Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 550, 2026 г.

Д. В. Быстров

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРИТИЧЕСКИМ РОСТОМ ПРАВОЙ ЧАСТИ НА МНОГООБРАЗИИ

Пусть (M, g) – замкнутое n-мерное ($n \geqslant 2$) риманово многообразие, $\Omega \subset M$ – область на M со строго липшицевой границей.

Настоящее краткое сообщение посвящено вопросу о существовании решения с наименьшей энергией задачи Неймана

$$-\Delta_p u + u^{p-1} = u^{p^*-1} \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{1}$$

Здесь $\Delta_p u := \operatorname{div}\left(|Du|^{p-2}Du\right)$ – оператор p-Лапласа, $1 < p < n$ и $p^* = \frac{np}{n-p}$ – критический показатель вложения пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$.

Функционал энергии для задачи (1) имеет вид

$$\mathbf{E}_\Omega[u] := \frac{\|u\|_{W_p^1(\Omega)}}{\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)}} = \frac{\left(\int\limits_\Omega |Du|^p + \int\limits_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_\Omega |u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}}, \qquad u \in W_p^1(\Omega) \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Несложно видеть, что критические точки функционала (2) являются (после подходящей перенормировки) слабыми решениями задачи (1). В частности, решением с наименьшей энергией называется (положительная) функция, на которой достигается инфимум

$$\lambda(p, \Omega) := \inf_{v \in W_p^1(\Omega)\setminus\{0\}} \mathbf{E}_\Omega[u]. \tag{3}$$

Ключевые слова: квазилинейные уравнения на многообразии, задача Неймана, критический показатель, p-лапласиан, выпуклые области.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН) и Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

Поскольку вложение $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_{p^*}(\Omega)$ некомпактно, то вопрос о достижимости инфимума $\lambda(p, \Omega)$ нетривиален.

Хорошо известно, что если Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, то инфимум

$$\inf_{v \in \mathring{W}_p^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)}}{\|u\|^p_{L_{p^*}(\Omega)}}$$

не достигается, не зависит от Ω и равен $\frac{1}{K(n,p)}$, где

$$K(n,p) = \sup_{v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)}}{\|\nabla v\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}$$

$$= \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} n^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p'}} \mathcal{B}\left(\frac{n}{p}, \frac{n}{p'} + 1\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Здесь и далее $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $p' = \frac{p}{p-1}$ – сопряженный к p показатель, а $\mathcal{B}$ – бета-функция Эйлера. Отметим, что супремум в этой формуле достигается только на **нефинитных** радиально симметричных функциях

$$w_\varepsilon(|x|) \equiv w_\varepsilon(r) := \left(\varepsilon + r^{p'}\right)^{1-\frac{n}{p}}, \qquad \varepsilon > 0, \tag{4}$$

и на функциях, получаемых из них сдвигами и гомотетиями.

Замечание 0.1. Очевидно, что $u(x) \equiv 1$ является решением задачи (1), однако, как показано в [5, предложение 3.1], если область достаточно велика, то константа не является решением с наименьшей энергией.

Решения с наименьшей энергией задачи (1) при $p = 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ изучались в [1] и [7]. Было показано, что такое решение существует в любой области с границей класса $\mathcal{C}^2$.

Результат [1] и [7] был обобщен в работе [2], где было получено, что решение с наименьшей энергией задачи (1) для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ с $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ существует при $1 < p < \frac{n+1}{2} + \beta$, где $\beta = \beta(\Omega) > 0$. В этой же работе было показано, что условие на гладкость границы является существенным: если Ω – многогранник в $\mathbb{R}^n$ и $1 < p < n$, то в растянутой области

$$\Omega_R = \{Rx : x \in \Omega\}$$

при достаточно больших $R > 0$ решения с наименьшей энергией задачи (1) не существует.

Более того, в работе [2] также рассматривался случай, когда Ω само является многообразием без края, то есть $\Omega = M$. Было получено, что если $n \geqslant 5$ и на Ω есть точка с положительной скалярной кривизной, то решение с наименьшей энергией задачи (1) существует при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$, где $\beta = \beta(\Omega) > 0$.

Отметим, что если $n \geqslant 2$, $1 < p < n$ и $\Omega \subset M$ – область со строго липшицевой границей, то решение с наименьшей энергией в Ω_R всегда существует для достаточно малого $R > 0$ (ср. [5, теорема 1.1]).

Мы рассматриваем задачу (1) без условия гладкости $\partial\Omega$, заменяя его на условие локальной выпуклости. Это означает, что для любой точки $y \in \partial\Omega$ существует $\delta > 0$ такое, что множество

$$\mathbb{V}_\delta(y) := \exp_y^{-1}\left(B_\delta(y) \cap \Omega\right) \subset T_y M$$

выпукло (здесь и далее $\exp_y : T_y M \to M$ – экспоненциальное отображение, а $B_\delta(y)$ – геодезический шар на M радиуса δ с центром в точке y).

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 5$. Пусть Ω – локально выпуклая область на сфере $\mathbb{S}^n_R$. Тогда существует $\beta = \beta(\Omega) > 0$, такое что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.*

Следующая теорема показывает, что результат теоремы 1 является точным. Пусть $\Omega = \mathbb{S}^n_{R,+}$ – полусфера радиуса R.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 2$, $\frac{n+2}{3} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$ такое, что для любого $R > R^*$ инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}^n_{R,+})$ не достигается.*

Назовём телесным углом локально выпуклой области Ω в точке $y \in \partial\Omega$ величину

$$\alpha(y) := \lim_{r \to 0} \frac{|S_r(y) \cap \Omega|_{n-1}}{r^{n-1}} = |\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{K}(y)|_{n-1},$$

где $S_r(y)$ – геодезическая сфера на M, а $\mathbb{K}(y)$ – касательный конус к множеству $\mathbb{V}_\delta(y)$ в начале координат. Несложно видеть, что $\alpha(y) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{2}$. А если y – точка гладкости $\partial\Omega$, то $\alpha(y) = \frac{\omega_{n-1}}{2}$.

Определим теперь следующую величину:

$$\alpha_\Omega := \inf_{y \in \partial\Omega} \alpha(y).$$

Доказательство теоремы 1 основано на следующем ключевом техническом результате.

Теорема 3. *Пусть инфимум в* (3) *удовлетворяет условию*

$$\lambda(p,\Omega) < \frac{(\alpha_\Omega/\omega_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{K(n,p)}. \tag{5}$$

Тогда этот инфимум достигается.

Для доказательства теоремы 3 рассматривается $\{v_k\}$ – нормированная в $L_{p^*}(\Omega)$ минимизирующая последовательность для функционала (2). Не умаляя общности, можно считать, что $v_k \rightharpoonup v$ в $W_p^1(\Omega)$. Аналогично доказательству [4, теорема 2.2], получим альтернативу: либо функция v реализует минимум в (3), либо $v = 0$ и при этом

$$|v_k|^{p^*} \rightharpoonup \delta(x-x_0), \quad |Dv_k|^p \rightharpoonup \lambda^p(p,\Omega)\delta(x-x_0) \tag{6}$$

в пространстве мер на $\overline{\Omega}$.

Используя результаты об изопериметрических свойствах множеств в выпуклых областях [6] и выпуклых конусах [3], а также специальную симметризацию, введённую в [4], мы доказываем, что соотношение (6) противоречит условию (5), что и доказывает теорему.

Схема доказательства Теоремы 1. Прежде всего показывается, что телесный угол $\alpha(y)$ полунепрерывен снизу, и потому существует $y_0 \in \partial\Omega$ такая, что $\alpha(y_0) = \alpha_\Omega$. Введём функцию

$$u_\varepsilon(x) := u_\varepsilon(r) := \varphi_\rho(r) w_\varepsilon(r), \tag{7}$$

где r – расстояние на сфере от x до y_0, w_ε определена в (4), а φ_ρ – гладкая срезка, равная 1 в $B_\rho(y_0)$ и 0 вне $B_{2\rho}(y_0)$.

Модифицируя вычисления из [2], мы показываем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$ выполнено неравенство

$$\mathbf{E}[u_\varepsilon] < \frac{(\alpha_\Omega/\omega_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{K(n,p)},$$

откуда следует (5), и теорема 3 гарантирует существование минимизирующей функции. $\square$

Сформулируем аналогичную теорему для многообразия M общего вида. Её доказательство повторяет доказательство теоремы 1 без существенных изменений.

Теорема 4. *Пусть $n \geqslant 5$. Пусть $\Omega \subset M$ – локально выпуклая область, а точка $y_0 \in \partial\Omega$ такова, что $\alpha(y_0) = \alpha_\Omega$. Предположим, что тензор Риччи в точке y_0 удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}\cap\mathbb{K}(y_0)} Ric_{y_0}(\omega,\omega)dS_\omega > 0.$$

Тогда существует $\beta > 0$, такое что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.

Схема доказательства теоремы 2. Несложно видеть, что инфимумы $\lambda(p, \mathbb{S}^n_R)$ и $\lambda(p, \mathbb{S}^n_{R,+})$ достигаются или не достигаются одновременно, и выполнено соотношение $\lambda(p, \mathbb{S}^n_R) = 2^{\frac{1}{n}}\lambda(p, \mathbb{S}^n_{R,+})$.

Предположим, что значения R, при которых инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}^n_R)$ достигается, образуют неограниченную последовательность. Пусть $\{u_R\}$ – соответствующие минимизирующие функции. Стандартное рассуждение показывает, что u_R можно считать положительными. Рассмотрим на $\mathbb{S}^n_1$ функции

$$v_R(x) := C(R)u_R(Rx),$$

где константа $C(R)$ подбирается так, чтобы $\|v_R\|_{p^*,\mathbb{S}^n} = 1$. Тогда

$$\|Dv_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n} + R^p\|v_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n} = \lambda^p(p, \mathbb{S}^n_R). \tag{8}$$

Поскольку $\lambda(p, \mathbb{S}^n_R) \leqslant \frac{1}{K(n,p)}$, из (8) следует, что $\|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n} \to 0$. Аналогично доказательству [2, теорема 7.2] показывается, что $|v_R|^{p^*} \rightharpoonup \delta(x - y_0)$ в пространстве мер на $\mathbb{S}^n_1$ для некоторого $y_0 \in \mathbb{S}^n_1$. Отсюда в свою очередь следует, что $v_R \rightrightarrows 0$ на множестве $\mathbb{S}^n_1 \setminus B_\rho(y_0)$ для любого заданного $\rho > 0$.

Домножая v_R на срезку $\varphi_\rho(r)$ (см. (7)), из [2, теорема 3.2] выводим, что для достаточно малого $\rho > 0$

$$\|\varphi_\rho v_R\|_{p^*,\mathbb{S}^n} \leqslant K(n,p)\|D(\varphi_\rho v_R)\|_{p,\mathbb{S}^n}. \tag{9}$$

Повторяя рассуждения из доказательства [2, теорема 7.2], из (8) и (9) получаем противоречие при больших R. □

Я благодарен А. И. Назарову за постановку задачи и внимание к работе, а также С. В. Иванову за полезные советы.

Список литературы

1. Adimurthi, G. Mancini, *The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity*, Nonlinear Analysis, Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni (1991), 9–25.
2. А. В. Демьянов, А. И. Назаров, *О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем.* — Алгебра и Анализ **17**, No. 5 (2005), 105—140.
3. P.-L. Lions, F. Pacella, *Isoperimetric Inequalities for Convex Cones.* — Proc. Am. Math. Soc. **109**, No. 2 (1990), 477–485.
4. P.-L. Lions, F. Pacella, M. Tricarico, *Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions.* — Indiana Univ. Math. J. **37**, No. 2 (1988), 301–324.
5. А. И. Назаров, А. П. Щеглова, *О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева.* — Нелин. задачи и теория функций (ПМА. Вып.**27**). Новосиб., Т. Рожковская (2004), 109–136.
6. M. Ritoré, E. Vernadakis, *Isoperimetric inequalities in Euclidean convex bodies.* — Trans. Amer. Math. Soc. **367**, No. 7 (2015), 4983–5014.
7. X. J. Wang, *Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* — J. Diff. Eqs. **93**, No. 2 (1991), 283–310.

Bystrov D. V. On solvability of the Neumann problem for quasilinear equations with critical growth of the right-hand side on a manifold.

We consider the Neumann problem in a manifold domain for an equation driven by the p-Laplacian with a critical right-hand side. We provide some sharp sufficient conditions for the existence of the least energy solution, requiring only local convexity of the domain. Similar results were previously known for domains with smooth boundaries.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7–9,
Санкт-Петербург 199034, Россия
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: danil.bystrovv@gmail.com

Поступило 4 октября 2025 г.