

К. Л. Малышев

ОТ КВАНТОВЫХ СПИНОВ К ПРОИЗВОДЯЩИМ  
ФУНКЦИЯМ ПЛОСКИХ РАЗБИЕНИЙ И  
СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Посвящается Н. М. Боголюбову,  
соавтору и моему многолетнему *гуру*  
в интегрируемости и комбинаторике,  
по случаю 75-летнего юбилея

§1. ВВЕДЕНИЕ

Теория *случайных блужданий*, как одно из классических направлений перечислительной комбинаторики [1], успешно применяется в квантовых вычислениях [2], в анализе колебаний цен [3], в биологии [4] и психологии [5], в теории самоорганизованной критичности [6]. Случайные блуждания имеют тесные связи с теорией вероятности и статистической физикой, а также с задачами о плоских разбиениях, с теорией случайных матриц и с симметрическими функциями [7–14].

В работе [15] была продемонстрирована связь квантовой интегрируемой модели бозонного типа с плоскими разбиениями в ящике. В [16, 17] было предложено интерпретировать случайные шаги в модели со случайными поворотами как переходы между состояниями спин “вверх” и спин “вниз”, описываемыми периодической ХХ спиновой моделью Гейзенберга.

В свою очередь, ХХ спиновая модель Гейзенберга [18, 19] связана с рядом задач теоретической физики, такими как низкоэнергетическая квантовая хромодинамика [20] и возможность фазового перехода третьего рода в спиновых цепочках [21]. Она также связана с симметрическими функциями и плоскими разбиениями (трёхмерными диаграммами Юнга), которые имеют отношение к широкому кругу задач, [22–26].

---

*Ключевые слова:* производящая функция, квантовые спины, плоские разбиения, случайные блуждания.

Проявления в перечислительной комбинаторике таких температурных корреляционных функций, как выживание ферромагнитной струны и доменной стенки, были рассмотрены в [27] для случая XX модели на периодической цепочке. Перечисление случайных блужданий недружественных пешеходов было изучено в [28]. Связь между XX спиновой цепочкой Гейзенберга и некоторыми аспектами перечислительной комбинаторики рассмотрена в [29]: проведен комбинаторный вывод динамических автокорреляционных функций совместно с их визуализацией в терминах пучков (*nests*) самоизбегающих решеточных путей. Асимптотики автокорреляционных функций получены в двойном скейлинговом пределе. В работе [30] изучается связь между XX моделью Гейзенберга на полубесконечной цепочке и моделированием случайных блужданий, ограниченных непроницаемой стенкой.

Настоящая работа следует [26] и [27]. Она посвящена исследованию асимптотического поведения выживания ферромагнитной струны при низких температурах и производящей функции пучков самоизбегающих решёточных путей для блужданий при большом числе шагов. Показана связь с производящей функцией строгих по столбцам плоских разбиений в ящике, а также приведены соответствующие предельные выражения как при низких температурах, так и при большом числе шагов.

Организация работы следующая. После вводного §1, в §2 кратко представлена XX модель Гейзенберга на периодической цепочке. В §3 вводится корреляционная функция выживания ферромагнитной струны и производящая функция пучков самоизбегающих решёточных путей. В §4 исследуется асимптотическое поведение выживания ферромагнитной струны при низких температурах и производящей функции пучков самоизбегающих решёточных путей случайных блужданий при большом числе шагов. Показана связь с  $q$ -параметризованной производящей функцией строгих по столбцам плоских разбиений в ящике, а также получены соответствующие предельные выражения как при низких температурах, так и при большом числе шагов. §5 завершает статью.

## §2. XX МОДЕЛЬ ГЕЙЗЕНБЕРГА

**2.1. Алгебраические замечания.** Напомним, что *строгое разбиение*  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$  состоит из элементов  $\mu_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , называемых *частями*, которые удовлетворяют

$$M \geq \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N \geq 0. \quad (1)$$

Частным случаем (1) оказывается “лестничное” разбиение

$$\delta_N \equiv (N-1, N-2, \dots, 1, 0). \quad (2)$$

Определение (2) позволяет ввести разбиение  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ , состоящее из невозрастающих неотрицательных целых чисел:

$$\mathcal{M} \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0, \quad \mathcal{M} \equiv M - N + 1. \quad (3)$$

Связь между частями  $\lambda$  и  $\mu$  выражается как  $\lambda = \mu - \delta_N$ , где  $\delta_N$  задаётся в (2), то есть

$$\lambda_j = \mu_j + j - N, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (4)$$

*Объёмом* разбиения, например  $\lambda$ , называется сумма его частей:  $|\lambda| \equiv \sum_{i=1}^N \lambda_i$ . Объёмы  $\mu$  и  $\lambda$  связаны соотношением:  $|\mu| = |\lambda| + \frac{N}{2}(N-1)$ .

**2.2. Состояния.** Рассмотрим квантовую цепочку взаимодействующих полуцелых спинов, состоящую из  $M+1$  узла. Спиновые состояния, спин “вверх”  $|\uparrow\rangle_n$  и спин “вниз”  $|\downarrow\rangle_n$ , определены на  $n$ -ом узле,  $n \in \mathbb{M} \equiv \{0, 1, \dots, M\}$ . Пусть два оператора  $q_n$  и  $\bar{q}_n$  представляют собой локальные проекторы, удовлетворяющие условиям:

$$q_n |\downarrow\rangle_n = |\downarrow\rangle_n, \quad q_n |\uparrow\rangle_n = 0, \quad \bar{q}_n |\uparrow\rangle_n = |\uparrow\rangle_n, \quad \bar{q}_n |\downarrow\rangle_n = 0. \quad (5)$$

Введём локальные спиновые операторы  $\sigma_n^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y)$  и  $\sigma_n^z$ , зависящие от решёточного аргумента  $n \in \mathbb{M}$  и действующие в пространстве состояний  $\mathfrak{H}_{M+1} \equiv (\mathbb{C}^2)^{\otimes(M+1)}$ . Спиновые операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$[\sigma_k^+, \sigma_l^-] = \delta_{kl} \sigma_l^z, \quad [\sigma_k^z, \sigma_l^\pm] = \pm 2\delta_{kl} \sigma_l^\pm.$$

Благодаря определению состояний спин “вверх”,  $|\uparrow\rangle_n \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_n$ , и спин “вниз”,  $|\downarrow\rangle_n \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_n$ , операторы  $\sigma_n^\pm$  действуют как повышающий/понижающий операторы:

$$\sigma_n^+ |\downarrow\rangle_n = |\uparrow\rangle_n, \quad \sigma_n^- |\uparrow\rangle_n = |\downarrow\rangle_n, \quad \sigma_n^- |\downarrow\rangle_n = \sigma_n^+ |\uparrow\rangle_n = 0. \quad (6)$$

Из (6) следует, что соотношения (5) выполняются в силу определений

$$q_n \equiv \sigma_n^- \sigma_n^+ = \frac{1}{2}(1 - \sigma_n^z), \quad \bar{q}_n \equiv \sigma_n^+ \sigma_n^- = \frac{1}{2}(1 + \sigma_n^z). \quad (7)$$

Произвольное состояние  $|\mu\rangle$ , соответствующее  $N$  опрокинутым спинам, и сопряжённое состояние  $\langle\nu|$  определяются как

$$|\mu\rangle \equiv \left( \prod_{k=1}^N \sigma_{\mu_k}^- \right) |\uparrow\rangle, \quad \langle\nu| \equiv \langle\uparrow| \left( \prod_{k=1}^N \sigma_{\nu_k}^+ \right), \quad (8)$$

где  $|\uparrow\rangle \equiv \bigotimes_{n=0}^M |\uparrow\rangle_n$ , а операторы  $\sigma_n^\pm$  действуют на  $|\uparrow\rangle_n$  и  $|\downarrow\rangle_n$  в соответствии с (6). Строгое разбиение  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$  (1) отвечает цепочке спинов, характеризуемой  $N$  опрокинутыми спинами на узлах, заданных частями  $\mu_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Состояния (8) образуют полный ортогональный базис:

$$\langle\nu|\mu\rangle = \delta_{\nu\mu} \equiv \prod_{n=1}^N \delta_{\nu_n \mu_n}. \quad (9)$$

Будем рассматривать  $N$ -частичные векторы состояний как линейные комбинации векторов  $|\mu\rangle$  (8), [25, 27]:

$$|\Psi(\mathbf{u}_N)\rangle \equiv \sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{M}^N\}} S_\lambda(\mathbf{u}_N^2) |\lambda + \delta_N\rangle, \quad (10)$$

где суммирование идет по разбиениям  $\lambda = \mu - \delta_N$ , удовлетворяющим (3). Коэффициенты в (10) выражаются через *многочлены Шура*  $S_\lambda$ , определённые соотношением [1]:

$$S_\lambda(\mathbf{x}_N) \equiv S_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \frac{\det(x_j^{\lambda_k + N - k})_{1 \leq j, k \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{x}_N)}, \quad (11)$$

где  $\mathcal{V}(\mathbf{x}_N)$  — определитель Вандермонда:

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_N) \equiv \det(x_j^{N-k})_{1 \leq j, k \leq N} = \prod_{1 \leq m < l \leq N} (x_m - x_l). \quad (12)$$

Жирным шрифтом в (10) (и далее) обозначены  $N$ -наборы типа  $\mathbf{u}^2 \equiv (u_1^2, u_2^2, \dots, u_N^2)$  (или  $\mathbf{u}_N^2$ , чтобы указать число элементов).

Векторы состояния сопряжённые к (10) определяются как

$$\langle\Psi(\mathbf{v}_N)| = \sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{M}^N\}} \langle\lambda + \delta_N| S_\lambda(\mathbf{v}_N^{-2}), \quad (13)$$

и скалярное произведение (10) и (13) имеет вид:

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \Psi(\mathbf{u}_N) \rangle = \sum_{\lambda \subseteq \{\mathcal{M}^N\}} S_\lambda(\mathbf{v}_N^{-2}) S_\lambda(\mathbf{u}_N^2). \quad (14)$$

Правая часть (14) вычисляется с помощью формулы Бине–Копи, записанной через многочлены Шура [31]:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{L/n}(\mathbf{y}_N, \mathbf{x}_N) &\equiv \sum_{\lambda \subseteq \{(L/n)^N\}} S_\lambda(\mathbf{y}_N) S_\lambda(\mathbf{x}_N) \\ &= \left( \prod_{l=1}^N y_l^n x_l^n \right) \frac{\det(T_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}}{\mathcal{V}(\mathbf{y}_N) \mathcal{V}(\mathbf{x}_N)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где суммирование проводится по всем разбиениям  $\lambda$  вида

$$L \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq n. \quad (16)$$

Определитель Вандермонда (12) используется в (15), а матричные элементы  $T_{kj}$  имеют вид:

$$T_{kj} = \frac{1 - (x_k y_j)^{N+L-n}}{1 - x_k y_j}. \quad (17)$$

Выражение для скалярного произведения (14) следует из (15) и (16):

$$\langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \Psi(\mathbf{u}_N) \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}(\mathbf{v}_N^{-2}) \mathcal{V}(\mathbf{u}_N^2)} \det \left( \frac{1 - (u_i/v_j)^{2(M+1)}}{1 - (u_i/v_j)^2} \right)_{1 \leq i, j \leq N}. \quad (18)$$

**2.3. Гамильтониан XX модели.** Гамильтониан XX спиновой модели Гейзенберга имеет вид:

$$\mathcal{H} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{n,m=0}^M \Delta_{nm} \sigma_n^+ \sigma_m^-, \quad (19)$$

где коэффициенты  $\Delta_{nm}$  задаются как

$$\Delta_{nm} \equiv \delta_{|n-m|,1} + \delta_{|n-m|,M}, \quad (20)$$

а  $\delta_{n,l} (\equiv \delta_{nl})$  есть символ Кронекера. Число узлов  $M+1 \equiv 0 \pmod{2}$ , и наложены периодические граничные условия  $\sigma_{n+(M+1)}^{\pm, z} = \sigma_n^{\pm, z}$ ,  $\forall n \in \mathbb{M}$ .

Если параметры  $u_j^2 \equiv e^{i\theta_j}$  ( $1 \leq j \leq N$ ) удовлетворяют уравнениям Бете,

$$e^{i(M+1)\theta_j} = (-1)^{N-1}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (21)$$

то векторы состояний (10) становятся собственными состояниями  $\mathcal{H}$  (19):

$$\mathcal{H} |\Psi(e^{i\theta_N/2})\rangle = E_N(\theta_N) |\Psi(e^{i\theta_N/2})\rangle. \quad (22)$$

Векторы состояния (10) и (13), параметризованные произвольными параметрами  $\mathbf{u}_N^2$ , образуют состояния *off-shell*, в терминологии [32, 33] (иными словами, “вне массовой поверхности”).

Обозначение  $\theta_N$  для  $N$ -набора  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$  используется для решений уравнений Бете (21), а также  $e^{i\theta_N} \equiv (e^{\theta_1}, e^{\theta_2}, \dots, e^{\theta_N})$ . Решения  $\theta_j$  уравнений Бете (21) можно параметризовать следующим образом:

$$\theta_j = \frac{2\pi}{M+1} \left( I_j - \frac{N-1}{2} \right), \quad 1 \leq j \leq N, \quad (23)$$

где  $I_j$  — целые или полуцелые числа в зависимости от того, нечётно или чётно  $N$ . Достаточно рассматривать набор из  $N$  различных чисел  $I_j$ , удовлетворяющих  $M \geq I_1 > I_2 > \dots > I_N \geq 0$ .

Собственные значения энергии в (22) равны

$$E_N(\theta_N) = - \sum_{j=1}^N \cos \theta_j = - \sum_{j=1}^N \cos \left( \frac{2\pi}{M+1} \left( I_j - \frac{N-1}{2} \right) \right). \quad (24)$$

*Основное состояние* модели — это собственное состояние, соответствующее наименьшей собственной энергии  $E_N(\theta_N^g)$ . Оно определяется решением уравнений Бете (23) при  $I_j = N - j$ :

$$\theta_j^g \equiv \frac{2\pi}{M+1} \left( \frac{N+1}{2} - j \right), \quad 1 \leq j \leq N. \quad (25)$$

### §3. ВЫЖИВАНИЕ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СТРУНЫ И АМПЛИТУДА ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕХОДА

**3.1. Выживание ферромагнитной струны.** Рассмотрим температурную корреляционную функцию состояний, в которых отсутствуют возбуждения на  $n$  последовательных узлах. Эта величина называется *выживанием ферромагнитной струны*:

$$\mathcal{T}(\theta_N^g, n, \beta) \equiv \frac{\langle \Psi(e^{i\theta_N^g/2}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta\mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi(e^{i\theta_N^g/2}) \rangle}{\langle \Psi(e^{i\theta_N^g/2}) | e^{-\beta\mathcal{H}} | \Psi(e^{i\theta_N^g/2}) \rangle}. \quad (26)$$

Проектор

$$\bar{\Pi}_n \equiv \prod_{j=0}^{n-1} \bar{\mathbf{q}}_j \quad (27)$$

в выражении (26) запрещает состояния со спином “вниз” на  $n$  последовательных узлах. Кроме того,  $\bar{q}_n$ ,  $\mathcal{H}$  и  $\theta_N^g$  определены в (5), (19) и (25), соответственно, а  $\beta \in \mathbb{C}$ . Некоторые результаты, касающиеся корреляционной функции (26), приведены в [27].

Напомним, что выживание ферромагнитной струны связано с моделью *недружественных пешеходов* в модели *блужданий со случайными поворотами* [6, 7] (см. также [25]). Задача перечисления блужданий недружественных пешеходов активно исследуется (см. ссылки в [27]). Случайные блуждания по одномерной периодической решётке тесно связаны с корреляционными функциями XX-магнетика [16, 17, 34].

Учитывая (10), (13), (27), получаем выражение для *off-shell* матричного элемента, который параметризуется произвольными  $\mathbf{u}_N$  и  $\mathbf{v}_N$ , [25, 34]:

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi(\mathbf{u}_N) \rangle \\ &= \sum_{\boldsymbol{\lambda}^L, \boldsymbol{\lambda}^R \subseteq \{(\mathcal{M}/n)^N\}} S_{\boldsymbol{\lambda}^L}(\mathbf{v}_N^{-2}) S_{\boldsymbol{\lambda}^R}(\mathbf{u}_N^2) G_{\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R}(\beta). \end{aligned} \quad (28)$$

Область двух независимых суммирований по  $\boldsymbol{\lambda}^L$  и  $\boldsymbol{\lambda}^R$  определяется в (16), а  $\boldsymbol{\mu}^{L,R} = \boldsymbol{\lambda}^{L,R} + \boldsymbol{\delta}_N$  обозначают соответствующие строгие разбиения. Матричный элемент (28) выражается через *амплитуду перехода*  $G_{\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R}(\beta)$  между состояниями (8):

$$G_{\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R}(\beta) \equiv \langle \boldsymbol{\mu}^L | e^{-\beta \mathcal{H}} | \boldsymbol{\mu}^R \rangle, \quad (29)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\beta} G_{\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R}(\beta) = \sum_{k=1}^N (G_{\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R + \mathbf{e}_k}(\beta) + G_{\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R - \mathbf{e}_k}(\beta)), \quad (30)$$

где  $\mathbf{e}_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , это  $N$ -наборы, состоящие из нулей, за исключением единицы на  $k$ -ом месте (допустим, слева). Амплитуда (29) связана с перечислением блужданий  $N$  недружественных пешеходов, движущихся по узлам одномерной решётки [16, 17, 26, 34].

Амплитуда перехода (29), как решение уравнения (30), выражается через функции Шура (11) и определитель Вандермонда (12), [25]:

$$\begin{aligned} G_{\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R}(\beta) &= \frac{1}{(M+1)^N} \sum_{\{\boldsymbol{\phi}_N\}} e^{-\beta E_N(\boldsymbol{\phi}_N)} \\ &\times |\mathcal{V}(e^{i\boldsymbol{\phi}_N})|^2 S_{\boldsymbol{\lambda}^L}(e^{i\boldsymbol{\phi}_N}) S_{\boldsymbol{\lambda}^R}(e^{-i\boldsymbol{\phi}_N}), \end{aligned} \quad (31)$$

где суммирование проводится по  $N$ -наборам  $\phi_N \equiv (\phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \dots, \phi_{k_N})$ , индексируемым целыми  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , удовлетворяющими  $M \geq k_1 > k_2 > \dots > k_N \geq 0$ . Энергия  $E_N(\phi_N)$  определяется выражением (24). Различные детерминантные представления для  $G_{\mu^L; \mu^R}(\beta)$  (29) обсуждаются в [28, 29]. Детерминантные формулы для вероятностей перехода  $N$  частиц уже давно известны в теории вероятностей и комбинаторике [35, 36] и продолжают вызывать интерес.

Представление (28) позволяет выразить (26) в терминах  $G_{\mu^L; \mu^R}(\beta)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\theta_N^g, n, \beta) &= \frac{e^{\beta E_N(\theta_N^g)}}{\mathcal{N}^2(\theta_N^g)} \sum_{\lambda^L, \lambda^R \subseteq \{(\mathcal{M}/n)^N\}} \\ &\quad \times S_{\lambda^L}(e^{-i\theta_N^g}) S_{\lambda^R}(e^{i\theta_N^g}) G_{\mu^L; \mu^R}(\beta), \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\mathcal{N}^2(\theta_N^g) \equiv \langle \Psi(e^{i\theta_N^g}) | \Psi(e^{i\theta_N^g}) \rangle$  это норма основного состояния в параметризации (25).

Подставляя (31) в (28) и используя (15), получаем [27, 34]:

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\mathbf{v}_N) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi(\mathbf{u}_N) \rangle &= \frac{1}{(M+1)^N} \sum_{\{\phi_N\}} e^{-\beta E_N(\phi_N)} \\ &\quad \times |\mathcal{V}(e^{i\phi_N})|^2 \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{v}_N^{-2}, e^{i\phi_N}) \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{-i\phi_N}, \mathbf{u}_N^2). \end{aligned} \quad (33)$$

Следовательно, (33) приводит к другому представлению  $\mathcal{T}(\theta_N^g, n, \beta)$  (26), эквивалентному (32):

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\theta_N^g, n, \beta) &= \frac{1}{\mathcal{N}^2(\theta_N^g)(M+1)^N} \sum_{\{\theta_N\}} e^{-\beta(E_N(\theta_N) - E_N(\theta_N^g))} \\ &\quad \times |\mathcal{V}(e^{i\theta_N}) \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{-i\theta_N}, e^{i\theta_N^g})|^2, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{-i\theta_N}, e^{i\theta_N^g})$  это выражение (15) на решениях (21) и (25), [25].

**3.2. Амплитуда дискретного перехода.** Рассмотрим также нормированный матричный элемент производящего экспоненциального оператора над бетовскими состояниями, параметризованными решением для основного состояния (25):

$$\langle \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n \rangle_N \equiv \frac{\langle \Psi(e^{i\theta_N^g/2}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \mathcal{H}} \bar{\Pi}_n | \Psi(e^{i\theta_N^g/2}) \rangle}{\mathcal{N}^2(e^{i\theta_N^g/2})}, \quad (35)$$

где  $N$ -набор  $e^{i\theta_N^g/2} = (e^{i\theta_1^g/2}, e^{i\theta_2^g/2}, \dots, e^{i\theta_N^g/2})$  определяется подстановкой  $v_j = u_j \equiv e^{i\theta_j^g/2}$  ( $1 \leq j \leq N$ ). Нормированный форм-фактор

ферромагнитной струны (то есть форм-фактор  $\bar{\Pi}_n$  (27)) возникает из (35) при  $\beta \rightarrow 0$ , и его детерминантное представление обсуждается в [27].

Обратимся к амплитуде дискретного перехода  $\langle \bar{\Pi}_n (-2\mathcal{H})^K \bar{\Pi}_n \rangle_N$ ,

$$\langle \bar{\Pi}_n (-2\mathcal{H})^K \bar{\Pi}_n \rangle_N = \mathcal{D}_{\beta/2}^K \langle \bar{\Pi}_n e^{-\beta\mathcal{H}} \bar{\Pi}_n \rangle_N, \quad (36)$$

где  $\mathcal{D}_{\ell}^K$  обозначает дифференцирование  $K$ -ого порядка по  $\ell$  при  $\ell = 0$ . В явном виде:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Pi}_n (-2\mathcal{H})^K \bar{\Pi}_n \rangle_N &= \frac{1}{\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\theta}_N^g)(M+1)^N} \sum_{\{\boldsymbol{\theta}_N\}} \left(2 \cos(\boldsymbol{\theta}_N)\right)^K \\ &\times |\mathcal{V}(e^{i\boldsymbol{\theta}_N}) \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{-i\boldsymbol{\theta}_N}, e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g})|^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Амплитуда перехода (37) может быть записана в обозначениях работы [26]:

$$\langle \bar{\Pi}_n (-2\mathcal{H})^K \bar{\Pi}_n \rangle_N = \frac{\mathfrak{P}(e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g/2}; e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g/2} | K)}{\mathcal{N}^2(e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g/2})}, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g/2}; e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g/2} | K) &= \sum_{\boldsymbol{\lambda}^L, \boldsymbol{\lambda}^R \subseteq \{(\mathcal{M}/n)^N\}} S_{\boldsymbol{\lambda}^L}(e^{-i\boldsymbol{\theta}_N^g/2}) \\ &\times S_{\boldsymbol{\lambda}^R}(e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g/2}) \mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | K). \end{aligned} \quad (39)$$

В свою очередь,  $\mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | K)$  получается следующим образом. Действуя оператором  $\mathcal{D}_{\beta/2}^K$  на  $G_{\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R}(\beta)$  (29), получаем матричный элемент  $K$ -ой степени гамильтониана:

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | K) \equiv \mathcal{D}_{\beta/2}^K G_{\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R}(\beta) = \langle \boldsymbol{\mu}^L | (-2\mathcal{H})^K | \boldsymbol{\mu}^R \rangle, \quad (40)$$

то есть в явном виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | K) &= \frac{1}{(M+1)^N} \sum_{\{\boldsymbol{\phi}_N\}} \left(2 \sum_{m=1}^N \cos \phi_m\right)^K \\ &\times |\mathcal{V}(e^{i\boldsymbol{\phi}_N})|^2 S_{\boldsymbol{\lambda}^L}(e^{i\boldsymbol{\phi}_N}) S_{\boldsymbol{\lambda}^R}(e^{-i\boldsymbol{\phi}_N}). \end{aligned} \quad (41)$$

Представление (41) удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | K+1) = \sum_{k=1}^N (\mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R + \mathbf{e}_k | K) + \mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R - \mathbf{e}_k | K)), \quad (42)$$

где  $N$ -наборы  $\mathbf{e}_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , состоят из нулей, кроме единицы на  $k$ -ой позиции. Уравнение (42) снабжено начальными условиями  $\mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | 0) = \delta_{\boldsymbol{\mu}^L \boldsymbol{\mu}^R}$ , а также условиями периодичности и отсутствия самопересечения.

Рассмотрим теперь решёточные пути блужданий со случайными поворотами  $N$  недружественных пешеходов с начальными и конечными положениями, заданными строгими разбиениями  $\boldsymbol{\mu}^L$  и  $\boldsymbol{\mu}^R$ , соответственно. Пусть  $|P_K(\boldsymbol{\mu}^L \rightarrow \boldsymbol{\mu}^R)|$  есть соответствующее количество пучков путей для числа шагов  $K$ .

С учетом параметризации (25), замена  $e^{i\theta_N^g} \mapsto 1$  допустима при  $M \gg N$ , и из (39) получаем:

$$\mathfrak{P}(\mathbf{1}_N; \mathbf{1}_N | K) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}^L, \boldsymbol{\lambda}^R \subseteq \{(\mathcal{M}/n)^N\}} S_{\boldsymbol{\lambda}^L}(\mathbf{1}_N) S_{\boldsymbol{\lambda}^R}(\mathbf{1}_N) |P_K(\boldsymbol{\mu}^L \rightarrow \boldsymbol{\mu}^R)|, \quad (43)$$

где  $|P_K(\boldsymbol{\mu}^L \rightarrow \boldsymbol{\mu}^R)|$  характеризуется следующим предложением.

**Предложение 1:** Амплитуда  $\mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | K)$  (41), являющаяся решением (42), и число пучков решёточных путей без самопересечений  $N$  недружественных пешеходов со случайными поворотами  $|P_K(\boldsymbol{\mu}^L \rightarrow \boldsymbol{\mu}^R)|$  связаны посредством обобщённого тождества Рамуса, [26]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | K) &= |P_K(\boldsymbol{\mu}^L \rightarrow \boldsymbol{\mu}^R)| \\ &= \sum_{|\mathbf{n}|=K} P(\mathbf{n}) \det((\Delta^{n_j})_{\mu_j^L; \mu_j^R})_{1 \leq i, j \leq N}, \end{aligned} \quad (44)$$

где  $K$  число шагов,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ ,  $|\mathbf{n}| = \sum_{i=1}^N n_i$  и  $P(\mathbf{n})$  — мультипомиальный коэффициент

$$P(\mathbf{n}) \equiv \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_N)!}{n_1! n_2! \dots n_N!}.$$

Кроме того, элемент  $(\Delta^K)_{jm}$  определяется как

$$\mathfrak{G}(j, m | K) = \langle \uparrow \uparrow | \sigma_j^+ (-2\mathcal{H})^K \sigma_m^- | \uparrow \uparrow \rangle = (\Delta^K)_{jm},$$

где  $(\Delta^K)_{jm}$  это матричный элемент матрицы  $\Delta$  в степени  $K$ , удовлетворяющей

$$(\Delta^{K+1})_{jm} = (\Delta^K)_{j, m+1} + (\Delta^K)_{j, m-1}.$$

Начальное условие выполняется, поскольку  $\mathfrak{G}(j, m | 0)$  есть символ Кронекера  $\delta_{jm}$ . Периодичность также согласуется с циркулянтной матрицей (20), и  $(\Delta^0)_{jm} = \delta_{jm}$ .

Амплитуда  $\mathfrak{P}(\mathbf{1}_N; \mathbf{1}_N | K)$  (43) перечисляет составные пути, показанные на Рисунке 1. Действительно, множитель  $S_{\lambda^L}(\mathbf{1}_N)$  в (43) соотв-

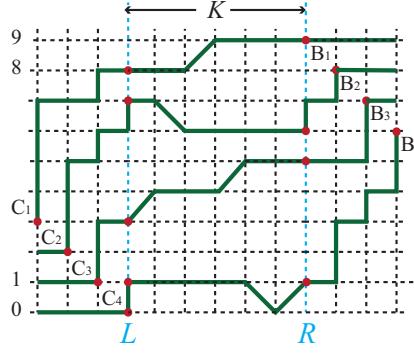


Рис. 1. Пучок  $N = 4$  путей для  $K = 6$  шагов как элемент  $\langle \Psi(\mathbf{1}_N) | \bar{\Pi}_1 (-2\mathcal{H})^K \bar{\Pi}_1 | \Psi(\mathbf{1}_N) \rangle$ .

ствует пучкам  $\mathcal{C}$  путей блужданий с ограниченными поворотами из точек  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , в узлы, пронумерованные частями  $\mu^L$ . В соотношении (43) вклад  $|P_K(\mu^L \rightarrow \mu^R)|$  соответствует блужданиям  $N$  пешеходов со случайными поворотами между узлами, пронумерованными частями разбиений  $\mu^L$  и  $\mu^R$ . Множитель  $S_{\lambda^R}(\mathbf{1}_N)$  отвечает *сопряжённому* пучку  $\mathcal{B}$  блужданий из  $\mu^R$  в  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  (см. [25] для описания  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{B}$ ). Таким образом, (43) показывает, что матричный элемент  $\mathfrak{P}(e^{i\theta_N^g/2}; e^{i\theta_N^g/2} | K)$ , (39), над бетовским состоянием *on-shell* является производящей функцией пучков самоизбегающих путей типа, представленного на рис. 1.

Следовательно, представление (38) для амплитуды дискретного перехода  $\langle \bar{\Pi}_n (-2\mathcal{H})^K \bar{\Pi}_n \rangle_N$  (37) связано с  $\mathfrak{P}(\mathbf{1}_N; \mathbf{1}_N | K)$ , то есть с числом самоизбегающих решёточных траекторий (см. рис. 1) блужданий из  $K$  шагов на цепочке из  $M+1$  узлов. Возбуждения на  $n$  последовательных узлах запрещены благодаря проекторам  $\bar{\Pi}_n$ .

В частном случае  $\mu^L = \mu^R = \delta_N$ , где  $\delta_N$  определяется формулой (2), представление в виде ряда для числа пучков  $|P_K(\delta_N \rightarrow \delta_N)|$

(41) имеет вид

$$\mathfrak{G}(\delta_N; \delta_N | K) = \frac{1}{(M+1)^N} \sum_{\{\phi_N\}} \left( 2 \sum_{m=1}^N \cos \phi_m \right)^K |\mathcal{V}(e^{i\phi_N})|^2, \quad (45)$$

так как  $\lambda^L = \lambda^R = (0, 0, \dots, 0)$  и, следовательно,

$$S_{(0,0,\dots,0)}(e^{i\phi_N}) = S_{(0,0,\dots,0)}(e^{-i\phi_N}) = 1.$$

При условии  $M \gg N$ , уравнения (44) и (45) (см. **Предложение 1**) дают число траекторий без самопересечений  $N$  пешеходов блуждающих со случайными поворотами, которые изначально находятся в точках  $\delta_N$  и возвращаются в исходное положение после  $K$  шагов на достаточно длинной цепи ( $M \gg 1$ ), [26]:

$$\sum_{|\mathbf{n}|=K} P(\mathbf{n}) \det \left( \left( \frac{n_j}{\frac{n_j+j-i}{2}} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq N} = 2^K \mathcal{J}(K, N), \quad (46)$$

где элементы матрицы в (46) равны нулю, если  $n_j$  и  $|i - j|$  имеют разную чётность. Более того, если  $n_j$  обращается в нуль при некотором  $j$ , то соответствующий элемент матрицы равен символу Кронекера  $\delta_{ij}$ . Интеграл  $\mathcal{J}(K, N)$  в (46) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(K, N) \equiv & \frac{1}{N!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{m=1}^N \cos \phi_m \right)^K \\ & \times |\mathcal{V}(e^{i\phi_N})|^2 \frac{d\phi_1 d\phi_2 \dots d\phi_N}{(2\pi)^N}, \end{aligned} \quad (47)$$

Интеграл  $\mathcal{J}(K, N)$  (47) обращается в нуль при нечётных  $K$  (то же справедливо для ряда в левой части (45)), тогда как при чётных  $K$  величина  $\mathcal{J}(K, N)$  связана с числом случайных перестановок множества  $\{1, \dots, \frac{K}{2}\}$ , содержащих не более  $N$  возрастающих подпоследовательностей [37, 38], а также с распределением длин наибольших возрастающих подпоследовательностей случайных перестановок множества  $\{1, \dots, \frac{K}{2}\}$  [39, 40]. Задача о наибольшей возрастающей подпоследовательности случайных перестановок связана со случайными унитарными матрицами [38], а более подробное обсуждение связи этой задачи с различными областями математики можно найти в [41]. Ряд (45) превращается в статистическую сумму Гросса—Виттена [42].

#### §4. Асимптотические оценки

**4.1. Выживание ферромагнитной струны.** Решение (31) может быть представлено в виде [43]:

$$G_{\mu; \nu}(\beta) = \frac{1}{(M+1)^N} \sum_{s_1, \dots, s_N=0}^M \times e^{\beta \sum_{m=1}^N \cos \phi_{s_m}} \det(e^{i(\mu_r - \nu_s) \phi_{s_r}})_{1 \leq r, s \leq N}, \quad (48)$$

где параметризация как в (31). Благодаря антисимметричности при перестановках  $\phi_1, \dots, \phi_N$ , суммируемое выражение в (48) преобразуется в произведение функций Шура (11), [17, 43]. Таким образом, приходим к (31).

Если суммирование заменить интегрированием при  $M \gg N \gg 1$ , то уравнение (48) имеет приближенный вид:

$$G_{\mu; \nu}(\beta) = e^{\beta N} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{\beta \sum_{m=1}^N (\cos \phi_{s_m} - 1)} \times \det(e^{i(\mu_r - \nu_s) \phi_r})_{1 \leq r, s \leq N} \frac{d\phi_1 d\phi_2 \dots d\phi_N}{(2\pi)^N}. \quad (49)$$

Благодаря замене при  $\beta \gg 1$ ,

$$e^{\beta \sum_{m=1}^N (\cos \phi_{s_m} - 1)} \mapsto e^{(-\beta/2) \sum_{m=1}^N \phi_m^2},$$

справедлива оценка интеграла в правой части (49):

$$G_{\mu; \nu}(\beta) \simeq \frac{e^{\beta N} e^{(|\mu|^2 + |\nu|^2)/(2\beta)}}{(2\pi\beta)^{N/2}} \det\left(\exp\left(\frac{\mu_r \nu_s}{\beta}\right)\right)_{1 \leq r, s \leq N}. \quad (50)$$

Зависимость (50) от частей  $\mu$  и  $\nu$  имеет сходство с зависимостью вероятности перехода между положениями, задаваемыми частями  $\mu$  и  $\nu$ , при броуновском движении  $N$  частиц, [44].

Введем сумму, параметризованную  $(M+1)$ -набором  
 $\mathbf{a}_{M+1} \equiv (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_M)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{v}_N^{-2}, \mathbf{u}_N^2, \mathbf{a}_{M+1}) \\ \equiv \sum_{\lambda \subseteq \{(\mathcal{M}/n)^N\}} S_{\lambda}(\mathbf{v}_N^{-2}) S_{\lambda}(\mathbf{u}_N^2) \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_{\mu_i}\right), \end{aligned} \quad (51)$$

где части  $\boldsymbol{\lambda}$  и  $\boldsymbol{\mu}$  связаны согласно (4). Кроме того, существует тождество:

$$\begin{aligned} \det(q^{\mu_r^L \mu_s^R})_{1 \leq r, s \leq N} &\equiv \det(q^{(\lambda_r^L + \delta_r)(\lambda_s^R + \delta_s)})_{1 \leq r, s \leq N} \\ &= S_{\boldsymbol{\lambda}^R}(\mathbf{x}) S_{\boldsymbol{\lambda}^L}(\mathbf{q}_N/q) \mathcal{V}(q^{N-1}, q^{N-2}, \dots, 1), \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$\mathbf{x}_N = (x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv (q^{\mu_1^L}, q^{\mu_2^L}, \dots, q^{\mu_N^L}), \quad (53)$$

$$\mathbf{q}_N/q \equiv (1, q, \dots, q^{N-1}), \quad q \in \mathbb{R}. \quad (54)$$

Конкретизируем  $q$  в (53), (54):

$$q = e^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{\beta}. \quad (55)$$

Положим в (51),  $e^{\alpha_n} \equiv q^{n^2}$ ,  $n \geq 0$ , где  $q$  определяется (55). Тогда получаем из (51) для  $\mathbf{a}_{M+1}^q \equiv \alpha(0, 1^2, 2^2, \dots, M^2)$ ,  $\alpha = \log q$ :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{v}_N^{-2}, \mathbf{u}_N^2, \mathbf{a}_{M+1}^q) \equiv \sum_{\boldsymbol{\lambda} \subseteq \{(\mathcal{M}/n)^N\}} q^{|\boldsymbol{\mu}|^2} S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}_N^{-2}) S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}_N^2). \quad (56)$$

Опираясь на  $\mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}$  (56), преобразуем (32) с использованием (50) и (52):

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}_N^g, n, \beta) &= \frac{e^{\beta(N + E_N(\boldsymbol{\theta}_N^g))}}{\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\theta}_N^g)} \times \frac{\mathcal{V}(q^{N-1}, q^{N-2}, \dots, 1)}{(2\pi\beta)^{N/2}} \\ &\times \mathcal{Z}(\boldsymbol{\theta}_N^g, \mathbf{q}_N/q). \end{aligned} \quad (57)$$

В представлении (57) введена сумма

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\boldsymbol{\theta}_N^g, \mathbf{q}_N/q) &\equiv \sum_{\boldsymbol{\lambda} \subseteq \{(\mathcal{M}/n)^N\}} \left( q^{|\boldsymbol{\mu}|^2/2} S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{q}_N/q) S_{\boldsymbol{\lambda}}(e^{-i\boldsymbol{\theta}_N^g}) \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g}, q^{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{a}_{M+1}^q/2) \right), \end{aligned} \quad (58)$$

где  $q^{\boldsymbol{\mu}} \equiv (q^{\mu_1}, q^{\mu_2}, \dots, q^{\mu_N})$ . Для  $\mathcal{Z}(\boldsymbol{\theta}_N^g, \mathbf{q}_N/q)$  (58) имеет место предел

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{Z}(\boldsymbol{\theta}_N^g, \mathbf{q}_N/q) = |\mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g}, \mathbf{1}_N)|^2, \quad (59)$$

где используется  $\mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\cdot, \cdot)$  (15) (например,  $\beta \rightarrow \infty$  в случае (55)).

Напомним интерпретацию форм-фактора ферромагнитной струны [25]. Определим *ящик*  $\mathcal{B}(L, N, P)$  размера  $L \times N \times P$  как множество узлов целочисленной решётки:

$$\mathcal{B}(L, N, P) = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid 0 \leq i \leq L, 0 \leq j \leq N, 0 \leq k \leq P\}.$$

Производящая функция  $Z_q^{\text{c spp}}(N, N, M - n)$  *плоских разбиений строк по столбцам* в ящике  $\mathcal{B}(N, N, M - n)$  с квадратным основанием  $N \times N$  и высотой  $M - n$  задается форм-фактором в  $q$ -параметризации:

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\mathbf{q}_N^{-\frac{1}{2}}) | \bar{\Pi}_n | \Psi((\mathbf{q}_N/q)^{\frac{1}{2}}) \rangle &= \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{q}_N, \mathbf{q}_N/q) \\ &= q^{nN^2} \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \frac{1 - q^{M-n+1+j-k}}{1 - q^{j+k-1}} \\ &= q^{\frac{N^2}{2}(2n+1-N)} Z_q^{\text{c spp}}(N, N, M - n). \end{aligned} \quad (60)$$

Соответствующее число плоских разбиений строгих по столбцам возникает при  $q \rightarrow 1$ , [25]:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{q}_N, \mathbf{q}_N/q) = \mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(\mathbf{1}_N, \mathbf{1}_N) = A^{\text{c spp}}(N, N, M - n), \quad (61)$$

где

$$A^{\text{c spp}}(N, N, P) = \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \frac{P + 1 + j - k}{j + k - 1}.$$

Согласно (59) и (61), представление  $\mathcal{Z}(\boldsymbol{\theta}_N^g, \mathbf{q}_N/q)$  (58) в термодинамическом пределе является производящей функцией чисел  $(A^{\text{c spp}}(N, N, M - n))^2$ , то есть квадратов чисел строгих по столбцам плоских разбиений в ящике.

Введем  $q$ -деформированную  $G$ -функцию Барнса:

$$G_q(N+1) \equiv \prod_{k=1}^N \Gamma_q(k), \quad (62)$$

где  $\Gamma_q(k)$  это  $q$ -гамма функция [45],

$$\Gamma_q(k) \equiv [1] [2] \cdots [k-1], \quad [k] \equiv \frac{1 - q^k}{1 - q}, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

С использованием (62) получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(q^{N-1}, q^{N-2}, \dots, 1) &= q^{\frac{N-1}{2}(N-2)} \\ &\times (q-1)^{\frac{N}{2}(N-1)} G_q(N+1). \end{aligned} \quad (63)$$

Окончательно, приходим к  $\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}_N^g, n, \beta)$  (57) при  $\alpha = \beta^{-1} \ll 1$  (см. (55)):

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}_N^g, n, \beta) \Big|_{\beta \gg 1} \simeq \frac{G(N+1)}{\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\theta}_N^g)(2\pi)^{N/2}} \frac{|\mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{i\boldsymbol{\theta}_N^g}, \mathbf{1}_N)|^2}{\beta^{N^2/2}}. \quad (64)$$

В (64) используется оценка для (63):

$$\mathcal{V}(q^{N-1}, q^{N-2}, \dots, 1) \Big|_{\beta \gg 1} \simeq \frac{G(N+1)}{\beta^{N(N-1)/2}}, \quad G(N+1) \equiv \prod_{k=1}^N \Gamma(k) \quad (65)$$

( $G(N+1)$  – функция Барнса [46]). Соотношение (64) согласуется с результатами [27].

**4.2. Амплитуда дискретного перехода.** Чтобы оценить (38), (39), перепишем (41) аналогично (48):

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | K) &= \frac{1}{(M+1)^N} \sum_{s_1, \dots, s_N=0}^M \left( 2 \sum_{m=1}^N \cos \phi_m \right)^K \\ &\times \det \left( e^{i(\mu_r^L - \mu_s^R) \phi_{s_r}} \right)_{1 \leq r, s \leq N}. \end{aligned} \quad (66)$$

Представление (66) согласуется с (45) при условии  $\boldsymbol{\mu}^L = \boldsymbol{\mu}^R = \boldsymbol{\delta}_N$ , где  $\boldsymbol{\delta}_N$  определяется (2).

При больших  $K \gg 1$  в (66) допустима замена

$$\left( 2 \sum_{m=1}^N \cos \theta_m \right)^K \longmapsto (2N)^K \exp \left( -\frac{K}{2N} \sum_{m=1}^N \theta_m^2 \right),$$

и можно приближённо получить:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | K) &\simeq \exp \left( \frac{N}{2K} (|\boldsymbol{\mu}^L|^2 + |\boldsymbol{\mu}^R|^2) \right) \\ &\times \frac{(2N)^K}{(2\pi)^{N/2}} \left( \frac{N}{K} \right)^{N/2} \det \left( \exp \left( \frac{N}{K} \mu_r^L \mu_s^R \right) \right)_{1 \leq r, s \leq N}. \end{aligned} \quad (67)$$

Если использовать (52), то оценка (67) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\boldsymbol{\mu}^L; \boldsymbol{\mu}^R | K) &\simeq q^{(|\boldsymbol{\mu}^L|^2 + |\boldsymbol{\mu}^R|^2)/2} (2N)^K \left( \frac{N}{2\pi K} \right)^{N/2} \\ &\times S_{\boldsymbol{\lambda}^R}(\mathbf{x}) S_{\boldsymbol{\lambda}^L}(\mathbf{q}_N/q) \mathcal{V}(q^{N-1}, q^{N-2}, \dots, 1), \end{aligned} \quad (68)$$

где  $\mathbf{x}_N$  и  $\mathbf{q}_N/q$  определены в (53) и (54) соответственно, при

$$q = e^\alpha, \quad \alpha = \frac{N}{K}. \quad (69)$$

Соотношение (68) даёт поведение чисел  $|P_K(\boldsymbol{\mu}^L \rightarrow \boldsymbol{\mu}^R)|$  (44) при больших  $K$  (см. **Предложение 1** выше). При  $\boldsymbol{\mu}^L = \boldsymbol{\mu}^R = \boldsymbol{\delta}_N$  получаем

для (68):

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\delta_N; \delta_N | K) &\simeq q^{\frac{N}{6}(N-1)(2N-1)} (2N)^K \left(\frac{N}{2\pi K}\right)^{N/2} \\ &\times \mathcal{V}(q^{N-1}, q^{N-2}, \dots, 1), \end{aligned} \quad (70)$$

а предельное выражение имеет вид

$$\mathfrak{G}(\delta_N; \delta_N | K) \Big|_{N/K \ll 1} \simeq \frac{G(N+1)(2N)^K}{(2\pi)^{N/2}} \left(\frac{N}{K}\right)^{N^2/2}. \quad (71)$$

Иными словами, оценка (71) описывает поведение (46) (где используется  $\mathcal{J}(K, N)$  (47)) при достаточно больших  $K$ :

$$\begin{aligned} |P_K(\delta_N \rightarrow \delta_N)| &= \sum_{|\mathbf{n}|=K} P(\mathbf{n}) \det \left( \left( \frac{n_j}{\frac{n_j+j-i}{2}} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq N} \\ &\stackrel{K \gg 1}{\simeq} \frac{G(N+1)(2N)^K}{(2\pi)^{N/2}} \left(\frac{N}{K}\right)^{N^2/2}. \end{aligned}$$

С использованием (68), производящая функция (39) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(e^{i\theta_N^g/2}; e^{i\theta_N^g/2} | K) &\simeq \mathcal{Z}(\theta_N^g, \mathbf{q}_N/q) \\ &\times \mathcal{V}(q^{N-1}, q^{N-2}, \dots, 1) (2N)^K \left(\frac{N}{2\pi K}\right)^{N/2}, \end{aligned} \quad (72)$$

где используется  $\mathcal{Z}(\theta_N^g, \mathbf{q}_N/q)$  (58) и  $q$  (69). Представление (72) связано с производящей функцией, которая приводит к квадратам чисел  $(A^{\text{cspp}}(N, N, M-n))^2$  строгих по столбцам плоских разбиений в пределе длины цепочки, стремящейся к бесконечности.

В итоге, предельное выражение для дискретной амплитуды перехода (38) при  $K \gg 1$  получается с использованием (59), (65) и (72):

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Pi}_n (-2\mathcal{H})^K \bar{\Pi}_n \rangle_N &\simeq \frac{G(N+1)(2N)^K}{N^2(\theta_N^g)(2\pi)^{N/2}} \left(\frac{N}{K}\right)^{N^2/2} \\ &\times |\mathcal{P}_{\mathcal{M}/n}(e^{i\theta_N^g}, \mathbf{1}_N)|^2. \end{aligned}$$

### §5. Обсуждение

Получена вероятность выживания ферромагнитной струны при малых температурах, а также амплитуды дискретного перехода при большом числе шагов. Амплитуда дискретных переходов интерпретируется как производящая функция пучков решёточных самоизбегающих путей для блужданий недружественных пешеходов. Получены производящие функции квадратов чисел плоских разбиений строгих по столбцам, а также соответствующие предельные выражения при больших значениях обратной температуры (для выживания ферромагнитной струны) или числа шагов (для непересекающихся решёточных путей недружественных пешеходов). Результаты представляют интерес с точки зрения комбинаторики квантовых интегрируемых моделей.

### §6. БЛАГОДАРНОСТИ

Я признателен моему соавтору и многолетнему *гуру* в области комбинаторных проявлений квантовых интегрируемых моделей, Н. М. Бородюбову за чтение статьи и полезные замечания.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*. — Vols. 1, 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, 1999.
2. C. P. Williams, *Explorations in Quantum Computing*. — Springer, London, 2010.
3. E. Fama, *Random walks in stock market prices*. — Financial Analysts J. **51** No. 1 (50 Years in Review) (1995), 75–80.
4. K. Sneppen, *Models of Life*. — Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
5. G. Fischer, D. Laming, *Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics, and Methodology*. — Springer, New York, 2012.
6. S. Redner, *A Guide to First Passage Processes*. — Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
7. M. E. Fisher, *Walks, walls, wetting, and melting*. — J. Stat. Phys. **34** (1984), 667–729.
8. P. J. Forrester, *Exact solution of the lock step model of vicious walkers*. — J. Phys. A.: Math. Gen. **23** (1990), 1259–1273.
9. T. Nagaoka, P. J. Forrester, *Vicious random walkers and a discretization of Gaussian random matrix ensembles*. — Nucl. Phys. B **620** (2002), 551–565.
10. A. Guttmann, A. Owczarek, X. Viennot, *Vicious walkers and Young tableaux I: without walls*. — J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 8123–8135.
11. C. Krattenthaler, A. Guttmann, X. Viennot, *Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux: II: with a wall*. — J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000), 8835–8866.
12. M. Katori, H. Tanemura, *Scaling limit of vicious walks and two-matrix model*. — Phys. Rev. E **66** (2002), 011105.

13. W. Vleeshouwers, V. Gritsev, *Unitary matrix integrals, symmetric polynomials, and long-range random walks*. — J. Phys. A: Math. Theor. **56** (2023), 185002.
14. L. Petrov, M. Tikhonov, *Asymptotics of noncolliding  $q$ -exchangeable random walks*. — J. Phys. A: Math. Theor. **56** (2023), 365203.
15. N. M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model*. — J. Phys. A: Math. General **38** (2005), 9415–9430.
16. N. M. Bogoliubov, *XX Heisenberg chain and random walks*. — Zap. Nauchn. Sem. POMI **325** (2005), 13–27; English transl.: J. Math. Sci. **138** (2006), 5636–5643.
17. N. M. Bogoliubov, *The integrable models for the vicious and friendly walkers*. — Zap. Nauchn. Sem. POMI **335** (2006), 59–74; English transl.: J. Math. Sci. **143** (2007), 2729–2737.
18. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *Temperature correlation functions in the XXO Heisenberg chain. I*. — Theor. Math. Phys. **94** (1993), 11–38.
19. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*. — Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
20. D. Pérez-Garcia, M. Tierz, *The Heisenberg XX spin chain and low-energy QCD*. — Phys. Rev. X **4** (2014), 021050.
21. M. Saeedian, A. Zahabi, *Phase structure of XX0 spin chain and nonintersecting Brownian motion*. — J. Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2018** (2018), 013104.
22. I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. — Oxford University Press, Oxford, 1995.
23. G. E. Andrews, *The Theory of Partitions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
24. D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations. The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. — Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
25. N. M. Bogoliubov, C. Malyshev, *Integrable models and combinatorics*. — Russian Math. Surveys **70** (2015), 789–856.
26. C. Malyshev, N. Bogoliubov, *Spin correlation functions, Ramus-like identities, and enumeration of constrained lattice walks and plane partitions*. — J. Phys. A: Math. Theor. **55** (2022), 225002.
27. N. M. Bogoliubov, C. Malyshev, *Correlation functions of XX0 Heisenberg chain,  $q$ -binomial determinants, and random walks*. — Nucl. Phys. B **879** (2014), 268–291.
28. N. M. Bogoliubov, C. L. Malyshev, *Correlation functions of the XX Heisenberg magnet and random walks of vicious walkers*. — Theor. Math. Phys. **159** (2009), 563–574.
29. N. Bogoliubov, C. Malyshev, *How to draw a correlation function*. — Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA) **17** (2021), 106.
30. N. M. Bogoliubov, C. L. Malyshev, *Semi-infinite Heisenberg XX0 chain and random walks*. — Zap. Nauchn. Sem. POMI **532** (2024), 91–108.
31. F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*. Vol. 1, AMS, Providence, 2000.
32. N. A. Slavnov, *Algebraic Bethe Ansatz*. — Lekts. Kursy NOC, 27, Steklov Math. Institute of RAS, Moscow, 2017, 190 pp.
33. N. Slavnov, *Algebraic Bethe Ansatz*. [arXiv:1804.07350](https://arxiv.org/abs/1804.07350).

34. N. M. Bogoliubov, C. Malyshev, *The correlation functions of the XXZ Heisenberg chain in the case of zero or infinite anisotropy, and random walks of vicious walkers.* — St.-Petersburg Math. J. **22** (2011), 359–377.
35. S. Karlin, J. McGregor, *Coincidence properties of birth and death processes.* — Pacific J. Math. **9** (1959), 1109–1140.
36. S. Karlin, J. McGregor, *Coincidence probabilities.* — Pacific J. Math. **9** (1959), 1141–1164.
37. P. J. Forrester, *Random walks and random permutations.* — J. Physics A: Mathematical and General **34** (2001), L417.
38. E. M. Rains, *Increasing subsequences and the classical groups.* — The Electronic Journal of Combinatorics **5** (1998) R12.
39. K. Johansson, *Unitary random matrix model.* — Mathematical Research Letters **5** (1998), 63–82.
40. J. Baik, P. Deift, K. Johansson, *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations.* — J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 1119–1178.
41. D. Romik, *The Surprising Mathematics of Longest Increasing Subsequences.* — Cambridge, Cambridge University Press, 2015.
42. D. J. Gross, E. Witten, *Possible third-order phase transition in the large- $N$  lattice gauge theory.* — Phys. Rev. D **21** (1980), 446–453.
43. N. M. Bogoliubov, C. Malyshev, *Correlation functions as nests of self-avoiding paths.* — Zap. Nauchn. Sem. POMI **465** (2017), 27–45; J. Math. Sci. **238** (2019), 779–792.
44. K. Johansson, *Universality of the local spacing distribution in certain ensembles of Hermitian Wigner matrices.* — Comm. Math. Phys. **215** (2001), 683–705.
45. A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum Groups and their Representations.* — Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
46. E. W. Barnes, *The theory of the G-function* — Quart. J. Pure and Appl. Math. **31** (1900), 264–314.

Malyshev C. L. From quantum spins to generating functions of plane partitions and random walks.

We derive the generating functions of column-strict boxed plane partitions and random walks as the temperature correlation functions of the Heisenberg XX spin model under periodicity condition. Estimates for appropriate correlation functions such as the persistence of a ferromagnetic string and the discrete transition amplitude are obtained in the limits of a low temperature and at a large number of steps, respectively.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
наб. р. Фонтанки 27,  
191023 Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: malyshev@pdmi.ras.ru

Поступило 2 декабря 2025 г.