldsymbol{\eta}_j(e_{sr})\big(r - sr^2\mathcal{H}^- + s^2r^3\mathcal{K}^-\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big\}\\
&\quad\equiv M_j(\boldsymbol{u},r,\theta^-),\qquad j=1,2,3.
\end{aligned}\tag{3.24}$$

Согласно предложению 3.1 можно построить функции $\boldsymbol{u}_0'', r_0''$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{G}^+} r_0^{+''}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = l^+(r_0^+),\\
&\int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|z'|)r_0^{-''}\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int\limits_{\mathcal{G}^+}\varrho(|z'|)r_0^{+''}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta_0^-(z)\,\mathrm{d}z = l^-(r_0^+,r_0^-,\theta_0^-),\\
&\int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(|z'|)r_0^{-''}\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+}[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}r_0^{+''}\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta_0^-(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z = \boldsymbol{l}^-(r_0^+,r_0^-,\theta_0^-),\\
&\int\limits_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}_0''\,\mathrm{d}z = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{u}_0,r_0,\theta_0^-),
\end{aligned}\tag{3.25}$$

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{u}_0'' \cdot \boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z + \omega\Big(\int\limits_{\mathcal{G}^-} \varrho(|z'|) r_0'' \boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+} [\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+} r_0'' \boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$
$$+ \int\limits_{\mathcal{F}^-} \theta_0^-(z)\boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}z\Big) = M_j(\boldsymbol{u}_0, r_0, \theta_0^-), \quad j = 1,2,3, \tag{3.26}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0'' = l_2^+(\boldsymbol{u}_0, r_0) \quad \text{в } \mathcal{F}^+, \quad \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_0'')\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-} = \boldsymbol{l}_3^-(\boldsymbol{u}_0, r_0),$$
$$[\boldsymbol{u}_0'']\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_0'')\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{l}_3^+(\boldsymbol{u}_0, r_0).$$

Положим теперь $\boldsymbol{u}_0' \equiv \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_0''$, $r_0' \equiv r_0 - r_0''$ и определим $(\boldsymbol{u}', \theta', r')$ как решение задачи

$$\bar{\rho}\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{u}'(z,t) + 2\omega(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{u}')\big) - \bar{\mu}\nabla^2\boldsymbol{u}' + \nabla\theta' = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0 \quad \text{в } \mathcal{F}^+,$$
$$\varrho(x')\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{u}' + 2\omega(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{u}')\big) - \mu^-\nabla^2\boldsymbol{u}' - \mu_1^-\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}') + p_1\nabla\theta' = 0,$$
$$\mathcal{D}_t\theta' + \nabla \cdot \big(\varrho(x')\boldsymbol{u}'\big) = 0 \quad \text{в } \mathcal{F}^-, \quad t > 0, \tag{3.27}$$
$$\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}')\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-} = 0, \quad -p_1\theta^{-'} + \boldsymbol{N} \cdot \mathbb{T}'(\boldsymbol{u}')\boldsymbol{N} + \mathcal{B}_0^- r' = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^-,$$
$$[\boldsymbol{u}']\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad \big[\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}')\boldsymbol{N}(z)\big]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0,$$
$$-\theta^{+'} + p_1\theta^{-'} + \big[\boldsymbol{N} \cdot \mathbb{T}'(\boldsymbol{u}')\boldsymbol{N}\big]\big|_{\mathcal{G}^+} + \mathcal{B}_0^+ r' = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^+,$$
$$\mathcal{D}_t r' - \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{N} = 0 \quad \text{на } \mathcal{G},$$
$$\boldsymbol{u}'\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0' \quad \text{в } \mathcal{F}, \qquad \theta^{-'}\big|_{t=0} = \theta_0^- \quad \text{в } \mathcal{F}^-,$$
$$r'\big|_{t=0} = r_0' \quad \text{в } \mathcal{G}.$$

Отметим, что ввиду (3.22), (3.25) исходные данные $\boldsymbol{u}_0', r_0'$ удовлетворяют необходимым условиям (2.2), (2.3) и однородным условиям согласования (2.6). Так, например,

$$\int\limits_{\mathcal{G}^+} r_0^{+'}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int\limits_{\mathcal{G}^+} (r_0 - r_0^{+''})\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int\limits_{\mathcal{G}^+} \varphi^+(z, r_0)\,\mathrm{d}S = 0, \qquad \int\limits_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{u}_0'\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0,$$

поэтому по теореме 2.2 решение $(\boldsymbol{u}', \theta', r')$ задачи (3.27) существует при всех значениях времени $t > 0$.

Наконец, мы находим $(\boldsymbol{u}'', \theta'', r'')$ как решение системы

$$
\begin{aligned}
&\rho^+\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{u}''+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times \boldsymbol{u}'')\big)-\mu^+\nabla^2\boldsymbol{u}''+\nabla\theta''=\rho^+\widehat{\boldsymbol{f}}+\boldsymbol{l}_1^+(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'',\theta'+\theta'',r'+r''),\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{u}''=l_2^+(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'',r'+r'') \quad \text{в } \mathcal{F}^+,\ \ t>0,\\
&\varrho(x')\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{u}''+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{u}'')\big)-\mu^-\nabla^2\boldsymbol{u}''-\mu_1^-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}'')+p_1\nabla\theta''\\
&\quad=\varrho(x')\widehat{\boldsymbol{f}}+\boldsymbol{l}_1^-(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'',\theta'+\theta'',r'+r''),\\
&\mathcal{D}_t\theta''+\nabla\cdot\big(\varrho(x')\boldsymbol{u}''\big)=l_2^-(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'',\theta'+\theta'',r'+r'') \quad \text{в } \mathcal{F}^-,\ \ t>0,\\
&\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}'')\boldsymbol{N}=\boldsymbol{l}_3^-(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'',r'+r'') \quad \text{на } \ \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{u}'']\big|_{\mathcal{G}^+}=0,\quad \big[\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}'')\boldsymbol{N}\big]\big|_{\mathcal{G}^+}=\boldsymbol{l}_3^+(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'',r'+r'') \ \text{ на } \ \mathcal{G}^+,\\
&-p_1\theta^{-''}+\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{u}'')\boldsymbol{N}+\mathcal{B}_0^-r''=l_4^-(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'',\theta'+\theta'',r'+r'')+l_5^-(r'+r'') \text{ на } \mathcal{G}^-,\\
&-\theta^{+''}+p_1\theta^{-''}+[\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{u}'')\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+}+\mathcal{B}_0^+r''=l_4^+(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'',\theta'+\theta'',r'+r'')+l_5^+(r'+r'')\\
&\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}\text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_tr''-\boldsymbol{u}''\cdot\boldsymbol{N}=l_6(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'',r'+r'') \text{ на } \mathcal{G},\\
&\boldsymbol{u}''\big|_{t=0}=\boldsymbol{u}_0'' \quad \text{в } \mathcal{F},\quad \theta^{-''}\big|_{t=0}=0 \quad \text{в } \mathcal{F}^-,\quad r''\big|_{t=0}=r_0'' \quad \text{на } \mathcal{G},
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

начальные данные которой подчиняются ограничениям (3.25), (3.26). Если выполняется (3.19), то выражения

$$
l^+(r_0^+),\ \ l^-(r_0^+,r_0^-,\theta_0^-),\ \ \boldsymbol{l}(r_0^+,r_0^-,\theta_0^-),\ \ \boldsymbol{m}(\boldsymbol{u}_0,r_0,\theta_0^-),\ \ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_0,r_0,\theta_0^-),
$$

определённые формулами (3.22)–(3.24), и функции $f_0 = l_2^+(\boldsymbol{u}_0, r_0)$, $\boldsymbol{b}_0(z) = \boldsymbol{l}_3^\pm(\boldsymbol{u}_0, r_0)$, $z\in\cup\mathcal{G}^\pm$, удовлетворяют неравенству

$$
\begin{aligned}
&|l^+|+|l^-|+|\boldsymbol{l}|+|\boldsymbol{m}|+|\boldsymbol{M}|+\|f_0\|_{W_2^l(\cup\mathcal{F}^\pm)}+\|\boldsymbol{b}_0\|_{W_2^{l+1/2}(\mathcal{G})}\\
&\qquad\qquad\leqslant c\varepsilon\big(\|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})}+\|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}+\|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\big).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}_0''\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})}+\|r_0''\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\leqslant c\varepsilon\big(\|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})}+\|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}+\|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\big),\\
&\|\boldsymbol{u}_0'\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})}+\|r_0'\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\leqslant c\big(\|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})}+\|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}+\|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\big).
\end{aligned}
$$

Согласно теореме 2.2 решение $(\boldsymbol{u}', \theta', r')$ задачи (3.27) удовлетворяет неравенству (2.7):

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{\alpha t}\boldsymbol{u}'\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+\frac{l}{2}}(D_\infty)} &+ |\mathrm{e}^{\alpha t}\theta'|_{D_\infty}^{(1+l,l/2)} + |\mathrm{e}^{\alpha t}\mathcal{D}_t\theta^{-'}|_{Q_\infty^-}^{(1+l,l/2)} \\
&+ \|\mathrm{e}^{\alpha t}r'\|^2_{W_2^{\frac{5}{2}+l,\frac{5}{4}+\frac{l}{2}}(G_\infty)} + \|\mathrm{e}^{\alpha t}\mathcal{D}_t r'\|_{W_2^{\frac{3}{2}+l,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}}(G_\infty)} \\
&\leqslant c\big\{\|\boldsymbol{u}_0'\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} + \|\theta_0^{-'}\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0'\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\big\}. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

В § 4 из [8] для двухфазной задачи было показано, что при бо́льшей гладкости функции давления жидкостей и массовых сил решение тоже обладает повышенной гладкостью. Аналогичные результаты для одной несжимаемой жидкости были получены Солонниковым в [22]. Эти выводы применимы и для нашего случая, так как система с учётом вращения отличается от той, что рассмотрена в [8], только слабыми членами. В частности, теорема 6 даёт оценку соболевских норм приращения решения по t. Приведём эту теорему.

Теорема 3.3 ([8]). *Предположим, что* $\mathcal{P}\in C^{3+1}(\min\rho, \max\rho)$ *и* $\boldsymbol{f}$ *удовлетворяет ограничениям:* $\boldsymbol{f}\in W_2^{l_1}\big((t_0,T); W_2^l(\Omega)\big)\cap W_2^{0,l_1+l/2}(Q_{t_0,T})$ *с* $l_1\in(1/2,1)$, $\nabla\boldsymbol{f}\in W_2^{l,l/2}(Q_T)$. *Тогда для* $\boldsymbol{u}^{(s)}(y,t) = \boldsymbol{u}(y,t) - \boldsymbol{u}(y,t-s)$ *и* $\theta^{(s)}(y,t) = \theta(y,t) - \theta(y,t-s)$ *верно неравенство*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}(t_0,t_1) \equiv \|\mathrm{e}^{\gamma t}\boldsymbol{u}^{(s)}\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(\cup Q^\pm_{t_2,t_1})} &+ |\mathrm{e}^{\gamma t}\theta^{(s)}|^{(l+1,l/2)}_{\cup Q^\pm_{t_2,t_1}} \\
&+ |\mathrm{e}^{\gamma t}\mathcal{D}_t\theta^{(s)-}|^{(l+1,l/2)}_{Q^-_{t_2,t_1}} \leqslant C(\boldsymbol{u},\theta,r)s^a, \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

где $a>1/2$, $0<t_0<t_1<T$, $t_2=(t_1-(t_1-t_0)/4)$, $0<s<\min(t_1-t_2,t_0)$, $\gamma>0$, $Q^\pm_{t_2,t_1}=\Omega_0^\pm\times(t_2,t_1)$ *и* C *— константа, зависящая от норм решения задачи* (3.1).

Очевидно, что эта теорема применима и к линейной задаче (3.27). Возводя обе части неравенства (3.30) в квадрат, деля потом на s и переходя к пределу по $s\to 0$, приходим к оценке для $T>0$:

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}'(\cdot,T)\|_{W_2^{2+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} &+ \|\theta'(\cdot,T)\|_{W_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} + \|r'(\cdot,T)\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})} \\
&\leqslant c_1\mathrm{e}^{-\alpha T}\big\{\|\boldsymbol{u}_0'\|_{W_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} + \|\theta_0^{-'}\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0'\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\big\}, \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

при этом оценка $\|r'(\cdot,T)\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}$ следует из (3.29) (смотри замечание 2.1), $\alpha\leqslant\gamma$.

Мы выбираем $T = T_0$ настолько большим, чтобы

$$c_1 e^{-\alpha T_0} \leqslant \vartheta_1 \ll 1/2, \qquad \alpha > 0.$$

Что касается задачи (3.28), то она решается итерациями, как в [18], на основе теоремы 2.1 и оценки (3.15) для нелинейных членов (3.2):

$$Z_{0,T}(\boldsymbol{u}, \theta, r) \leqslant c Y_{0,T}^2(\boldsymbol{u}, \theta, r).$$

Сходимость итераций гарантируют неравенства (3.16). Кроме того, первое из них обеспечивает единственность решения, так как из него вместе с (3.12) следует тривиальность разности двух решений однородной задачи.

Таким образом, если ε достаточно мало, то из неравенств (3.12) и (3.13) мы получаем

$$\begin{aligned} &Y_{0,T_0}(\boldsymbol{u}'', \theta'', r'') \\ &\leqslant c_2(\varepsilon)\big(\|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})} + \|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &N\big(\boldsymbol{u}(\cdot, T_0), \theta^-(\cdot, T), r(\cdot, T_0)\big) \\ &\quad \equiv \|\boldsymbol{u}(\cdot, T_0)\|_{W_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} + \|\theta(\cdot, T_0)\|_{W_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} + \|r(\cdot, T_0)\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})} \\ &\quad \leqslant N\big(\boldsymbol{u}'(\cdot, T_0), \theta^{-'}(\cdot, T_0), r'(\cdot, T_0)\big) + N\big(\boldsymbol{u}''(\cdot, T_0), \theta^{-''}(\cdot, T_0), r''(\cdot, T_0)\big) \\ &\quad \leqslant (\vartheta_1 + \vartheta)\big(\|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})} + \|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} \\ &\qquad + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\big) + c\|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{T_0})}, \end{aligned}$$

где $\vartheta < 1/2$ – константа из неравенства (3.13). Положим $\lambda \equiv \vartheta_1 + \vartheta < 1$. В силу неравенств (3.19), (3.20) отсюда следует, что

$$\begin{aligned} Y_{0,T_0}(\boldsymbol{u}, \theta, r) &\leqslant c\Big(\|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})} + \|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\Big) \\ &\leqslant c\varepsilon, \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} &N\big(\boldsymbol{u}(\cdot, T_0), \theta^-(\cdot, T_0), r(\cdot, T_0)\big) \\ &\leqslant \lambda\big(\|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F})} + \|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\big) + c\|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} \leqslant C\varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 3.3 применима и к $(\boldsymbol{u}'', \theta'', r'')$. Поэтому из неравенства (3.31) и из гладкости $\boldsymbol{u}'' \in W_2^{2+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)$ и $\theta'' \in W_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)$ вытекает принадлежность $r(\cdot, T)$ к $W_2^{5/2+l}(\mathcal{G})$ ввиду того, что в силу краевых условий с операторами $\mathcal{B}_0^\pm$ в (3.1) r является решением эллиптических уравнений второго порядка на $\mathcal{G}$ с правыми частями из $W_2^{1/2+l}(\mathcal{G})$. Значит, условия локальной теоремы существования выполнены, если взять в неравенствах (3.32) уменьшенное ε. Это даёт нам возможность продолжать решение $(\boldsymbol{u}, \theta, r)$ на интервалы $(T_0, 2T_0)$, $\ldots, (kT_0, (k+1)T_0), \ldots$ вплоть до бесконечного интервала $t > 0$ путем многократного применения полученного локального результата и завершить доказательство теоремы 3.2 так же, как в [18].

Итак, предположим, что решение уже найдено для $t \leqslant kT_0$. Тогда его можно определить для $t \in (kT_0, (k+1)T_0]$ как решение задачи с начальными условиями $\boldsymbol{u}(z, kT_0) = \boldsymbol{u}(z, kT_0 - 0) \equiv \boldsymbol{u}_k(z)$, $\theta^-(z, kT_0) = \theta^-(z, kT_0 - 0) \equiv \theta_k^-(z)$, $r(z, kT_0) = r(z, kT_0 - 0) \equiv r_k(z)$.

Рассмотрим случай $k = 1$. Из (3.11) и (3.12) следует, что

$$N_1 \equiv N(\boldsymbol{u}_1, \theta_1^-, r_1) \leqslant C\varepsilon.$$

Следовательно, заменив ε на $C^{-1}\varepsilon$, мы видим, что эта задача разрешима в интервале времени $(T_0, 2T_0]$ и, согласно (3.32), выполняются оценки

$$\begin{gathered} Y_1(\boldsymbol{u}, \theta, r) \leqslant c\Big\{N_1 + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0, 2T_0})}\Big\}, \\ N_2 \leqslant \lambda N_1 + c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0, 2T_0})} \leqslant C\varepsilon, \end{gathered}$$

где

$$N_k \equiv N_{T_0}(\boldsymbol{u}_k, \theta_k^-, r_k), \qquad Y_k(\boldsymbol{u}, \theta, r) \equiv Y_{kT_0, (k+1)T_0}(\boldsymbol{u}, \theta, r).$$

Если решение найдено для $t \leqslant kT_0$ и доказаны неравенства

$$\begin{aligned} & N_j^2 \leqslant \lambda^2 N_{j-1}^2 + c\|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{(j-1)T_0, jT_0})}, \quad \lambda < 1, \\ & Y_j^2 \leqslant c\Big\{N_j^2 + \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{(j-1)T_0, jT_0})}\Big\}, \quad j = 1, \ldots, k-1, \end{aligned} \tag{3.33}$$

тогда

$$\begin{aligned} N_j^2 &\leqslant \lambda^2 N_{j-1}^2 + c\|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{(j-1)T_0, jT_0})} \leqslant \ldots \\ &\leqslant \lambda^{2j} N_0^2 + c\sum_{i=0}^{j-1} \lambda^{2(j-1-i)} \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{iT_0, (i+1)T_0})} \leqslant c\lambda^{2(j-1)}\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

с константами c, не зависящими от j. (Здесь мы использовали неравенства (3.20) для $\boldsymbol{f}$.) Поскольку $\lambda^j \to 0$ при $j \to \infty$, то правая часть (3.34) меньше ε^2 при $j \geqslant j_0$, и замена ε на $C^{-1}\varepsilon$ должна быть произведена лишь конечное число раз.

Пусть $\lambda_1 > \lambda$ ($\lambda_1 = \mathrm{e}^{-\alpha T_0}$, $\alpha < \alpha_1$). Просуммируем (3.33), умноженные на λ_1^{-2j}. Это приводит к

$$\sum_{j=0}^{k} \lambda_1^{-2j} N_j^2 \leqslant N_0^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} \sum_{j=1}^{k} \lambda_1^{-2j+2} N_{j-1}^2 + c \sum_{j=1}^{k} \lambda_1^{-2j} \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{(j-1)T_0, jT_0})}$$

$$\leqslant \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda^2} N_0^2 + \frac{c\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda^2} \sum_{j=1}^{k} \lambda_1^{-2j} \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{(j-1)T_0, jT_0})}.$$

Наконец, переходя к пределу по $k \to \infty$ в

$$\sum_{j=0}^{k} \lambda_1^{-2j} Y_j^2(\boldsymbol{u}, q, r) \leqslant c \Big\{ N_0^2 + \sum_{j=0}^{k} \lambda_1^{-2j} \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{jT_0, (j+1)T_0})} \Big\},$$

мы приходим к неравенству, эквивалентному (3.21). □

§4. Заключение

Заметим, что при отсутствии вращения границей раздела является сфера. Её устойчивость, т. е. оценка (2.5) для неё, доказана, например, в работе Солонникова [22]. При малых угловых скоростях для двухслойной несжимаемой жидкости фигуры равновесия близки к вложенным сплюснутым сфероидам.

На основании теоремы 3.2 можно заключить, что при достаточной малости начальных данных, экспоненциально убывающих массовых силах, близости начальных поверхностей к границам фигур равновесия и положительной определённости квадратичной формы (2.4) для них задача (1.19) разрешима на бесконечном промежутке времени, причём её решение экспоненциально стремится к нулю. Это означает, что данные равновесные фигуры устойчивы, а решение проблемы (1.1) при $t \to \infty$ сходится к решению $(\mathcal{V}, \mathcal{P})$ стационарной задачи (1.7), (1.8), описывающей вращение двухфазной жидкой массы как твёрдого тела.

Список литературы

1. А. М. Ляпунов, *Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости.* — Издание АН (1884).
2. А. М. Ляпунов, *Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости.* — Собр. сочин., АН СССР, М., **3** (1959), 5–113.
3. К. В. Холшевников, *О теории Ляпунова фигур равновесия небесных тел.* — Вестник СПбГУ, **1**, No. 2 (2007), 39–48.

4. В. А. Солонников, *Об устойчивости осесимметрических фигур равновесия вращающейся вязкой несжимаемой жидкости.* — Алгебра и анализ, **16**, No. 2 (2004), 120–153.
5. V. A. Solonnikov, *On problem of stability of equilibrium figures of uniformly rotating viscous incompressible liquid*, in: Instability in models connected with fluid flows. II, Int. Math. Ser. **7** (2008) Springer, New York, 189–254.
6. И. В. Денисова, *Существование фигур равновесия вращающейся капиллярной двухфазной жидкости.* — Алгебра и анализ, **36**, No. 3 (2024), 62–80.
7. V. A. Solonnikov, *On the model problem arising in the study of motion of viscous compressible and incompressible fluids with a free interface.* — Алгебра и анализ, **30**, No. 2 (2018), 274–317.
8. V. A. Solonnikov, *L_2-theory for two viscous fluids of different types*: *compressible and incompressible.* — Алгебра и анализ, **32**, No. 1 (2020), 121–186.
9. И. В. Денисова, *Линейная задача об устойчивости вращения двухфазной жидкой массы.* — Препринт Санкт-Петербургского математического общества, 2026-02, СПб (2026), 33с. `http://www.mathsoc.spb.ru/preprint`
10. И. В. Денисова, *Глобальная разрешимость линейной задачи о вращении конечной массы капиллярной двухфазной жидкости.* — Материалы 52 школы-конференции «Актуальные проблемы механики» Памяти Н.Ф. Морозова. Тезисы докладов конференции. Санкт–Петербург (2025), 184–185.
11. I. V. Denisova, V. A. Solonnikov, *Rotation Problem for a Two-Phase Drop.* — J. Math. Fluid Mech., **24**(2), 40 (2022), 26 p.
12. I. V. Denisova, V. A. Solonnikov, *Stability of the Rotation of a Two-Phase Drop with Self-Gravity.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **508** (2021), 89–123.
13. I. V. Denisova, *Evolution of compressible and incompressible fluids separated by a closed interface.* — Interfaces Free Bound. **2**, No. 3 (2000), 283–312.
14. V. A. Solonnikov, A. Tani, *Free boundary problem for a viscous compressible flow with surface tension.* — Constantin Carathéodory: An International Tribute, World Scientific (1991), 1270–1303.
15. I. V. Denisova, V. A. Solonnikov, *Hölder Space Theory for the Rotation Problem of Two-Phase Drop.* — Mathematics, **10**, No. 24 (2022), 4799.
16. В. Бляшке, *Элементарная дифференциальная геометрия*, ОНТИ, М.-Л., 1935.
17. В. А. Солонников, *Оценка обобщенной энергии в задаче со свободной границей для вязкой несжимаемой жидкости.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **282** (2001), 216–243.
18. I. V. Denisova, V. A. Solonnikov, *L_2-theory for two incompressible fluids separated by a free interface.* — Topol. Methods Nonlinear Anal., **52** (2018), 213–238.
19. И. В. Денисова, В. А. Солонников, *Движение капли в несжимаемой жидкости.* — Лань, Санкт-Петербург (2020), 296 с. (ISBN 978-5-8114-4896-8. Текст: электронный, Лань, электронно-библиотечная система. URL: https://e.lanbook.com/book/142329).
20. M. Padula, V. A. Solonnikov, *On the local solvability of free boundary problem for the Navier – Stokes equations.* — Problemy Mat. Analiza, **50** (2010), 87–112.
21. В. А. Солонников, *On the stability of uniformly rotating viscous incompressible self-gravitating liquid.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **348** (2007), 165–208.

22. В. А. Солонников, *О неустановившемся движении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **152** (1986), 137–157.

Denisova I. V. On the stability of rotation of a two-phase fluid with a free boundary.

We study the stability of an axisymmetric equilibrium figure consisting of two viscous capillary fluids, one compressible and one incompressible, rotating about the x_3 axis with a small angular velocity. It is assumed that the incompressible fluid is located strictly inside the compressible one. The perturbation of this motion is governed by interface problem for the Navier–Stokes system.

A global unique solvability of this problem in Sobolev–Slobodetskiĭ spaces is obtained for small initial data, external forces, and rotational velocity, as well as for the given initial surfaces close to certain axisymmetric equilibrium figures. It is proved that if the quadratic form of the boundary operator is positive definite, then a small perturbation of the axisymmetric equilibrium figure exponentially tends to zero as $t \to \infty$, and the motion of the two-phase drop transforms into the rotation of the liquid mass as a solid body.

Институт проблем машиноведения
Российской академии наук
В.О., Большой проспект 61, С.-Петербург 199178, Россия
E-mail: denisovairinavlad@gmail.com, div@ipme.ru

Поступило 5 марта 2026 г.