

А. Ф. Гундарева, Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов

КОММУТИРУЮЩИЕ МАТРИЧНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

§1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе мы изучаем коммутирующие дискретные операторы с матричными коэффициентами. Напомним некоторые результаты о коммутирующих дискретных операторах со скалярными коэффициентами вида

$$L_N = \sum_{j=-N_-}^{N_+} v_j(n) T^j, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad N_{\pm} \geq 0,$$

где T – оператор сдвига, $Tf(n) = f(n+1)$, и $N = N_- + N_+$ – порядок оператора. Оператор L_N действует на функциях, определенных на $\mathbb{Z}$, по правилу

$$L_N \varphi(n) = \sum_{j=-N_-}^{N_+} v_j(n) \varphi(n+j).$$

Если два дискретных оператора L_N и L_M коммутируют, то справедлив аналог леммы Бурхалла–Чаунди, а именно, существует ненулевой полином $Q(z, w)$, зануляющий эти операторы: $Q(L_N, L_M) = 0$. Полином Q определяет спектральную кривую пары операторов:

$$\Gamma = \{(z, w) : Q(z, w) = 0\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Спектральная кривая параметризует совместные собственные функции и отвечающие им собственные числа. Если

$$L_N \varphi(n) = z \varphi(n), \quad L_M \varphi(n) = w \varphi(n),$$

то $P = (z, w) \in \Gamma$. Любое максимальное коммутативное кольцо дискретных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на замкнутой неприводимой алгебраической кривой Γ (спектральной кривой) с r полюсами в точках $q_1, \dots, q_r$. Такие операторы называются

Ключевые слова: коммутирующие дискретные операторы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 24-11-00281, <https://rscf.ru/project/24-11-00281/>.

r-точечными. В этой работе мы будем предполагать, что спектральная кривая является гладкой. Совместные собственные функции операторов образуют векторное расслоение над аффинной частью кривой $\Gamma \setminus \{q_1, \dots, q_r\}$. Ранг этого расслоения называется *рангом операторов*.

В [1, 2] (см. также [3]) найдены спектральные данные для двухточечных коммутирующих дискретных операторов ранга один. Эти операторы играют важную роль при построении конечнозонных (алгебро-геометрических) решений одномерной цепочки Тоды.

В [4] доказано существование одноточечных коммутирующих операторов ранга $l > 1$. Эти операторы возникают при построении алгебро-геометрических решений ранга $l > 1$ двумерной интегрируемой цепочки Тоды (см. [5]).

В [6] найден новый класс коммутирующих дискретных операторов, в которых оператор сдвига входит только с положительными степенями:

$$L_N = \sum_{j=0}^N v_j(n) T^j. \quad (1)$$

Эти операторы являются одноточечными операторами ранга один. Позже в [7] дискретные операторы вида (1) были обобщены на случай разностных операторов вида

$$L_n = \sum_{j=0}^n v_j(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon^j}{\varepsilon^j}, \quad (2)$$

где T_ε – оператор сдвига на ε , т. е. $T_\varepsilon f(x) = f(x + \varepsilon)$. В [7] было доказано, что обыкновенные коммутирующие дифференциальные операторы ранга один вида

$$\tilde{L}_n = \sum_{j=0}^n v_j(x) \partial_x^j$$

могут быть расширены до операторов вида (2). При этом спектральные данные Кричевера [8] для дифференциальных операторов

$$\{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_g\},$$

где Γ – риманова поверхность рода g , $q \in \Gamma$ – выделенная точка, k^{-1} – локальный параметр в окрестности точки q и $\gamma_1, \dots, \gamma_g \in \Gamma$ – набор

точек в общем положении, расширяются до спектральных данных разностных операторов

$$\{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_g, p(x, \varepsilon)\},$$

где $p(x, \varepsilon) \in \Gamma$. Кроме того, если $p(x, \varepsilon) \rightarrow q$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$L_n = \tilde{L}_n + O(\varepsilon).$$

Таким образом, коммутирующие разностные операторы вида (2) являются естественным обобщением обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов ранга один. Простейшими примерами операторов вида (2) являются разностные аналоги операторов Ламе и Трейбича–Вердые, найденные в [9, 10]. В случае эллиптической спектральной кривой оператор

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + (-2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x - \varepsilon) + \zeta(x + \varepsilon)) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon)$$

коммутирует с некоторым оператором третьего порядка, при этом

$$L_2 = \tilde{L}_2 + O(\varepsilon),$$

где $\tilde{L}_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x)$ – оператор Ламе, коммутирующий с оператором третьего порядка.

В этой работе мы обобщим результаты работы [6] на случай коммутирующих дискретных операторов вида (1), где $v_j(n)$ – матричные функции размером $r \times r$.

Основной результат этой работы заключается в следующем. Рассмотрим спектральные данные вида

$$\{\Gamma, \gamma, q_j, k_j^{-1}, p_n^j\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3)$$

где Γ – риманова поверхность рода g , $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+r-1}$ – некоторый дивизор на Γ , $q_1, \dots, q_r \in \Gamma$ – выделенные точки, k_j^{-1} – локальный параметр в окрестности точки q_j и $p_n^j \in \Gamma$ – набор точек в общем положении.

Введем следующий дивизор:

$$P^j(n) = \begin{cases} p_1^j + \dots + p_n^j, & n > 0, \\ -p_0^j - \dots - p_{n+1}^j, & n < 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Теорема 1. *Существует мероморфная вектор-функция*

$$\varphi^T = (\varphi_1(n, P), \dots, \varphi_r(n, P)),$$

где $P \in \Gamma$, обладающая следующими свойствами:

(1) дивизор нулей и полюсов функции φ_i имеет вид

$$(\varphi_i(n, P)) = \gamma^i(n) + \sum_{j=1}^r P^j(n) - \gamma - \sum_{j=1}^r (n-1 + \delta_{ij})q_j,$$

где $\gamma^i(n) = \gamma_1^i(n) + \dots + \gamma_g^i(n)$ — некоторый дивизор на Γ ;

(2) в окрестности точки q_j функция φ_i имеет вид

$$\varphi_i(n, P) = \delta_{ij}k_j^n + O(k_j^{n-1}). \quad (5)$$

Кроме того, для любой мероморфной функции $h(P)$ на Γ с дивизором полюсов вида

$$(h(P))_\infty = N_1q_1 + \dots + N_rq_r,$$

где $N_j \geq 0$, существует такой дискретный оператор

$$L(h) = \sum_{j=0}^N v_j(n)T^j$$

с матричными коэффициентами размера $r \times r$, что

$$L(h)\varphi(n, P) = h(P)\varphi(n, P).$$

Для мероморфных функций $f(P)$ и $h(P)$ с полюсами в $q_1, \dots, q_r$ имеет место равенство

$$L(f)L(h) = L(h)L(f).$$

В §2 мы напомним результаты работы [6] об одноточечных коммутирующих дискретных операторах ранга один. В §3 мы дадим доказательство теоремы 1 и укажем пример операторов в случае эллиптической спектральной кривой при $r = 2$.

§2. КОММУТИРУЮЩИЕ ДИСКРЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СО СКАЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе мы напомним некоторые результаты из [6].

Коммутативные кольца одноточечных операторов ранга один вида (1) восстанавливаются по спектральным данным

$$\{\Gamma, \gamma, q, k^{-1}, P_n\},$$

где Γ — риманова поверхность рода g , $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор на Γ , $q \in \Gamma$ — выделенная точка, k^{-1} — локальный параметр

в окрестности точки q и $P_n \in \Gamma$, где $n \in \mathbb{Z}$, — набор точек в общем положении.

Теорема 2. *Существует единственная мероморфная функция $\varphi(n, P)$ (функция Бейкера–Ахиезера), где $P \in \Gamma$, обладающая следующими свойствами:*

- (1) $\varphi(n, P)$ мероморфна на Γ с дивизором нулей и полюсов вида
$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) + P_1 + \dots + P_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq \quad \text{при } n > 0,$$

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) - P_1 - \dots - P_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq \quad \text{при } n < 0;$$
- (2) $\varphi(0, P) = 1$;
- (3) в окрестности точки q имеет место разложение

$$\varphi(n, P) = k^n + O(k^{n-1}).$$

Кроме того, для любой мероморфной функции $h(P)$ на Γ с единственным полюсом q порядка N и разложением $h(P) = k^N + O(k^{N-1})$ в окрестности точки q существует единственный оператор L_N , удовлетворяющий уравнению (1), такой что

$$L_N \varphi(n, P) = h(P) \varphi(n, P).$$

Рассмотрим оператор

$$L_2 = (T + U_n)^2 + W_n,$$

коммутирующий с некоторым оператором L_{2g+1} , и предположим, что спектральная кривая пары L_2, L_{2g+1} является гиперэллиптической кривой вида

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \dots + c_0.$$

Тогда имеет место равенство

$$L_2 - z = (T + U_n)^2 + W_n - z = (T + U_n + U_{n+1} + \chi_n(P))(T - \chi_n(P)),$$

где

$$\chi_n = \frac{\psi_{n+1}(P)}{\psi_n(P)} = \frac{S_n}{Q_n} + \frac{w}{Q_n},$$

$$S_n(z) = -U_n z^g + \delta_{g-1}(n) z^{g-1} + \dots + \delta_0(n),$$

$$Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}$$

и $\delta_j(n)$ – некоторые функции. Функции U_n, W_n, S_n удовлетворяют уравнениям

$$F_g(z) = S_n^2 + (z - U_n^2 - W_n)Q_n Q_{n+1}, \quad (6)$$

$$(U_n + U_{n+1})(S_n - S_{n+1}) - (z - U_n^2 - W_n)Q_n + (z - U_{n+1}^2 - W_{n+1})Q_{n+2} = 0. \quad (7)$$

Если S_n удовлетворяет уравнению (7), то S_n автоматически удовлетворяет и уравнению (6) для некоторого полинома $F_g(z)$. Уравнение (6) эквивалентно условию коммутации L_2 и L_{2g+1} . Частные решения уравнений (6) и (7) приводят к следующим явным примерам коммутирующих операторов порядков 2 и $2g + 1$.

Пример 1. Оператор

$$L_2 = (T + r_1 \cos(n))^2 + \frac{r_1^2 \sin(g) \sin(g+1)}{2 \cos^2(g + \frac{1}{2})} \cos(2n),$$

где $r_1 \neq 0$, коммутирует с некоторым оператором L_{2g+1} порядка $2g + 1$.

Пример 2. Оператор

$$L_2 = (T + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_2^2 n^2,$$

где $\alpha_2 \neq 0$, коммутирует с некоторым оператором L_{2g+1} порядка $2g + 1$.

Пример 3. Оператор

$$L_2 = (T + \beta_1 a^n)^2 + \frac{a^{2g} + a^{2g+2} - a^{4g+2} - 1}{(a^{2g+1} + 1)^2} \beta_1^2 a^{2n},$$

где $\beta_1 \neq 0$ и $a \neq 1$, коммутирует с некоторым оператором L_{2g+1} порядка $2g + 1$.

Таким образом, теорема 2 – это частный случай теоремы 1 при $r = 1$.

§3. КОММУТИРУЮЩИЕ ДИСКРЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе мы докажем теорему 1 и приведем пример при $r = 2$.

Покажем истинность теоремы в предположении $n > 0$ (случай $n \leq 0$ разбирается аналогично).

По теореме Римана–Роха размерность пространства мероморфных функций на Γ с дивизором полюсов

$$D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+r-1} + \sum_{j=1}^r (n-1 + \delta_{ij})q_j$$

равна

$$l(D) = rn + 1.$$

Условие обращения в ноль в точках общего положения $p_1^j, \dots, p_n^j$, где $1 \leq j \leq r$, выделяет в указанном пространстве одномерное подпространство. Второе условие в теореме 1 задаёт единственную функцию $\varphi_i(n, P)$. Таким образом, существует единственная r -мерная вектор-функция $\varphi(n, P)$, удовлетворяющая условиям теоремы.

Покажем, что для любой мероморфной функции $h(P)$ на Γ с дивизором полюсов

$$(h(P))_\infty = N_1q_1 + \dots + N_rq_r,$$

где $N_j \geq 0$, существует единственный дискретный оператор $L(h)$ с матричными коэффициентами размера $r \times r$, такой что

$$L(h)\varphi(n, P) = h(P)\varphi(n, P).$$

Пусть $N = \max\{N_1, \dots, N_r\}$. Оставшаяся часть теоремы 1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Существуют единственные дискретные операторы*

$$L_{ik} = u_{ik}^s(n)T^s + u_{ik}^{s-1}(n)T^{s-1} + \dots + u_{ik}^0(n), \quad (8)$$

где $s \leq N$ и $1 \leq k \leq r$, такие что

$$L_{i1}\varphi_1(n, P) + \dots + L_{ir}\varphi_r(n, P) = h(P)\varphi_i(n, P).$$

Доказательство. Дивизоры полюсов функций $\varphi_i(n, P)$ имеют вид

$$(\varphi_1(n, P))_\infty = \gamma + nq_1 + (n-1)q_2 + \dots + (n-1)q_r,$$

$$(\varphi_2(n, P))_\infty = \gamma + (n-1)q_1 + nq_2 + \dots + (n-1)q_r,$$

.....

$$(\varphi_r(n, P))_\infty = \gamma + (n-1)q_1 + (n-1)q_2 + \dots + nq_r.$$

Заметим, что

$$(h(P)\varphi_i(n, P))_\infty = \gamma + (n-1 + \delta_{i1} + N_1)q_1 + \dots + (n-1 + \delta_{ir} + N_r)q_r.$$

Будем строить коэффициенты операторов L_{ik} по индукции. Пусть наибольший порядок полюса функции $h(P)\varphi_i(n, P)$ в точках $q_1, \dots, q_r$ равен $n + k$ для некоторого $k \geq 0$ и достигается в точке q_s . Тогда имеет место разложение вида

$$h(P)\varphi_i(n, P) = u_{is}^k(n)k_s^{n+k} + O(k_s^{n+k-1}).$$

Порядок полюса функции

$$g(P)\varphi_i(n, P) - u_{is}^k(n)T^k\varphi_s(n, P) \quad (9)$$

в точке q_s меньше, чем $n + k$. При этом порядки полюсов этой функции в точках $q_1, \dots, q_r$ не превосходят порядки полюсов в точках $q_1, \dots, q_r$ функции $h(P)\varphi_i(n, P)$. Далее, выберем наибольший порядок полюса в точках $q_1, \dots, q_r$ функции (9) и сделаем ту же процедуру. Продолжая понижать порядки полюсов в точках q_j , в итоге приходим к функции вида

$$\tilde{\varphi}_i(n, P) = h(P)\varphi_i(n, P) - (L_{i1}\varphi_1(n, P) + \dots + L_{ir}\varphi_r(n, P)),$$

где операторы L_{ik} имеют вид (8), при этом

$$(\tilde{\varphi}_i(n, P))_{\infty} = \gamma + m_1q_1 + m_2q_2 + \dots + m_rq_r,$$

где $m_j \leq n - 1$, и функция $\tilde{\varphi}_i$ зануляется на дивизоре

$$P^1(n) + \dots + P^r(n),$$

состоящем из точек общего положения. Следовательно, $\tilde{\varphi}_i = 0$. Лемма 1 доказана. $\square$

Оператор $L(h)$ имеет вид

$$L(h) = \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{r1} & \cdots & L_{rr} \end{pmatrix}.$$

По построению, $L(h)\varphi(n, P) = h(P)\varphi(n, P)$. Операторы $L(h)$ и $L(f)$ коммутируют, поскольку $[L(h), L(f)]\varphi(n, P) = 0$. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим случай $r = 2$. По теореме 1 для спектральных данных (3) существует такая вектор-функция $\varphi^T = (\varphi_1(n, P), \varphi_2(n, P))$, что дивизоры нулей и полюсов функций φ_1, φ_2 имеют вид

$$(\varphi_1(n, P)) = \gamma^1(n) + P^1(n) + P^2(n) - \gamma - nq_1 - (n-1)q_2,$$

$$(\varphi_2(n, P)) = \gamma^2(n) + P^1(n) + P^2(n) - \gamma - (n-1)q_1 - nq_2,$$

где $\gamma^j(n) = \gamma_1^j(n) + \dots + \gamma_g^j(n)$ и $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+1}$, а дивизор $P^j(n)$ имеет вид (4).

Пример 4. Пусть $\Gamma = \mathbb{C}/\{2m\omega + 2m'\omega', m, m' \in \mathbb{Z}\}$ – эллиптическая кривая. Найдем функции φ_1 , φ_2 и коэффициенты операторов. Нам понадобится эллиптическая σ -функция Вейерштрасса. Эта функция является целой на $\mathbb{C}$ с простыми нулями в точках

$$u = 2m\omega + 2m'\omega',$$

где $m, m' \in \mathbb{Z}$. Имеет место представление функции $\sigma(u)$ в виде бесконечного произведения

$$\sigma(u) = u \prod \left(1 - \frac{u}{s}\right) \exp\left(\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2}\right),$$

где $s = 2m\omega + 2m'\omega' \neq 0$ и $m, m' \in \mathbb{Z}$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}\sigma(u + 2\omega) &= -\sigma(u) \exp(2\zeta(\omega)(u + \omega)), \\ \sigma(u + 2\omega') &= -\sigma(u) \exp(2\zeta(\omega')(u + \omega')).\end{aligned}$$

Выберем следующие спектральные данные:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad q_1 = \alpha \in \Gamma, \quad q_2 = -\alpha \in \Gamma, \quad p_n^1, p_n^2 \in \Gamma, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть сначала $n > 0$. В этом случае функция φ_1 имеет вид

$$\varphi_1(n, z) = \frac{\sigma(z - \gamma_1^1(n)) \prod_{i=1}^n (\sigma(z - p_i^1) \sigma(z - p_i^2))}{\xi_1(n) \sigma^n(z - \alpha) \sigma^{n-1}(z + \alpha) \sigma(z - \gamma_1) \sigma(z - \gamma_2)},$$

где

$$\gamma_1^1(n) = -P^1(n) - P^2(n) + \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha.$$

Функция $\xi_1(n)$ выбирается так, чтобы имело место разложение (5):

$$\xi_1(n) = \frac{\sigma(\alpha - \gamma_1^1(n)) \prod_{i=1}^n (\sigma(\alpha - p_i^1) \sigma(\alpha - p_i^2))}{(\sigma(2\alpha))^{n-1} \sigma(\alpha - \gamma_1) \sigma(\alpha - \gamma_2)}.$$

Аналогично,

$$\varphi_2(n, z) = \frac{\sigma(z - \gamma_1^2(n)) \prod_{i=1}^n (\sigma(z - p_i^1) \sigma(z - p_i^2))}{\xi_2(n) \sigma^{n-1}(z - \alpha) \sigma^n(z + \alpha) \sigma(z - \gamma_1) \sigma(z - \gamma_2)},$$

где

$$\gamma_1^2(n) = -P^1(n) - P^2(n) + \gamma_1 + \gamma_2 - \alpha,$$

и функция $\xi_2(n)$ выбирается так, чтобы имело место разложение (5):

$$\xi_2(n) = \frac{(-1)^n \sigma(\alpha + \gamma_1^2(n)) \prod_{i=1}^n (\sigma(\alpha + p_i^1) \sigma(\alpha + p_i^2))}{(\sigma(2\alpha))^{n-1} \sigma(\alpha + \gamma_1) \sigma(\alpha + \gamma_2)}.$$

При $n < 0$ представим $\varphi_1(n, z)$ в виде

$$\frac{\sigma(z - \gamma_1^1(n))}{\eta_1(n)\sigma^n(z - \alpha)\sigma^{n-1}(z + \alpha)\sigma(z - \gamma_1)\sigma(z - \gamma_2)\prod_{i=0}^{n+1}(\sigma(z - p_i^1)\sigma(z - p_i^2))},$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1^1(n) &= P^1(n) + P^2(n) + \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha, \\ \eta_1(n) &= \frac{\sigma(\alpha - \gamma_1^1(n))}{(\sigma(2\alpha))^{n-1}\sigma(\alpha - \gamma_1)\sigma(\alpha - \gamma_2)\prod_{i=0}^{n+1}(\sigma(\alpha - p_i^1)\sigma(\alpha - p_i^2))}.\end{aligned}$$

Аналогично, представим $\varphi_2(n, z)$ в виде

$$\frac{\sigma(z - \gamma_1^2(n))}{\eta_2(n)\sigma^{n-1}(z - \alpha)\sigma^n(z + \alpha)\sigma(z - \gamma_1)\sigma(z - \gamma_2)\prod_{i=0}^{n+1}(\sigma(z - p_i^1)\sigma(z - p_i^2))},$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1^2(n) &= P^1(n) + P^2(n) + \gamma_1 + \gamma_2 - \alpha, \\ \eta_2(n) &= \frac{(-1)^n\sigma(\alpha + \gamma_1^2(n))}{(\sigma(2\alpha))^{n-1}\sigma(\alpha + \gamma_1)\sigma(\alpha + \gamma_2)\prod_{i=0}^{n+1}(\sigma(\alpha + p_i^1)\sigma(\alpha + p_i^2))}.\end{aligned}$$

Пусть

$$h(z) = \frac{\sigma^2(z)\sigma(2\alpha)}{\sigma(z - \alpha)\sigma(z + \alpha)\sigma^2(\alpha)}.$$

Имеют место следующие разложения в окрестностях точек q_1 и q_2 :

$$h(z) = \frac{1}{z - \alpha} + O(1), \quad h(z) = -\frac{1}{z + \alpha} + O(1).$$

В силу теоремы 1 существует такой дискретный оператор

$$L(h) = \begin{pmatrix} T + a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & -T + a_{22}(n) \end{pmatrix},$$

что $L(h)\varphi(n, z) = h(z)\varphi(n, z)$. Имеем:

$$\varphi_1(n+1, z) + a_{12}(n)\varphi_2(n, z) + (a_{11}(n) - h(z))\varphi_1(n, z) = 0, \quad (10)$$

$$-\varphi_2(n+1, z) + a_{21}(n)\varphi_1(n, z) + (a_{22}(n) - h(z))\varphi_2(n, z) = 0. \quad (11)$$

Подставляя $z = \gamma_1^1(n)$ и $z = \gamma_1^2(n)$ в (10) и (11), получаем

$$\begin{aligned} a_{11}(n) &= -\frac{\varphi_1(n+1, \gamma_1^2(n))}{\varphi_1(n, \gamma_1^2(n))} + h(\gamma_1^2(n)), \\ a_{12}(n) &= -\frac{\varphi_1(n+1, \gamma_1^1(n))}{\varphi_2(n, \gamma_1^1(n))}, \\ a_{21}(n) &= \frac{\varphi_2(n+1, \gamma_1^2(n))}{\varphi_1(n, \gamma_1^2(n))}, \\ a_{22}(n) &= \frac{\varphi_2(n+1, \gamma_1^1(n))}{\varphi_2(n, \gamma_1^1(n))} + h(\gamma_1^1(n)). \end{aligned}$$

В качестве второй мероморфной функции возьмем

$$f(z) = -\frac{\sigma(z)\sigma(z-2\alpha)}{\sigma^2(z-\alpha)\sigma^2(\alpha)}.$$

Имеет место следующее разложение в окрестности точки q_1 :

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^2} + O((z-\alpha)^{-1}).$$

Оператор, отвечающий функции $f(z)$, имеет вид

$$L(f) = \begin{pmatrix} T^2 + b_{11}(n)T + c_{11}(n) & b_{12}(n)T + c_{12}(n) \\ b_{21}(n)T + c_{21}(n) & c_{22}(n) \end{pmatrix},$$

причём $L(f)\varphi(n, z) = f(z)\varphi(n, z)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_1(n+2, z) + b_{11}(n)\varphi_1(n+1, z) + b_{12}(n)\varphi_2(n+1, z) \\ + c_{12}(n)\varphi_2(n, z) + (c_{11}(n) - f(z))\varphi_1(n, z) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$b_{21}(n)\varphi_1(n+1, z) + c_{21}(n)\varphi_1(n, z) + (c_{22}(n) - f(z))\varphi_2(n, z) = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим случай $n > 0$ (случай $n \leq 0$ рассматривается аналогично).

Подставляя $z = p_{n+1}^1$ и $z = p_{n+1}^2$ в (12) и используя

$$\varphi_1(n+2, p_{n+1}^j) = \varphi_1(n+1, p_{n+1}^j) = \varphi_2(n+1, p_{n+1}^j) = 0$$

при $j \in \{1, 2\}$, получаем, что $c_{11}(n)$ имеет вид

$$\frac{f(p_{n+1}^2) \cdot \varphi_1(n, p_{n+1}^2) \cdot \varphi_2(n, p_{n+1}^1) - f(p_{n+1}^1) \cdot \varphi_1(n, p_{n+1}^1) \cdot \varphi_2(n, p_{n+1}^2)}{\varphi_1(n, p_{n+1}^2) \cdot \varphi_2(n, p_{n+1}^1) - \varphi_1(n, p_{n+1}^1) \cdot \varphi_2(n, p_{n+1}^2)}$$

и

$$c_{12}(n) = \frac{(f(p_{n+1}^2) - f(p_{n+1}^1)) \cdot \varphi_1(n, p_{n+1}^1) \cdot \varphi_1(n, p_{n+1}^2)}{\varphi_1(n, p_{n+1}^1) \cdot \varphi_2(n, p_{n+1}^2) - \varphi_1(n, p_{n+1}^2) \cdot \varphi_2(n, p_{n+1}^1)}.$$

Далее, для $j \in \{1, 2\}$, подставляя $z = \gamma_1^{3-j}(n+1)$ в (12), получаем

$$b_{1j}(n) = -\frac{A_j + B_j}{\varphi_1(n+1, \gamma_1^{3-j}(n+1))},$$

где

$$A_j = \varphi_1(n+2, \gamma_1^{3-j}(n+1)) + c_{12}(n) \cdot \varphi_2(n, \gamma_1^{3-j}(n+1)),$$

$$B_j = (c_{11}(n) - f(\gamma_1^{3-j}(n+1))) \cdot \varphi_1(n, \gamma_1^{3-j}(n+1)).$$

Наконец, подставляя $z = \gamma_1^1(n)$, $z = \gamma_1^2(n)$ и $z = \gamma_1^1(n+1)$ в (13), получаем

$$c_{21}(n) = -\frac{b_{21}(n) \cdot \varphi_1(n+1, \gamma_1^2(n))}{\varphi_1(n, \gamma_1^2(n))},$$

$$c_{22}(n) = -\frac{b_{21}(n) \cdot \varphi_1(n+1, \gamma_1^1(n))}{\varphi_2(n, \gamma_1^1(n))} + f(\gamma_1^1(n)),$$

где $b_{21}(n)$ имеет вид

$$\frac{f(\gamma_1^1(n)) - f(\gamma_1^1(n+1)) \cdot \varphi_1(n, \gamma_1^2(n)) \cdot \varphi_2(n, \gamma_1^1(n)) \cdot \varphi_2(n, \gamma_1^1(n+1))}{C + D}$$

при

$$C = \varphi_1(n, \gamma_1^1(n+1)) \cdot \varphi_1(n+1, \gamma_1^2(n)) \cdot \varphi_2(n, \gamma_1^1(n)),$$

$$D = \varphi_1(n, \gamma_1^2(n)) \cdot \varphi_1(n+1, \gamma_1^1(n)) \cdot \varphi_2(n, \gamma_1^1(n+1)).$$

Операторы $L(h)$ и $L(f)$ коммутируют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. М. Кричевер, *Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.* — УМН **33**, No. 4 (1978) 215–216.
2. D. Mumford, *An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg de Vries equation and related non-linear equations.* Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto Univ., Kyoto (1977), Kinokuniya, Tokyo (1978), 115–153.
3. D. Mumford, P. Van Moerbeke, *The spectrum of difference operators and algebraic curves.* — Acta Math. **143** (1979) 93–154.

4. И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Двумеризованная цепочка Тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения*. — УМН **58**, No. 3(351) (2003) 51–88.
5. А. В. Михайлов, *Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода*. — Письма ЖЭТФ **30**, No. 7 (1979) 443–448.
6. Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов, *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один*. — ДАН **466**, No. 4 (2016) 399–401.
7. Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов, *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один и их связь с конечнозонными операторами Шредингера*. — ДАН **478**, No. 4 (2018) 392–394.
8. И. М. Кричевер, *Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений*. — УМН **32**, No. 6(198) (1977) 183–208.
9. Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов, *Разностный аналог оператора Ламе*. — Тр. МИАН **325** (2024) 190–200.
10. Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов, *Разностный аналог оператора Трейбича–Вердье*. — Изв. РАН. Сер. матем. **90**, No. 1 (2026).

Gundareva A. F., Mauleshova G. S., Mironov A. E. Commuting matrix discrete operators and algebraic curves.

In this paper, we find spectral data for commuting discrete operators with matrix coefficients. The common eigenfunctions of the operators are rational functions on the spectral curve with certain special divisors of zeros and poles. Explicit examples are provided in the case of the elliptic spectral curve.

Новосибирский
государственный университет,
ул. Пирогова 1,
630090, Новосибирск, Россия

Поступило 22 декабря 2025 г.

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр.-т акад. Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail: a.gundareva@g.nsu.ru

E-mail: g.mauleshova@g.nsu.ru

E-mail: mironov@math.nsc.ru