Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 549, 2025 г.

Д. Д. Аксенова, В. А. Ионин, А. В. Малютин

РАЗВЕРТКА СКЛЯРЕНКО–ФРЕЙДЕНТАЛЯ КОМПАКТИФИКАЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И ПРОДОЛЖЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ

Введение

Семейство всех хаусдорфовых компактификаций произвольного топологического пространства естественным образом упорядочено отображениями факторизаций, неподвижными на компактифицируемом пространстве. Максимальным элементом в этом порядке является компактификация Стоуна–Чеха. Как правило, даже для ручных маломерных пространств корона компактификации Стоуна–Чеха огромна, и возникает вопрос существования универсальных компактификаций, корона которых в том или ином смысле мала. В пионерских работах [4, 5] Фрейденталь построил для каждого вполне регулярного периферийно компактного[1] пространства A максимальную хаусдорфову компактификацию μA с нульмерной короной. В замечательной работе [15] Скляренко нашел новую характеризацию компактификации Фрейденталя: он ввел понятие совершенной компактификации и показал, что компактификацию Фрейденталя можно охарактеризовать как минимальное расширение пространства в классе совершенных компактификаций.

Порядок компактификаций заданного топологического пространства является верхней полурешеткой. Эта полурешетка обладает богатым набором свойств и ее изучение занимает ключевое место в теории компактификаций. Интригующим направлением является исследование верхних конусов в этой полурешетке: как устроено семейство всех

Ключевые слова: совершенная компактификация, компактификация Фрейденталя, легкое отображение, кластерное множество.

Исследование Д. Д. Аксеновой и В. А. Ионина выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение No. 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН).

[1]Пространство называется периферийно компактным, если оно допускает базу из открытых подмножеств с компактными границами.

надкомпактификаций $\alpha' A \geqslant \alpha A$ для фиксированных топологического пространства A и его компактификации αA?

$$\begin{tikzcd} & \alpha' A \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ A \arrow[ur, dashed] \arrow[r, hook] & \alpha A. \end{tikzcd}$$

Рис. 1. Компактификация $\alpha' A$, лежащая над данной компактификацией αA.

В настоящей работе мы продвигаемся в этом направлении и доказываем “относительные версии” результатов Фрейденталя и Скляренко. Естественной “релятивизацией” понятия нульмерности пространства является понятие легкого отображения. Напомним, что непрерывное отображение называется легким, если прообраз каждой точки является наследственно несвязным множеством; для отображений между компактами это эквивалентно нульмерности прообразов точек. Легкие отображения играют важную роль в теории размерностей (см., например, [6, 13, 14], а также [11, глава 9, §4] и [12]). Мы готовы сформулировать один из ключевых результатов нашей работы.

Теорема (см. следствие 7 и теоремы 11 и 13)**.** *Пусть αA – хаусдорфова компактификация пространства A. Тогда существует единственная совершенная легкая надкомпактификация $\alpha^{\text{✂}} A$ компактификации αA.*

Компактификация $\alpha^{\text{✂}} A$ обладает двумя характеризующими свойствами:

(1) *$\alpha^{\text{✂}} A$ – максимальная легкая надкомпактификация αA*;
(2) *$\alpha^{\text{✂}} A$ – минимальная совершенная надкомпактификация αA.*

Компактификацию $\alpha^{\text{✂}} A$ из формулировки теоремы мы называем разверткой компактификации αA. В заключительной части работы мы приводим явные описания развертки $\alpha^{\text{✂}} A$ для некоторых примечательных случаев, возникающих естественным образом в геометрической топологии.

В процессе изучения взаимодействия понятий совершенного расширения и легкого отображения были установлены некоторые замечательные свойства. Относящиеся к этому направлению результаты представляют самостоятельный интерес, поэтому мы остановимся на них чуть подробнее. Одна из классических задач топологии состоит в описании условий, при которых непрерывное отображение, заданное на плотном подпространстве $A \subset X$, допускает непрерывное продолжение на все пространство X. Естественный подход к этой задаче основан на рассмотрении так называемых кластерных множеств отображения в точках, где отображение не определено: продолжимость отображения выражается через одноточечность соответствующих кластерных множеств. Свойства кластерных множеств подробно изучались в ряде работ, начиная с классической монографии Коллингвуда и Лохуотера [2]; современный подход к кластерным множествам непрерывных функций дается, в частности, в статье [7]. Анализируя структуру кластерных множеств, мы доказываем следующий признак существования непрерывного продолжения отображения.

Теорема (см. теорему 4)**.** *Пусть X – совершенное хаусдорфово расширение топологического пространства A, $f\colon A \to Y$ – непрерывное отображение в хаусдорфов компакт Y, $\varphi\colon Y \to Z$ – легкое отображение в хаусдорфово пространство Z. Тогда из существования непрерывного продолжения композиции $\varphi \circ f\colon A \to Z$ на X следует существование непрерывного продолжения f на X.*

Из этой теоремы вытекает следующее свойство развертки, которое оказалось полезным при исследовании некоторых вопросов из геометрической топологии[2].

Следствие (см. следствие 8)**.** *Пусть αA – хаусдорфова компактификация топологического пространства A. Тогда всякий автогомеоморфизм пространства A, продолжающийся до автогомеоморфизма компактификации αA, продолжается до автогомеоморфизма развертки $\alpha^{✂} A$.*

§1. Предварительные сведения

Топологическое пространство называется *наследственно несвязным*, если оно не содержит никакого связного подпространства, содержащего более одной точки. Непрерывное отображение называется *легким*, если прообраз каждой точки наследственно несвязен. Непустое топологическое T_1-пространство называется *нульмерным*, если оно обладает

[2]См. работу Д. Д. Аксеновой и А. В. Малютина об обобщении трюка Александера.

базой из открыто-замкнутых множеств. Непрерывное отображение называется *нульмерным*, если прообраз каждой точки нульмерен или пуст. В частности, если прообраз каждой точки конечен, то отображение называется *конечнократным.* Связный хаусдорфов компакт называется *континуумом.* Топологическое пространство называется *пунктиформным*, если всякое его непустое подпространство, являющееся континуумом, одноточечно. Назовем непрерывное отображение *аккуратным*, если прообраз каждой точки пунктиформен.

Предложение 1. *Для непрерывного отображения f выполняется следующая цепочка импликаций:*

$$[f \textit{ конечнократно}] \Rightarrow [f \textit{ нульмерно}] \Rightarrow [f \textit{ легкое}] \Rightarrow [f \textit{ аккуратное}].$$

Доказательство. Первая и последняя импликации очевидны. Чтобы установить серединное следование, достаточно заметить, что любое нульмерное пространство наследственно несвязно (см. [3, п. 6.2]). □

Следствие 1. *Классы легких, аккуратных и нульмерных отображений высекают из класса тех непрерывных отображений, у которых все прообразы точек являются хаусдорфовыми компактами, одинаковые подклассы. В частности, для непрерывного отображения из хаусдорфова компакта в хаусдорфово пространство свойства "быть нульмерным", "быть легким" и "быть аккуратным" означают одно и то же.*

Расширением топологического пространства A называется пара (X, ι), где X – топологическое пространство, $\iota\colon A \to X$ – вложение с плотным образом. Отождествляя A с подпространством $\iota(A) \subset X$, мы будем далее говорить, что топологическое пространство X является расширением пространства A.

Расширение (X, ι) топологического пространства A называется *хаусдорфовой компактификацией* пространства A, если X – хаусдорфов компакт.[3] Мы будем обозначать хаусдорфовы компактификации с помощью греческих букв: $(\alpha A, \alpha)$, $(\gamma A, \gamma)$, ...[4] Подпространство $\alpha A \setminus A$ пространства компактификации αA называется *короной.*

[3] Заметим, что, согласно этому определению, топологическое пространство допускает некоторую хаусдорфову компактификацию тогда и только тогда, когда оно вполне регулярно.

[4] Греческая буква β зарезервирована для компактификации Стоуна–Чеха.

Пусть $\alpha_1 A$ и $\alpha_2 A$ – хаусдорфовы компактификации топологического пространства A. Говорят, что компактификации $\alpha_1 A$ и $\alpha_2 A$ *эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $\alpha_1 A \to \alpha_2 A$, тождественный на A. Компактификация $\alpha_2 A$ называется *надкомпактификацией* компактификации $\alpha_1 A$, если существует непрерывное отображение $\pi\colon \alpha_2 A \to \alpha_1 A$, тождественное на A. Отображение π автоматически сюръективно и, более того, является отображением факторизации. Выполняются следующие равенства (см., например, [3, теорема 3.5.7]):

$$\pi(A) = A,\ \pi(\alpha_2 A \setminus A) = \alpha_1 A \setminus A.$$

Пусть A – топологическое пространство. Рассмотрим бинарное отношение $\leqslant$ на классе всех хаусдорфовых компактификаций пространства A: будем писать, что $\alpha_1 A \leqslant \alpha_2 A$, если компактификация $\alpha_2 A$ является надкомпактификацией компактификации $\alpha_1 A$. Легко видеть, что это задает отношение предпорядка на классе всех компактификаций данного топологического пространства. Можно показать, что компактификации $\alpha_1 A$ и $\alpha_2 A$ эквивалентны, если и только если $\alpha_1 A \leqslant \alpha_2 A$ и $\alpha_2 A \leqslant \alpha_1 A$ (см., например, [3, теорема 3.5.4]). В этом предпорядке имеется единственный (с точностью до эквивалентности) максимальный элемент – компактификация Стоуна–Чеха βA (см. [3, теорема 3.5.10]).

Надкомпактификация называется *легкой*, если соответствующее ей отображение π является легким.

Пусть X – расширение топологического пространства A. Для открытого подмножества V в A обозначим через $O\langle V\rangle$ максимальное открытое подмножество в X, которое в пересечении с A дает V. Иначе говоря, $O\langle V\rangle = X \setminus \mathrm{cl}_X(A \setminus V)$. Расширение X пространства A называется *совершенным*, если для любого открытого подмножества V в A выполнено равенство

$$\mathrm{cl}_X(\mathrm{Fr}_A(V)) = \mathrm{Fr}_X O\langle V\rangle.$$

Предложение 2 ([9, предложение 3.5])**.** *Пусть X – расширение топологического пространства A. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *расширение X пространства A совершенно*;

(2) *для любой точки x из $X \setminus A$ и ее открытой окрестности V в X пересечение $V \cap A$ не разбивается на два открытых в A подмножества, для каждого из которых точка x является предельной.*

§2. О продолжении непрерывных отображений

Пусть X – топологическое пространство, x – точка в X. *Окрестностью* точки x в X называется подмножество $V \subset X$, внутренность $\mathrm{Int}_X(V)$ которого содержит точку x. Обозначим через $\mathcal{O}_X(x)$ семейство всех окрестностей точки x в X.

Пусть X – расширение топологического пространства A, f – непрерывное отображение из A в топологическое пространство Y. Для точки x из X *кластерное множество* $f^+(x)$ (см. [2, 7]) – это подмножество в Y, определяемое следующим образом:

$$f^+(x) := \bigcap_{V \in \mathcal{O}_X(x)} \mathrm{cl}_Y(f(V \cap A)).$$

Для отображения $f\colon X \to Y$ будем обозначать через Γ_f график отображения f в пространстве $X \times Y$ и через $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ – каноническую проекцию.

Утверждение 1. *Пусть X – расширение топологического пространства A, $f\colon A \to Y$ – непрерывное отображение в топологическое пространство Y, x – точка в X. Тогда множество $f^+(x)$ совпадает с множеством $\pi_Y\big(\mathrm{cl}_{X\times Y}(\Gamma_f) \cap (\{x\} \times Y)\big)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для произвольной точки t из Y следующие условия эквивалентны:

(1) точка t лежит в $f^+(x)$;
(2) для каждой окрестности W_t точки t и каждой окрестности V_x точки x образ $f(V_x \cap A)$ пересекает W_t, т. е. график Γ_f пересекает окрестность $V_x \times W_t$ точки (x, t) в $X \times Y$;
(3) точка (x, t) лежит в $\mathrm{cl}_{X\times Y}(\Gamma_f)$.

Эквивалентность первого и второго условия следует из определения множества $f^+(x)$, а эквивалентность второго и третьего – из того, что в пространстве $X \times Y$ окрестности вида $V_x \times W_t$ образуют базу в точке (x, t). □

Лемма 2. *Пусть X – расширение топологического пространства A, Y – хаусдорфово пространство, $f\colon A \to Y$ – непрерывное отображение. Тогда, если f продолжимо на X, то для каждой точки x из X множество $f^+(x)$ одноточечно.*

Доказательство. Если f непрерывно продолжимо на X и $\widetilde{f}$ – продолжающее f непрерывное отображение из X в Y, то график $\Gamma_{\widetilde{f}}$ замкнут (см., например, [3, следствие 2.3.22]) и содержит график Γ_f отображения f. Следовательно, $\Gamma_{\widetilde{f}}$ совпадает с замыканием $\mathrm{cl}_{X\times Y}(\Gamma_f)$, откуда вытекает, что для любой точки x из X множество

$$\mathrm{cl}_{X\times Y}(\Gamma_f)\cap(\{x\}\times Y)$$

одноточечно, так что $f^+(x)$ одноточечно в силу утверждения 1. $\square$

Если пространство Y компактно, то верна и обратная импликация.

Предложение 3. *Пусть X – расширение топологического пространства A, $f\colon A\to Y$ – непрерывное отображение в хаусдорфов компакт Y. Тогда f непрерывно продолжимо на X, если и только если для каждой точки x из X множество $f^+(x)$ одноточечно.*

Доказательство. Как известно (см., например, [8, упражнение 26.8] или [3, упражнение 3.1.D]), отображение топологического пространства X в хаусдорфов компакт Y непрерывно в том и только том случае, если график отображения является замкнутым в $X\times Y$ множеством.

Если для каждой точки x из X множество $f^+(x)$ одноточечно, то в силу утверждения 1 для каждой точки x из X множество

$$\mathrm{cl}_{X\times Y}(\Gamma_f)\cap(\{x\}\times Y)$$

одноточечно, так что замкнутое множество $\mathrm{cl}_{X\times Y}(\Gamma_f)$ является графиком некоторого отображения $\widetilde{f}$ из X в Y. Из замкнутости графика, как отмечено в начале настоящего доказательства, следует непрерывность отображения $\widetilde{f}$, а из очевидного включения

$$\Gamma_f\subset\mathrm{cl}_{X\times Y}(\Gamma_f)$$

следует, что $\widetilde{f}$ является продолжением отображения f. $\square$

Замечание 1. Утверждение 1 и следующее за ним предложение 3 относятся к числу результатов, хорошо известных специалистам. Отметим, что доказательство предложения 3 можно вычленить из доказательства теоремы 1 статьи [16], где аналогичное утверждение проверяется напрямую (без ссылки на теорему о замкнутом графике). Однако авторам не удалось найти источник, где они формулировались бы в нужном виде. Поскольку в дальнейшем нам потребуется именно такая формулировка, мы включаем здесь их доказательства для полноты изложения.

Для доказательства теоремы 4 нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3. *Пусть X – расширение топологического пространства A, Y – хаусдорфов компакт, $f\colon A \to Y$ – непрерывное отображение, x – точка в X, U – открытое подмножество Y. Тогда, если U содержит $f^+(x)$, то найдется окрестность V точки x в X такая, что выполняется включение*

$$f(V \cap A) \subset U.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F}$ семейство всех множеств вида $W \cap A$, где W – окрестность точки x в X. Ясно, что $\mathcal{F}$ является фильтром. Тогда семейство

$$f_*(\mathcal{F}) = \{f(T) \mid T \in \mathcal{F}\}$$

является базой фильтра, а кластерное множество $f^+(x)$ является множеством всех предельных точек базы фильтра $f_*(\mathcal{F})$.

Если предположить, что ни один из элементов базы фильтра $f_*(\mathcal{F})$ не содержится в U, то получим, что семейство

$$\mathcal{G} = \{f(T) \setminus U \mid T \in \mathcal{F}\}$$

тоже является базой фильтра. Поскольку подпространство $Y \setminus U$ компактно, а все элементы базы фильтра $\mathcal{G}$ лежат в $Y \setminus U$, у базы фильтра $\mathcal{G}$ множество предельных точек непусто и содержится в $Y \setminus U$. Это приводит нас к противоречию, поскольку множество предельных точек базы фильтра $\mathcal{G}$ содержится в множестве предельных точек базы фильтра $f_*(\mathcal{F})$, а последнее совпадает с множеством $f^+(x)$, лежащим в U. $\square$

Предложение 4. *Пусть X – совершенное расширение топологического пространства A, $f\colon A \to Y$ – непрерывное отображение в хаусдорфов компакт Y, x – точка в X. Тогда подпространство $f^+(x)$ пространства Y связно.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного и предположим, что подпространство $f^+(x) \subset Y$ несвязно. Тогда, так как подпространство $f^+(x)$ компактно, найдутся два непустых компакта $K_i \subset Y$, разбивающие $f^+(x)$. Поскольку пространство Y нормально, существуют два непересекающихся открытых подмножества $U_1, U_2 \subset Y$ такие, что $U_1 \supset K_1$ и $U_2 \supset K_2$. По лемме 3 найдется открытая окрестность V точки x в X, для которой

$$f(V \cap A) \subset U_1 \cup U_2.$$

Заметим, что множество $V \cap A$ разбивается на два открытых в A подмножества $V_i = V \cap f^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что точка x является предельной и для V_1, и для V_2, что приводит нас к противоречию с совершенностью расширения $A \subset X$. $\square$

Утверждение 2. *Пусть X – расширение топологического пространства A, Y и Z – топологические пространства, $f\colon A \to Y$ и $\varphi\colon Y \to Z$ – непрерывные отображения. Тогда для каждой точки x из X множество $\varphi(f^+(x))$ содержится в множестве $(\varphi \circ f)^+(x)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}
\varphi\left(f^+(x)\right) &= \varphi\left(\bigcap_{V \in \mathcal{O}_X(x)} \mathrm{cl}_Y\left(f\left(V \cap A\right)\right)\right) \\
&\subset \bigcap_{V \in \mathcal{O}_X(x)} \varphi\left(\mathrm{cl}_Y\left(f\left(V \cap A\right)\right)\right) \\
&\subset \bigcap_{V \in \mathcal{O}_X(x)} \mathrm{cl}_Z\left(\varphi\left(f\left(V \cap A\right)\right)\right) = \left(\varphi \circ f\right)^+(x).
\end{aligned}$$
$\square$

Теорема 4. *Пусть X – совершенное расширение топологического пространства A, Y – хаусдорфов компакт, Z – хаусдорфово пространство, $f\colon A \to Y$ – непрерывное отображение, $\varphi\colon Y \to Z$ – легкое отображение. Тогда, если композиция $\varphi \circ f\colon A \to Z$ непрерывно продолжается на X, то и f непрерывно продолжается на X.*

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "\exists"] \arrow[dr, dashed, "\exists"] \arrow[dr, phantom, "\Longleftarrow", near start] & \\
A \arrow[ur, hook] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "\varphi"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

Рис. 2. Иллюстрация к теореме 4.

Доказательство. Предположим с целью прийти к противоречию, что у f не имеется непрерывного продолжения на X. Тогда в силу предложения 3 найдется такая точка $x \in X$, что множество $f^+(x)$ не одноточечно.

Из условия о совершенности расширения $A \subset X$ в силу предложения 4 вытекает, что множество $f^+(x)$ связно. При этом в силу утверждения 2 множество $\varphi(f^+(x))$ содержится в множестве $(\varphi \circ f)^+(x)$. По предположению отображение $\varphi \circ f$ непрерывно продолжается на X. По лемме 2 для каждой точки $x \in X$ множество $(\varphi \circ f)^+(x)$ одноточечно, т. е. $(\varphi \circ f)^+(x) = \{z\}$ для некоторой точки $z \in Z$. Следовательно, $\varphi(f^+(x)) \subset \{z\}$ и, значит, $f^+(x) \subset \varphi^{-1}(z)$.

Таким образом, неодноточечный континуум $f^+(x)$ содержится в прообразе $\varphi^{-1}(z)$ точки z. Это противоречит предположению о легкости отображения φ. Полученное противоречие показывает, что отображение f непрерывно продолжается на X. □

Следствие 5. *Пусть P_1, P_2, Q_1, Q_2 – топологические пространства, а $\varphi_1 \colon P_1 \to Q_1$, $\varphi_2 \colon P_2 \to Q_2$ и $g \colon Q_1 \to Q_2$ – непрерывные отображения. Предположим, что P_2 – хаусдорфов компакт, Q_2 – хаусдорфово, а отображение φ_2 – легкое. Предположим также, что P_1 является совершенным расширением некоторого пространства A и найдется непрерывное отображение $g' \colon A \to P_2$ такое, что*

$$\varphi_2 \circ g' = g \circ \varphi_1|_A. \tag{1}$$

Тогда существует непрерывное отображение $\widetilde{g} \colon P_1 \to P_2$ такое, что

$$\varphi_2 \circ \widetilde{g} = g \circ \varphi_1. \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dashed, "g'", "\exists"'] \arrow[d, hook] & P_2 \arrow[d, equal] \\
P_1 \arrow[r, dashed, "\exists", "\widetilde{g}"'] \arrow[d, "\varphi_1"'] & P_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\
Q_1 \arrow[r, "g"'] & Q_2.
\end{tikzcd}$$

Рис. 3. Иллюстрация к следствию 5.

Доказательство. Легко проверить, что набор

$$X = P_1,\ A \subset P_1,\ Y = P_2,\ Z = Q_2,\ f = g' \colon A \to P_2,\ \varphi = \varphi_2 \colon P_2 \to Q_2$$

удовлетворяет условиям теоремы 4. Также заметим, что композиция $\varphi_2 \circ g' \colon A \to Q_2$ непрерывно продолжается на P_1, поскольку в силу условия (1) композиция $\varphi_2 \circ g'$ совпадает с сужением на A непрерывного отображения $g \circ \varphi_1 \colon P_1 \to Q_2$.

Следовательно, отображение $g' \colon A \to P_2$ имеет непрерывное продолжение $\widetilde{g} \colon P_1 \to P_2$ по теореме 4.

Поскольку $\widetilde{g}|_A = g'$, из условия (1) получаем, что для любой точки $a \in A$ выполняется равенство

$$\varphi_2(\widetilde{g}(a)) = \varphi_2(g'(a)) = g(\varphi_1(a)).$$

Иными словами, отображения $\varphi_2 \circ \widetilde{g} \colon P_1 \to Q_2$ и $g \circ \varphi_1 \colon P_1 \to Q_2$ совпадают на множестве A. Так как A плотно в P_1, а Q_2 – хаусдорфово, отсюда следует тождество (2), что и требовалось доказать. $\square$

§3. Поднятие отображений в надкомпактификации

Теорема 6. *Пусть αA и γC – хаусдорфовы компактификации топологических пространств A и C соответственно. Далее, пусть $\alpha' A$ – хаусдорфова совершенная надкомпактификация для αA, $\gamma' C$ – легкая хаусдорфова надкомпактификация для γC. Тогда всякое непрерывное отображение $f \colon A \to C$, продолжающееся до непрерывного отображения $\widetilde{f} \colon \alpha A \to \gamma C$, продолжается и до непрерывного отображения $\widetilde{f}' \colon \alpha' A \to \gamma' C$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & C \arrow[d, hook] \\
\alpha' A \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}'", "\exists" description] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow"] & \gamma' C \arrow[d, "\psi"] \\
\alpha A \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"', "\exists" description] & \gamma C.
\end{tikzcd}$$

Рис. 4. Иллюстрация к теореме 6.

Доказательство. Пусть $f \colon A \to C$ – непрерывное отображение, продолжающееся до непрерывного отображения $\widetilde{f} \colon \alpha A \to \gamma C$. По предположению найдутся непрерывное отображение $\varphi \colon \alpha' A \to \alpha A$ и легкое отображение $\psi \colon \gamma' C \to \gamma C$, тождественные на A и C соответственно.

Убедимся, что набор пространств и отображений

$$P_1 = \alpha' A,\ Q_1 = \alpha A,\ P_2 = \gamma' C,\ Q_2 = \gamma C,\ \varphi_1 = \varphi,\ \varphi_2 = \psi,\ g = \widetilde{f}$$

удовлетворяет требованиям следствия 5. В качестве подпространства в P_1 из формулировки следствия 5 берем исходное пространство A, отождествленное с его образом в $\alpha' A$. Отображение

$$g' \colon A \to \gamma' C$$

определяем как f. Пространство $Q_2 = \gamma C$ хаусдорфово, пространство $P_2 = \gamma' C$ компактно и хаусдорфово, все фигурирующие отображения непрерывны, а отображение ψ – легкое.

Покажем, что выполнено условие (1) следствия 5. Действительно, для каждой точки $a \in A$ имеем

$$\varphi_2(g'(a)) = \psi(f(a)) = \widetilde{f}(a) = g(\varphi_1|_A(a)).$$

Таким образом, выполнены все условия следствия 5, и отображение $g' \colon A \to \gamma' C$ имеет непрерывное продолжение $\widetilde{f}' \colon \alpha' A \to \gamma' C$, что и доказывает утверждение. □

Следствие 7. *У произвольной хаусдорфовой компактификации топологического пространства существует не более одной (с точностью до эквивалентности) хаусдорфовой совершенной легкой надкомпактификации.*

Доказательство. Предположим, что $\alpha_1 A$ и $\alpha_2 A$ – две совершенные хаусдорфовы компактификации топологического пространства A, являющиеся легкими расширениями компактификации αA. Тогда имеются легкие непрерывные отображения $\varphi_1 \colon \alpha_1 A \to \alpha A$ и $\varphi_2 \colon \alpha_2 A \to \alpha A$, тождественные на A. По теореме 6 найдутся непрерывные отображения $\widetilde{f} \colon \alpha_1 A \to \alpha_2 A$ и $\widetilde{g} \colon \alpha_2 A \to \alpha_1 A$, встраивающиеся в следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\
\alpha_1 A \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & \alpha_2 A \arrow[d, "\varphi_2"] \\
\alpha A \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \alpha A,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\
\alpha_2 A \arrow[r, dashed, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \alpha_1 A \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\alpha A \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \alpha A.
\end{tikzcd}$$

Композиции $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ и $\widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ являются непрерывными эндоморфизмами компактификаций $\alpha_1 A$ и $\alpha_2 A$, тождественными на A. Из непрерывности мы заключаем, что эти композиции являются тождественными отображениями. Тем самым пара $(\widetilde{f}, \widetilde{g})$ устанавливает эквивалентность компактификаций $\alpha_1 A$ и $\alpha_2 A$. □

Пусть A – топологическое пространство, αA – его хаусдорфова компактификация. Мы будем называть совершенную легкую надкомпактификацию компактификации αA *разверткой* и обозначать ее символом $\alpha^{\times} A$. Эти обозначения будут прояснены в разделе 5.2.

Следствие 8. *Пусть αA – хаусдорфова компактификация топологического пространства A, $\alpha^{\times} A$ – ее развертка. Тогда всякое непрерывное отображение $f\colon A \to A$, продолжающееся до непрерывного отображения $\widetilde{f}\colon \alpha A \to \alpha A$, продолжается до непрерывного отображения $\widetilde{f}'\colon \alpha^{\times} A \to \alpha^{\times} A$, а всякий автогомеоморфизм $f\colon A \to A$, продолжающийся до автогомеоморфизма $\widetilde{f}\colon \alpha A \to \alpha A$, продолжается до автогомеоморфизма $\widetilde{f}'\colon \alpha^{\times} A \to \alpha^{\times} A$.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из теоремы 6, примененной к случаю

$$C = A, \quad \gamma C = \alpha A, \quad \gamma' C = \alpha^{\times} A. \qquad \square$$

§4. Существование и характеризация развертки

Пусть X и Y – топологические пространства, $f\colon X \to Y$ – непрерывное отображение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *совершенным*,[5] если оно является замкнутой сюръекцией и все слои $f^{-1}(y)$ являются компактными подпространствами в X.[6] Отображение f называется *монотонным*, если все его слои $f^{-1}(y)$ являются связными подпространствами в X.

Нам понадобятся следующие два известных утверждения.

Теорема 9 (см. [15, теорема 2]). *Хаусдорфова компактификация αA топологического пространства A совершенна тогда и только тогда, когда естественная проекция $\beta A \to \alpha A$ из компактификации Стоуна–Чеха монотонна.*

---

[5] Это понятие не связано напрямую с совершенными компактификациями.

[6] Наше определение отличается от определения, данного в [3, п. 3.7]: мы не требуем хаусдорфовости пространства X, но требуем сюръективности отображения f.

Теорема 10 (см. [3, теоремы 6.2.22 и 6.2.23])**.** *Пусть $f\colon X \to Y$ – совершенное отображение между хаусдорфовыми пространствами. Тогда f раскладывается в композицию $f = h \circ g$, где $g\colon X \to Z$ – монотонное совершенное отображение в некоторое хаусдорфово пространство Z, $h\colon Z \to Y$ – легкое совершенное отображение. Более того, такое разложение единственно в том смысле, что если $f = h_1 \circ g_1$ и $f = h_2 \circ g_2$ – два разложения для f, то существует единственный гомеоморфизм $\theta\colon Z_1 \to Z_2$ такой, что $\theta \circ g_1 = g_2$ и $h_2 \circ \theta = h_1$.*

$$
\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dr, "h_1"] \arrow[dd, dashed, "\theta"] & \\
X \arrow[ur, "g_1"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_2"'] & & Y. \\
 & Z_2 \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 5. Иллюстрация к теореме 10.

Теорема 11. *Пусть αA – хаусдорфова компактификация топологического пространства A. Тогда существует развертка $\alpha^{\scissors} A$ компактификации αA.*

Доказательство. Рассмотрим проекцию $\pi\colon \beta A \to \alpha A$ из компактификации Стоуна–Чеха на пространство компактификации αA, тождественную на A. По теореме 10 существует хаусдорфово пространство $\alpha' A$ и разложение отображения π в композицию

$$\beta A \xrightarrow{\varphi'} \alpha' A \xrightarrow{\varphi} \alpha A$$

монотонного отображения φ' и легкого отображения φ. Пространство $\alpha' A$ вместе с композицией

$$A \xrightarrow{\beta} \beta A \xrightarrow{\varphi'} \alpha' A$$

задает хаусдорфову компактификацию пространства A. Эта компактификация совершенна по теореме 9, а также является легкой надкомпактификацией для αA. Тем самым компактификация $\alpha' A$ является разверткой компактификации αA. $\square$

Лемма 12. *Пусть αA – хаусдорфова совершенная компактификация топологического пространства A, K – подпространство в $\alpha A \setminus A$, являющееся континуумом. Тогда факторпространство $\alpha A/K$ является хаусдорфовой совершенной компактификацией пространства A.*

Доказательство. Пусть $\pi\colon \alpha A \to \alpha A/K$ – каноническая проекция. Известно (см., например, [3, упражнение 3.5.B]), что композиция

$$A \xrightarrow{\alpha} \alpha A \xrightarrow{\pi} \alpha A/K$$

задает новую хаусдорфову компактификацию A. Совершенность компактификации $\alpha A/K$ следует из [15, лемма 3]. □

Теорема 13. *Пусть αA – хаусдорфова компактификация топологического пространства A, $\alpha' A$ – надкомпактификация для αA. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *$\alpha' A$ совпадает с разверткой $\alpha^{\times} A$ компактификации αA;*
(2) *$\alpha' A$ – минимальная совершенная надкомпактификация для αA;*
(3) *$\alpha' A$ – максимальная легкая надкомпактификация для αA.*

Доказательство. Обозначим через $\varphi\colon \alpha' A \to \alpha A$ отображение факторизации, тождественное на A.

Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3) получаются применением теоремы 6.

Покажем теперь, что (2) влечет (1). Действительно, если отображение φ не является легким, то прообраз $\varphi^{-1}(y)$ одной из точек короны $y \in \alpha A \setminus A$ содержит нетривиальный континуум K. Тогда можно определить непрерывное отображение $\widehat{\varphi}\colon \alpha' A/K \to \alpha A$ по формуле

$$\widehat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \neq \{K\}, \\ y, & x = \{K\}. \end{cases}$$

По лемме 12 построенное отображение приводит к промежуточной совершенной надкомпактификации:

$$\alpha' A \xrightarrow{\pi} \alpha' A/K \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \alpha A.$$

Это противоречит предположению о минимальности.

Покажем наконец, что (3) влечет (1). По теореме 11 существует развертка $\alpha'' A$ компактификации $\alpha' A$. Тогда композиция проекций, тождественных на A,

$$\alpha'' A \xrightarrow{\varphi'} \alpha' A \xrightarrow{\varphi} \alpha A$$

является легким отображением. Из предположения о максимальности следует, что отображение φ' является гомеоморфизмом. Это демонстрирует совершенность компактификации $\alpha' A$ и показывает тем самым, что она является разверткой компактификации αA. □

Замечание 2. Теорема 13 альтернативно доказывается без использования результатов предыдущих разделов многократным применением теорем 9 и 10. Единственность развертки, постулируемая в следствии 7, также выводится из теоремы 10.

Заметим также, что импликацию (2) $\Rightarrow$ (1) ((3) $\Rightarrow$ (1)) можно было бы получить с помощью применения теоремы 6, если бы мы предположили, что компактификация $\alpha' A$ является наименьшей совершенной (наибольшей легкой) надкомпактификацией компактификации αA, а не минимальной (максимальной).

§5. Вычисление развертки компактификации

Для вычисления развертки данной хаусдорфовой компактификации αA пространства A достаточно “угадать” такую совершенную компактификацию пространства A, что компактификация αA получается из последней факторизацией короны по некоторому отношению эквивалентности, классы эквивалентности в котором нульмерны. Подходящие достаточные условия для построения такого отношения эквивалентности предоставляются леммой 14.

Пусть X – топологическое пространство, $\sim$ – отношение эквивалентности на множестве точек X. Отношение $\sim$ называется *замкнутым*, если отвечающее отношению $\sim$ подпространство в $X \times X$ замкнуто. Отношение $\sim$ называется *нульмерным*, если каждый класс эквивалентности $[x]_\sim$ является нульмерным подмножеством в X.

Лемма 14 (об обратном проектировании)**.** *Пусть γA – совершенная хаусдорфова компактификация топологического пространства A, $\sim$ – замкнутое нульмерное отношение эквивалентности на множестве точек компактификации γA, причем все одноэлементные подмножества $\{a\}$ для точек $a \in A$ являются классами эквивалентности. Тогда факторпространство $\alpha A = \gamma A/\sim$ является хаусдорфовой компактификацией пространства A, и компактификация γA является разверткой компактификации αA.*

Доказательство. Действительно, αA является хаусдорфовой компактификацией пространства A в силу [3, упражнение 3.5.B], а отображение $\gamma A \to \alpha A$ канонической проекции на факторпространство является легким по построению. □

Одно из достаточных условий совершенности компактификации доставляется более "наглядным" свойством предельной локальной связности. Пусть X – топологическое пространство. Подпространство $A \subset X$ называется *предельно локально связным в* X, если для каждой точки $x \in X \setminus A$ и любой ее окрестности $U \subset X$ найдется открытая подокрестность $V \subset U$ точки x такая, что пересечение $V \cap A$ связно.

Предложение 5. *Пусть X – расширение топологического пространства A. Предположим, что подпространство A предельно локально связно в X. Тогда расширение X пространства A совершенно.*

Доказательство. Предположим, что расширение X не совершенно. Тогда у некоторой точки $x \in X \setminus A$ найдется такая открытая окрестность U, что пересечение $U \cap A$ распадается в несвязное объединение двух открытых в A подмножеств U_1 и U_2, для каждого из которых точка x является предельной точкой. С другой стороны, из предельной локальной связности подпространства A в X следует наличие такой открытой подокрестности $x \in V \subset U$, что пересечение $V \cap A$ связно. Из того, что x лежит в пересечении $\mathrm{cl}_X(U_1) \cap \mathrm{cl}_X(U_2)$, следует, что пересечения $V \cap U_1$ и $V \cap U_2$ непусты. Цепочка равенств

$$V \cap A = V \cap (U \cap A) = V \cap (U_1 \cup U_2) = (V \cap U_1) \cup (V \cap U_2)$$

приводит к противоречию со связностью пересечения $V \cap A$. □

Замечание 3. Предложение 5 демонстрирует, что предложение 4 является прямым обобщением утверждения 2 из [7].

Далее мы докажем результат, демонстрирующий, в какой степени верно утверждение, двойственное к предложению 5.

Предложение 6. *Пусть X – совершенное расширение топологического пространства A. Тогда подпространство A предельно локально связно в X, если и только если пространство X локально связно в каждой точке $x \in X \setminus A$.*

Доказательство. Известно, что для совершенных расширений связность открытого подмножества $U \subset X$ равносильна связности пересечения $U \cap A$ (см., например, [1, лемма 6.1]).

Пусть A предельно локально связно в X. Покажем, что X локально связно во всех точках из $X \setminus A$. Пусть U – окрестность в X некоторой точки $x \in X \setminus A$. По определению предельной локальной связности найдется открытая подокрестность $V \subset U$ точки x, для которой пересечение $V \cap A$ связно. Из условия совершенности следует связность самой V.

Обратно, пусть пространство X локально связно в каждой точке из $X \setminus A$. Тогда для каждой точки $x \in X \setminus A$ найдется база открытых окрестностей, состоящая из связных множеств. Как было отмечено выше, связность пересечений этих открытых связных множеств с A следует из совершенности расширения X. □

5.1. Пример: компактификация Фрейденталя. Известно (см., например, [3, теорема 3.5.12]), что предпорядок хаусдорфовых компактификаций вполне регулярного топологического пространства A имеет наименьший элемент, если и только если A локально компактно. В случае последнего, если при этом A некомпактно, то этот наименьший элемент можно охарактеризовать как единственную хаусдорфову компактификацию с короной, состоящей из одной точки. Соответствующая компактификация называется *одноточечной компактификацией Александрова* и обозначается символом A^+.

Пусть A – периферийно компактное хаусдорфово пространство. Тогда у него существует максимальная хаусдорфова компактификация μA с пунктиформной короной (см., например, [15]). Компактификация μA называется *компактификацией Фрейденталя.* В случае, когда пространство A локально компактно, связно и локально линейно связно, корону этой компактификации можно отождествить (см., например, [10, §1.8]) с *пространством топологических концов* пространства A, описывающимся как предел дискретных пространств[7]

$$\mathrm{ends}(A) = \lim \pi_0(A \setminus \mathrm{cl}_A(U))$$

по проективной системе, состоящей из дополнений к замыканиям открытых подмножеств $U \subset A$ с компактным замыканием $\mathrm{cl}_A(U)$ и отображений включения $A \setminus \mathrm{cl}_A(U) \to A \setminus \mathrm{cl}_A(V)$ для каждой пары открытых подмножеств $U, V \subset A$ таких, что замыкания $\mathrm{cl}_A(U)$ и $\mathrm{cl}_A(V)$ компактны и $\mathrm{cl}_A(V) \subset U$.

[7] Символом $\pi_0(X)$ обозначается множество компонент линейной связности топологического пространства X, оснащенное дискретной топологией.

Предложение 7. *Пусть A – локально компактное хаусдорфово пространство, $\alpha A = A^+$ – его одноточечная компактификация. Тогда развертка $\alpha^{\times} A$ компактификации αA совпадает с μA.*

Доказательство. Утверждение мгновенно следует из характеризации развертки, представленной в теореме 13. $\square$

5.2. Пример: клеточные компактификации. Опишем процедуру построения некоторой компактификации топологического пространства, гомеоморфного несвязной сумме открытых евклидовых шаров. Пусть n и k – натуральные числа. Рассмотрим набор топологических пространств $D_1, D_2, \ldots, D_k$, гомеоморфных n-мерным замкнутым евклидовым шарам. Пусть $\sim$ – замкнутое отношение эквивалентности на множестве точек несвязного объединения граничных сфер

$$\partial D_1 \sqcup \partial D_2 \sqcup \ldots \sqcup \partial D_k.$$

Предположим, что классы эквивалентности отношения $\sim$ конечны. Рассмотрим факторпространство

$$X = (D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_k)/\sim .$$

Для каждого i из $\{1, 2, \ldots, k\}$ обозначим через B_i внутренность шара D_i. Таким образом, каждое B_i – это топологическое пространство, гомеоморфное n-мерному открытому евклидовому шару. Отображение проекции на факторпространство сужается до отображения

$$\pi\,|_{B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_k} : B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_k \to X,$$

которое задает хаусдорфову компактификацию топологического пространства $B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_k$. Мы будем называть такую компактификацию *клеточной компактификацией*.

Предложение 8. *Пусть αA – клеточная компактификация несвязной суммы n-мерных открытых евклидовых шаров*

$$A = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_k.$$

Тогда пространство развертки $\alpha^{\times} A$ компактификации αA совпадает с несвязной суммой $D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_k$ n-мерных замкнутых евклидовых шаров из конструкции клеточной компактификации. При этом отображение $A \to \alpha^{\times} A$ индуцировано отождествлениями $B_i = \mathrm{Int}(D_i)$ для каждого i из $\{1, 2, \ldots, k\}$, а отображение $\varphi \colon \alpha^{\times} A \to \alpha A$ совпадает с отображением проекции на факторпространство.

$$
\begin{tikzcd}
 & & D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_k \arrow[d, equal] \\
 & & \alpha^{\text{✂}} A \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_k \arrow[r, equal] & A \arrow[ur, hook, dashed] \arrow[r, hook] & \alpha A \arrow[d, equal] \\
 & & (D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_k)/\sim .
\end{tikzcd}
$$

Рис. 6. Иллюстрация к предложению 8.

Доказательство. Заметим, что подпространство A предельно локально связно в несвязном объединении $D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_k$. Из предложения 5 следует, что компактификация $D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_k$ пространства A совершенна. Утверждение предложения следует из леммы об обратном проектировании 14. $\square$

Список литературы

1. D. Baboolal, *Locally connected compactifications.* — Topology Appl. **40**, No. 1 (1991) 23–43.
2. E. F. Collingwood, A. J. Lohwater, *The theory of cluster sets.* Cambridge Tracts in Mathematics **56**, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
3. R. Engelking, *General Topology.* Sigma Series in Pure Mathematics **6**, Heldermann, Berlin, 1989.
4. H. Freudenthal, *Neuaufbau der Endentheorie.* — Ann. of Math. **43**, No. 2 (1942) 261–279.
5. H. Freudenthal, *Kompaktisierungen und Bikompaktisierungen.* — Indag. Math. (Proceedings) **54** (1951) 184–192.
6. A. Kolmogoroff, *Über offene Abbildungen.* — Ann. of Math. **38**, No. 1 (1937) 36–38.
7. O. Maslyuchenko, D. Onypa, *The cluster sets of continuous functions.* — Matematychni Studii **46**, No. 1 (2016) 44–50.
8. J. R. Munkres, *Topology.* 2nd ed., Pearson, New York, 2018.
9. G. Nordo, *A basic approach to the perfect extensions of spaces.* — Comment. Math. Univ. Carolin. **38** (1997) 571–580.
10. F. Raymond, *The end point compactification of manifolds.* — Pacific J. Math. **10**, No. 3 (1960) 947–963.
11. П. С. Александров, Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности.* Наука, 1973.
12. А. В. Зарелуа, *Топологическое и когомологическое строение нульмерных отображений.* — Тр. МИАН **247** (2004) 74–94.
13. Л. В. Келдыш, *Непрерывное отображение сегмента на n-мерный куб.* — Матем. сбор. **28 (70)**, No. 2 (1951) 407–430.

14. Л. В. Келдыш, *Нульмерные отображения, повышающие размерность.* — Матем. сбор. **28 (70)**, No. 3 (1951) 537–566.
15. Е. Г. Скляренко, *О совершенных бикомпактных расширениях.* — Докл. АН СССР **137**, No. 1 (1961) 39–41.
16. А. Д. Тайманов, *О распространении непрерывных отображений топологических пространств.* — Матем. сбор. **73**, No. 2 (1952) 459–463.

Aksenova D. D., Ionin V. A., Malyutin A. V. The Sklyarenko–Freudenthal resolution of a compactification of topological space and extension of mappings.

The paper investigates the structure of upper cones in the semilattice of Hausdorff compactifications of a topological space. For each compactification αA of A, there exists a unique perfect compactification γA that projects onto αA via a light map. This compactification γA is called the resolution (in the sense of Sklyarenko–Freudenthal) of αA. Two characterizations of the resolution are given: it is the minimal one among perfect compactifications that project onto αA, and the maximal one that projects onto αA via a light map. It is shown that the concept of resolution is a simultaneous generalization of the Freudenthal compactification and the unfolding of a manifold that is glued from polyhedra.

Additionally, properties of cluster sets of continuous mappings at points of a perfect extension of a given space are studied, and a sufficient condition for the existence of a continuous extension of a mapping is established. It is shown that any autohomeomorphism of the space that extends to an autohomeomorphism of some compactification, also extends to an autohomeomorphism of the resolution of this compactification.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: daria.aksenova12@gmail.com

Поступило 18 декабря 2025 г.

E-mail: ionin.code@gmail.com

E-mail: malyutin@pdmi.ras.ru