Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 548, 2025 г.

А. Г. Быцко

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ ДЛЯ $O(2,1)$ СИГМА–МОДЕЛИ

**Посвящается Н. М. Боголюбову
в связи с его 75-летием**

§1. Введение

Для большого класса классических интегрируемых моделей уравнения движения эквивалентны условию нулевой кривизны

$$\partial_t U - \partial_x V + UV - VU = 0 \tag{1}$$

для некоторой U–V пары. Общий поход [1] к моделям, допускающим представление нулевой кривизны, состоит в нахождении скобок Пуассона для матриц $U(x,t,\lambda)$ и $U(y,t,\mu)$ и их записи с помощью r–матрицы, удовлетворяющей уравнению Янга–Бакстера. Если полученные скобки Пуассона ультралокальны, то есть включают только члены с дельта–функцией $\delta(x-y)$, но не её производными, то скобки Пуассона для соответствующей матрицы монодромии $T(\lambda)$ также допускают запись в r-матричном виде. В некоторых неультралокальных случаях возможно обобщение этого подхода [2, 3], использующее r–матрицы, удовлетворяющие модифицированному уравнению Янга–Бакстера.

В работе [4] было установлено, что уравнения движения (1+1)-мерной модели главного кирального поля для переменной g, принимающей значения в группе Ли G, допускают представление нулевой кривизны. Там же было отмечено, что эти уравнения движения совместны с дополнительным условием $g^2 = I$ (здесь и далее I обозначает единичную матрицу). В частности, в случае $G = SU(2)$, такая редукция модели главного кирального поля дает $O(3)$ сигма–модель (точнее, здесь следует рассматривать условие $g^2 = -I$ поскольку для $g \in SU(2)$ условие $g^2 = I$ выполняется только для $g = \pm I$).

В общем случае, как для модели главного кирального поля так и для ее редукций, матрицы $U(x,t,\lambda)$ зависят от токовых переменных,

---

Ключевые слова: некомпактная сигма-модель, условие нулевой кривизны, фундаментальная скобка Пуассона.

имеющих неультралокальные скобки Пуассона. В работе [5] было показано, что в случае $O(3)$ сигма–модели существует модифицированная U–V пара, для которой скобки Пуассона для $U(x,t,\lambda)$ и $U(y,t,\mu)$ ультралокальны. В настоящей работе мы покажем, что эта конструкция переносится и на случай $O(2,1)$ сигма–модели, которая является примером сигма–модели с некомпактным конфигурационным пространством. Данный результат может представлять интерес, в частности, в контексте связи между сигма–моделями и спиновыми цепочкам [6, 7].

§2. Модель главного кирального поля и условие нулевой кривизны

В модели главного кирального поля переменная $g = g(t,x)$, принимающая значения в группе Ли G, удовлетворяет уравнению движения

$$\Box g - (\partial_0 g) g^{-1} (\partial_0 g) + (\partial_1 g) g^{-1} (\partial_1 g) = 0, \tag{2}$$

где $\partial_0 = \partial_t$, $\partial_1 = \partial_x$ и $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$.

Уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$\partial_0 L_0 - \partial_1 L_1 = 0 \tag{3}$$

для левых токов $L_\mu = \partial_\mu g\, g^{-1}$, $\mu = 0,1$, принимающих значения в соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Если U и V имеют вид [4]

$$U(x,t,\lambda) = \frac{1}{1-\lambda^2}\big(\lambda L_0 + L_1\big), \qquad V(x,t,\lambda) = \frac{1}{1-\lambda^2}\big(\lambda L_1 + L_0\big), \tag{4}$$

то для выполнения условия нулевой кривизны (1) необходимо и достаточно, чтобы токи L_μ удовлетворяли уравнению (3) и, кроме того, соотношению $\partial_0 L_1 - \partial_1 L_0 + [L_1, L_0] = 0$, которое выполняется автоматически в силу определения токов. Таким образом, условие нулевой кривизны (1) для U–V пары (4) эквивалентно уравнениям движения (2) и (3) для главного кирального поля.

Полезно отметить, что можно рассматривать уравнения (2) и (3) для переменной вида $g = \widetilde{g}\,\tau$, где $\widetilde{g}$ принимает значения в матричной группе Ли G, а τ – некоторая фиксированная обратимая матрица (не принадлежащая G). Такая ситуация как раз имеет место для $O(2,1)$ сигма–модели, как это будет отмечено в предложении 2.

Уравнение движения (2) для главного кирального поля совместно с дополнительным соотношением

$$g^2 = \epsilon I, \tag{5}$$

где $\epsilon = \pm 1$.

Рассмотрим модифицированную U–V пару

$$\widetilde{U}(x,t,\lambda) = \frac{1}{1-\lambda^2}\bigl(\lambda J_0 + J_1\bigr), \qquad \widetilde{V}(x,t,\lambda) = \frac{1}{1-\lambda^2}\bigl(\lambda J_1 + J_0\bigr), \tag{6}$$

где $J_\mu = \alpha\,\partial_\mu g\, g^{-1} + \beta\,\partial_{1-\mu} g$, $\mu = 0, 1$. Очевидно, что

$$\partial_0 J_0 - \partial_1 J_1 = \alpha(\partial_0 L_0 - \partial_1 L_1). \tag{7}$$

Также, считая, что g удовлетворяет условию (5) и используя его следствия $g\,\partial_\mu g = -\partial_\mu g\, g$ и $\partial_\mu g\,\partial_\nu g = -\epsilon\, L_\mu L_\nu$, мы находим, что

$$\begin{aligned} &\partial_0 J_1 - \partial_1 J_0 + [J_1, J_0] \\ &\quad = \beta\Bigl(\Box\, g - 2\alpha\bigl((\partial_0 g)g^{-1}(\partial_0 g) - (\partial_1 g)g^{-1}(\partial_1 g)\bigr)\Bigr) \\ &\quad + (\alpha^2 - \alpha + \epsilon\beta^2)\,[L_1, L_0]. \end{aligned} \tag{8}$$

Предложение 1. *Условие нулевой кривизны* (1) *для* U–V *пары* (6), *где*

$$J_0 = \frac{1}{2}\bigl(\partial_0 g\, g^{-1} + \sqrt{\epsilon}\,\partial_1 g\bigr), \qquad J_1 = \frac{1}{2}\bigl(\partial_1 g\, g^{-1} + \sqrt{\epsilon}\,\partial_0 g\bigr), \tag{9}$$

эквивалентно уравнению движения (2) *для переменной* g, *удовлетворяющей дополнительному условию* (5).

Доказательство. Как и для U–V пары (4), для того, чтобы U–V пара (6) удовлетворяла условию (1), необходимо и достаточно чтобы левые части уравнений (7) и (8) были равны нулю. Выбор коэффициентов $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\epsilon\beta^2 = \frac{1}{4}$ обеспечивает пропорциональность правых частей уравнений (7) и (8), соответственно, левым частям уравнений (3) и (2). $\Box$

Предложение 1 рассматривалось в работе [5] для конкретного случая, $G = SU(2)$, и для одного выбора знака в условии (5). Подчеркнем, что приведенное выше доказательство не использует предположения о структуре группы G и допускает выбор обоих знаков в условии (5). Последнее обстоятельство существенно для рассмотрения $O(2,1)$ сигма-модели поскольку в её случае выбор $\epsilon = 1$ и $\epsilon = -1$ соответствует двум различным конфигурационным пространствам.

§3. $O(2,1)$ СИГМА-МОДЕЛЬ

Введем на пространстве $\mathbb{R}^3$ инволюцию $\flat : \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \to \mathbf{a}^\flat = (a_1, a_2, -a_3)$. Отметим, что ($\times$ обозначает векторное произведение)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\flat = -\mathbf{a}^\flat \times \mathbf{b}^\flat. \tag{10}$$

Произвольный элемент алгебры Ли $\mathfrak{su}(1,1)$ имеет вид $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, где $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, а матрицы e_1, e_2, e_3 образуют базис алгебры $\mathfrak{su}(1,1)$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Для матриц вида $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}$ имеет место соотношение

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\flat) I + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\flat \cdot \mathbf{e}. \tag{12}$$

Мы будем рассматривать редукцию модели главного кирального поля, для которой переменная g принимает значения в одном из двух алгебраических многообразий

$$G_+ = \{g \in \mathfrak{su}(1,1) \,|\, g^2 = I\}, \qquad G_- = \{g \in \mathfrak{su}(1,1) \,|\, g^2 = -I\}. \tag{13}$$

Отметим, что, хотя для главного кирального поля переменная g является переменной, принимающей значения в группе Ли, мы определяем многообразия (13) как подмногообразия в алгебре Ли. Естественность такого подхода объясняется следующим замечанием:

Предложение 2. a) $G_- = \mathfrak{su}(1,1) \cap SU(1,1)$.

b) *Элементы многообразия G_+ представимы в виде $g = \widetilde{g}\, e_1$, где $\widetilde{g} \in SU(1,1)$.*

Доказательство. Для любой бесследовой $2{\times}2$ матрицы g мы имеем $g^2 = -\det g\, I$.

a) Если $g \in \mathfrak{su}(1,1)$, то $g^* J = -Jg$, где $J = \operatorname{diag}(1,-1)$, а $*$ означает эрмитово сопряжение. Если при этом $g^2 = -I$, то $\det g = 1$ и $g^* J g = -Jg^2 = J$, то есть $g \in SU(1,1)$. Обратно, пусть $g \in \mathfrak{su}(1,1) \cap SU(1,1)$. Тогда $g^2 = -\det g\, I = -I$.

b) Пусть $g \in G_+$. Положим $\widetilde{g} = g\, e_1$. Тогда $\det \widetilde{g} = (-1)^2 = 1$. Поскольку $e_1^2 = I$ и $e_1 J = -J e_1$, то $\widetilde{g}^* J \widetilde{g} = e_1 g^* J g e_1 = -e_1 J g^2 e_1 = -e_1 J e_1 = e_1^2 J = J$, то есть $\widetilde{g} \in SU(1,1)$. □

Из предложения 2 следует, что для обоих многообразий в (13) мы имеем $\partial_\mu g \in \mathfrak{su}(1,1)$ и $\partial_\mu g\, g^{-1} \in \mathfrak{su}(1,1)$.

Для матричной переменной $g = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, условие $g \in G_\pm$ эквивалентно наложению на векторную переменную $\mathbf{n}$ связи $\Phi_1 = 0$, где

$$\Phi_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^\flat - \epsilon = n_1^2 + n_2^2 - n_3^2 - \epsilon,$$

где $\epsilon = 1$ если $g \in G_+$ и $\epsilon = -1$ если $g \in G_-$. Конфигурационное пространство соответствующих моделей представляет собой, соответственно, однополостной и двуполостной гиперболоид в $\mathbb{R}^3$.

Если $g = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \in G_\pm$, то, с учетом соотношений (12) и связи $\Phi_1 = 0$, уравнение (2) для векторной переменной $\mathbf{n}$ принимает вид

$$\Box\, \mathbf{n} = \epsilon \left(\partial_1 \mathbf{n} \cdot \partial_1 \mathbf{n}^\flat - \partial_0 \mathbf{n} \cdot \partial_0 \mathbf{n}^\flat \right) \mathbf{n}. \tag{14}$$

В лагранжевом формализме уравнение (14) следует из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \int\limits_D \lambda\, \Phi_1\, dx, \qquad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \int\limits_D \left(\partial_0 \mathbf{n} \cdot \partial_0 \mathbf{n}^\flat - \partial_1 \mathbf{n} \cdot \partial_1 \mathbf{n}^\flat \right) dx,$$

где область интегрирования D зависит от выбора граничных условий.

Для гамильтонового похода к рассматриваемой модели введем канонические импульсные переменные, соответствующие лагранжиану $\mathcal{L}_0$, то есть

$$\boldsymbol{\pi} = \partial_0 \mathbf{n}^\flat. \tag{15}$$

Гамильтониан модели, соответствующий лагранжиану $\mathcal{L}_0$, имеет вид

$$H = \int\limits_D (\boldsymbol{\pi} \cdot \partial_0 \mathbf{n})\, dx - \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \int\limits_D \left(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}^\flat + \partial_1 \mathbf{n} \cdot \partial_1 \mathbf{n}^\flat \right) dx, \tag{16}$$

где на переменные $\boldsymbol{\pi}$ и $\mathbf{n}$ наложены связи $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, где

$$\Phi_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^\flat - \epsilon, \qquad \Phi_2 = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{n}. \tag{17}$$

Отметим, что, в случае $\epsilon = -1$, гамильтониан (16) ограничен снизу.

Предложение 3. *Если $\epsilon = -1$, то для гамильтониана* (16) *выполнено неравенство $H \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $\epsilon = -1$. Тогда $n_3^2 \geqslant 1$. Используя связь $\Phi_2 = 0$ и неравенство Коши, мы получаем

$$\begin{aligned}(\pi_3 n_3)^2 &= (\pi_1 n_1 + \pi_2 n_2)^2 \leqslant (n_1^2 + n_2^2)(\pi_1^2 + \pi_2^2) \\ &= (n_3^2 - 1)(\pi_1^2 + \pi_2^2) \leqslant n_3^2(\pi_1^2 + \pi_2^2).\end{aligned}$$

Откуда следует, что $\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi}^\flat = \pi_1^2+\pi_2^2-\pi_3^2 \geqslant 0$. Неравенство $\partial_1\mathbf{n}\cdot\partial_1\mathbf{n}^\flat \geqslant 0$ выводится аналогично с использованием соотношения $\partial_1\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}^\flat = 0$, которое следует из связи $\Phi_1 = 0$. □

С учетом соотношений (10), (12), (15) и (17), токи $L_\mu = \epsilon\,\partial_\mu g\, g$ записываются в виде

$$L_\mu = \mathbf{L}_\mu\cdot\mathbf{e}, \qquad \mathbf{L}_0 = -\epsilon\,\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{n}^\flat, \qquad \mathbf{L}_1 = -\epsilon\,\partial_1\mathbf{n}^\flat\times\mathbf{n}^\flat. \tag{18}$$

Уравнение движения (14) эквивалентно уравнению $\partial_0\mathbf{L}_0 - \partial_1\mathbf{L}_1 = 0$.

Так как $2\mathbf{L}_\mu\cdot\mathbf{L}_\mu^\flat = \mathrm{tr}(L_\mu)^2 = -\epsilon\,\mathrm{tr}(\partial_\mu g)^2 = -2\epsilon\,\partial_\mu\mathbf{n}\cdot\partial_\mu\mathbf{n}^\flat$, то гамильтониан (16) в токовых переменных принимает вид

$$H = -\frac{\epsilon}{2}\int\limits_D \left(\mathbf{L}_0\cdot\mathbf{L}_0^\flat + \mathbf{L}_1\cdot\mathbf{L}_1^\flat\right)dx.$$

До наложения связей (17) скобки Пуассона для переменных $\boldsymbol{\pi}$ и $\mathbf{n}$ имеют канонический вид, $\{\pi_a(x), n_b(y)\} = \delta_{ab}\,\delta(x-y)$. Используя эти скобки и формулы (18), находим

$$\{L_0^a(x), n_b(y)\} = -\epsilon\,\epsilon_{abc}\kappa_c n_c(x)\,\delta(x-y), \tag{19}$$

$$\{L_0^a(x), \pi_b(y)\} = -\epsilon\,\epsilon_{abc}\kappa_b \pi_c(x)\,\delta(x-y), \tag{20}$$

$$\{L_0^a(x), L_0^b(y)\} = -\epsilon\,\epsilon_{abc}\kappa_c L_0^c(x)\,\delta(x-y), \tag{21}$$

где $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, $\kappa_3 = -1$. (Для вычисления скобки (21) полезно заметить, что $\kappa_a\kappa_b\kappa_c\epsilon_{abc} = -\epsilon_{abc}$.)

Из соотношений (19) и (20) следует, что $\{L_0^a(x), \Phi_1(y)\} = 0$ и $\{L_0^a(x), \Phi_2(y)\} = 0$. Поэтому формулы (19)–(21) задают также и скобки Пуассона–Дирака, совместные со связями (17).

§4. Фундаментальная скобка Пуассона

Для $g = \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}\in G_\pm$, модифицированные токи (9) записываются в виде $J_\mu = \mathbf{J}_\mu\cdot\mathbf{e}$, где

$$\mathbf{J}_0 = \frac{1}{2}(-\epsilon\,\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{n}^\flat + \sqrt{\epsilon}\,\partial_1\mathbf{n}), \qquad \mathbf{J}_1 = \frac{1}{2}(-\epsilon\,\partial_1\mathbf{n}^\flat\times\mathbf{n}^\flat + \sqrt{\epsilon}\,\boldsymbol{\pi}^\flat). \tag{22}$$

С учетом связей (17), выполняются соотношения

$$\mathbf{J}_0\cdot\mathbf{n}^\flat = 0, \qquad \mathbf{J}_1\cdot\mathbf{n}^\flat = 0. \tag{23}$$

Используя формулы (19), (21), (22) и соотношение $f'(x)\delta(x-y) + f(x)\delta'(x-y) = f(y)\delta'(x-y)$ для обобщенных функций, находим

$$\begin{aligned}
&\{J_0^a(x), J_0^b(y)\}\\
&= \frac{1}{4}\{L_0^a(x), L_0^b(y)\} + \frac{\sqrt{\epsilon}}{4}\{L_0^a(x), \partial_1 n_b(y)\} + \frac{\sqrt{\epsilon}}{4}\{\partial_1 n_a(x), L_0^b(y)\}\\
&= -\frac{\epsilon}{4}\,\epsilon_{abc}\kappa_c\big(L_0^c(x)\,\delta(x-y) - \sqrt{\epsilon}\big(n_c(x) - n_c(y)\big)\,\delta'(x-y)\big)\\
&= -\frac{\epsilon}{4}\,\epsilon_{abc}\kappa_c\big(L_0^c(x)\,\delta(x-y) + \sqrt{\epsilon}\,\partial_1 n_c(x)\,\delta(x-y)\big)\\
&= -\frac{\epsilon}{2}\,\epsilon_{abc}\kappa_c J_0^c(x)\,\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{24}$$

Заметим, что токи (9) связаны следующими соотношениями

$$\sqrt{\epsilon}\,J_0\,g = J_1, \qquad \sqrt{\epsilon}\,J_1\,g = J_0.$$

Из них, с учетом соотношений (12) и (23), следует, что

$$J_\mu^a = \sqrt{\epsilon}\,\kappa_a\epsilon_{abc}J_{1-\mu}^b n_c. \tag{25}$$

Используя эту формулу и соотношения (19), (24), получаем

$$\begin{aligned}
&\{J_0^a(x), J_1^b(y)\} = \sqrt{\epsilon}\,\kappa_b\epsilon_{bcd}\{J_0^a(x), J_0^c(y)n_d(y)\}\\
&= \sqrt{\epsilon}\,\kappa_b\epsilon_{bcd}\big(\{J_0^a(x), J_0^c(y)\}n_d(y) + \frac{1}{2}J_0^c(y)\{L_0^a(x), n_d(y)\}\big)\\
&= -\frac{1}{2}\epsilon\sqrt{\epsilon}\,\kappa_b\epsilon_{bcd}\big(\epsilon_{ace}\kappa_e J_0^e(x)n_d(x) + \epsilon_{ade}\kappa_e J_0^c(x)n_e(x)\big)\,\delta(x-y)\\
&= \frac{1}{2}\epsilon\sqrt{\epsilon}\,\big(J_0^b(x)n_a(x) - J_0^a(x)n_b(x)\big)\,\delta(x-y)\\
&= -\frac{\epsilon}{2}\,\epsilon_{abc}\kappa_c J_1^c(x)\,\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{26}$$

Аналогичное вычисление, снова использующее формулу (25), а также соотношения (23) и (24), дает

$$\begin{aligned}
\{J_1^a(x), J_1^b(y)\} &= \epsilon\,\kappa_a\kappa_b\epsilon_{acd}\epsilon_{bef}\{J_0^c(x)n_d(x), J_0^e(y)n_f(y)\}\\
&= \frac{1}{2}\kappa_a\kappa_b\epsilon_{acd}\big(\kappa_b J_0^b(x)n_c(x)n_d(x)\\
&- \delta_{bd}J_0^c(x)\kappa_k n_k(x)n_k(x)\big)\,\delta(x-y)\\
&= -\frac{\epsilon}{2}\,\kappa_a\kappa_b\epsilon_{acb}J_0^c(x)\,\delta(x-y)\\
&= -\frac{\epsilon}{2}\,\epsilon_{abc}\kappa_c J_0^c(x)\,\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{27}$$

Важно отметить, что скобки (24), (26) и (27) ультралокальны, то есть не содержат $\delta'(x-y)$.

Предложение 4. *Пусть* $\widetilde{U}(x,\lambda)$ *имеет вид* (6), *где токи* J_μ *даются формулами* (9), *а* $g = \mathbf{n}\cdot\mathbf{e} \in G_\pm$. *Тогда матрицы* $\widetilde{U}(x,\lambda)$ *и* $\widetilde{U}(y,\mu)$ *удовлетворяют соотношению*

$$\begin{aligned}&\big\{\widetilde{U}(x,\lambda)\otimes I, I\otimes\widetilde{U}(y,\mu)\big\}\\&\qquad\qquad = \big[r(\lambda-\mu)\,,\widetilde{U}(x,\lambda)\otimes I + I\otimes\widetilde{U}(y,\mu)\big]\,\delta(x-y),\end{aligned}\tag{28}$$

где $\otimes$ *обозначает кронекеровское произведение, а матрица* $r(\lambda)$ *имеет вид*

$$r(\lambda) = \frac{\epsilon}{4\lambda}\kappa_a e_a\otimes e_a.\tag{29}$$

Доказательство. Используя формулы (24), (26) и (27), получаем

$$\begin{aligned}&(1-\lambda^2)(1-\mu^2)\big\{\widetilde{U}(x,\lambda)\otimes I, I\otimes\widetilde{U}(y,\mu)\big\}\\&\quad = (e_a\otimes e_b)\,\{\lambda J_0^a(x) + J_1^a(x), \mu J_0^b(y) + J_1^b(y)\}\\&\quad = -\frac{\epsilon}{2}\kappa_c\,\epsilon_{abc}(e_a\otimes e_b)\,\big((\lambda\mu+1)J_0^c(x) + (\lambda+\mu)J_1^c(x)\big)\,\delta(x-y).\end{aligned}\tag{30}$$

Матрицы (11) удовлетворяют соотношениям

$$[e_a, e_b] = 2\kappa_c\epsilon_{abc}e_c.$$

Отсюда (напомним, что $\kappa_a\kappa_b\kappa_c\epsilon_{abc} = -\epsilon_{abc}$)

$$\begin{aligned}&[\kappa_a e_a\otimes e_a, e_c\otimes I] = -2\kappa_c\epsilon_{abc}e_a\otimes e_b,\\&[\kappa_a e_a\otimes e_a, I\otimes e_c] = 2\kappa_c\epsilon_{abc}e_a\otimes e_b.\end{aligned}\tag{31}$$

Используя равенства (31), получаем

$$\begin{aligned}&(1-\lambda^2)(1-\mu^2)\big[\kappa_a e_a\otimes e_a\,,\widetilde{U}(x,\lambda)\otimes I + I\otimes\widetilde{U}(x,\mu)\big]\\&= 2\kappa_c\epsilon_{abc}(e_a\otimes e_b)\,\big((\mu^2-1)(\lambda J_0^c(x) + J_1^c(x)) + (1-\lambda^2)(\mu J_0^c(x) + J_1^c(x)\big)\\&= 2(\mu-\lambda)\kappa_c\epsilon_{abc}(e_a\otimes e_b)\,\big((\lambda\mu+1)J_0^c(x) + (\lambda+\mu)J_1^c(x)\big).\end{aligned}\tag{32}$$

Сравнение (30) с (32) дает фундаментальную скобку Пуассона (28) с r–матрицей вида (29). $\square$

Пусть σ_a, $a = 1,2,3$, обозначают матрицы Паули. Тогда

$$r(\lambda) = \frac{\epsilon}{4\lambda}\kappa_a e_a\otimes e_a = \frac{\epsilon}{4\lambda}\sigma_a\otimes\sigma_a = \epsilon\, r'(\lambda),$$

где $r'(\lambda)$ – r–матрица (с точность до сдвига на матрицу, пропорциональную единичной), входящая в формулу (28) в случае $O(3)$ сигма-модели [5].

Таким образом, мы показали, что $O(2,1)$ сигма-модель допускает представление нулевой кривизны, для которого соответствующая фундаментальная скобка Пуассона ультралокальна.

Список литературы

1. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М., Наука, 1986.
2. M. Semenov-Tian-Shansky, A. Sevostyanov, *Classical and quantum nonultralocal systems on the lattice.* В кн.: A. S. Fokas, I. M. Gelfand (eds), *Algebraic aspects of integrable systems.* Progress in nonlinear differential equations and their applications, vol. 26 (Birkhäuser, 1997), 323–350.
3. F. Delduc, M. Magro, B. Vicedo, *Alleviating the non-ultralocality of coset sigma models through a generalized Faddeev–Reshetikhin procedure.* JHEP08(2012)019
4. В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *Релятивистски–инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи.* — ЖЭТФ **74** (1978), 1953–1973.
5. А. Г. Быцко, *Представление нулевой кривизны для нелинейной $O(3)$ сигма-модели.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **215** (1994), 100–114.
6. C. Appadu, T. J. Hollowood, D. Price, D. C. Thompson, *Quantum anisotropic sigma and lambda models as spin chains.* — J. Phys. A **51** (2018), 405401.
7. I. Affleck, D. Bykov, K. Wamer, *Flag manifold sigma models: Spin chains and integrable theories.* — Physics Reports **953** (2022), 1–93.

Bytsko A. G. The zero-curvature representation for the $O(2,1)$ sigma-model.

It is shown that for the $O(2,1)$ sigma-model, there is a zero-curvature representation which admits an ultralocal fundamental Poisson bracket.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: bytsko@pdmi.ras.ru

Поступило 29 октября 2025 г.