Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 550, 2026 г.

Ф. Бахарев, С. Матвеенко

ДРОБНЫЙ ЛАПЛАСИАН В ИСКРИВЛЕННОЙ ПОЛОСЕ

§1. Введение

Основная цель данной работы – обобщить некоторые классические результаты спектральной теории для оператора Лапласа с условием Дирихле в изогнутых волноводах на случай нелокальных операторов, а именно, суженного дробного лапласиана.

Для стандартного лапласиана с условиями Дирихле в квантовых волноводах (областях с цилиндрическими выходами на бесконечность) разработана теория, описывающая влияние геометрических деформаций на спектр. Хорошо известно, что прямой квантовый волновод обладает чисто непрерывным спектром, ограниченным снизу первым собственным числом аналогичной задачи на поперечном сечении. Однако геометрические возмущения, такие как изгиб или локальное расширение, могут приводить к появлению собственных чисел ниже указанного порога, представляющие собой “захваченные моды” или связанные состояния. В фундаментальных работах в этой области (см., например, [1, 2, 3, 4]) устанавливается, что в изогнутых волноводах собственные числа возникают независимо от малости кривизны. Отметим, что скручивание волновода, напротив, может препятствовать существованию связанных состояний [5, 3].

Спектральная теория для нелокальных операторов в неограниченных областях существенно менее разработана, несмотря на ее важную роль в физике и теории вероятностей. Дробные лапласианы $(-\Delta)^\alpha$ естественным образом возникают в релятивистской квантовой механике при описании кинетической энергии частицы с пренебрежимо малой массой [6, 7]. В контексте стохастических процессов эти операторы порождают процессы Леви, которые обобщают броуновское движение,

---

Ключевые слова: суженный дробный лапласиан, плоский волновод, спектр задачи Дирихле.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 19-71-30002.

допуская разрывные траектории и описывая тем самым эффекты распределений с тяжелыми хвостами (heavy-tailed в английской терминологии) в задачах аномальной диффузии [8, 9].

Одна из особенностей постановки задачи для нелокальных операторов – разнообразие возможных определений условия Дирихле на границе. Один из подходов заключается в том, чтобы представить оператор как спектральную степень $(-\Delta_\Omega)^\alpha$ обычного оператора Лапласа с условиями Дирихле. В этом случае изучение спектральных свойств сводится к анализу стандартного лапласиана. Другой способ, используемый в данной работе, заключается в рассмотрении так называемого суженного (restricted) дробного лапласиана $\mathcal{A}_\alpha^\Omega$. Определим этот оператор с помощью квадратичной формы

$$a_\alpha^\Omega[u] = (\mathcal{A}_\alpha^\Omega u, u) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\xi|^{2\alpha} |\mathcal{F}_m u(\xi)|^2 \, d\xi, \tag{1}$$

где $\alpha \in (0,1)$ и $\mathcal{F}_m$ – m-мерное преобразование Фурье

$$\mathcal{F}_m u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-i\xi\cdot x} u(x) \, dx.$$

Квадратичная форма (1) определена на функциях из пространства Соболева $H^\alpha(\mathbb{R}^m)$ с носителями в $\overline{\Omega}$:

$$\mathrm{Dom}(a_\alpha^\Omega) = \widetilde{H}^\alpha(\Omega) := \left\{ u \in H^\alpha(\mathbb{R}^m) : \operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega} \right\}.$$

В последние годы был получен ряд важных результатов, касающихся суженного дробного лапласиана в неограниченных областях. В работе [10] была получена аналогичная локальному случаю характеризация существенного спектра дробного лапласиана в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность. Для V-образного волновода в недавней работе [11] доказано, что при любом угле излома ниже точки отсечки существенного спектра возникает собственное число.

В настоящей работе мы изучаем появление дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_\alpha^\Omega$ в гладко изогнутом волноводе. Мы рассматриваем только эффект изгиба и исключаем скручивание, предполагая, что поперечное сечение не вращается вдоль оси волновода. Более того, для простоты изложения мы ограничимся плоским волноводом, то есть полосой в $\mathbb{R}^2$, изогнутой вдоль гладкой плоской кривой.

Стандартный прием, применяемый при изучении дробного лапласиана – продолжение Каффарелли–Сильвестра [12], которое преобразует нелокальную задачу на $\mathbb{R}^m$ в локальную задачу на полупространстве $\mathbb{R}^{m+1}_+$. Спецификой рассматриваемых в [11] изломанных V-образных волноводов является наличие конгруэнтных сечений, параллельных выделенной гиперплоскости. Благодаря этому пробные функции удобно строить, комбинируя продолжения Каффарелли–Сильвестра на таких параллельных сечениях: дополнительная переменная может быть введена единообразно, и "надстройки" в расширенное пространство не создают геометрических противоречий при склейке. В случае же искривленного волновода естественный выбор – сечения, ортогональные оси волновода, – приводит к принципиально иной картине: эти сечения уже не параллельны. Поэтому "надстройки" в расширенном пространстве неизбежно перекрываются. Даже при усечении продолжения на конечном расстоянии от оси волновода такое перекрытие возникает, как только это расстояние становится сравнимым с радиусом кривизны. В результате продолжения на сечениях нельзя рассматривать независимо друг от друга, что отражает связь между геометрически удаленными участками волновода и существенно осложняет построение пробных функций.

Наш основной результат состоит в том, что при $\alpha \in (1/2, 1)$ и определенных геометрических ограничениях на изгиб волновода у суженного дробного лапласиана действительно возникают собственные значения, то есть его дискретный спектр не пуст. В отличие от локального случая, где обычно предполагается лишь малость кривизны в норме $\|\kappa\|_\infty$, в нашей схеме естественным образом появляются два независимых параметра: один характеризует величину кривизны, а второй описывает протяженность изгиба вдоль волновода. Оценивая, как эти параметры совместно влияют на "силу взаимодействия" между поперечными сечениями в расширенном пространстве, мы строим пробную функцию, для которой соответствующее отношение Рэлея оказывается ниже точки отсечки существенного спектра.

Работа имеет следующую структуру. В секции 2 собраны необходимые для дальнейшего изложения свойства продолжения Каффарелли–Сильвестра. В секции 3 описывается геометрия волновода и вводятся используемые системы координат. Секция 4 содержит предварительные сведения о спектре. Секция 5 посвящена вспомогательным энергетическим оценкам. В секции 6 доказывается основной результат о существовании собственного числа ниже точки отсечки существенного спектра.

Для обозначения различных положительных констант мы используем буквы C и c (с индексами или без них). Чтобы указать, что C зависит от некоторых параметров, мы перечисляем их в скобках: $C(\dots)$.

§2. Продолжение Каффарелли–Сильвестра

Связь между дробными операторами и обобщенными гармоническими продолжениями впервые была обнаружена в работе [13], а впоследствии получила широкую известность благодаря исследованию [12]. Продолжение Каффарелли–Сильвестра функции u из пространства $\widetilde{H}^\alpha(\Omega)$ определяется сверткой

$$U(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathcal{P}_\alpha(x-\widetilde{x},y)u(\widetilde{x})\,d\widetilde{x}, \quad x \in \mathbb{R}^m,\ y>0,$$

с обобщенным ядром Пуассона

$$\mathcal{P}_\alpha(x,y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+2\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(\alpha)} \frac{y^{2\alpha}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{m}{2}+\alpha}}.$$

Подчеркнем, что функции из $\widetilde{H}^\alpha(\Omega)$ определены во всем $\mathbb{R}^m$ и обращаются в ноль вне Ω.

Функция U минимизирует весовой интеграл Дирихле

$$\mathcal{E}_\alpha^\Omega(W) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^m} y^{1-2\alpha}|\nabla W(x,y)|^2 dxdy \tag{2}$$

на множестве допустимых продолжений функции u:

$$\mathcal{W}_\alpha^\Omega(u) = \{W = W(x,y)\colon \mathcal{E}_\alpha^\Omega(W) < \infty,\ W|_{y=0} = u\}.$$

Более того, продолжение Каффарелли–Сильвестра является решением краевой задачи

$$-\operatorname{div}\left(y^{1-2\alpha}\nabla U\right) = 0, \qquad U(x,0) = u(x).$$

Наконец, суженный дробный лапласиан Дирихле выражается через продолжение Каффарелли–Сильвестра следующим образом

$$\mathcal{A}_\alpha^\Omega u = -c_\alpha \lim_{y\to 0+} y^{1-2\alpha}\partial_y U(\cdot,y), \quad \text{где} \quad c_\alpha = \frac{4^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{2\alpha\Gamma(1-\alpha)},$$

а квадратичные формы (1) и (2) пропорциональны:

$$a_\alpha^\Omega[u] = c_\alpha \mathcal{E}_\alpha^\Omega(U). \tag{3}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение о весовой квадратичной суммируемости продолжения Каффарелли–Сильвестра (см. лемму 1 в [10]).

Лемма 2.1. *Пусть $m > 2 - 2\alpha$. Тогда для любой ограниченной области Ω в $\mathbb{R}^m$ продолжение Каффарелли–Сильвестра U функции $u \in H^\alpha(\Omega)$ удовлетворяет неравенству*

$$\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} y^{1-2\alpha} |U(x,y)|^2 \, dx \, dy < +\infty.$$

Напомним, что для упрощения обозначений мы работаем в двумерной геометрии. В этом случае поперечные сечения волновода одномерны, поэтому $m = 1$ и условие леммы 2.1 выполнено только при $\alpha \in (1/2, 1)$. В волноводах большей размерности, изгибаемых вдоль плоской кривой без скручивания, поперечные сечения имеют размерность $m \geq 2$, и условие $m > 2 - 2\alpha$ выполняется автоматически. Поэтому результат, аналогичный теореме 6.1, верен при всех $\alpha \in (0,1)$.

§3. Геометрия изогнутой полосы

На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим кривую $\gamma \in C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, с нормальной параметризацией, вдоль которой производится изгибание полосы. В трубчатой окрестности γ вводим координаты s (длина дуги кривой) и n (ориентированное расстояние до кривой по нормали). Введем обозначения для касательного вектора, нормали и кривизны

$$\tau(s) = \dot\gamma(s), \qquad \nu(s) = (-\dot\gamma_2(s), \dot\gamma_1(s)), \qquad \kappa(s) = \dot\gamma_2(s)\ddot\gamma_1(s) - \dot\gamma_1(s)\ddot\gamma_2(s)$$

так, что выполняются формулы Френе

$$\dot\tau(s) = -\kappa(s)\,\nu(s), \qquad \dot\nu(s) = \kappa(s)\,\tau(s),$$

и (τ, ν) образуют ортонормированный положительно ориентированный репер.

Предположим, что

$$\operatorname{supp} \kappa \subset [-\ell, \ell], \tag{4}$$

и выберем $\rho > a > 0$ так, чтобы нормальная параметризация трубчатой окрестности

$$\mathscr{X} : \Pi_\rho := \mathbb{R} \times (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}^2, \qquad x = \mathscr{X}(s,n) = \gamma(s) + n\,\nu(s),$$

была C^2-диффеоморфизмом на свой образ $\Omega_\rho := \mathscr{X}(\Pi_\rho)$. Изогнутую полосу полуширины a определим формулой

$$\Omega_a := \{x = \mathscr{X}(s,n) : \ |n| < a\} \subset \Omega_\rho.$$

Более широкая трубчатая окрестность далее используется для построения пробных функций и срезок.

Дифференцируя отображение $\mathscr{X}$ и используя формулы Френе, получаем соотношения

$$\partial_s \mathscr{X} = (1 + \kappa(s)n)\,\tau, \qquad \partial_n \mathscr{X} = \nu.$$

Следовательно, координатные линии ортогональны, а якобиан отображения $\mathscr{X}$ задается формулой

$$J(s,n) := \det D\mathscr{X}(s,n) = 1 + \kappa(s)n. \tag{5}$$

Заметим, что $\mathscr{X}$ является диффеоморфизмом Π_ρ на Ω_ρ, если выполнено условие, исключающее фокальные точки:

$$0 < \rho < \|\kappa\|_\infty^{-1} \quad \Longrightarrow \quad J(s,n) \geq 1 - \rho\|\kappa\|_\infty > 0 \ \text{ на } \Pi_\rho.$$

Далее, компоненты метрического тензора $g = (D\mathscr{X})^\top D\mathscr{X}$ имеют вид

$$g_{ss}(s,n) = (1 + \kappa(s)n)^2, \qquad g_{sn}(s,n) = 0, \qquad g_{nn}(s,n) = 1,$$

а компоненты обратного тензора выражаются соотношениями

$$g^{ss}(s,n) = (1 + \kappa(s)n)^{-2}, \qquad g^{sn}(s,n) = 0, \qquad g^{nn}(s,n) = 1.$$

Для гладкой функции $u = u \circ \mathscr{X}$ имеем

$$|\nabla_x u|^2 = g^{ss}|\partial_s u|^2 + g^{nn}|\partial_n u|^2 = J^{-2}|\partial_s u|^2 + |\partial_n u|^2.$$

Замечание 3.1. В секции 6, при построении пробных функций, мы будем дополнительно предполагать, что $\rho > \sigma a$ с некоторой фиксированной константой $\sigma > 1$; для определенности ниже берется $\sigma = 2$. Это условие носит чисто технический характер, а все возникающие далее оценки зависят от него лишь через безразмерное отношение a/ρ.

§4. Предварительные сведения о спектре

Предполагаем далее, что выходы рассматриваемой искривленной полосы на бесконечность не сонаправлены. В этом случае, как и для классического лапласиана, существенный спектр $\mathcal{A}_\alpha^{\Omega_a}$ заполняет луч с точкой отсечки λ_1, равной первому собственному числу соответствующего дробного лапласиана на сечении – отрезке $[-a,a]$ (см. [10]). Ввиду соотношения (3) спектральная задача для собственной пары (λ_1, u_1) допускает вариационную переформулировку

$$c_\alpha \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty y^{1-2\alpha} \nabla U_1(n,y) \nabla \Phi(n,y) dndy = \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^\infty u_1(n)\varphi(n)dn, \qquad \forall \varphi \in \widetilde{H}^\alpha(-a,a), \tag{6}$$

где U_1 – продолжение Каффарелли–Сильвестра функций u_1, а $\Phi \in \mathcal{W}(\varphi)$. Функцию u_1 считаем нормированной соотношением

$$\int\limits_{-a}^{a} |u_1(n)|^2 \, dn = 1.$$

Для доказательства существования спектра ниже λ_1 у оператора $\mathcal{A}_\alpha^{\Omega_a}$ по максиминимальному принципу достаточно предъявить ненулевую функцию $w \in \widetilde{H}^\alpha(\Omega_a)$, для которой отношение Рэлея меньше λ_1:

$$\frac{a_\alpha^\Omega[w]}{\|w\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}} < \lambda_1.$$

Для этого достаточно построить функцию $W \in \mathcal{W}(w)$ (допустимое продолжение функции w) такую, что

$$\mathcal{Q}(W) := \frac{c_\alpha}{\|w\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^2} y^{1-2\alpha} |\nabla W(x,y)|^2 dxdy < \lambda_1. \tag{7}$$

§5. Пересчет энергетического интеграла

Мы будем строить функцию W с носителем в $\Omega_\rho \times \mathbb{R}_+$ – это позволяет произвести распрямление координат. Начнем с выражения энергетического интеграла (2) для таких функций в распрямленных координатах.

На множестве $\Omega_\rho \times \mathbb{R}_+$ рассматриваем взвешенную меру $y^{1-2\alpha}\, dx\, dy$. Унитарное преобразование

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(s,n,y) &= J(s,n)^{1/2}\, W(\mathscr{X}(s,n),y), \\ \widetilde{w}(s,n) &= J(s,n)^{1/2}\, w(\mathscr{X}(s,n)) = \widetilde{W}(s,n,0), \end{aligned} \tag{8}$$

пересаживает (послойно по y) функцию W в распрямленную область $\Pi_\rho \times \mathbb{R}_+$:

$$\int\limits_{\Omega_\rho} |W|^2\, dx = \int\limits_{\Pi_\rho} |\widetilde{W}|^2\, ds\, dn \quad \text{при всех } y \in [0, +\infty).$$

Предложение 5.1. *Предположим, что функции W и $\widetilde{W}$ связаны соотношением* (8)*, интегралы ниже корректно определены и конечны, и $\widetilde{W}(\cdot, \pm\rho, \cdot) = 0$. Тогда*

$$c_\alpha \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Omega_\rho} y^{1-2\alpha} |\nabla W|^2\, dx\, dy = c_\alpha \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Pi_\rho} y^{1-2\alpha} \Big(J^{-2} \big|\partial_s \widetilde{W} + A\widetilde{W}\big|^2 + \big|\partial_n \widetilde{W}\big|^2 + |\partial_y \widetilde{W}|^2 + V|\widetilde{W}|^2 \Big)\, dn\, ds\, dy =: \mathcal{I}_s + \mathcal{I}_n + \mathcal{I}_y + \mathcal{I}_V, \quad (9)$$

где

$$A(s,n) = -\frac{n\kappa'(s)}{2J(s,n)}, \qquad V(s,n) = -\frac{|\kappa(s)|^2}{4|J(s,n)|^2}.$$

Замечание 5.1. Изгиб волновода порождает неположительный потенциал $V \le 0$. Вне области изгиба $|s| > \ell$ имеем $\kappa \equiv 0$, таким образом $A = 0$ и $V = 0$, и подынтегральное выражение становится таким, каким бы оно было для прямого, неизогнутого волновода.

Доказательство. Пусть

$$\overline{W}(s,n,y) := W(\mathscr{X}(s,n), y) = J^{-1/2} \widetilde{W}(s,n,y),$$

тогда

$$\int\limits_{\Omega_\rho} |\nabla_x W|^2\, dx = \int\limits_{\Pi_\rho} \Big[g^{ss} |\partial_s \overline{W}|^2 + g^{nn} |\partial_n \overline{W}|^2 \Big] J\, dsdn$$
$$= \int\limits_{\Pi_\rho} \Big[J^{-2} |\partial_s \overline{W}|^2 + |\partial_n \overline{W}|^2 \Big] J\, dsdn.$$

Частные производные из последнего интеграла перепишем с учетом формулы (5):

$$\partial_s \overline{W} = \partial_s (J^{-1/2} \widetilde{W}) = J^{-1/2} \Big(\partial_s \widetilde{W} - \frac{1}{2} n\kappa' J^{-1} \widetilde{W} \Big) = J^{-1/2} \big(\partial_s \widetilde{W} + A\widetilde{W} \big),$$

$$\partial_n \overline{W} = \partial_n (J^{-1/2}\widetilde{W}) = J^{-1/2}\Big(\partial_n \widetilde{W} - \frac{1}{2}\kappa J^{-1}\widetilde{W}\Big).$$

Интегрируя квадрат последнего выражения по частям по переменной n с учетом граничных условий $\widetilde{W}(\cdot, \pm\rho, \cdot) = 0$ и используя соотношение

$$\kappa J^{-1}\widetilde{W}\partial_n\widetilde{W} = \frac{1}{2}\partial_n\Big(\kappa J^{-1}\widetilde{W}^2\Big) + \frac{1}{2}\kappa^2 J^{-2}\widetilde{W}^2,$$

выводим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Pi_\rho} \Big|\partial_n\widetilde{W} - \frac{\kappa}{2}J^{-1}\widetilde{W}\Big|^2 \, dsdn \\
&\qquad = \int\limits_{\Pi_\rho} \Big(|\partial_n\widetilde{W}|^2 - \kappa J^{-1}\partial_n\widetilde{W}\cdot\widetilde{W} + \frac{\kappa^2}{4}J^{-2}|\widetilde{W}|^2\Big)\, dsdn \\
&\qquad = \int\limits_{\Pi_\rho} \Big(|\partial_n\widetilde{W}|^2 - \frac{1}{2}\partial_n\Big(\kappa J^{-1}\widetilde{W}^2\Big) - \frac{\kappa^2}{4}J^{-2}|\widetilde{W}|^2\Big)\, dsdn \\
&\qquad\qquad = \int\limits_{\Pi_\rho} \Big(|\partial_n\widetilde{W}|^2 - \frac{\kappa^2}{4}J^{-2}|\widetilde{W}|^2\Big)\, dsdn.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\int\limits_{\Omega_\rho} |\partial_y W|^2\, dx = \int\limits_{\Pi_\rho} |\partial_y \overline{W}|^2 J\, dsdn = \int\limits_{\Pi_\rho} |\partial_y\widetilde{W}|^2\, dsdn,$$

интегрируя полученные соотношения с весом $y^{1-2\alpha}$, выводим (9). □

§6. Существование собственных чисел ниже λ_1

Наша цель – построить пробную функцию, для которой выполнено неравенство (7). Построение проводим в терминах функции $\widetilde{W}$. Зафиксируем такую срезающую функцию $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, что

$$0 \le \chi \le 1, \qquad \chi \equiv 1 \text{ на } [-1/2, 1/2], \qquad \operatorname{supp}\chi \subset (-1,1). \tag{10}$$

С помощью растяжения координат с параметрами $\rho > a > 0$ и $L \ge 2\ell$, где ℓ задает длину области изгиба (ср. (4)), определим срезки

$$\chi_L(s) := \chi(s/L), \qquad \chi_\rho(n) := \chi(n/\rho). \tag{11}$$

В соответствии с замечанием 3.1 далее предполагаем, что $\rho \geq 2a$. Тогда $\chi_\rho \equiv 1$ на $[-a,a]$ и $\chi_\rho(\pm\rho) = 0$. Производные при масштабировании меняются следующим образом

$$\begin{aligned} \|\chi_L\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = L\|\chi\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \quad \|\chi'_L\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = L^{-1}\|\chi'\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \\ \|\chi'_\rho\|_\infty = \rho^{-1}\|\chi'\|_\infty. \end{aligned} \tag{12}$$

Определим

$$\widetilde{W}(s,n,y) := \chi_L(s)\chi_\rho(n)U_1(n,y), \quad \widetilde{w}(s,n) := \widetilde{W}(s,n,0) = \chi_L(s)\chi_\rho(n)u_1(n),$$

где u_1 – первая нормированная собственная функция дробного лапласиана на отрезке $[-a,a]$, а U_1 – ее продолжение Каффарелли–Сильвестра (см. (6)). Поскольку $\chi_\rho \equiv 1$ на $[-a,a]$, и носитель u_1 содержится в $[-a,a]$, L_2-норма $\widetilde{w}$ представляется в виде произведения

$$\begin{aligned} \|\widetilde{w}\|^2_{L_2(\Pi_\rho)} &= \Big(\int_{-a}^{a} |\chi_\rho(n)|^2|u_1(n)|^2\,dn\Big)\|\chi_L\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \\ &= \|\chi_L\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = L\|\chi\|^2_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{13}$$

6.1. Оценки для пробной функции. В этом разделе мы оценим интегралы из правой части формулы (9). Напомним, что $\alpha \in (1/2,1)$, поэтому в силу леммы 2.1 следующие два интеграла конечны:

$$K(\rho,\chi) := \int_0^\infty \int_{-\rho}^{\rho} y^{1-2\alpha}|\chi_\rho(n)|^2|U_1(n,y)|^2\,dndy, \tag{14}$$

$$K'_\rho(\rho,\chi) := \int_0^\infty \int_{-\rho}^{\rho} y^{1-2\alpha}|\chi'_\rho(n)|^2|U_1(n,y)|^2\,dndy. \tag{15}$$

(i) Оценка слагаемого $\mathcal{I}_s$. На множестве $\{|n| \leq \rho\}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} J^{-2}(s,n) &\leq \big(1-\rho\|\kappa\|_\infty\big)^{-2} =: \mathbf{J}(\rho), \\ |A(s,n)| &\leq \frac{\rho}{2\,(1-\rho\|\kappa\|_\infty)}|\kappa'(s)| =: \mathbf{A}(\rho)|\kappa'(s)|. \end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, оценивая квадрат суммы удвоенной суммой квадратов, а также применяя (12), (14) и (16), имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_s &\le 2c_\alpha \mathbf{J}(\rho) \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Pi_\rho} y^{1-2\alpha} |\chi_\rho|^2 |U_1|^2 \Big(|\chi_L'|^2 + |A|^2 |\chi_L|^2 \Big)\, dndsdy \\
&\le 2c_\alpha \mathbf{J}(\rho) K(\rho,\chi) \Big(\|\chi_L'\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + |\mathbf{A}(\rho)|^2 \int\limits_{\mathbb{R}} |\kappa'(s)|^2\, ds \Big).
\end{aligned} \tag{17}
$$

В последнем неравенстве мы пользуемся тем, что $\operatorname{supp} \kappa' \subset [-\ell,\ell]$ и $\chi_L \equiv 1$ на $[-\ell,\ell]$ при $L \ge 2\ell$. Из (17) с учетом тождеств (13) и (12) выводим

$$
\frac{\mathcal{I}_s}{\|\widetilde{w}\|^2_{L_2(\Pi_\rho)}} \le \frac{A_2(\rho,\chi)}{L^2} + \frac{A_1(\rho,\chi)}{L}, \tag{18}
$$

где

$$
\begin{aligned}
A_2(\rho,\chi) &= \frac{2c_\alpha \mathbf{J}(\rho) K(\rho,\chi)}{\|\chi\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \|\chi'\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \\
A_1(\rho,\chi) &= \frac{2c_\alpha \mathbf{J}(\rho) \mathbf{A}(\rho)^2 K(\rho,\chi)}{\|\chi\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \|\kappa'\|^2_{L_2(-\ell,\ell)}.
\end{aligned}
$$

Оценка слагаемых $\mathcal{I}_n$ и $\mathcal{I}_y$. Поскольку

$$
\partial_n \widetilde{W} = \chi_L(\chi_\rho \partial_n U_1 + \chi_\rho' U_1), \qquad \partial_y \widetilde{W} = \chi_L \chi_\rho \partial_y U_1,
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_n + \mathcal{I}_y &= c_\alpha \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Pi_\rho} y^{1-2\alpha} \Big(|\partial_n \widetilde{W}|^2 + |\partial_y \widetilde{W}|^2 \Big)\, dn\, ds\, dy = \\
&= c_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_L^2\, ds \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\rho}^{\rho} y^{1-2\alpha} \Big(\chi_\rho^2 \big(|\partial_n U_1|^2 + |\partial_y U_1|^2 \big) \\
&\qquad + 2\chi_\rho \chi_\rho' U_1 \partial_n U_1 + |\chi_\rho'|^2 |U_1|^2 \Big)\, dn\, dy.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Подставляя в (6) пробную функцию $\Phi(n,y) = \chi_\rho^2(n)U_1(n,y)$, являющуюся допустимым продолжением функции $\varphi(n) = \chi_\rho^2(n)u_1(n)$, получаем

$$c_\alpha \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} y^{1-2\alpha}\Big(\chi_\rho^2\big(|\partial_n U_1|^2 + |\partial_y U_1|^2\big) + 2\chi_\rho\chi_\rho' U_1\partial_n U_1\Big)\,dn\,dy$$
$$= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}} \chi_\rho^2 |u_1|^2\,dn.$$

Умножая это тождество на χ_L^2, интегрируя по s и принимая во внимание (19), выводим

$$c_\alpha \int_0^\infty \int_{\Pi_\rho} y^{1-2\alpha}\Big(|\partial_n \widetilde{W}|^2 + |\partial_y \widetilde{W}|^2\Big)\,dndsdy - \lambda_1 \int_{\Pi_\rho} |\widetilde{w}|^2\,dnds$$
$$= c_\alpha \int_{\mathbb{R}} |\chi_L|^2\,ds \int_0^\infty \int_{-\rho}^{\rho} y^{1-2\alpha}|\chi_\rho'|^2|U_1|^2\,dndy.$$

С учетом определения (15) и равенства (13) получаем

$$\frac{\mathcal{I}_n + \mathcal{I}_y}{\|\widetilde{w}\|^2_{L_2(\Pi_\rho)}} - \lambda_1 = c_\alpha K_\rho'(\rho,\chi). \tag{20}$$

(iii) Оценка $\mathcal{I}_V$. Поскольку $0 < J(s,n) \le 1 + \rho\|\kappa\|_\infty$ при $|n| \le \rho$, имеем

$$\mathcal{I}_V := c_\alpha \int_0^\infty \int_{\Pi_\rho} y^{1-2\alpha} V(s,n)|\widetilde{W}|^2\,dndsdy$$
$$= -\frac{c_\alpha}{4}\int_{\mathbb{R}} |\kappa(s)|^2|\chi_L(s)|^2 \left(\int_{-\rho}^{\rho} \frac{|\chi_\rho(n)|^2}{|J(s,n)|^2}\int_0^\infty y^{1-2\alpha}|U_1(n,y)|^2\,dydn\right) ds$$
$$\le -\frac{c_\alpha}{4(1+\rho\|\kappa\|_\infty)^2}\Big(\int_0^\infty\int_{-\rho}^{\rho} y^{1-2\alpha}|\chi_\rho(n)|^2|U_1(n,y)|^2 dndy\Big)\int_{\mathbb{R}} |\kappa(s)|^2|\chi_L(s)|^2 ds$$
$$= -\frac{c_\alpha K(\rho,\chi)}{4(1+\rho\|\kappa\|_\infty)^2}\int_{-\ell}^{\ell} |\kappa(s)|^2\,ds.$$

Разделив на L_2-норму $\widetilde{w}$ с учетом тождества (13), получаем оценку

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{I}_V}{\|\widetilde{w}\|^2_{L_2(\Pi_\rho)}} \le -\frac{V_1(\rho,\chi)}{L},\\
&\text{где}\quad V_1(\rho,\chi) = \frac{c_\alpha K(\rho,\chi)}{4\|\chi\|^2_{L_2(\mathbb{R})}(1+\rho\|\kappa\|_\infty)^2}\|\kappa\|^2_{L_2(-\ell,\ell)}.
\end{aligned} \tag{21}$$

(iv) Сводная оценка. Подставляя (18), (20) и (21) в формулу (9), получаем

$$\mathcal{Q}[W] - \lambda_1 \le \frac{A_2(\rho,\chi)}{L^2} + \frac{A_1(\rho,\chi) - V_1(\rho,\chi)}{L} + c_\alpha K'_\rho(\rho,\chi). \tag{22}$$

6.2. Основной результат.

Теорема 6.1. *Пусть* $\alpha \in (1/2,1)$, $\kappa \in C^1(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\kappa \subset [-1,1]$ *и* $\|\kappa\|_\infty = 1$. *Обозначим*

$$M_\kappa := \int_{-1}^{1} |\kappa(r)|^2\,dr, \qquad N_\kappa := \int_{-1}^{1} |\kappa'(r)|^2\,dr.$$

Тогда для любых $0 < \Theta_- < \Theta_+ < \pi$ *существует* $\ell_0 > 0$, *зависящие только от* α, a, $\Theta_\pm$, M_κ *и* N_κ, *такие, что при*

$$\ell > \ell_0, \qquad \Theta_-\,\ell^{-1} < \varepsilon < \Theta_+\,\ell^{-1}$$

дискретный спектр оператора $\mathcal{A}_\alpha^{\Omega^{\varepsilon,\ell}}$ *в искривленном волноводе* $\Omega^{\varepsilon,\ell}$ *полуширины* a *с кривизной*

$$\kappa_{\ell,\varepsilon}(s) = \varepsilon\kappa(s/\ell)$$

не пуст.

Доказательство. Пусть функция χ и соответствующие срезки χ_L, χ_ρ заданы формулами (10) и (11). Зафиксируем произвольные $0 < \Theta_- < \Theta_+ < \pi$.

Сначала выберем $\theta \in (0,1)$ настолько малым, чтобы

$$\theta\Big(2(1+\theta)^2(1-\theta)^{-4}N_\kappa M_\kappa^{-1}\Big)^{1/2} < \Theta_-/2. \tag{23}$$

Положим $\rho = \theta/\varepsilon$. Тогда при $\varepsilon < \theta(2a)^{-1}$ имеем $\rho \ge 2a$, $\rho\|\kappa_{\ell,\varepsilon}\|_\infty = \theta < 1$ и

$$\|\kappa_{\ell,\varepsilon}\|^2_{L_2(-\ell,\ell)} = \varepsilon^2\ell\,M_\kappa, \qquad \|\kappa'_{\ell,\varepsilon}\|^2_{L_2(-\ell,\ell)} = \varepsilon^2\ell^{-1}\,N_\kappa.$$

Приступим к оценке слагаемых в формуле (22). Величина $A_2(\rho,\chi)$ ограничена в силу леммы 2.1. По определению $A_1(\rho,\chi)$ и $V_1(\rho,\chi)$

$$V_1(\rho,\chi)-A_1(\rho,\chi)=\frac{c_\alpha K(\rho,\chi)\varepsilon}{4\|\chi\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}\Big(M_\kappa(1+\theta)^{-2}\varepsilon\ell-2\theta^2N_\kappa(1-\theta)^{-4}(\varepsilon\ell)^{-1}\Big). \tag{24}$$

Величина $K(\rho,\chi)$ отделена от нуля, а скобка в (24) положительна при $\varepsilon\ell\in[\Theta_-,\Theta_+]$ в силу (23). Таким образом, существуют константы $c,C>0$, не зависящие от ε и ℓ, такие что

$$V_1(\rho,\chi)-A_1(\rho,\chi)\geq c\,\varepsilon,\qquad A_2(\rho,\chi)\leq C$$

при всех $\varepsilon\in(0,\theta(2a)^{-1})$ и $\varepsilon\ell\in[\Theta_-,\Theta_+]$. Не умаляя общности, считаем, что $Cc^{-1}>\Theta_+$.

Следовательно, положив $L=2Cc^{-1}\varepsilon^{-1}$, получаем

$$\frac{A_2(\rho,\chi)}{L^2}\leq\frac{V_1(\rho,\chi)-A_1(\rho,\chi)}{2L}.$$

Подставляя это в (22), выводим

$$\mathcal{Q}[W]-\lambda_1\leq-\frac{V_1(\rho,\chi)-A_1(\rho,\chi)}{2L}+c_\alpha K'_\rho(\rho,\chi)\leq-c_1\varepsilon^2+c_\alpha K'_\rho(\rho,\chi).$$

С другой стороны, по определению (15) и свойствам срезки χ_ρ имеем

$$K'_\rho(\rho,\chi)\leq\rho^{-2}\|\chi'\|^2_\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{\rho/2<|n|<\rho}y^{1-2\alpha}|U_1(n,y)|^2\,dn\,dy. \tag{25}$$

Поскольку по лемме 2.1 функция $(n,y)\mapsto y^{1-2\alpha}|U_1(n,y)|^2$ интегрируема на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, правая часть неравенства (25) есть $o(\rho^{-2})$ при $\rho\to\infty$, то есть

$$K'_\rho(\rho,\chi)=o(\rho^{-2})=o(\varepsilon^2/\theta^2),\qquad\varepsilon\to0.$$

Следовательно, существует число $\varepsilon_0\in(0,\theta(2a)^{-1})$ такое, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$

$$\mathcal{Q}[W]-\lambda_1<0.$$

Для завершения доказательства достаточно положить $\ell_0=\Theta_+\varepsilon_0^{-1}$. Тогда условия

$$\ell>\ell_0,\qquad\Theta_-\,\ell^{-1}<\varepsilon<\Theta_+\,\ell^{-1}$$

гарантируют, что $\sigma_{\mathrm{disc}}\Big(\mathcal{A}_\alpha^{\Omega^{\varepsilon,\ell}}\Big)\neq\varnothing$. Теорема доказана. $\square$

Авторы благодарят А. И. Назарова за внимание к работе; его комментарии способствовали уточнению результатов и существенному улучшению изложения.

Список литературы

1. P. Duclos, P. Exner, *Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions.* — Reviews Math. Phys. **7** (1995), 73–102.
2. P. Exner, P. Šeba, *Bound states in curved quantum waveguides.* — J. Math. Phys **30** (1989), 2574–2580.
3. J. Goldstone, R. L. Jaffe, *Bound states in twisting tubes.* — Phys. Review B **45** (1992), 14100–14107.
4. P. Exner, P. Šeba, P. St'oviček, *On existence of a bound state in an L-shaped waveguide.* — Czechoslovak J. Phys. **39** (1989), 1181–1191.
5. P. Exner, H. Kovařík, *Quantum waveguides*, Cham, Springer (2015).
6. R. Carmona, W. C. Masters, B. Simon, *Relativistic Schrödinger operators: Asymptotic behavior of the eigenfunctions.* — J. Funct. Analysis **91** (1990), 117–142.
7. F. Nardini, *Exponential decay for the eigenfunctions of the two body relativistic Hamiltonian.* — J. d'Analyse Mathématique **47** (1986), 87–109.
8. P. Garbaczewski, V. Stephanovich, *Fractional Laplacians in bounded domains: Killed, reflected, censored, and taboo Lévy flights.* — Physical Review E **99** (2019), 042126.
9. E. Valdinoci, *From the long jump random walk to the fractional Laplacian.* — SeMA Journal: Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada **49** (2009), 33–44.
10. F. L. Bakharev, A. I. Nazarov, *Dirichlet fractional Laplacian in multi-tubes.* — J. Spectral Theory **13** (2023), 707–726.
11. F. Bakharev, S. Matveenko, *Fractional Laplacian in* V*-shaped waveguide.* — Mathematische Nachrichten **298**, No. 2 (2025), 427–436.
12. L. Caffarelli, L. Silvestre, *An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian.* — Comm. Partial Diff. Equations **32** (2007), 1245–1260.
13. С. А. Молчанов, Е. Островский, *Симметрические устойчивые процессы как следы вырожденных диффузионных процессов.* — Теория вероятностей и ее применения **14**, No. 1 (1969), 127–130.

Bakharev F., Matveenko S. Fractional Laplacian in bended strip.

We study the spectral properties of the restricted fractional Laplacian with Dirichlet boundary conditions in a smoothly bended strip (planar waveguide). For $\alpha \in (1/2, 1)$ and under additional assumptions, we prove the existence of eigenvalues below the threshold of the continuous spectrum, thereby extending classical results known for the standard Laplacian. Our approach relies on the Caffarelli–Silvestre extension, which allows us to overcome specific difficulties arising from the nonlocal nature of the operator. We establish sufficient conditions on the curvature of the bending that guarantee the existence of a discrete spectrum.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия;
Neapolis University Pafos, Paphos, Cyprus
E-mail: f.bakharev@spbu.ru

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: matveis239@gmail.com

Поступило 27 марта 2026 г.