Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 549, 2025 г.

Д. Н. Запорожец, Е. Н. Симарова

О ПЛОСКИХ ВЫПУКЛЫХ РЕКОРДАХ

§1. Введение

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ в $\mathbb{R}$. Определим моменты рекордов следующим образом:

$$L(1) = 1,$$
$$L(n+1) = \inf\{j > L(n) : X_j > X_{L(n)}\}.$$

Величину $X_{L(n)}$ будем называть n-ым рекордом, а $L(n)$ – моментом наступления n-го рекорда. Теория рекордов получила существенное развитие во второй половине XX века (см., например, [1–3]). Естественным образом возникла задача обобщения этого понятия на многомерный случай. Однако ввиду отсутствия в пространстве $\mathbb{R}^d$ при $d > 1$ канонической линейной упорядоченности, однозначное решение этой задачи представляется невозможным. Данное обстоятельство послужило стимулом для появления множества различных обобщений (см. [7, 13–22]). Большинство из упомянутых обобщений базируются на соотношениях координат случайных векторов и, как следствие, существенно зависят от выбора системы координат. В настоящей работе рассматривается обобщение, основанное на геометрическом подходе к экстремальным значениям, обладающее свойством устойчивости к замене системы координат.

Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbb{R}^d$. Положим $L(1) = 1$, и для $n > 1$ определим

$$L(n) = \inf\{j > L(n-1) : X_j \notin \operatorname{conv}(X_1, \ldots, X_{j-1})\}. \qquad (1)$$

Вектор $X_{L(n)}$ будем называть n-ым выпуклым рекордом, а $L(n)$ – моментом его появления. Впервые данное понятие было введено в работе [7], однако до настоящего времени оно изучено недостаточно полно.

Ключевые слова: выпуклые рекорды, выпуклая оболочка, сферически симметричные распределения, легкие хвосты, область притяжения Гумбеля, случайные многогранники, вершины выпуклой оболочки, экстремальные значения, эмпирические меры, слабая сходимость.

В работе [8] получены некоторые оценки распределения выпуклых рекордов, а в [6] проанализировано асимптотическое поведение среднего числа выпуклых рекордов. В данной работе ставится задача исследования асимптотического распределения выпуклых рекордов на границе их появления, а также зависимости их количества от роста n.

Обратимся к классическим результатам для одномерных рекордов. В одномерном случае прослеживается тесная связь между теорией рекордов и теорией экстремальных значений. Примем обозначение

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Теорема Фишера–Типпета–Гнеденко (см., например, предложение 0.3 в [4]) утверждает, что если существуют последовательности $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$ и невырожденная функция распределения $G(x)$, такие что

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right] = F^n(a_n x + b_n) \to G(x), \tag{2}$$

то распределение $G(x)$ принадлежит к одному из трех типов распределений: распределение Гумбеля (тип I), распределение Фреше (тип II) или распределение Вейбулла–Гнеденко (тип III). Примечательно, что условие (2) характеризует асимптотическое поведение не только максимума, но и рекордов в целом. Это иллюстрирует следующее утверждение (см. [4, следствие 4.23]).

Выполнение соотношения (2) влечет слабую сходимость

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \delta\left\{\frac{X_{L(k)} - b_n}{a_n}\right\} \Rightarrow \mathrm{PRM}, \tag{3}$$

где PRM – пуассоновский точечный процесс с мерой интенсивности, задаваемой приращениями функции

$$S(x) = -\ln(-\ln(G(x))),$$

а символ $\Rightarrow$ обозначает слабую сходимость в пространстве точечных мер в $(-\infty, +\infty)$, $(0, +\infty)$ или $(-\infty, 0)$ в случае типа I, II или III соответственно.

Вышесказанное мотивирует поиск аналогичных результатов для выпуклых рекордов в многомерном случае. В настоящей работе исследуется точечная мера выпуклых рекордов, значительно удаленных от начала координат, для сферически симметричного распределения в $\mathbb{R}^2$, принадлежащего области притяжения распределения Гумбеля. Кроме того, проводится сопоставление полученных результатов со средним числом выпуклых рекордов в аналогичных условиях.

Структура статьи организована следующим образом. В §2 формулируются условия на распределение случайных векторов X. В §3 приводится анализ среднего числа далеких рекордов. В §4 представлены результаты, касающиеся среднего числа вершин выпуклой оболочки и среднего числа рекордов. В §5 рассматриваются частные случаи, а в §6 приводятся аналогичные результаты для одномерного случая. В §7 содержатся вспомогательные сведения, необходимые для понимания доказательств, которые вынесены в §8.

Обозначения. Все асимптотические соотношения приводятся в предположении $x \to +\infty$, если не оговорено иное. Для положительных функций $f(x)$ и $g(x)$ запись $f(x) = O(g(x))$ означает существование положительной константы C, такой что $f(x) < Cg(x)$. Запись $f(x) = o(g(x))$ эквивалентна тому, что отношение $f(x)/g(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$. Также используется обозначение $f(x) \sim g(x)$, если отношение $f(x)/g(x)$ стремится к единице при $x \to \infty$.

§2. Условия на распределение

В данном параграфе приводится формальное описание рассматриваемых распределений. Обратимся к одномерному случаю. Известно, что если максимум случайной величины принадлежит области притяжения двойного экспоненциального закона (тип I), а носитель случайной меры не ограничен сверху, то функция распределения F допускает представление

$$1 - F(x) = c(x) \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{g(u)}{f(u)}\, du\right), \tag{4}$$

где

$$\lim_{x\to+\infty} c(x) = c_1 > 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1,$$

при этом (см. [4, следствие 1.7]):

- $f(t) > 0$,
- $f'(t) \to 0$,
- f является абсолютно непрерывной функцией.

Пусть U – неубывающая функция на $\mathbb{R}$. Обозначим через $U^{\leftarrow}(x)$ обратную функцию:

$$U^{\leftarrow}(y) = \inf\{s : U(s) \geqslant y\}.$$

Инфимум пустого множества полагаем равным $+\infty$.

Выбор констант, обеспечивающих выполнение условия (2), осуществляется посредством следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow} (n(1+o(1))), \\ \alpha_n &= f(\beta_n) \end{aligned} \tag{5}$$

(см. [4, предложения 1.1 и 1.4, следствие 1.7]). Будем рассматривать последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих сферически симметричное распределение в $\mathbb{R}^2$ с плотностью вида

$$q(x, y) = C_p p\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

где $p(\cdot)$ – плотность распределения некоторой одномерной неотрицательной случайной величины с функцией распределения F вида (4). Данное определение формализует понятие двумерного распределения с легким хвостом. Нормировочная константа C_p удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{C_p} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} r p(r)\, dr\, d\varphi = 2\pi \int\limits_0^{+\infty} (1 - F(r))\, dr < +\infty. \tag{6}$$

Согласно [4, лемма 1.8], при наложенных условиях интеграл сходится, и константа C_p определена корректно. Дополнительно введем следующие ограничения на распределение:

A1 Рассматриваются функции $F(x)$ вида (4), где $c(x) = c$. Это условие не является чрезмерно ограничительным; оно выполняется, например, если функиця F принадлежит области притяжения двойного экспоненциального закона и производная $F'(x)$ не убывает (см. [4, предложение 1.17]).

A2 Предполагается непрерывность функций $f(x)$ и $g(x)$ в некоторой окрестности $+\infty$. Это гарантирует, что функция $F(x)$ является непрерывно дифференцируемой, а плотность $p(x)$ удовлетворяет соотношению

$$p(x) = F'(x) = \frac{(1-F(x))g(x)}{f(x)}. \tag{7}$$

A3 Также потребуем выполнения условия

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{f(s)}{\sup_{x\geqslant s} f(x)} > \varepsilon_0 \geqslant 0. \tag{8}$$

Данное условие обеспечивает экспоненциальное убывание функции $1 - F(x)$ на $+\infty$.

§3. Среднее количество далеких рекордов

Определим $\Phi(s)$ как функцию распределения проекции вектора X_1 на некоторое направление e:

$$\Phi(s) = \mathbb{P}[\langle X_1, e\rangle \leqslant s]. \tag{9}$$

В силу симметрии распределения, функция $\Phi(s)$ не зависит от выбора вектора e.

Сформулируем необходимую для дальнейшего лемму. Ее доказательство, как и доказательства прочих утверждений, приведено в пп. 8.1 и 8.3.

Лемма 1. *Пусть случайные векторы $X_1, \dots, X_n$ удовлетворяют условиям §2. Тогда максимум проекции X_1 на произвольное направление принадлежит области притяжения распределения Гумбеля. Соответствующие нормировочные константы a_n, b_n для функции распределения $\Phi(x)$ определяются соотношениями*

$$\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{1}{1-\Phi}\right)^{\leftarrow} (n(1+o(1))), \\ a_n &= f(b_n). \end{aligned} \tag{10}$$

При этом $b_n \to +\infty$ и выполняется асимптотическое соотношение:

$$C_p n(1-F(b_n))\sqrt{2\pi b_n f(b_n)} \to 1 \ \textit{при}\ n \to +\infty. \tag{11}$$

Константы a_n, b_n выбраны таким образом, что

$$\mathbb{P}\left[\frac{\max\limits_{i=1,\ldots,n}\langle X_i, e\rangle - b_n}{a_n} \leqslant x\right] = \Phi^n(a_n x + b_n) \to e^{-e^{-x}}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Обозначим через

$$\tau(k) = \sup\{m : L(m) \leqslant k\}$$

количество выпуклых рекордов среди первых k векторов. Для $\lambda \in (0, +\infty]$ рассмотрим последовательность $T_\lambda(n)$, такую что

$$\frac{T_\lambda(n)}{n} \to \lambda \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Определим случайную меру

$$\mu_n^\lambda = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \sum_{i=1}^{\tau(T_\lambda(n))} \delta\Big\{\left(\frac{R_{L(i)} - b_n}{a_n}, \varphi_{L(i)}\right)\Big\},$$

где $\big(R_{L(i)}, \varphi_{L(i)}\big)$ – координаты $X_{L(i)}$ в полярной системе координат. Интеграл от функции h, заданной на $(-\infty, +\infty) \times [0, 2\pi]$, по данной случайной мере обозначается как

$$\mu_n^\lambda(h) = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \sum_{i=1}^{\tau(T_\lambda(n))} h\left(\frac{R_{L(i)} - b_n}{a_n}, \varphi_{L(i)}\right).$$

Теорема 1. *Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условиям §2. Тогда имеет место сходимость*:

$$\mathbb{E}\mu_n^\lambda(h) \to \mu_0^\lambda(h) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(z, \psi) g_\lambda(z) dz d\psi$$

для всех непрерывных функций $h\colon (-\infty, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_+$ с компактным носителем. Здесь функция $g_\lambda(z)$ задается выражением

$$\begin{aligned} g_\lambda(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} &\exp\left(-\theta^2 - \theta l - \frac{l^2}{2}\right) l \\ &\times \left(1 - \left[\exp\left(-\lambda \exp\left(-z + \frac{\theta^2}{2}\right)\right)\left(1 + e^{-z + \frac{\theta^2}{2}}\right)\right]\right) dl\, d\theta \\ &+ 1 - e^{-\lambda e^{-z}}. \end{aligned}$$

Если $\lambda \in (0, +\infty)$, *то указанная сходимость справедлива также для непрерывных ограниченных функций* h *с носителем, отделенным от* $-\infty$.

Замечание 1. При $\lambda = +\infty$ функция g_λ принимает вид

$$g_\infty(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\theta^2 - \theta l - \frac{l^2}{2}\right) l \, dl \, d\theta + 1.$$

Возможно точное вычисление интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\theta^2 - \theta l - \frac{l^2}{2}\right) l \, dl \, d\theta = \sqrt{\pi} \frac{2 - \sqrt{2}}{2},$$

следовательно,

$$g_\infty(z) = \sqrt{2}.$$

Подробные вычисления приведены в п. 8.3.

Для прояснения структуры, возникающей в теореме, введем специальный класс выпуклых рекордов.

Определение 1. *Положим* $\widehat{L}(1) = 1$ *и*

$$\begin{aligned} \widehat{L}(n) = \inf\{j > \widehat{L}(n-1) : \; & \langle X_k, X_j \rangle < \|X_j\|^2 \text{ для всех } k = 1, \dots, j-1 \\ & \text{или} \\ & \langle X_k, X_j \rangle > \|X_j\|^2 \text{ для всех } k = 1, \dots, j-1\} \end{aligned}$$

Вектор $X_{\widehat{L}(n)}$ *будем называть* центрально выпуклым рекордом.

Геометрически центрально выпуклые рекорды характеризуются тем, что прямая, проходящая через X_s ортогонально вектору X_s, является опорной к выпуклой оболочке $\operatorname{conv}(X_1, \dots, X_s)$. Очевидно, что центрально выпуклые рекорды являются подмножеством множества выпуклых рекордов. Их можно интерпретировать как одно из возможных обобщений понятия рекорда на многомерный случай. В данном контексте они используются как вспомогательный объект для анализа общих выпуклых рекордов. Введем для центрально выпуклых рекордов величины $\widehat{\tau}(k)$ и $\widehat{\mu}_n^\lambda$ по аналогии с вышеизложенным. Справедливо следующее утверждение.

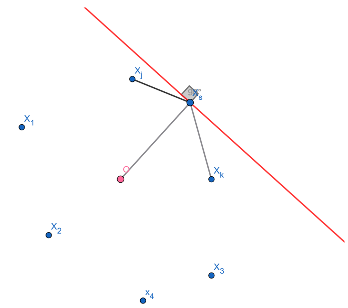

Рис. 1. $\langle X_k, X_s\rangle < \|X_s\|^2$.

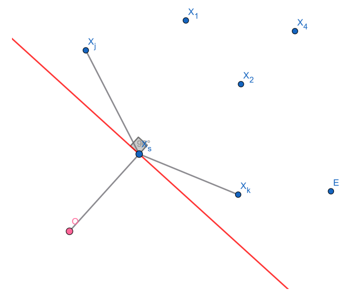

Рис. 2. $\langle X_k, X_s\rangle > \|X_s\|^2$.

Теорема 2. *Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условиям §2. Тогда*

$$\mathbb{E}\widehat{\mu}_n^\lambda(h) \to \widehat{\mu}_0^\lambda(h) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(z,\psi)\widehat{g}_\lambda(z)dzd\psi$$

для всех непрерывных функций $h\colon (-\infty,+\infty)\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}_+$ с компактным носителем. Функция $\widehat{g}_\lambda(z)$ имеет вид

$$\widehat{g}_\lambda(z) = 1 - e^{-\lambda e^{-z}}.$$

Если $\lambda \in (0,+\infty)$, сходимость также имеет место для непрерывных ограниченных функций h с носителем, отделенным от $-\infty$.

При $\lambda = +\infty$ выполняется равенство

$$\widehat{g}_\lambda(z) = 1.$$

Замечание 2. Теорема 2 демонстрирует, что в предельной плотности из теоремы 1 слагаемое вне интеграла соответствует вкладу центрально выпуклых рекордов, тогда как интегральное слагаемое описывает выпуклые рекорды, не являющиеся центрально выпуклыми. Из доказательства теоремы 1 следует, что переменная θ связана с условной вероятностью того, что грань выпуклой оболочки $\mathrm{conv}(X_1,\ldots,X_s)$ образует угол

$$\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\theta$$

с прямой из определения центрально выпуклых рекордов, а переменная l соответствует условной вероятности нахождения соседней вершины выпуклой оболочки на расстоянии $\sqrt{a_n b_n} l$.

§4. Выпуклые рекорды и вершины выпуклой оболочки

Существует тесная связь между выпуклыми рекордами и вершинами выпуклой оболочки. Обозначим через V_n количество вершин выпуклой оболочки множества точек $X_1, \dots, X_n$, а через R_n – количество выпуклых рекордов в той же последовательности. В работе [6] выведена формула, связывающая математические ожидания величин V_n и R_n для произвольного распределения векторов:

$$\mathbb{E}R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}V_i}{i}. \tag{12}$$

Следовательно, знание асимптотики среднего числа вершин выпуклой оболочки позволяет определить асимптотическое поведение количества выпуклых рекордов.

Пример 1. Рассмотрим случай нормального распределения

$$X_1, \dots, X_n$$

на плоскости. Среднее количество вершин выпуклой оболочки V_n известно (см. [11]) и асимптотически составляет

$$\mathbb{E}V_n = \sqrt{8\pi \ln(n)}(1 + o(1)). \tag{13}$$

В работе [6] с использованием соотношений (12) и (13) получена асимптотика общего количества рекордов:

$$\mathbb{E}R_n = \int_1^n \frac{\sqrt{8\pi \ln(x)}}{x}\, dx(1 + o(1)) = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}(\ln(n))^{\frac{3}{2}}(1 + o(1)). \tag{14}$$

В общем случае среднее количество вершин выпуклой оболочки $\mathrm{conv}(X_1, \dots, X_n)$ на плоскости для сферически симметричных распределений с легкими хвостами было найдено в работе [9] (с незначительными отличиями в обозначениях и условиях; см. также [10], где при определенных условиях доказана центральная предельная теорема для среднего числа вершин). Пусть $F_R(x) = \mathbb{P}[\|X\| \leqslant x]$ – абсолютно непрерывная функция распределения нормы $\|X\|$. Рассмотрим функцию $\ell(x)$, обратную к $(1-F_R(x))^{-1}$:

$$\ell\left(\frac{1}{1-F_R(x)}\right)=x.$$

Функция ℓ является медленно меняющейся и допускает представление Караматы (см. [12, теорема 1.3.1]):

$$\ell(x)=a(x)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right), \tag{15}$$

где $a(x)\to a_0\in(0,+\infty)$, и $\varepsilon(t)\to 0$ при $t\to+\infty$.

В дальнейшем нам понадобится следующий результат Карналя, см. [9].

Теорема (Карналь)**.** *Пусть $X_1,X_2,\dots,X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы со сферически симметричным распределением в $\mathbb{R}^2$. Определим функцию*

$$\nu(x)=\varepsilon\left(\frac{1}{1-F_R(x)}\right).$$

Предположим, что в представлении (15) $a(x)=a_0$, а функция $\nu(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) *$\nu(x)$ монотонно убывает при больших x;*
(2) *$x\nu'(x)\ln(\nu(x))=o(1)$ при $x\to+\infty$;*
(3) *$\nu(x)\ln(x)=o(1)$ при $x\to+\infty$.*

Тогда справедливо соотношение

$$\mathbb{E}\,V_n\sim 2\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon(n)}}.$$

В принятых нами обозначениях функции $\varepsilon(x)$ и $\nu(x)$ могут быть выражены следующим образом.

Предложение 1. *В рамках наших предположений, начиная с некоторого момента мы имеем $a(x)=a_0$, а также*

$$\varepsilon(x)=\frac{f(\ell(x))}{2\pi C_p x\ell^2(x)(1-F(\ell(x)))g(\ell(x))}\sim\frac{f(\ell(x))}{\ell(x)},$$
$$\nu(x)=\frac{f(x)(1-F_R(x))}{2\pi C_p x^2(1-F(x))g(x)}\sim\frac{f(x)}{x},$$

где C_p определена в равенстве (6), *а функции $f(x)$ и $g(x)$ – в равенстве* (4). *Следовательно, при выполнении условий на функцию ν, имеет место соотношение*

$$\mathbb{E}\, V_n \sim \sqrt{\frac{4\pi\ell(n)}{f(\ell(n))}}. \tag{16}$$

Совместно с (12) и (15), данный результат позволяет оценить среднее количество рекордов для рассматриваемых распределений:

$$\mathbb{E} R_n \sim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{4\pi\ell(i)}{f(\ell(i))}}.$$

Заметим, что константы b_n и a_n из теорем 1 и 2 соотносятся как $a_n = f(b_n)$. Как будет показано далее, во многих случаях справедливо соотношение

$$\frac{f(\ell(n))}{\ell(n)} \sim \frac{a_n}{b_n}.$$

Вопрос о справедливости данного асимптотического равенства в общем случае остается открытым.

Замечание 3. При наложенных условиях функция $\ell(n)$ должна удовлетворять соотношению

$$2\pi C_p n\ell(n)(1 - F(\ell(n))) \to 1 \quad \text{при } n \to +\infty. \tag{17}$$

Это соотношение аналогично результату леммы 1. Доказательство данного факта приведено в п. 8.2.

Представляет интерес оценка количества вершин выпуклой оболочки, расположенных выше определенного уровня. Определим случайную меру:

$$\bar{\mu}_n = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \sum_{i=1}^{n} \delta\Big\{ \Big(\frac{R_i - b_n}{a_n}, \varphi_i \Big) \Big\} \\ \times \mathbf{1}\{X_i \text{ вершина выпуклой оболочки } \operatorname{conv}(X_1, \dots, X_n)\}.$$

где (R_i, φ_i) – полярные координаты X_i.

Теорема 3. *Пусть $X_1, X_2, X_3, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условиям §2. Тогда*

$$\mathbb{E}\bar{\mu}_n(h) \to \bar{\mu}_0(h) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(z,\psi)\bar{g}(z) dz d\psi$$

для всех непрерывных функций $h\colon (-\infty, +\infty] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_+$ с компактным носителем. Функция $\bar{g}(z)$ определяется выражением

$$\bar{g}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} l \exp\left(-2z - \theta l - \frac{l^2}{2} - e^{-z+\frac{\theta^2}{2}}\right) dl\, d\theta + e^{-z-e^{-z}}.$$

Замечание 4. Рассмотрим функцию

$$h_s(r,\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{при } r > s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Можно показать, что $\bar{\mu}_0(h_s) \to \sqrt{4\pi}$ при $s \to -\infty$. Это означает, что при выполнении условий из §2 и условий теоремы Карналя мы имеем

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{f(\ell(n))}{\ell(n)} \Big/ \frac{a_n}{b_n} \right) \geqslant 1.$$

Кроме того, если

$$\frac{f(\ell(n))}{\ell(n)} \sim \frac{a_n}{b_n},$$

то можно заключить, что при больших n основная часть вершин выпуклой оболочки находится на выбранном уровне. Подробности приведены в п. 8.3.

§5. Частные случаи

Приведем ряд примеров распределений, удовлетворяющих условиям наших утверждений. Воспользуемся следующим известным результатом (см. [4, предложение 1.1]).

Пусть функция F абсолютно непрерывна и дважды дифференцируема в некоторой окрестности $+\infty$. Если $F''(x) < 0$ в некоторой окрестности $+\infty$ и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F''(x)(1-F(x))}{(F'(x))^2} = -1, \tag{18}$$

то F принадлежит области притяжения распределения Гумбеля и представима в виде (4), где

$$c(x) = c > 0,$$
$$g(x) = 1,$$
$$f(x) = \frac{1 - F(x)}{F'(x)}.$$

Данное утверждение позволяет эффективно проверять необходимые условия для дважды дифференцируемых функций распределения с монотонной плотностью.

Пример 2. Стандартное нормальное распределение на прямой имеет плотность

$$p(x) = F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Формально функция $p(x)$ должна быть определена только на положительной оси, поэтому для сохранения вероятностной нормировки требуется домножить функцию $p(x)$ на 2, однако это не играет роли из-за дальнейшей автоматической перенормировки при вычислении значения C_p. Плотность $p(x)$ удовлетворяет условию (18) и допускает представление вида (4) с функцией $g(x) = 1$ и функцией $f(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$f(t) = \frac{1 - F(t)}{F'(t)} \sim \frac{p(t)/t}{p(t)} = \frac{1}{t} \text{ при } t > 0.$$

Известно, что константы α_n, β_n из соотношений (5) могут быть выбраны следующим образом (см., например, [4, §1.5, пример 2]):

$$\beta_n = \sqrt{2\ln(n)} - \frac{\ln(\ln(n)) + \ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln(n)}},$$
$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\ln(n)}}.$$

Проекция двумерного нормального распределения $\mathcal{N}(0, I)$ на прямую имеет распределение $\mathcal{N}(0, 1)$, поэтому в качестве a_n и b_n можно взять α_n и β_n соответственно. Тогда количество рекордов, находящихся выше уровня $a_n s + b_n$, имеет порядок

$$\sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \sim \sqrt{2\ln(n)}.$$

В примере 1 также было получено среднее число рекордов. Сравнивая с результатом примера 1, можно заметить, что

$$\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{f(\ell(n))}{\ell(n)}.$$

Пример 3. Рассмотрим плотность $p(x) = e^{-x^\rho}$. Как и в предыдущем примере, $p(x)$ не является вероятностной плотностью, однако, как отмечалось, это не играет значения из-за дальнейшей автоматической перенормировки при вычислении C_p.

С помощью правила Лопиталя получаем соотношение

$$1 - F(x) \sim \frac{e^{-x^\rho}}{\rho x^{\rho-1}} \text{ при } x \to +\infty.$$

Легко проверяется выполнение соотношения (18), следовательно, в формуле (4) можно положить

$$f(x) = \frac{1 - F(x)}{F'(x)} \sim \frac{1}{\rho x^{\rho-1}}.$$

При $\rho \geqslant 1$ данная функция удовлетворяет условию (8). В качестве последовательности b_n в выражении (11) можно выбрать

$$b_n = \ln(n)^{\frac{1}{\rho}} \left(1 - \frac{(3\rho - 4)\ln(\ln(n))}{2\rho^2 \ln(n)} - \frac{\ln(\rho^3) - \ln(2\pi C_p^2)}{2\rho \ln(n)}\right),$$

где

$$\frac{1}{C_p} = 2\pi \int\limits_0^{+\infty} r e^{-r^\rho}\, dr = \frac{2\pi}{\rho} \Gamma\left(\frac{2}{\rho}\right).$$

Действительно,

$$C_p n(1 - F(b_n))\sqrt{2\pi b_n f(b_n)} \sim \frac{\sqrt{2\pi} C_p n e^{-b_n^\rho}}{\rho b_n^{\rho-1}} \sqrt{\frac{b_n}{\rho b_n^{\rho-1}}}.$$

Логарифмируя это выражение, получаем условие

$$\ln(n) - b_n^\rho + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\pi C_p^2}{\rho^3}\right) - \frac{3\rho - 4}{2}\ln(b_n) \to 0.$$

Полагая

$$b_n^\rho = \ln(n)(1 + \gamma_n),$$

получаем

$$-\ln(n)\gamma_n + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\pi C_p^2}{\rho^3}\right) - \frac{3\rho-4}{2\rho}\ln(\ln(n)) - \frac{3\rho-4}{2\rho}\ln(1+\gamma_n) \to 0.$$

Выберем γ_n удовлетворяющим соотношению

$$\gamma_n = \frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\pi C_p^2}{\rho^3}\right) - \frac{3\rho-4}{2\rho}\ln(\ln(n)) + o(1)\right).$$

Тогда

$$b_n = \ln(n)^{\frac{1}{\rho}}(1+\gamma_n)^{\frac{1}{\rho}} = \ln(n)^{\frac{1}{\rho}}\left(1 + \frac{\gamma_n}{\rho} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right).$$

Это означает, что

$$\sqrt{\frac{b_n}{a_n}} = \sqrt{\frac{b_n}{f(b_n)}} \sim \sqrt{\rho\ln(n)}.$$

Данный пример также удовлетворяет условиям теоремы Карналя (см. §4). Аналогичные рассуждения применительно к соотношению (17) дают

$$\ell(n) = \ln(n)^{\frac{1}{\rho}}\left(1 - \frac{(\rho-2)\ln(\ln(n))}{\rho^2\ln(n)} + \frac{\ln(2\pi C_p)}{\rho\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right).$$

Это позволяет заключить, что

$$\mathbb{E}\,V_n \sim \sqrt{4\pi\rho\ln(n)},$$
$$\mathbb{E}\,R_n \sim \frac{4\sqrt{\pi\rho}}{3}(\ln(n))^{\frac{3}{2}}.$$

Пример 4. Рассмотрим плотность гамма-распределения

$$p(x) = F'(x) = \frac{x^\gamma e^{-x}}{\Gamma(\gamma+1)}.$$

В [4, §1.5, пример 3] показано, что условие (18) в этом случае выполнено. Функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$f(x) = \frac{1-F(x)}{F'(x)} \sim \frac{-F'(x)}{F''(x)} \sim 1.$$

По аналогии с примером 3 и одномерным случаем (см. [4, §1.5, пример 3]), используя соотношение (11), можно выбрать

$$
\begin{aligned}
b_n &= \ln(n) + (\gamma+1/2)\ln(\ln(n)) + \ln\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\gamma+2)}\right),\\
a_n &= 1.
\end{aligned}
$$

Тогда количество рекордов выше уровня $a_n s + b_n$ вновь имеет порядок $\sqrt{\ln(n)}$.

В работе [9] показано, что такие функции распределения подпадают под условия теоремы Карналя. Кроме того, с помощью соотношения (17) проверяется, что

$$
\begin{aligned}
\ell(n) &= \ln(n) + (\gamma+1)\ln(\ln(n)) - \ln\left(\Gamma(\gamma+2)\right) + o(1),\\
f(\ell(n)) &\sim 1,
\end{aligned}
$$

откуда вытекает соотношение

$$\frac{\ell(n)}{f(\ell(n))} \sim \frac{b_n}{a_n} \sim \ln(n).$$

Это позволяет утверждать, что

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\, V_n &\sim \sqrt{4\pi\ln(n)},\\
\mathbb{E}\, R_n &\sim \frac{4\sqrt{\pi}}{3}(\ln(n))^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Из предыдущих примеров может сложиться впечатление, что при рассматриваемых нами условиях количество рекордов всегда составляет $O\left(\sqrt{\ln(n)}\right)$, однако это не так.

Пример 5. Рассмотрим плотность $p(x) = e^{-e^x}$. Используя правило Лопиталя, получаем

$$1 - F(x) \sim e^{-e^x}e^{-x}.$$

Условие (18) выполнено, и $f(x) \sim e^{-x}$. Аналогично примеру 3, можно выбрать

$$
\begin{aligned}
b_n &= \ln\ln(n) + \frac{-3\ln\ln(n) + \ln\ln\ln(n) + \ln(2\pi C_p^2)}{2\ln(n)},\\
\ell(n) &= \ln(\ln(n)) - \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} + o\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right).
\end{aligned}
$$

Тогда
$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_n}{f(b_n)} \sim \ln\ln(n)\ln(n) \sim \frac{\ell(n)}{f(\ell(n))}.$$
Данный пример удовлетворяет условиям теоремы Карналя, и благодаря соотношениям (16) и (12) получаем
$$\mathbb{E}\, V_n \sim \sqrt{4\pi \ln(n)\ln(\ln(n))},$$
$$\mathbb{E}\, R_n \sim \int\limits_1^n \frac{\sqrt{4\pi\ln(x)\ln(\ln(x))}}{x}\,dx \sim \frac{4\sqrt{\pi\ln(\ln(n))}}{3}(\ln(n))^{\frac{3}{2}}.$$

Замечание 5. Асимптотический порядок $\mathbb{E}\, R_n$ в приведенных примерах варьируется. Это отличает рассматриваемую ситуацию от одномерного случая, где для непрерывных функций распределения среднее количество рекордов всегда имеет порядок $\ln(n)$, что влечет эквивалентность $\mathbb{E}\, R_n \sim 2\ln(n)$ (с учетом максимальных и минимальных рекордов).

§6. Одномерный случай

В одномерном случае также возможно оценить количество выпуклых рекордов в заданной области. В этой ситуации понятия выпуклых и центрально выпуклых рекордов совпадают и определяют множество минимальных и максимальных рекордов. Рассмотрим меру
$$\widetilde{\mu}_n^\lambda = \sum_{i=1}^{\tau(T_\lambda(n))} \delta\Big\{ \Big(\frac{X_{L(i)} - \beta_n}{\alpha_n} \Big) \Big\}, \tag{19}$$
где $L(i)$ определены так же, как в равенстве (1), но в одномерном случае, последовательности $T_\lambda(n)$ и $\tau(n)$ заданы так же, как в §3, а константы α_n, β_n взяты из соотношений (5). Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Предположим, что случайные величины $X_1,\ldots, X_n$ независимы и имеют функцию распределения F, удовлетворяющую условиям* A1–A3 *из* §2. *Тогда*
$$\mathbb{E}\widetilde{\mu}_n^\lambda(h) \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(z)(1 - e^{-\lambda e^{-z}})dz \ \text{ при } n \to +\infty$$

для всех $h \in C_K((-\infty, +\infty])$ *(положительных, непрерывных, ограниченных с носителем, отделенным от* $-\infty$*). В случае* $\lambda = +\infty$*, сходимость имеет место для всех функций* $h \in C_K((-\infty, +\infty))$ *(положительных, непрерывных, ограниченных с компактным носителем).*

Замечание 6. Данное соотношение также справедливо для среднего количества рекордов. Кроме того, в одномерном случае не требуется симметричность распределения.

Если $\lambda = +\infty$ и $T_\lambda(n) = +\infty$, то, согласно (3), в пределе должен получаться пуассоновский точечный процесс с мерой интенсивности 1, что согласуется с полученным результатом. Результаты для прочих $T_\lambda(n)$, вероятно, известны, однако они не встречались нам в литературе, и мы приводим их здесь для полноты картины.

§7. Предварительные сведения

7.1. Сходимость к распределению Гумбеля в одномерном случае. Рассмотрим функцию распределения F вида (4). Для всех $x \in \mathbb{R}$ она удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1 - F(t + xf(t))}{1 - F(t)} = e^{-x} \tag{20}$$

(см. [4, предложения 1.1 и 1.4, следствие 1.7]). Такая функция распределения удовлетворяет условию (2) с функцией $G(x) = e^{-e^{-x}}$ и нормировочными константами, заданными условиями (5). Это влечет выполнение следующих двух предельных соотношений (одно получается логарифмированием другого):

$$\begin{aligned} &F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}, \\ &n(1 - F(\alpha_n x + \beta_n)) \to e^{-x}. \end{aligned} \tag{21}$$

Согласно [4, лемма 1.3], функция f из представления (4) при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t + f(t)x)}{f(t)} = 1. \tag{22}$$

Сходимость (22) является локально равномерной по $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, согласно представлению (4), выполнено

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{f'(t)}{1} = 0. \tag{23}$$

Следующая лемма связывает скорости убывания функции $f(x)$ и функции $1-F(x)$.

Лемма (см. [5, лемма 2], [4, упражнение 2.2.1]). *Предположим, что функция F имеет вид* (4) *и удовлетворяет условию* A1. *Тогда существует число t_0, такое что для любого $x>0$ и любого $t>t_0$ справедливо неравенство*

$$(1-\varepsilon)\left[\frac{1-F(t)}{1-F(t+xf(t))}\right]^{-\varepsilon} \leqslant \frac{f(t+xf(t))}{f(t)} \leqslant (1+\varepsilon)\left[\frac{1-F(t)}{1-F(t+xf(t))}\right]^{\varepsilon}, \qquad (24)$$

а при $x<0, t+xf(t)>t_0$ выполнено

$$(1-\varepsilon)\left[\frac{1-F(t)}{1-F(t+xf(t))}\right]^{\varepsilon} \leqslant \frac{f(t+xf(t))}{f(t)} \leqslant (1+\varepsilon)\left[\frac{1-F(t)}{1-F(t+xf(t))}\right]^{-\varepsilon}. \qquad (25)$$

7.2. Формула Бляшке–Петканчина. Обозначим через κ_d объем d-мерного единичного шара, а через $\omega_d = d\kappa_d$ – площадь поверхности $(d-1)$-мерной сферы в $\mathbb{R}^d$. Пусть $A_{d,l}$ – множество всех l-мерных аффинных подпространств E в $\mathbb{R}^d$, снабженное инвариантной относительно движений мерой Хаара $\mu_{d,l}$, нормированной так, что мера подпространств, пересекающих d-мерный единичный шар B_d, равна κ_{d-l}. Существование и единственность такой меры известны (см., например, [23, теорема 13.2.12]). В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение (см. [23, теорема 7.2.7]).

Теорема (Формула Бляшке–Петканчина). *Пусть $f\colon (\mathbb{R}^d)^{l+1} \to \mathbb{R}$ – неотрицательная измеримая функция, где $l \in \{1,\dots,d\}$. Тогда*

$$\begin{aligned}\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{l+1}} & f(x_0,\dots,x_l)\,dx_0\dots dx_l \\ &= (l!)^d b_{d,l} \int\limits_{A_{d,l}} \int\limits_{E^{l+1}} f(x_0,\dots,x_l) \\ &\qquad \times |\mathrm{conv}(x_0,\dots,x_l)|^{d-l} \lambda_E(dx_0)\dots\lambda_E(dx_l)\mu_{d,l}(dE),\end{aligned}$$

где $b_{d,l} = \frac{\omega_{d-l+1}\cdot\ldots\cdot\omega_d}{\omega_1\cdot\ldots\cdot\omega_l}$, *а* $|\mathrm{conv}(x_0,\ldots,x_l)|$ *– l-мерный объем выпуклой оболочки* $\mathrm{conv}(x_0,\ldots,x_l)$.

§8. Доказательства

8.1. Предельное поведение рекордов. Предварительно докажем техническую лемму.

Лемма 2. *Пусть ε_0 – константа из условия* A3. *Тогда для любого положительного $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ и вещественного M_1 существуют $N = N(\varepsilon_1, M_1)$ и $C = C(\varepsilon_1, M_1) > 0$, такие что при $y > N$ и $\delta > M_1$ выполняется неравенство*

$$\frac{1 - F(y + f(y)\delta)}{1 - F(y)} \leqslant C \exp\left(-\varepsilon_1\delta\right).$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\delta > 0$. Согласно представлению (4) и условию A1, справедливо равенство

$$\frac{1 - F(y + f(y)\delta)}{1 - F(y)} = \exp\left(-\int\limits_y^{y+f(y)\delta} \frac{g(u)}{f(u)}\,du\right).$$

Согласно теореме о среднем, существует такое $z \in (y, y + f(y)\delta)$, что

$$\int\limits_y^{y+f(y)\delta} \frac{g(u)}{f(u)}\,du = \frac{f(y)\delta g(z)}{f(z)}.$$

В силу условия (8) существует N_1, такое что при $y > N_1$ выполнено

$$\frac{f(y)}{f(z)} > \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2}.$$

Кроме того, из соотношения (4) следует существование N_2, такого что при $z > N_2$ выполнено

$$g(z) > \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_0}.$$

Тогда при $y > N = \max(N_1, N_2)$ имеем

$$\frac{f(y)\delta g(z)}{f(z)} > \varepsilon_1\delta,$$

что влечет

$$\frac{1-F(y+f(y)\delta)}{1-F(y)} < \exp\left(-\varepsilon_1\delta\right).$$

Если $M_1 < 0$, то при $\delta \in [M_1, 0]$ и некотором $C > 1$ выполнено

$$\frac{1-F(y+f(y)\delta)}{1-F(y)} \leqslant \frac{1-F(y+f(y)M_1)}{1-F(y)} < C \leqslant C\exp\left(-\varepsilon_1\delta\right). \qquad (26)$$

Заметим, что соотношение (20) влечет

$$\frac{1-F(y+f(y)M_1)}{1-F(y)} \to e^{-M_1}$$

при $y \to +\infty$, следовательно, данное выражение ограничено, и константа C в выражении (26) действительно существует. Лемма доказана. □

Перейдем к доказательству леммы 1.

Доказательство леммы 1. Исследуем поведение функции $1-\Phi(s)$ при $s \to +\infty$. Имеем:

$$n(1-\Phi(s)) = C_p n \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\frac{s}{\cos(\phi)}}^{+\infty} rp(r)drd\phi$$

$$= 2C_p n \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{s}{\cos(\phi)}\left(1-F\left(\frac{s}{\cos(\phi)}\right)\right) + \int\limits_{\frac{s}{\cos(\phi)}}^{+\infty} (1-F(r))\,dr\right] d\phi.$$

Первое равенство получено переходом к полярным координатам, второе – интегрированием по частям. Рассмотрим интеграл от первого слагаемого и покажем его эквивалентность

$$\sqrt{2\pi}C_p n(1-F(s))\sqrt{sf(s)}$$

при $s \to +\infty$. С этой целью произведем замену переменной

$$s + f(s)y = \frac{s}{\cos\phi},$$

где функция $f(s)$ определена в равенстве (20). Тогда

$$\phi = \arccos\left(\frac{s}{s+f(s)y}\right).$$

Получаем

$$
\begin{aligned}
2C_p n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s}{\cos(\phi)} \left(1 - F\left(\frac{s}{\cos(\phi)}\right)\right) d\phi = 2C_p n \int\limits_0^{+\infty} (s + f(s)y) \\
\times \left(1 - F\left(s + f(s)y\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{s+f(s)y}\right)^2}} \frac{sf(s)}{(s+f(s)y)^2}\, dy \\
= \sqrt{2} C_p n (1 - F(s)) \sqrt{sf(s)} \\
\times \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - F\left(s + f(s)y\right)}{1 - F(s)} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f(s)y}{2s}}}\, dy. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Согласно соотношению (20), первый множитель под интегралом стремится к e^{-y}, а согласно свойству (23), второй множитель стремится к 1. При обосновании предельного перехода под знаком интеграла, данное выражение при $s \to +\infty$ эквивалентно

$$
\sqrt{2} C_p n (1 - F(s)) \sqrt{sf(s)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = C_p \sqrt{2\pi} n (1 - F(s)) \sqrt{sf(s)}. \qquad (28)
$$

Третий множитель ограничен сверху единицей, а первый оценивается по лемме 2. Получена суммируемая мажоранта, следовательно, согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости, возможен предельный переход под знаком интеграла. Рассмотрим второе слагаемое и покажем, что

$$
2C_p \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\frac{s}{\cos(\phi)}}^{+\infty} (1 - F(r))\, dr\, d\phi = o\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s}{\cos(\phi)} \left(1 - F\left(\frac{s}{\cos(\phi)}\right)\right) d\phi\right). \qquad (29)
$$

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
\int\limits_k^{+\infty} (1 - F(r))\, dr = \int\limits_0^{+\infty} (1 - F(k + yf(k))) f(k)\, dy \\
= f(k)(1 - F(k)) \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - F(k + yf(k))}{1 - F(k)}\, dy.
\end{aligned}
$$

Аналогично (27), подынтегральная функция по лемме 2 ограничивается сверху суммируемой функцией, поэтому при $k \to +\infty$ выполнено

$$\int_k^{+\infty} (1 - F(r))\, dr \sim f(k)(1 - F(k)) \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy = f(k)(1 - F(k)).$$

Следовательно, существует константа $C_1 > 0$, такая что начиная с некоторого момента выполнено неравенство

$$\int_k^{+\infty} (1 - F(r))\, dr < C_1 f(k)(1 - F(k)).$$

Отсюда получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{s}{\cos(\phi)}}^{+\infty} (1 - F(r))\, dr\, d\phi \leqslant C_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{s}{\cos(\phi)}\right)\left(1 - F\left(\frac{s}{\cos(\phi)}\right)\right) d\phi.$$

Согласно равенству (23),

$$f\left(\frac{s}{\cos(\phi)}\right) = o\left(\frac{s}{\cos(\phi)}\right),$$

что влечет соотношение (29). Выберем последовательность

$$b_n = \left(\frac{1}{1 - \Phi}\right)^{\leftarrow} (n(1 + o(1))).$$

Поскольку носитель функции $1 - F(x)$ не ограничен на бесконечности, носитель функции $1 - \Phi(x)$ также не ограничен. Отсюда следует стремление последовательности b_n к бесконечности. Таким образом,

$$1 \sim n(1 - \Phi(b_n)) \sim C_p \sqrt{2\pi} n(1 - F(b_n))\sqrt{b_n f(b_n)}. \tag{30}$$

Положим $a_n = f(b_n)$ и проверим выполнение условия

$$n(1 - \Phi(a_n x + b_n)) \to e^{-x} \quad \text{при } n \to +\infty. \tag{31}$$

Согласно (21), это условие эквивалентно сходимости максимумов к закону Гумбеля. Действительно, согласно (28) и (29), выполнено

$$
\begin{aligned}
n(1-\Phi(a_n x+b_n)) &\sim C_p\sqrt{2\pi}n(1-F(a_n x+b_n))\sqrt{(a_n x+b_n)f(a_n x+b_n)} \\
&= \frac{(1-F(a_n x+b_n))}{(1-F(b_n))}\sqrt{\left(\frac{a_n x}{b_n}+1\right)\frac{f(a_n x+b_n)}{f(b_n)}} \\
&\quad\times \sqrt{2\pi}C_p n(1-F(b_n))\sqrt{b_n f(b_n)} \sim e^{-x},
\end{aligned}
$$

где последнее соотношение следует из (20), (22), (23) и (30). Лемма доказана. □

Следующая лемма устанавливает справедливость теоремы 2 для конечных λ.

Лемма 3. *Пусть* $\lambda \in (0,+\infty)$ *и* $h(\delta,\varphi)$ *– непрерывная ограниченная функция,* $\operatorname{supp} h \subseteq [M,+\infty)\times[0,2\pi]$. *Тогда*

$$
\mathbb{E}\,\widehat{\mu}_n^\lambda(h) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\delta,\varphi)\left(1-e^{-\lambda e^{-\delta}}\right)d\delta\,d\varphi. \tag{32}
$$

Доказательство. Имеем:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\widehat{\mu}_n^\lambda(h) &= \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\sum_{i=1}^{T_\lambda(n)}\int\limits_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{\|x\|-b_n}{a_n}\right)C_p p(\|x\|) \\
&\qquad\times \mathbb{P}[X_i \text{ центрально выпуклый рекорд} \mid X_i = x]\,dx \\
&= C_p\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\int\limits_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{\|x\|-b_n}{a_n}\right)p(\|x\|) \\
&\qquad\times\left[\frac{1-\Phi(\|x\|)^{T_\lambda(n)}}{1-\Phi(\|x\|)}+\frac{1-(1-\Phi(\|x\|))^{T_\lambda(n)}}{\Phi(\|x\|)}\right]dx,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

где $\Phi(x)$ определена в (9). Слагаемое

$$
\frac{1-\Phi(\|x\|)^{T_\lambda(n)}}{1-\Phi(\|x\|)}
$$

соответствует случаю, когда прямая, ортогональная вектору x, оставляет начало координат в той же полуплоскости, что и векторы

$x_1, \dots, x_{i-1}$, а слагаемое

$$\frac{1-(1-\Phi(\|x\|))^{T_\lambda(n)}}{\Phi(\|x\|)}$$

отвечает случаю, когда данная прямая разделяет начало координат и векторы $x_1, \dots, x_{i-1}$. Сделаем замену переменных $x \to (s, \varphi)$, где $(a_n s + b_n, \varphi)$ – полярные координаты вектора x. Тогда можно продолжить (33) как

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,\widehat{\mu}_n^\lambda(h) = C_p a_n \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{b_n}{a_n}}^{+\infty} h\,(s,\varphi)\, p(a_n s + b_n)(a_n s + b_n) \\
&\times \left[\frac{1-\Phi(a_n s + b_n)^{T_\lambda(n)}}{1-\Phi(a_n s + b_n)} + \frac{1-(1-\Phi(a_n s + b_n))^{T_\lambda(n)}}{\Phi(a_n s + b_n)}\right] ds\, d\varphi \\
&= \frac{C_p n a_n b_n (1-F(b_n))\sqrt{a_n}}{f(b_n)\sqrt{b_n}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{b_n}{a_n}}^{+\infty} h\,(s,\varphi)\, \frac{1-F(a_n s + b_n)}{1-F(b_n)} \\
&\times g(a_n s + b_n) \frac{f(b_n)}{f(a_n s + b_n)} \left(\frac{a_n s}{b_n} + 1\right) \\
&\times \left[\frac{1-\Phi(a_n s + b_n)^{T_\lambda(n)}}{n(1-\Phi(a_n s + b_n))} + \frac{1-(1-\Phi(a_n s + b_n))^{T_\lambda(n)}}{n\Phi(a_n s + b_n)}\right] ds\, d\varphi. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Последнее равенство получено с использованием соотношения (7). Согласно соотношениям (4), (20)–(23) и лемме 1, справедливы следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned}
&\frac{1-F(a_n s + b_n)}{1-F(b_n)} = \frac{1-F(f(b_n)s + b_n)}{1-F(b_n)} \to e^{-s}, \quad g(a_n s + b_n) \to 1, \\
&\frac{f(a_n s + b_n)}{f(b_n)} = \frac{f(f(b_n)s + b_n)}{f(b_n)} \to 1, \quad \frac{b_n}{a_n} = \frac{b_n}{f(b_n)} \to +\infty, \\
&\frac{1-\Phi(a_n s + b_n)^{T_\lambda(n)}}{n(1-\Phi(a_n s + b_n))} \to \frac{1-e^{-\lambda e^{-s}}}{e^{-s}}, \\
&\frac{1-(1-\Phi(a_n s + b_n))^{T_\lambda(n)}}{n\Phi(a_n s + b_n)} \leqslant \frac{2}{n} \to 0.
\end{aligned}$$

Кроме того, по лемме 1,

$$\frac{C_p n a_n b_n (1-F(b_n))\sqrt{a_n}}{f(b_n)\sqrt{b_n}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$ под знаком интеграла в равенстве (34), получаем правую часть формулы (32). Для обоснования перехода под знаком интеграла построим суммируемую мажоранту и воспользуемся теоремой о мажорируемой сходимости. Функция $g(x)$ стремится к 1 при $x \to +\infty$ и непрерывна, следовательно, она равномерно ограничена сверху при $x > 0$. Заметим также, что

$$\frac{1-(1-\Phi(a_n s + b_n))^n}{n\Phi(a_n s + b_n)} \leqslant \frac{2}{n} \leqslant 2,$$

и

$$\frac{1-\Phi(a_n s+b_n)^{T_\lambda(n)}}{n(1-\Phi(a_n s+b_n))} = \frac{1}{n}\Big(1+\Phi(a_n s+b_n)+\ldots+\Phi(a_n s+b_n)^{T_\lambda(n)-1}\Big) \leqslant \frac{T_\lambda(n)}{n}.$$

Поскольку $\lambda < +\infty$, величина $T_\lambda(n)/n$ ограничена сверху некоторой константой. Частное a_n/b_n стремится к нулю в силу свойства (23), следовательно, начиная с некоторого момента выполняется неравенство $a_n/b_n < 1$. Функция h также ограничена сверху константой.

Тогда из (24) следует, что при $s > 0$ интеграл в (34) оценивается сверху как

$$O(1)\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{1-F(a_n s+b_n)}{1-F(b_n)}\right)^{1-\varepsilon}(s+1)\,ds\,d\varphi$$
$$\leqslant O(1)\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{C(\varepsilon_1)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}\exp\left(-\varepsilon_1 s(1-\varepsilon)\right)(s+1)\,ds\,d\varphi,$$

причем данная оценка выполняется поточечно для подынтегральных выражений. Правая часть оценки следует из леммы 2. Полученная функция не зависит от n, а при $\varepsilon_1(1-\varepsilon) > 0$ этот интеграл сходится.

Оценим теперь (34) при $s < 0$. При $s < M$ выполнено $h(s,\varphi) = 0$, поэтому и подынтегральная функция равна нулю. При $M < s < 0$ имеем

$$0 < \left(\frac{a_n}{b_n}s + 1\right) < 1.$$

Тогда в силу леммы 2 и неравенства (25), при $s < 0$ и $b_n + a_n M > t_0$ интеграл в (34) оценивается сверху как

$$O(1)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_M^0 \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{1-F(a_n s+b_n)}{1-F(b_n)}\right)^{1+\varepsilon} ds\, d\varphi$$
$$\leqslant O(1)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{C_1(\varepsilon_1, M)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}\exp\left(-\varepsilon_1 s(1+\varepsilon)\right) ds\, d\varphi,$$

причем данная оценка выполняется поточечно для подынтегральных выражений. Выбирая $0 < \varepsilon < 1$ и произвольное ε_1 из леммы 2, получаем суммируемую мажоранту. Лемма 3 доказана. □

Аналогичное утверждение справедливо для выпуклых рекордов.

Лемма 4. *Пусть* $\lambda \in (0, +\infty)$ *и* $h(\delta, \varphi)$ *– непрерывная ограниченная функция,* $\operatorname{supp} h \subseteq [M, +\infty) \times [0, 2\pi]$. *Тогда*

$$\mathbb{E}\,\mu_n^\lambda(h) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(z,\psi) g_\lambda(z)\, dz\, d\psi, \tag{35}$$

где

$$g_\lambda(z) = 1 - e^{-\lambda e^{-z}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-\theta^2 - \theta l - \frac{l^2}{2}\right) l$$
$$\times\left(1 - \left[\exp\left(-\lambda\exp\left(-z+\frac{\theta^2}{2}\right)\right)\left(1+e^{-z+\frac{\theta^2}{2}}\right)\right]\right) dl\, d\theta.$$

Доказательство. Пусть X_i – выпуклый рекорд в момент i. Это означает, что X_i является вершиной многоугольника $P_i = \operatorname{conv}(X_1, \ldots, X_i)$. Тогда X_i либо является центрально выпуклым рекордом, либо прямая l_i, проходящая через X_i перпендикулярно вектору X_i, не является опорной. Во втором случае стороны P_i, содержащие X_i, находятся по разные стороны от прямой l_i. Пусть X_j – соседняя с X_i по стороне вершина P_i. Тогда $\angle OX_iX_j < \pi/2$, если X_i лежит с той же стороны от l_i, что и начало координат O, и $\angle OX_iX_j > \pi/2$, если X_i и O разделены прямой l_i. Геометрически второе условие означает, что точки X_i, X_j лежат с одной стороны от перпендикуляра из O на X_iX_j и $|OX_j| > |OX_i|$.

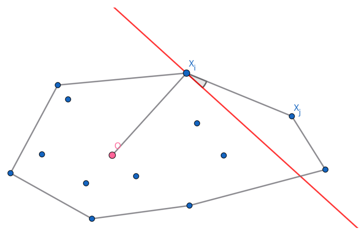

Рис. 3. Выпуклый рекорд, не являющийся центрально выпуклым.

Это позволяет получить соотношение

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,\mu_n^\lambda(h) = \mathbb{E}\,\widehat{\mu}_n^\lambda(h)\\
&-2\sum_{i=2}^{T_\lambda(n)} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{X_i \text{ вершина } P_i, l_i \text{ разделяет } O \text{ и } P_i\} h\left(\frac{\|X_i\|-b_n}{a_n}, \varphi\right)\right]\\
&+\sum_{i=2}^{T_\lambda(n)}\sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{X_iX_j \text{ сторона } P_i, \angle OX_iX_j > \pi/2\} h\left(\frac{\|X_i\|-b_n}{a_n}, \varphi\right)\right]. \qquad (36)
\end{aligned}$$

Данная формула обусловлена тем, что в последнем слагаемом однократно учтены выпуклые рекорды, не являющиеся центрально выпуклыми, и дважды учтены центрально выпуклые рекорды, у которых перпендикулярная прямая отделяет O от остальных точек $X_1, \ldots, X_{i-1}$ (см. рис. 3). Асимптотика первого слагаемого следует из леммы 3. Из доказательства леммы 3 также следует, что второе слагаемое асимптотически меньше первого.

В силу симметрии,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{T_\lambda(n)}\sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{X_iX_j \text{ сторона } P_i, \angle OX_iX_j > \pi/2\} h\left(\frac{\|X_i\| - b_n}{a_n}, \varphi\right)\right]\\
&\quad = \sum_{i=1}^{T_\lambda(n)} (i-1) C_p^2 \int\limits_{(\mathbb{R}^2)^2} p(\|x_1\|) p(\|x_2\|) h\left(\frac{\|x_1\| - b_n}{a_n}, \varphi\right)\\
&\qquad \times \mathbb{P}[X_1X_2 \text{ сторона } \operatorname{conv}(X_1, \ldots, X_i) | X_1 = x_1, X_2 = x_2]\\
&\qquad \times \mathbf{1}\{\angle Ox_1x_2 > \pi/2\}\, dx_1\, dx_2.
\end{aligned}$$

Применяя формулу Бляшке–Петканчина, преобразуем правую часть к виду

$$C_p^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{t_1}^{+\infty} p\left(\sqrt{t_1^2+r^2}\right) p\left(\sqrt{t_2^2+r^2}\right)$$
$$\times \left[h\biggl(\frac{\sqrt{r^2+t_1^2}-b_n}{a_n}, \psi - \arctan\frac{t_1}{r}\biggr)\right.$$
$$\left. + h\biggl(\frac{\sqrt{r^2+t_1^2}-b_n}{a_n}, \psi + \arctan\frac{t_1}{r}\biggr)\right]$$
$$\times (t_2 - t_1) \sum_{i=3}^{T_\lambda(n)} \bigl[(i-1)\left(\Phi(r)^{i-2} + (1-\Phi(r))^{i-2}\right)\bigr] dt_2\, dt_1\, dr\, d\psi.$$

При интегрировании мы учитывали, что $t_2 > t_1$, поскольку в исходной формуле было условие $\angle Ox_1x_2 > \frac{\pi}{2}$. Это означает, что x_2 находится дальше от центра, чем x_1, и обе точки лежат с одной стороны от проекции начала координат на прямую, проходящую через x_1, x_2. Выполним замену переменных:

$$t_1 = \delta \sin\phi,$$
$$t_2 = \delta\sin\phi + t,$$
$$r = \delta\cos\phi.$$

Тогда

$$dt_1\, dt_2\, dr = \delta\, d\phi\, dt\, d\delta.$$

Выражение примет вид

$$C_p^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{+\infty} p\,(\delta)\, p\left(\sqrt{\delta^2 + 2\delta t\sin\phi + t^2}\right)\delta t$$
$$\times \left[h\biggl(\frac{\delta-b_n}{a_n}, \psi + \frac{\pi}{2} - \phi\biggr) + h\biggl(\frac{\delta-b_n}{a_n}, \psi - \frac{\pi}{2} + \phi\biggr)\right]$$
$$\times \sum_{i=3}^{T_\lambda(n)} \bigl[(i-1)\left(\Phi(\delta\cos\phi)^{i-2} + (1-\Phi(\delta\cos\phi))^{i-2}\right)\bigr] dt\, d\phi\, d\delta\, d\psi.$$

Произведем следующую замену переменных:

$$\delta = a_n z + b_n,$$

$$\phi = \theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}},$$
$$t = \sqrt{a_n b_n} l.$$

Якобиан замены равен

$$d\delta\, d\phi\, dt = a_n^2\, dz\, d\theta\, dl,$$

и рассматриваемое выражение преобразуется в

$$a_n^2 \sqrt{a_n b_n} C_p^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{b_n}{a_n}}^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}} \int\limits_0^{+\infty} p\left(a_n z + b_n\right)$$
$$\times p\left(\sqrt{(a_n z + b_n)^2 + 2(a_n z + b_n)\sqrt{a_n b_n} l \sin\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right) + a_n b_n l^2}\right)$$
$$\times (a_n z + b_n) l$$
$$\times \left(h\left(z, \psi + \frac{\pi}{2} - \theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right) + h\left(z, \psi - \frac{\pi}{2} + \theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)$$
$$\times \sum_{i=3}^{T_\lambda(n)} \frac{i-1}{n^2} \left[\Phi\left((a_n z + b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)^{i-2}\right.$$
$$\left. + \left(1 - \Phi\left((a_n z + b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)\right)^{i-2}\right] dl\, d\theta\, dz\, d\psi.$$

Примем обозначения

$$\omega_n(z,\theta,l) = \sqrt{(a_n z + b_n)^2 + 2(a_n z + b_n)\sqrt{a_n b_n} l \sin\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right) + a_n b_n l^2}$$

и воспользуемся формулой (7). Выражение примет вид

$$\frac{C_p^2 a_n^2 b_n \sqrt{a_n b_n}(1 - F(b_n))^2 n^2}{f^2(b_n)} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{b_n}{a_n}}^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - F(a_n z + b_n)}{1 - F(b_n)}$$
$$\times g(a_n z + b_n) \frac{f(b_n)}{f(a_n z + b_n)} \frac{1 - F\left(\omega_n(z,\theta,l)\right)}{1 - F(b_n)} g\left(\omega_n(z,\theta,l)\right) \frac{f(b_n)}{f\left(\omega_n(z,\theta,l)\right)}$$

$$\times \left(\frac{a_n z}{b_n}+1\right) l \left(h\left(z, \psi+\frac{\pi}{2}-\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)+h\left(z, \psi-\frac{\pi}{2}+\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)$$
$$\times \sum_{i=3}^{T_\lambda(n)} \frac{i-1}{n^2}\left[\Phi\left((a_n z+b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)^{i-2}\right.$$
$$\left.+\left(1-\Phi\left((a_n z+b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)\right)^{i-2}\right] dl\, d\theta\, dz\, d\psi. \tag{37}$$

Согласно лемме 1,

$$\frac{C_p^2 a_n^2 b_n \sqrt{a_n b_n}(1-F(b_n))^2 n^2}{f^2(b_n)} \sim \sqrt{\frac{b_n}{4\pi^2 a_n}}.$$

Исследуем возможность предельного перехода под знаком интеграла. Из (20)–(23) следует, что при $n \to +\infty$ имеем:

$$\frac{1-F(a_n z+b_n)}{1-F(b_n)} \to e^{-z}, \quad g(a_n z+b_n) \to 1,$$
$$\frac{f(a_n z+b_n)}{f(b_n)} \to 1, \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{f(b_n)}{b_n} \to 0,$$
$$h\left(z, \psi+\frac{\pi}{2}-\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right) \to h\left(z, \psi+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$h\left(z, \psi-\frac{\pi}{2}+\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right) \to h\left(z, \psi-\frac{\pi}{2}\right).$$

Рассмотрим $\omega_n(z,\theta,l)$ при фиксированных z,θ,l и $n \to +\infty$. Имеем:

$$\omega_n(z,\theta,l) = (a_n z+b_n)\sqrt{1+\gamma_n},$$

где

$$\gamma_n = \frac{2\sqrt{a_n b_n} l \sin\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)}{(a_n z+b_n)} + \frac{a_n b_n l^2}{(a_n z+b_n)^2} = \frac{2a_n\theta l}{b_n} + \frac{a_n l^2}{b_n} + o\left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Используя разложение $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + o(x)$, получаем

$$\omega_n(z,\theta,l) = (a_n z+b_n)\sqrt{1+\gamma_n} = b_n + a_n\left(z+\theta l+\frac{l^2}{2}\right) + o(a_n).$$

В силу локальной равномерности (22),

$$\frac{f(\omega_n(z,\theta,l))}{f(b_n)} \to 1.$$

Кроме того, из соотношения (4) следует, что

$$g\left(\omega_n(z,\theta,l)\right) \to 1.$$

Рассмотрим функцию

$$G_n(x) = \frac{1 - F(b_n + a_n x)}{1 - F(b_n)}.$$

Функция $G_n(x)$ монотонна для любого $n \in \mathbb{N}$ и $G_n(x) \to e^{-x}$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Сходимость монотонных функций к непрерывной функции является равномерной на компактах. Следовательно,

$$\frac{1 - F\left(\omega_n(z,\theta,l)\right)}{1 - F(b_n)} \to \exp\left(-z - \theta l - \frac{l^2}{2}\right).$$

Рассмотрим выражение, находящееся в аргументе Φ в выражении (37). При фиксированных z, θ выполнено

$$\begin{aligned}(a_n z + b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right) &= (a_n z + b_n)\left(1 - \frac{a_n\theta^2}{2b_n} + o\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\right)\\ &= b_n + a_n\left(z - \frac{\theta^2}{2}\right) + o(a_n).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} i y^{i-1} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} y^i\right)' = \left(\frac{1-y^n}{1-y}\right)' = \frac{-ny^{n-1}(1-y) + (1-y^n)}{(1-y)^2}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}&\sum_{i=3}^{T_\lambda(n)} \frac{i-1}{n^2}\Phi\left((a_n z + b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)^{i-2}\\ &= o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1 - \Phi^{T_\lambda(n)}\left(b_n + a_n\left(z - \frac{\theta^2}{2}\right) + o(a_n)\right)}{n^2\left(1 - \Phi(b_n + a_n\left(z - \frac{\theta^2}{2}\right) + o(a_n))\right)^2}\\ &- \frac{\Phi^{T_\lambda(n)-1}\left(b_n + a_n\left(z - \frac{\theta^2}{2}\right) + o(a_n)\right)}{n\left(1 - \Phi(b_n + a_n\left(z - \frac{\theta^2}{2}\right) + o(a_n))\right)}.\end{aligned}$$

Функции $n(1-\Phi(a_n x + b_n))$ и $\Phi^n(a_n x + b_n)$ монотонны при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ и по лемме 1 поточечно сходятся к непрерывным функциям, что влечет равномерную сходимость на компактах. Следовательно,

$$\sum_{i=3}^{T_\lambda(n)} \frac{i-1}{n^2}\Phi\left((a_n z+b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)^{i-2}$$
$$\to \frac{1-\left[\exp\left(-\lambda\exp\left(-z+\frac{\theta^2}{2}\right)\right)\left(1+e^{-z+\frac{\theta^2}{2}}\right)\right]}{e^{-2z+\theta^2}}. \tag{38}$$

Для оценки оставшегося слагаемого воспользуемся неравенством $\Phi(a_n x+b_n)\geqslant\Phi(0)=1/2$:

$$\sum_{i=3}^{T_\lambda(n)} \frac{i-1}{n^2}\left(1-\Phi\left((a_n z+b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)\right)^{i-2} \leqslant \sum_{i=1}^{T_\lambda(n)}\frac{i-1}{n^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-2}$$
$$\leqslant \frac{4}{n^2}\to 0.$$

Переходя к пределу под знаком интеграла в (37), получаем правую часть (35).

Обоснуем справедливость предельного перехода, показав существование суммируемой мажоранты начиная с некоторого n. Разобьем интеграл на две части в зависимости от знака z.

Рассмотрим сначала случай $z>0$. Как и в лемме 3, функции $|g(a_n z+b_n)|, |h(x,\varphi)|$ ограничены сверху константами, не зависящими от n. Кроме того, начиная с некоторого n, выполняется

$$0<\left(\frac{a_n}{b_n}z+1\right)\leqslant(z+1).$$

Поскольку при $z>0$ выполнено $\omega_n(z,\theta,l)\geqslant b_n$, можно воспользоваться неравенством (24) для оценки величины $f(b_n)/f(\cdot)$. Существует $\varepsilon_2\in(0,1)$, такое что начиная с некоторого n, интеграл в выражении (37) ограничивается сверху как

$$O(1)\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1-F(a_n z+b_n)}{1-F(b_n)}\right)^{1-\varepsilon_2}$$
$$\times\left(\frac{1-F\left(\omega_n(z,\theta,l)\right)}{1-F(b_n)}\right)^{1-\varepsilon_2}(z+1)\,l\,dl\,d\theta\,dz\,d\psi,$$

при этом данная оценка выполняется поточечно для подынтегральных выражений. По лемме 2, первый множитель подынтегрального выражения оценки начиная с некоторого n не превосходит

$$(C_1 \exp(-\varepsilon_1 z))^{1-\varepsilon_2}.$$

Для оценки второго множителя оценим снизу величину $\omega_n(z,\theta,l)$ при $0<\theta<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}, 0<z,l:$

$$\begin{aligned}\omega_n(z,\theta,l) &= \sqrt{(a_n z+b_n)^2+2(a_n z+b_n)\sqrt{a_n b_n}\, l \sin\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)+a_n b_n l^2} \\ &\geqslant \sqrt{b_n^2+\frac{2b_n a_n l\theta}{4}+a_n b_n l^2} = b_n + \frac{\frac{2b_n a_n l\theta}{4}+a_n b_n l^2}{b_n+\sqrt{b_n^2+\frac{2b_n a_n l\theta}{4}+a_n b_n l^2}} \\ &\geqslant b_n + \frac{\frac{2b_n a_n l\theta}{4}+a_n b_n l^2}{2b_n+\sqrt{\frac{2b_n a_n l\theta}{4}+a_n b_n l^2}}. \end{aligned} \tag{39}$$

Первое неравенство следует из положительности слагаемых, условия $z>0$ и оценки $\sin x \geqslant 2x/\pi \geqslant x/4$ при $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Второе неравенство использует неравенство $\sqrt{x+y}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}$ для $x,y>0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\omega_n(z,\theta,l) &\geqslant \min\left(b_n+a_n\left(\frac{l\theta}{8}+\frac{l^2}{4}\right), b_n+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2b_n a_n l\theta}{4}+a_n b_n l^2}\right) \\ &\geqslant \min\left(b_n+a_n\left(\frac{l\theta}{8}+\frac{l^2}{4}\right), b_n+a_n\sqrt{l\theta+l^2}\right). \end{aligned} \tag{40}$$

Последнее неравенство справедливо, начиная с некоторого n, так как $b_n/a_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$. По лемме 2 получаем

$$\left(\frac{1-F(\omega_n(z,\theta,l))}{1-F(b_n)}\right)^{1-\varepsilon_2} \leqslant \max\left(\left(\frac{1-F\left(b_n+a_n\left(\frac{l\theta}{8}+\frac{l^2}{4}\right)\right)}{1-F(b_n)}\right)^{1-\varepsilon_2}, \left(\frac{1-F\left(b_n+a_n\sqrt{l\theta+l^2}\right)}{1-F(b_n)}\right)^{1-\varepsilon_2}\right)$$

$$\leqslant C_1^{1-\varepsilon_2}\left[\exp\left(-\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)\left(\frac{l\theta}{8}+\frac{l^2}{4}\right)\right)+\exp\left(-\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)\sqrt{l\theta+l^2}\right)\right].$$

Эта оценка применима и при $\theta>\frac{\pi}{2}\sqrt{b_n/a_n}$, где подынтегральная функция в (37) равна нулю. Полученная мажоранта суммируема, так как выполнено

$$C_3 \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-\varepsilon_3 z)(z+1)\, l$$

$$\times \left[\exp\left(-\varepsilon_3\left(\frac{l\theta}{8}+\frac{l^2}{4}\right)\right)+\exp\left(-\varepsilon_3\sqrt{l\theta+l^2}\right)\right] dl\, d\theta\, dz\, d\psi$$

$$= 2\pi C_3 \int_0^{+\infty} \exp(-\varepsilon_3 z)(z+1)\; dz$$

$$\times \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} l\left[\exp\left(-\varepsilon_3\left(\frac{l\theta}{8}+\frac{l^2}{4}\right)\right)+\exp\left(-\varepsilon_3\sqrt{l\theta+l^2}\right)\right] dl\, d\theta,$$

где $\varepsilon_3 = \varepsilon_1(1-\varepsilon_2) > 0$. Интеграл по z сходится. Второй интеграл также сходится, поскольку

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} l \exp\left(-\varepsilon_3\left(\frac{l\theta}{8}+\frac{l^2}{4}\right)\right) d\theta\, dl = \frac{8}{\varepsilon_3}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon_3 l^2}{4}\right) dl < +\infty,$$

и вместе с тем

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} l \exp\left(-\varepsilon_3\sqrt{l\theta+l^2}\right) d\theta\, dl = 2\int_0^{+\infty}\int_l^{+\infty} y\exp(-\varepsilon_3 y)\, dy\, dl$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\left(\frac{l}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\varepsilon_3^2}\right)\exp(-\varepsilon_3 l)\, dl = \frac{4}{\varepsilon_3^3} < +\infty.$$

Равенство во втором интеграле получено заменой $y = \sqrt{l\theta + l^2}$. Следовательно, при $z > 0$ существует суммируемая мажоранта.

Рассмотрим случай $z < 0$. Оценки в (37) для функций g, h и слагаемого, зависящего от Φ, остаются в силе. Существует $M < 0$, такое что $h(s,\varphi) = 0$ при $s < M$, поэтому можно считать, что $z \in [M, 0]$. При больших n выполняется

$$0 < \left(\frac{a_n}{b_n}M + 1\right) \leqslant \left(\frac{a_n}{b_n}z + 1\right) \leqslant 1.$$

Также

$$b_n + a_n z \geqslant b_n - a_n M \quad \text{и} \quad \omega_n(z,\theta,l) > b_n - a_n M.$$

Рассмотрим n такое, что $b_n - a_n M \geqslant t_0$, и снова применим (25) для $f(b_n)/f(\cdot)$, получая оценку сверху на интеграл из (37)

$$\frac{4M_2C_2^2}{(1-\varepsilon_4)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_M^0\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1-F(a_nz+b_n)}{1-F(b_n)}\right)^{1+\varepsilon_4} \times\left(\frac{1-F\left(\omega_n(z,\theta,l)\right)}{1-F(b_n)}\right)^{1+\varepsilon_4} l\,dl\,d\theta\,dz\,d\psi,$$

при этом данная оценка выполняется поточечно для подынтегральных выражений. Заметим, что из (20) вытекает

$$\left(\frac{1-F(a_nz+b_n)}{1-F(b_n)}\right)^{1+\varepsilon_4} \leqslant \left(\frac{1-F(a_nM+b_n)}{1-F(b_n)}\right)^{1+\varepsilon_4} \to e^{-(1+\varepsilon_4)M}.$$

Так как $M<0$, то аналогично (39) и (40) справедливо

$$\omega_n(z,\theta,l)\geqslant\min\left(b_n+a_nM+a_n\left(\frac{l\theta}{8}+\frac{l^2}{4}\right), b_n+a_nM+a_n\sqrt{l\theta+l^2}\right). \quad (41)$$

Поэтому, аналогично случаю $z>0$, интеграл из (37) оценивается сверху как

$$2\pi C_3\exp(-\varepsilon_5 M)\int\limits_M^0\left(\frac{1-F(a_nM+b_n)}{1-F(b_n)}\right)^{1+\varepsilon_4}dz \times\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} l\left[\exp\left(-\varepsilon_5\left(\frac{l\theta}{8}+\frac{l^2}{4}\right)\right)+\exp\left(-\varepsilon_5\sqrt{l\theta+l^2}\right)\right]dl\,d\theta,$$

где $\varepsilon_5 = \varepsilon_1(1-\varepsilon_4)$, при этом данная оценка выполняется поточечно для подынтегральных выражений. Первый интеграл конечен, второй также сходится (см. случай $z>0$). Таким образом, для (37) при $z<0$ также существует суммируемая мажоранта, следовательно, можно перейти к пределу под знаком интеграла. Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Пусть* $h(\delta,\varphi)$ *– непрерывная ограниченная функция,* $\operatorname{supp} h \subseteq [M_3,M_4]\times[0,2\pi]$. *Тогда*

$$\mathbb{E}\,\widehat{\mu}_n^\infty(h) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\delta,\varphi)\,d\delta\,d\varphi.$$

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства леммы 3. Предположим, что $T_\infty(n) = +\infty$. Тогда

$$\mathbb{E}\,\widehat{\mu}_n^\infty(h) = C_p\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\sum_{i=1}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{\|x\|-b_n}{a_n}\right)$$
$$\times\, p(\|x\|)\mathbb{P}[X_i \text{ центрально выпуклый рекорд} \,|\, X_i = x]\, dx.$$

Эта формула отличается от формулы (33) лишь верхним пределом суммирования. Аналогично, интеграл сводится к (34), где последний множитель заменяется на

$$\frac{1}{n(1-\Phi(a_n s + b_n))} + \frac{1}{n\Phi(a_n s + b_n)}.$$

При $n \to +\infty$ это выражение стремится к e^s, пределы остальных выражений остаются прежними, следовательно, подынтегральное выражение поточечно сходится к $h(s,\varphi)$. При фиксированном n функция $\frac{1}{n(1-\Phi(a_n s+b_n))}$ монотонна, а последовательность сходится к непрерывному пределу e^s, что влечет равномерную сходимость на компакте $[M_3, M_4]$ и равномерную ограниченность. Второе слагаемое также равномерно ограничено. Суммарное выражение также равномерно ограничено, построение суммируемой мажоранты проводится по аналогии с построением из доказательства леммы 3. В случае, когда $T_\infty(n) < +\infty$, но $T_\infty(n)/n \to +\infty$, рассуждения аналогичны. □

Лемма 6. *Пусть $h(\delta,\varphi)$ – непрерывная ограниченная функция, $\operatorname{supp} h \subseteq [M_3, M_4] \times [0, 2\pi]$. Тогда*

$$\mathbb{E}\,\mu_n^\infty(h) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(z,\psi) g_2(z)\, dz\, d\psi,$$

где

$$g_2(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-\theta^2 - \theta l - \frac{l^2}{2}\right) l\, dl\, d\theta + 1.$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично приведенному выше доказательству леммы 4. Предположим, что $T_\infty(n) = +\infty$ (случай $T_\infty(n)/n \to +\infty$ полностью аналогичен). Теперь суммирование в интегралах леммы 4 производится до $+\infty$. В формуле (37) последнее слагаемое суммируется до $+\infty$. Данное слагаемое равномерно ограничено на $[M_3, M_4]$, поэтому дальнейшие рассуждения повторяют доказательство леммы 4. Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{+\infty} iy^{i-1} = \frac{1}{(1-y)^2},$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=3}^{+\infty} \frac{i-1}{n^2} \Phi\left((a_n z + b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)^{i-2} \\
&\quad = \frac{1}{n^2\left(1 - \Phi((a_n z + b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)^2} - \frac{1}{n} \\
&\quad \leqslant \frac{1}{n^2\left(1 - \Phi(a_n M_4 + b_n)\right)^2} \to e^{2M_4}.
\end{aligned}$$

Оценка второго слагаемого не зависит от λ и выводится по аналогии с приведенным выше доказательством леммы 4:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{+\infty} \frac{i-1}{n^2}\left(1 - \Phi\left((a_n z + b_n)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)\right)\right)^{i-2} &\leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i-1}{n^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} \\
&\leqslant \frac{4}{n^2} \to 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, выражение равномерно ограничено. Единственное отличие состоит в том, что при переходе к поточечному пределу под знаком интеграла в (38) при $\lambda = +\infty$ числитель стремится к 1. Переходя к пределу под знаком интеграла в остальных выражениях (37), получаем результат леммы 6. □

8.2. Среднее число вершин и одномерный случай.

Доказательство замечания 3. Докажем, что

$$1 - F_R(x) \sim 2\pi C_p x(1 - F(x)) \text{ при } x \to +\infty. \tag{42}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
1 - F_R(x) = 2\pi C_p \int_x^{+\infty} yp(y)\,dy = 2\pi C_p(1 - F(x))x \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{f(x)}{x}z\right) \\
\times \frac{1 - F(x + f(x)z)}{1 - F(x)} \frac{f(x)}{f(x + f(x)z)} g(x + f(x)z)\,dz.
\end{aligned}$$

В интеграле произведена замена $y = x + f(x)z$. Аналогично интегралу (27), переходя к пределу под знаком интеграла, получаем

$$1 - F_R(x) \sim 2\pi C_p(1 - F(x))x \int_0^{+\infty} e^{-z}\,dz = 2\pi C_p(1 - F(x))x.$$

По определению функции $\ell(x)$,

$$1 = x(1 - F_R(\ell(x))) \sim 2\pi C_p x\ell(x)(1 - F(\ell(x))). \qquad \square$$

Доказательство предложения 1. Примем обозначение

$$G(x) = \frac{1}{1 - F_R(x)}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{2\pi C_p x p(x)}{(1 - F_R(x))^2} \\ &= 2\pi C_p x p(x) G^2(x) = \frac{2\pi C_p x(1 - F(x))g(x)G^2(x)}{f(x)}. \end{aligned} \tag{43}$$

Из формулы (4) следует, что $p(x) \neq 0$ начиная с некоторого момента. Следовательно, при больших x выполнено

$$G(\ell(x)) = x.$$

Дифференцируя данное равенство, получаем

$$\ell'(x) = \frac{1}{G'(\ell(x))} = \frac{f(\ell(x))}{2\pi C_p x^2 \ell(x)(1 - F(\ell(x)))g(\ell(x))}. \tag{44}$$

Покажем, что для функции $\ell(x)$ начиная с некоторого момента можно считать $a(x)$ константой. Такие медленно меняющиеся функции называются нормализованными. Это условие равносильно принадлежности $\ell(x)$ классу Зигмунда, а именно выполнению следующего свойства (см., например, [12, теорема 1.5.5]): для любого α начиная с некоторого момента

функция $\ell(x)x^\alpha$ возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$.

Заметим, что $G(x)$ монотонно возрастает, что влечет монотонное возрастание $\ell(x)$. Следовательно, при $\alpha > 0$ функция $x^\alpha \ell(x)$ монотонно возрастает. Рассмотрим функцию $g_\alpha(x) = \ell(x)/x^\alpha$. Покажем, что при $\alpha > 0$ она монотонно убывает начиная с некоторого момента. Воспользовавшись (44), получаем

$$\begin{aligned} g_\alpha'(x) &= \frac{x^\alpha \ell'(x) - \alpha x^{\alpha-1}\ell(x)}{x^{2\alpha}} \\ &= \frac{x^{\alpha-1}\ell(x)}{x^{2\alpha}} \left(\frac{f(\ell(x))}{2\pi C_p x \ell^2(x)(1 - F(\ell(x))g(\ell(x))} - \alpha \right). \end{aligned}$$

В силу соотношения из замечания 3, первое слагаемое в скобках эквивалентно функции

$$\frac{f(\ell(x))}{\ell(x)g(\ell(x))},$$

которая, согласно соотношениям (23) и (4), стремится к нулю при x стремящемся к $+\infty$. Следовательно, производная с некоторого момента отрицательна, и функция убывает.

Мы показали, что представление для $\ell(x)$ можно выбрать так, чтобы функция $a(x)$ была константой с некоторого момента, поэтому функцию $\varepsilon(x)$ можно вычислить по формуле

$$\varepsilon(x) = \frac{x\ell'(x)}{\ell(x)}.$$

Подставляя $\ell'(x)$ из (44) и вспоминая предложение 1, получаем

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{G'(\ell(x))} = \frac{f(\ell(x))}{2\pi C_p x \ell(x)^2 (1 - F(\ell(x)))g(\ell(x))} \sim \frac{f(\ell(x))}{\ell(x)}$$

и

$$\nu(x) = \varepsilon(G(x)) = \frac{f(x)}{2\pi C_p G(x) x^2 (1 - F(x))g(x)} \sim \frac{f(x)}{x},$$

что завершает доказательство. □

Доказательство теоремы 3. Доказательство аналогично доказательству леммы 4 при $\lambda = 1$ и $T_\lambda(n) = n$ с заменой P_i на P_n в формуле (36). Это также требует аналогичной модификации $\widehat{\mu}_n^\lambda(h)$. Выполняя преобразования интегралов и переходя к пределу, получаем искомое соотношение. Поскольку вершина P_n является одним из выпуклых рекордов за первые n наблюдений, суммируемая мажоранта из доказательства леммы 4 применима. □

Доказательство предложения 2. Имеем:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\widetilde{\mu}_n^{\lambda}(h) = \sum_{i=1}^{T_\lambda(n)} h\left(\frac{X_i-\beta_n}{\alpha_n}\right)\mathbb{P}\{X_i \text{ выпуклый рекорд}\}\\
&= \sum_{i=1}^{T_\lambda(n)} \int\limits_{\mathbb{R}} h\left(\frac{x-\beta_n}{\alpha_n}\right)\mathbb{P}[X_i \text{ выпуклый рекорд} \,|\, X_i = x]p(x)\,dx\\
&= \alpha_n \sum_{i=1}^{T_\lambda(n)} \int\limits_{\mathbb{R}} h(z)\left(F(\alpha_n z+\beta_n)^{i-1} + (1-F(\alpha_n z+\beta_n))^{i-1}\right)\\
&\qquad \times p(\alpha_n z+\beta_n)\,dz\\
&= \frac{\alpha_n(1-F(\beta_n))n}{f(\beta_n)}\\
&\times \int\limits_{\mathbb{R}} h(z)\left(\frac{1-F(\alpha_n z+\beta_n)^{T_\lambda(n)}}{n(1-F(\alpha_n z+\beta_n))} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{T_\lambda(n)}(1-F(\alpha_n z+\beta_n))^{i-1}\right)\\
&\times \frac{1-F(\alpha_n z+\beta_n)}{1-F(\beta_n)}\,\frac{f(\beta_n)}{f(\alpha_n z+\beta_n)}\,dz.
\end{aligned}
$$

Второе равенство получено заменой переменной $x = \alpha_n z + \beta_n$, а третье – выражением $p(x)$ через формулу (7). Согласно (5) и (21), множитель перед интегралом стремится к 1. Используя соотношения (20), (22) и (21), получаем, что подынтегральное выражение поточечно сходится к $h(z)(1-e^{-\lambda e^{-z}})$. Обоснование предельного перехода под знаком интеграла аналогично доказательству теоремы 1 и здесь опускается. □

8.3. Некоторые интегралы.

Доказательство замечания 1. Выполним замену $u = \theta + l$:

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\theta^2 - \theta l - \frac{l^2}{2}\right) l\,dl\,d\theta = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}} \int\limits_\theta^{+\infty} (u-\theta)e^{-\frac{u^2}{2}}du\,d\theta$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}} \int\limits_\theta^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}}du\,d\theta - \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}} \int\limits_\theta^{+\infty} \theta e^{-\frac{u^2}{2}}du\,d\theta.$$

Первое слагаемое равно интегралу Гаусса:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}} \int\limits_\theta^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}}du\,d\theta = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\theta^2}d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Второе слагаемое вычисляется интегрированием по частям:

$$\int\limits_0^{+\infty} \theta e^{-\frac{\theta^2}{2}} \int\limits_\theta^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du\,d\theta = \int\limits_0^{+\infty} \left(-e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right)' \int\limits_\theta^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du\,d\theta$$

$$= -e^{-\frac{\theta^2}{2}} \int\limits_\theta^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-\theta^2}d\theta = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Подставляя значения интегралов в исходное равенство, получаем результат замечания 1. □

Доказательство замечания 4. Преобразуем интеграл:

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(z)dzd\psi$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} l\exp\left(-2z - \theta l - \frac{l^2}{2} - e^{-z+\frac{\theta^2}{2}}\right) dl\,d\theta\,dz + \sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z-e^{-z}}dz.$$

Второе слагаемое вычисляется заменой $u = e^{-z}$:

$$\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z-e^{-z}}dz = \sqrt{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-u}\,du = \sqrt{2\pi}.$$

Первое слагаемое можно представить в виде

$$2\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} l\exp\left(-\theta l-\frac{l^2}{2}\right)dl\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2z-e^{-z+\frac{\theta^2}{2}}\right)dz\right)d\theta. \tag{45}$$

Во внутреннем интеграле по z сделаем замену $s=e^{-z+\frac{\theta^2}{2}}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2z-e^{-z+\frac{\theta^2}{2}}\right)dz=\int_0^{+\infty}se^{-s}e^{-\theta^2}\,ds=e^{-\theta^2}\Gamma(2)=e^{-\theta^2}.$$

Подставляя это в (45), получаем интеграл из замечания 1:

$$2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} l\exp\left(-\theta l-\frac{l^2}{2}-\theta^2\right)dl\,d\theta=\sqrt{\pi}(2-\sqrt{2}).$$

Суммируя значения двух интегралов, получаем, что исходный интеграл равен $2\sqrt{\pi}$. □

Список литературы

1. A. Rényi, *Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations.* In: Colloquium on Combinatorial Methods in Probability Theory (Aarhus, 1962), 104–117.
2. S. I. Resnick, *Limit laws for record values.* — Stoch. Process. Appl. **1** (1973) 67–82.
3. В. Б. Невзоров, *Рекорды.* — Теор. вер. и примен. **32**, No. 2 (1987) 219–251.
4. S. I. Resnick, *Extreme values, regular variation, and point processes.* Springer Science & Business Media, New York, 2008 (переиздание 1987 года).
5. L. de Haan, S. I. Resnick, *Local limit theorems for sample extremes.* — Ann. Probab. **10**, No. 2 (1982) 396–413.
6. C. Godrèche, J. Luck, *On sequences of convex records in the plane.* — J. Stat. Mech. **2024** (2024) 093208.
7. C. M. Goldie, S. I. Resnick, *Records in a partially ordered set.* — Ann. Probab. **17** (1989) 678–699.
8. M. Kaluszka, *Estimates of some probabilities in multidimensional convex records.* — Appl. Math. (Warsaw) **23**, No. 1 (1995) 1–11.
9. H. Carnal, *Die konvexe Hülle von rotationssymmetrisch verteilten Punkten.* — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **15** (1970) 168–176 (German, with English summary).
10. I. Hueter, *Limit theorems for the convex hull of random points in higher dimensions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999) 4337–4363.
11. A. Rényi, R. Sulanke, *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten.* — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **2** (1963) 75–84.
12. N. Bingham, C. Goldie, J. Teugels, *Regular Variation.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

13. A. V. Gnedin, *Records from a multivariate normal sample.* — Statist. Probab. Lett. **39**, No. 1 (1998) 11–15.
14. J.-D. Deuschel, O. Zeitouni, *Limiting curves for i.i.d. records.* — Ann. Probab. **23**, No. 2 (1995) 852–878.
15. C. M. Goldie, S. I. Resnick, *Many multivariate records.* — Stoch. Process. Appl. **59**, No. 2 (1995) 185–216.
16. A. V. Gnedin, *Conical extremes of a multivariate sample.* — J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. **99**, No. 4 (1994) 511–519.
17. L. de Haan, S. I. Resnick, *Limit theory for multivariate sample extremes.* — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **40** (1977) 317–337.
18. A. V. Gnedin, *On a best-choice problem with dependent criteria.* — J. Appl. Probab. **31**, No. 1 (1994) 221–234.
19. C. Dombry, M. Zott, *Multivariate records and hitting scenarios.* — Extremes **21** (2018) 343–361.
20. A. V. Gnedin, *The chain records.* — Electron. J. Probab. **12** (2007) 767–786.
21. H.-K. Hwang, T.-H. Tsai, *Multivariate records based on dominance.* — Electron. J. Probab. **15** (2010) 1863–1892.
22. S. Tat, M. R. Faridrohani, *A new type of multivariate records: depth-based records.* — Statist. **55**, No. 1 (2021) 1–25.
23. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry.* Probability and its Applications, Springer, Berlin, 2008.

Zaporozhets D. N., Simarova E. N. On planar convex records.

Let $X_1, X_2, \ldots$ be a sequence of independent identically distributed random vectors in $\mathbb{R}^2$. A vector X_n is called a *convex record* if it does not belong to the convex hull of the preceding vectors $\mathrm{conv}(X_1, \ldots, X_{n-1})$. In this paper, we investigate the asymptotic behavior of the mean number of convex records for distributions with exponentially decaying tails.

It is shown that a properly normalized empirical measure of convex records converges weakly in mean to an absolutely continuous limiting measure with an explicitly computed density.

Поступило 25 декабря 2025 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: zap1979@gmail.com

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: katerina.1.14@mail.ru