

И. С. Алексеев, А. А. Малова

СЕРТИФИКАЦИЯ ЗАЦЕПЛЕННОСТИ КРИВЫМИ НА РУЧКАХ

§1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Настоящая работа относится к теории узлов и посвящена выявлению геометрических признаков неразводимости зацеплений в трёхмерной сфере S^3 .

Один из простейших признаков неразводимости восходит к понятию коэффициента зацепления: если его значение не равно нулю, то компоненты зацеплены¹ друг за друга. Однако существуют неразводимые зацепления, для которых данный инвариант принимает нулевое значение, и для установления их неразводимости требуется дальнейший анализ, который можно провести следующим образом.

Как хорошо известно, если коэффициент зацепления $\text{lk}(K_1, K_2)$ равен нулю, то одна из компонент K_1 зацепления (K_1, K_2) затягивает поверхность Зейферта², не пересекающую другую компоненту K_2 . В таком случае можно попытаться распознать неразводимость, анализируя зацепленность кривых на поверхности Зейферта за вторую компоненту K_2 . Следующий результат, полученный в [6] и использованный в [1] для доказательства несжимаемости торов в дополнении узла, иллюстрирует эффективность такого анализа.

Ключевые слова: теория узлов, неразводимость, геометрический сертификат, поверхность Зейферта, тор с дырой, ручка, бутылка Клейна с дырой, перекрёстная ручка.

Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение No. 075–15–2025–343 от 29.04.2025). Исследование И. С. Алексеева поддержано грантом Фонда развития теоретической физики и математики “Базис”.

¹Мы говорим, что компонента зацепления *зацеплена* за другие компоненты, если она не может быть отделена от них вложенной сферой.

²*Поверхностью Зейферта* мы называем вложенную компактную ориентируемую поверхность, краем которой является заданное зацепление.

Предложение 1 (томский³ сертификат о торе с дырой). Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – незаузленный тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Если меридиан m_H и параллель l_H тора с дырой оба зацеплены за K , то и его край ∂H зацеплен за K .

В настоящей работе *тором с незаузленной дырой* (или просто *тором с дырой*, или *ручкой*) называется вложенная компактная ориентируемая поверхность $H \subset S^3$ рода один с однокомпонентным краем, представляющим собой тривиальный узел. Поскольку любой такой тор с дырой продолжается до вложения замкнутого тора (см. лемму 8), множество $\{m_H, l_H\}$ определено однозначно (см. определение 9). Тор с дырой называется *незаузленным*, если обе кривые m_H и l_H незаузлены.



Рис. 1. Два узла и два незаузненных тора с дырой.

Предложение 1 имеет форму сертификата, в котором свидетельством неразводимости выступает зацепленность кривых на поверхности, затягивающей одну из компонент зацепления. Настоящая работа посвящена развитию подобных геометрических признаков неразводимости. Её результаты частично отвечают на вопрос [2, Question 1.1].

Механизм работы томского сертификата, сводящий задачу распознавания зацепленности к двум аналогичным задачам, напоминает подход Т. Кохрана к $\bar{\mu}$ -инвариантам Милнора (см. [4], а также [5]) и конструкцию производных зацеплений Кохрана (см. [3, 8]), где для выявления препятствий к конкордантности одна из компонент зацепления заменяется на кривую, возникающую из пересечения поверхностей Зейферта. Мы рассматриваем это сходство как намёк на существование геометрической версии исчисления Кохрана, и поиск такой интерпретации составляет одну из целей настоящей работы.

³По словам А. В. Малютина, данный результат был получен в Томске на конференции, приуроченной к юбилею А. Ю. Веснина.

На рис. 1 слева меридиан m_H и параллель l_H тора с дырой H имеют ненулевые коэффициенты зацепления с узлом K , и следовательно, по предложению 1, зацепление $(\partial H, K)$, известное как зацепление Уайтхеда, неразводимо. В данном случае неразводимость также может быть подтверждена инвариантами Милнора, а именно, инвариантом Сато–Левина $\bar{\mu}(1122)$, равным с точностью до знака произведению $\text{lk}(K, m_H) \cdot \text{lk}(K, l_H)$ указанных коэффициентов зацепления (см. [4]).

Следующий пример (на рис. 1 справа) иллюстрирует ограничивающее⁴ двухкомпонентное зацепление, одна из компонент которого затягивает тор с дырой, а вторая ограничивает в его дополнении очевидную поверхность с устранимой ленточной особенностью. Неразводимость такого зацепления можно установить с помощью томского сертификата (за два шага), но нельзя установить с помощью $\bar{\mu}$ -инвариантов, поскольку все $\bar{\mu}$ -инварианты любого ограничивающего (в частности, разводимого двухкомпонентного) зацепления принимают нулевое значение (см. [7]). В действительности зацепление, получающееся из зацепления на левом рисунке удвоением Уайтхеда красной компоненты, тоже является ограничивающим и охватывается томским сертификатом, но его неразводимость следует из простых свойств сателлитирования.

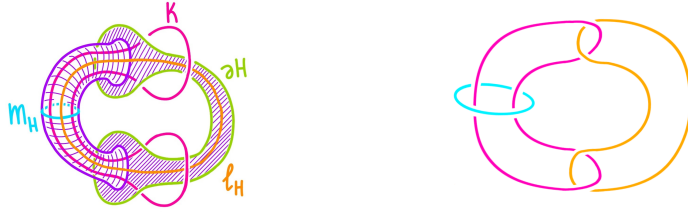


Рис. 2. Слева: тор с дырой, для которого томский сертификат неприменим. Справа: зацепление, состоящее из узла K и вытолкнутых меридиана m'_H и параллели l'_H (см. теорему 2).

⁴Зацепление называется *ограничивающим*, если его компоненты ограничивают попарно непересекающиеся поверхности Зейферта (по одной поверхности на каждую компоненту).

Пример на рис. 2 слева иллюстрирует границы применимости томского сертификата: здесь розово-зелёное зацепление $(K, \partial H)$ неразводимо, но ни меридиан m_H , ни параллель l_H не зацеплены за узел K . Неразводимость данного зацепления может быть подтверждена с помощью теоремы 2 ниже.

Не вдаваясь в подробности, отметим, что томский сертификат допускает ряд обобщений на поверхности большего рода. Обобщение, предложенное в [6], сводит проверку зацепленности края ∂H за узел K к проверке зацепленности за K бесконечного числа кривых на поверхности H . По-видимому, при таком подходе никакого конечного числа кривых в общем случае недостаточно: на рис. 3 слева приведён пример узла K в дополнении стандартного вложения H сферы с двумя ручками и дырой, который не зацеплен за край ∂H , но зацеплен за каждую из стандартных кривых на H . Альтернативный вариант обобщения, известный авторам, предполагает сертифицируемость неразводимости многокомпонентных зацеплений, которые пересекают поверхность H (без края или с краем) по набору простых замкнутых кривых, разбивающих её на достаточно простые составляющие (см. рис. 3 справа и замечание 13).



Рис. 3. Слева: узел в дополнении стандартно вложенной поверхности кренделя с дырой. Справа: поверхность, свидетельствующая о неразводимости зацепления Борромео (см. замечание 13).

Настоящая работа посвящена двум сериям обобщений томского сертификата: о торах с дырой (ручках) и о бутылках Клейна с дырой (перекрёстных ручках). В первом направлении нам удаётся сформулировать наиболее общий результат (теорема 6), из которого следуют все предыдущие. Во втором направлении нам удаётся получить аналог томского сертификата в терминах перекрёстных ручек (теорема 7).

1.1. Признаки неразводимости в терминах ручек. Обозначим символами m'_H и l'_H результаты такого выталкивания меридиана m_H и параллели l_H тора с дырой $H \subset S^3$ в противоположные от него стороны, что кривая m'_H ограничивает диск в $S^3 \setminus H$, не пересекающий l'_H . Например, для конфигурации на рис. 2 слева зацепление (l'_H, m'_H, K) является зацеплением Борромео.

Теорема 2. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – незаузленный тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Если трёхкомпонентное зацепление (l'_H, m'_H, K) неразводимо, то край ∂H тора с дырой зацеплен за K .

Таким образом, данный результат, усиливающий томский сертификат, сводит вопрос о неразводимости двухкомпонентного зацепления к вопросу о неразводимости определённого трёхкомпонентного зацепления. К полученному зацеплению, в свою очередь, может быть применим дальнейший геометрический анализ.

Авторам неизвестно, существуют ли примеры таких конфигураций из узла и тора с дырой, что край ∂H зацеплен за K , но зацепление (K, m'_H, l'_H) разводимо.

Гипотеза 3. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – незаузленный тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Тогда неразводимости зацеплений (K, m'_H, l'_H) и $(K, \partial H)$ эквивалентны.

Следующие результаты относятся к случаю, при котором тор с дырой не обязательно незаузлен.

Прежде всего отметим, что томский сертификат не обобщается на заузленный случай напрямую. Например, любой тор с дырой H , получающийся из несжимаемого тора в дополнении нетривиального узла $K \subset S^3$ вырезанием открытого диска, обладает тем свойством, что m_H и l_H оба зацеплены за K , но край ∂H не зацеплен за K . Тем не менее, замечание 12 показывает, что данный пример является единственным препятствием к расширению томского сертификата на заузленный случай. Так, для любого вложенного в $S^3 \setminus K$ тора с незаузленной дырой, меридиан m_H которого зацеплен за узел K , выполняется: если край ∂H не зацеплен за K , то такое вложение продолжается до вложения замкнутого тора, причём если параллель l_H заузелена, то полученный тор несжимаем в $S^3 \setminus K$.

Для формулировки ещё одного вспомогательного результата нам потребуется следующее ослабление ограничиваемости.

Будем говорить, что компонента зацепления *не зацеплена по Зейферту* за другие компоненты, если у неё существует поверхность Зейферта, не пересекающая некоторую поверхность Зейферта объединения этих компонент. Например, если зацепление – ограничивающее, то любая его компонента не зацеплена по Зейферту ни за какой другой набор компонент, но обратное в общем случае неверно. Отметим также, что зацепленность по Зейферту влечёт обыкновенную зацепленность ($33 \Rightarrow 3$).

Простейшие признаки неограничиваемости и зацепленности по Зейферту можно извлечь из $\bar{\mu}$ -инвариантов Милнора. Так, как уже упоминалось, если хотя бы один $\bar{\mu}$ -инвариант зацепления не равен нулю (например, коэффициент зацепления $\bar{\mu}(ij)$), то такое зацепление не является ограничивающим. Более того, компонента K_i зацепления $L = (K_1, \dots, K_n)$ зацеплена по Зейферту за $(K_{j_1}, \dots, K_{j_m})$, если $\bar{\mu}_L(I) \neq 0$ для некоторой последовательности индексов I , содержащихся в $\{i, j_1, \dots, j_m\}$ и содержащих индекс i .

Предложение 4. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Если меридиан m_H зацеплен за K и параллель l_H зацеплена по Зейферту за K , то край ∂H зацеплен за K .

В случае, когда тор с дырой незаузел, здесь и далее в формулировке мы допускаем любую из двух интерпретаций того, какая из кривых в $\{m_H, l_H\}$ называется меридианом, а какая – параллелью. Если же хотя бы одна (следовательно, ровно одна) из этих кривых заузлена, мы называем её параллелью l_H и отличаем от меридиана m_H .

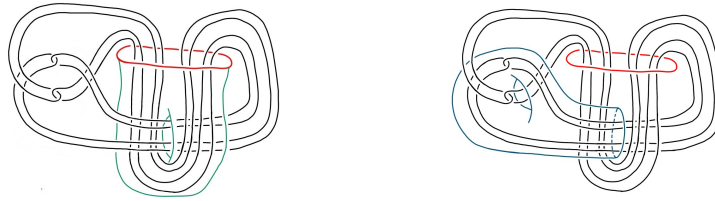


Рис. 4. Слева: чёрный узел и тор с красной дырой. Справа: параллель такого тора с дырой не зацеплена по Зейферту за узел.

Укажем на границы применимости данного результата. К конфигурации на рис. 4 слева, состоящей из чёрного узла K , красной компоненты ∂H и затягивающего её незаузленного тора с дырой H , применим томский сертификат (и следовательно, край ∂H зацеплен за узел K). Действительно, параллель l_H зацеплена за K по томскому сертификату, применённому к синему тору с дырой (рис. справа), а меридиан m_H зацеплен за K , поскольку изотопен в $S^3 \setminus K$ параллели l_H . Тем не менее, параллель l_H не зацеплена по Зейферту за K , и следовательно, предложение 4 неприменимо для подтверждения неразводимости в данном случае.

Чтобы обойти данное ограничение, приведём результат, который обобщает одновременно предложение 4 и томский сертификат. Для этого введём следующее ослабление зацепленности по Зейферту.

Будем говорить, что компонента зацепления *не квазизацеплена по Зейферту* за другие компоненты, если у неё существует минимальная (по роду) поверхность Зейферта, не пересекающая некоторую поверхность Зейферта объединения этих компонент. Отметим, что зацепленность по Зейферту влечёт квазизацепленность по Зейферту ($33 \Rightarrow K3$), а квазизацепленность по Зейферту влечёт обыкновенную зацепленность ($K3 \Rightarrow 3$). Пример на рис. 4 показывает, что в общем случае квазизацепленность по Зейферту не влечёт зацепленность по Зейферту. Кроме того, в случае, когда исходная компонента незаузлена, из её зацепленности следует квазизацепленность по Зейферту.

Теорема 5. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Если меридиан m_H зацеплен за K и параллель l_H квазизацеплена по Зейферту за K , то край ∂H зацеплен за K .

Наконец, приведём результат, который обобщает одновременно теорему 2 и теорему 5.

Теорема 6. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Если вытолкнутый меридиан m'_H зацеплен за (l'_H, K) и вытолкнутая параллель l'_H квазизацеплена по Зейферту за (m'_H, K) , то край ∂H зацеплен за K .

Иными словами, теорема гласит, что если вытолкнутый меридиан m'_H зацеплен за (l'_H, K) , но край ∂H тора с дырой не зацеплен за узел K , то вытолкнутая параллель l'_H ограничивает минимальную

поверхность Зейферта, не пересекающую некоторую поверхность Зейферта для (m'_H, K) .

1.2. Признаки неразводимости в терминах перекрёстных ручек. Перейдём к неориентируемой версии томского сертификата. Назовём *бутылкой Клейна с дырой* (или *перекрёстной ручкой*) вложенную компактную неориентируемую поверхность $H \subset S^3$ рода два с однокомпонентным краем. Меридиан m_H любой бутылки Клейна с дырой корректно определён (см. определение 11).

Теорема 7. Пусть $K \subset S^3$ – узел, а $H \subset S^3$ – бутылка Клейна с дырой, не пересекающая K . Если её меридиан m_H зацеплен за K , то и край ∂H зацеплен за K .

Отметим, что в отличие от томского сертификата, в данном результате не предполагается ни незаузленность поверхности H , ни незаузленность дыры ∂H .

Например, пусть чёрный узел K содержит тэнгл на рис. 5 слева. В таком случае красная компонента ∂H ограничивает в этом тэнгле бутылку Клейна с дырой H (см. рис. 5 справа). Поскольку меридиан m_H зацеплен за K , край ∂H также зацеплен за узел K . Таким образом, указанный тэнгл служит свидетелем зацепленности красной компоненты за узел (ср. с [9]).

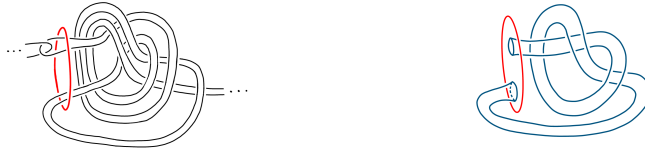


Рис. 5. Слева: двуниточный тэнгл, наличие которого гарантирует зацепленность красной компоненты за чёрный узел. Справа: перекрёстная ручка.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Торы с незаузленной дырой.

Лемма 8. Пусть $H \subset S^3$ – тор с незаузленной дырой. Тогда существует такой диск $R_H \subset S^3$, что $H \cup R_H$ – вложенный тор. Этот тор разбивает сферу S^3 на две компоненты, хотя бы одна из которых представляет собой полноторий.

Доказательство этого результата приведено ниже.

Пусть $V_H \subset S^3$ – полноторий, существование которого гарантировано леммой 8. Мы имеем:

$$\partial V_H = H \cup R_H.$$

Определение 9. Меридианом m_H и параллелью l_H ограниченного тора с незаузленной дырой H называются такие меридиан и параллель тора ∂V_H , что $m_H, l_H \subset H$.

Как упоминалось во введении, в случае, когда тор ∂V_H незаузелен, кривые из множества $\{m_H, l_H\}$ равноправны; если же тор заузелен, мы обозначаем символом l_H ту из этих кривых, которая является заузленной.

2.2. Бутылки Клейна с дырой. Пусть H – бутылка Клейна с дырой.

Замечание 10. Согласно [11, Proposition A.3] и [10, Proposition 21], на H имеется ровно четыре изотопических класса *двусторонних* простых замкнутых кривых. Три из них: класс несущественной (то есть ограничивающей диск) кривой, класс кривой, ограничивающей ленту Мёбиуса, и класс кривой, параллельной краю.

Простая замкнутая кривая на H называется *общей*, если она существенна, не ограничивает ленты Мёбиуса и не параллельна краю.

Определение 11. Меридианом m_H бутылки Клейна с дырой H называется любая общая двусторонняя простая замкнутая кривая на H .

Отметим, что согласно замечанию 10, любые два меридиана изотопны.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

3.1. Доказательство леммы 8. Пусть $H \subset S^3$ – тор с незаузленной дырой. Покажем, что существует такой диск $R_H \subset S^3$, что $H \cup R_H$ – вложенный тор, причём этот тор разбивает сферу S^3 на две компоненты, хотя бы одна из которых представляет собой полноторий.

Выберем диск $E \subset S^3$, ограничивающий край ∂H тора с дырой H и пересекающий H в общем положении. Устраним все окружности пересечения $E \cap H$ следующим образом.

Выберем на E самый внутренний диск, то есть диск $D \subset E$, который ограничивает одну из окружностей пересечения $E \cap H$ и не содержит других таких окружностей. После перестройки (хирургии) тора с дырой H по диску D получается поверхность из двух компонент: первая компонента не имеет края, а у второй есть граничная окружность. Рассмотрим два случая в зависимости от того, как распределился род (число ручек) между двумя компонентами.

Пусть сначала поверхность без края – это тор, а с краем – диск. В этом случае полученный диск R_H является искомым: он ограничивает край ∂H тора с дырой H , а его внутренность не пересекает H .

Теперь пусть поверхность без края – это сфера, а с краем – тор с дырой. В этом случае кривая ∂D ограничивает диск $Q \subset H$ на торе с дырой. Устраним все окружности пересечения $E \cap Q$ следующим образом.

Выберем на Q самый внутренний диск, то есть диск $P \subset Q$, который ограничивает одну из окружностей пересечения $E \cap Q$ и не содержит других таких окружностей. После перестройки (хирургии) диска E по диску P получается поверхность из двух компонент, представляющих собой сферу и диск. Полученный диск ограничивает ∂H и пересекает тор с дырой H в меньшем числе окружностей. Таким образом, можно считать, что E не пересекает Q .

Пусть $E' \subset S^3$ – вложенный диск, получающийся из E заменой поддиска $D \subset E$ на параллельную копию диска Q . Тогда E' ограничивает ∂H и пересекает тор с дырой H в меньшем числе окружностей.

Таким образом, показано, что все окружности пересечения $E \cap H$ могут быть устранены, и существование диска R_H доказано. Оставшаяся часть утверждения леммы представляет собой теорему Александра о торе.

3.2. Доказательство теоремы 6. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Покажем, что если край ∂H не зацеплен за K , то либо вытолкнутый меридиан m'_H тора с дырой не зацеплен за (l'_H, K) , либо вытолкнутая параллель l'_H не квазизацеплена по Зейферту за (m'_H, K) .

Выберем вложенную сферу $S \subset S^3$, отделяющую край ∂H от узла K и пересекающую тор с дырой H в общем положении. Проведём

рассуждение индукцией по числу окружностей пересечения. Случай, при котором пересечения отсутствуют, очевиден⁵, так что докажем индукционный переход.

Выберем в сфере S самый внутренний диск, то есть диск $E \subset S$, который ограничивает одну из окружностей пересечения $S \cap H$ и не содержит других таких окружностей.

Пусть $R_H := \partial V_H \setminus \text{Int}(H)$ – диск, который дополняет тор с дырой до вложенного тора ∂V_H , где $V_H \subset S^3$ – полноторий (см. лемму 8).

Стандартным рассуждением можно устранить все окружности пересечения дисков E и R_H . Таким образом, можно считать, что диск E лежит в дополнении тора ∂V_H до сферы S^3 . Пусть W обозначает то из пространств V_H или $S^3 \setminus \text{Int}(V_H)$, которое содержит диск E .

Случай 1. Край ∂E диска высекает на торе с дырой H *неразделяющую* кривую.

В этом случае кривая ∂E на торе с дырой H изотопна либо меридиану m_H , если $E \subset V_H$, либо параллели l_H , если $E \subset S^3 \setminus \text{Int}(V_H)$ ⁶. В первом варианте меридиан m_H (следовательно, и вытолкнутый меридиан m'_H) не зацеплен за (l'_H, K) . Во втором варианте⁷ параллель l_H (следовательно, и вытолкнутая параллель l'_H) не зацеплена за (m'_H, K) , а значит, она и не квазизацеплена по Зейферту за (m'_H, K) .

Случай 2. Край ∂E диска высекает на торе с дырой H *разделяющую* кривую.

В этом случае после перестройки (хирургии) тора с дырой H по диску E получается поверхность из двух компонент: первая компонента не имеет края, а у второй есть граничная окружность. Рассмотрим два случая в зависимости от того, как распределился род (число ручек) между двумя компонентами.

Пусть сначала поверхность без края – это сфера, а с краем – тор с дырой. Тогда окружность ∂E пересечения $S \cap H$ сферы и тора с дырой может быть устранена, что влечёт нужный результат по предположению индукции.

⁵ Действительно, в этом случае достаточно сжать в точку содержащий узел K шар, ограниченный сферой S .

⁶ Действительно, это – единственный с точностью до изотопии вариант неразделяющей кривой на торическом крае многообразия W , гомологичной нулю в самом W .

⁷ Отметим, что в этом случае тор с дырой H является незаузленным.

Теперь предположим, что поверхность без края – это тор, а с краем – диск. В этом случае полученный диск можно перевести в диск R_H изотопией в пространстве W^8 . В результате такой изотопии узел K покинет пространство W и попадёт целиком либо в $S^3 \setminus \text{Int}(V_H)$, либо в V_H . В первом варианте, как и требовалось, вытолкнутый меридиан m'_H полнотория V_H затягивается диском, не пересекающим узла K и вытолкнутой параллели l'_H . Осталось показать, что во втором варианте вытолкнутая параллель l'_H ограничивает минимальную поверхность Зейферта, не пересекающую некоторую поверхность Зейферта для (m'_H, K) .

Замечание 12. Вышеописанные рассуждения также доказывают следующее утверждение, упоминавшееся во введении. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Если край ∂H не зацеплен за K , а меридиан m_H зацеплен за K , то существует такой диск $D \subset S^3 \setminus K$, что $H \cup D$ – вложенный тор. Кроме того, если параллель l_H заузлена, то тор $H \cup D$ несжимаем в $S^3 \setminus K$.

Замечание 13. Аналогичными методами может быть доказано следующее утверждение (см. рис. 3 справа для иллюстрации). Пусть $L = (K_1, K_2)$ – двухкомпонентное зацепление в S^3 и $H \subset S^3 \setminus L$ – поверхность, получающаяся в результате склейки двух незаузленных торов с дырой по их общей границе C , затягивающей диск в $S^3 \setminus H$. Если меридианы⁹ обоих торов с дырой зацеплены за K_1 , а параллели обоих торов с дырой зацеплены за K_2 , то зацепление (K_1, K_2, C) неразводимо.

Выберем минимальную поверхность Зейферта F для параллели l_H , содержащуюся в дополнении $S^3 \setminus \text{Int}(V_H)$. Ориентируем эту поверхность и индуцируем ориентацию на $\partial F = l_H$.

Пусть $l_1, \dots, l_m \subset \partial V_H$ – такие параллельные копии кривой l_H , что в полнотории V_H узел K гомологичен циклу $-(l_1 + \dots + l_m)$. Тогда зацепление $(m'_H, K, l_1, \dots, l_m)$ гомологично нулю в V_H , и следовательно, ограничивает поверхность Зейферта $F' \subset V_H$. Пусть $F_1, \dots, F_m$ – параллельные копии поверхности Зейферта F , ограничивающие узлы $l_1, \dots, l_m$. Тогда объединение $F' \cup F_1 \cup \dots \cup F_m$ является искомой

⁸ Действительно, достаточно рассмотреть сферу $D \cup R_H \subset W$, где D – полу- ченный диск. Эта сфера разделяет S^3 на два шара, и изотопию следует провести вдоль того из них, который содержится в W .

⁹ А именно, кривые, ограничивающие диски в компоненте дополнения $S^3 \setminus H$, содержащей K_1 .

поверхностью Зейферта для зацепления (m'_H, K) , не пересекающей поверхность F . Это показывает, что вытолкнутая параллель l'_H квазизацеплена по Зейферту за (m'_H, K) .

3.3. Доказательство теоремы 5. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Предположим, что меридиан m_H зацеплен за K и параллель l_H квазизацеплена по Зейферту за K . Тогда вытолкнутый меридиан m'_H , как и исходный меридиан m_H , зацеплен за (l'_H, K) , а вытолкнутая параллель l'_H , как и исходная параллель l_H , квазизацеплена по Зейферту за (m'_H, K) . В таком случае применима теорема 6, из которой следует, что край ∂H тора с дырой зацеплен за узел K .

3.4. Доказательство теоремы 2. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – незаузленный тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Предположим, что трёхкомпонентное зацепление (l'_H, m'_H, K) неразводимо. Тогда вытолкнутый меридиан m'_H зацеплен за (l'_H, K) , а вытолкнутая параллель l'_H зацеплена за (m'_H, K) . Более того, поскольку l'_H незаузлена, она квазизацеплена по Зейферту за (m'_H, K) . В таком случае применима теорема 6, из которой следует, что край ∂H тора с дырой зацеплен за узел K .

3.5. Доказательство предложения 4. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Предположим, что меридиан m_H тора с дырой зацеплен за K , а параллель l_H зацеплена по Зейферту за K . Тогда l_H и квазизацеплена по Зейферту за K . В таком случае применима теорема 5, из которой следует, что край ∂H тора с дырой зацеплен за узел K .

3.6. Доказательство предложения 1. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – незаузленный тор с незаузленной дырой, не пересекающий K . Предположим, что меридиан m_H и параллель l_H тора с дырой оба зацеплены за K . Тогда, поскольку l_H незаузлена, она и квазизацеплена по Зейферту за K . В таком случае применима теорема 5, из которой следует, что край ∂H тора с дырой зацеплен за узел K .

3.7. Доказательство теоремы 7. Пусть $K \subset S^3$ – узел и $H \subset S^3$ – бутылка Клейна с дырой, не пересекающая K . Покажем, что если край ∂H не зацеплен за K , то и меридиан m_H не зацеплен за K .

Выберем вложенную сферу $S \subset S^3$, отделяющую край ∂H от узла K и пересекающую бутылку Клейна с дырой H в общем положении.

Проведём рассуждение индукцией по числу окружностей пересечения. Случай, при котором пересечения отсутствуют, очевиден, так что докажем индукционный переход.

Выберем в сфере S самый внутренний диск, то есть диск $E \subset S$, который ограничивает одну из окружностей пересечения $S \cap H$ и не содержит других таких окружностей.

Если кривая $\partial E \subset H$ несущественна (то есть ограничивает на H диск), то окружность ∂E пересечения $S \cap H$ сферы и бутылки Клейна с дырой может быть устранена, что влечёт нужный результат по предположению индукции. Далее мы считаем, что кривая $\partial E \subset H$ существенна.

Поскольку диск E ориентируем, кривая $\partial E \subset H$ является двусторонней. Согласно замечанию 10, на H имеется ровно три изотопических класса существенных двусторонних простых замкнутых кривых: класс меридиана m_H , класс кривой, ограничивающей на H ленту Мёбиуса $M \subset H$, и класс граничной окружности ∂H .

Случай, в котором кривая ∂E относится к одному из двух последних классов, невозможен, поскольку приводит к вложению в сферу S^3 замкнутой неориентируемой поверхности: проективной плоскости $M \cup E$ или бутылки Клейна $\partial H \cup E$. Следовательно, кривая ∂E изотопна меридиану m_H . В этом случае меридиан m_H ограничивает диск E в дополнении узла K , а значит, как и требовалось, не зацеплен за K .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Yu. Miller, A. V. Malyutin, I. S. Alekseev, *Infinite midway cliques in the Gordian graph*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **549** (2025), 146–160.
2. S. Bai, W. Wang, *New criteria and constructions of Brunnian links*. — J. Knot Theory Ramifications **29**, No. 13 (2020).
3. T. Cochran, *Geometric invariants of link cobordism*. — Comment. Math. Helv. **60** (1985) 291–311.
4. T. Cochran, *Derivatives of Links: Milnor's Concordance Invariants and Massey's Products*. American Mathematical Society, 1990.
5. J. Conant, R. Schneiderman, and P. Teichner, *Milnor invariants and twisted Whitney towers*. — J. Topol. **7** (2014) 187–224.
6. A. V. Malyutin, *Knot transformations and conditions of link non-splittability*, Geometric and Algebraic Methods in Knot Theory (sept. 16-20, 2023), <https://www.youtube.com/watch?v=rf0T1Xx45iE> (дата обращения: 29.11.2025).
7. J.-B. Meilhan, *Linking number and Milnor invariants*. — In: Encyclopedia of Knot Theory (2021) 817–830.
8. S. A. Melikhov, *Topological isotopy and Cochran's derived invariants*. — Contemp. Math. **772** (2021) 249–266.

9. J. M. Nogueira, A. Salgueiro, *On embeddings of 2-string tangles into the unknot, the unlink and split links*. — *Topology Appl.* **305** (2022) 1–18.
10. L. Paris, *Mapping class groups of non-orientable surfaces for beginners*. — *Winter Braids Lect. Notes* **1** (2014) 1–17.
11. M. Stukow, *Dehn twists on nonorientable surfaces*. — *Fund. Math.* **189** (2006) 117–147.

Alekseev I. S., Malova A. A. Certification of linkedness by curves on handles.

This work develops geometric certificates for detecting non-splittability of links in the three-sphere. We establish sufficient conditions for the non-splittability of two-component links in which one component bounds a handle (a punctured torus) or a cross-handle (a punctured Klein bottle) in the complement of the other. These conditions are expressed in terms of the linking behavior of curves on these surfaces with the other component. This lays the foundation for a geometric framework to certify non-splittability, an approach conceptually akin to Cochran’s calculus and Milnor invariants.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ilyaalekseev@yahoo.com
E-mail: arina.malova@gmail.com

Поступило 29 декабря 2025 г.