Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 548, 2025 г.

Т. А. Болохов

ВОЗМУЩЕНИЯ КОВАРИАЦИОННОЙ ФОРМЫ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

**Посвящается Н. М. Боголюбову
в связи с его 75-летием**

§1. Введение

Представление Шредингера [1, 2] является одним из способов описания перенормированной квантовой теории поля. Данное представление описывает состояния квантового поля как функционалы на конфигурационном пространстве классической системы, при этом квадрат модуля функционала имеет смысл плотности вероятности найти квантовое поле в соответствующей точке конфигурационного пространства. Несмотря на то, что представление Шредингера плохо приспособлено для релятивистски-инвариантного описания, его преимуществом является возможность более общей (в терминах функционалов) формулировки непертурбативных эффектов полевой теории. В частности, выглядит перспективным поиск аналогов сингулярных возмущений операторов конечномерной квантовой механики [3, 4], который на первом этапе включает в себя исследование собственных состояний оператора свободной теории с различными граничными условиями. С этой целью в работе [5] был предложен способ построения нетривиальных решений уравнения для собственных функционалов гамильтониана свободного квантового поля в представлении Шредингера. Основой метода является замена ковариационной формы квадратного корня оператора Лапласа L на форму квадратного корня сингулярного возмущения L_κ этого оператора. При определенных условиях функционал потенциальной энергии свободного квантового гамильтониана,

Ключевые слова: ковариационные формы, предствление Шредингера, гауссиан основного состояния квантового поля, сингулярные возмущения замкнутых квадратичных форм.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации научного проекта по соглашению No. 075-15-2025-013.

задаваемый оператором Лапласа, и квадратичная форма его сингулярного возмущения совпадают на области определения первого из них. Вследствие этого, оказывается, что гауссианы соответствующих ковариационных форм (форм квадратных корней операторов, см. [6]) удовлетворяют одному и тому же вариационному уравнению, а именно, уравнению на собственные состояния гамильтониана свободного квантового поля.

Целью настоящей работы является исследование свойств ковариационных форм квадратных корней сингулярных возмущений оператора Лапласа, обладающих описанными выше свойствами. Формально оператор такой формы можно представить в виде мультипликативного возмущения оператора квадратного корня из (положительного) Лапласиана L с “малой” добавкой к единице

$$\mathrm{L}_\kappa^{1/2} = \mathrm{L}^{1/4}(\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{L}^{1/4}, \quad \mathrm{K} = \mathrm{L}^{-1/4}(\mathrm{L}_\kappa^{1/2} - \mathrm{L}^{1/2})\mathrm{L}^{-1/4}, \tag{1}$$

где действие $\mathrm{L}^{1/4}$ на Фурье-образ функции сводится к умножению на квадратный корень из модуля Фурье-координаты $p^{1/2}$. Сначала мы покажем, что в условиях задачи добавка K является ограниченным отрицательным самосопряженным оператором. Далее, пользуясь ограниченностью интеграла для суммы следов

$$\operatorname{Tr}\mathrm{L}^{-1/4}(\mathrm{L}_\kappa^{1/2} - \mathrm{L}^{1/2})\mathrm{L}^{-1/4} + \operatorname{Tr}\mathrm{L}^{1/4}(\mathrm{L}_\kappa^{-1/2} - \mathrm{L}^{-1/2})\mathrm{L}^{1/4} = -\operatorname{Tr}\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{I}+\mathrm{K}},$$

можно сделать вывод, что след оператора K^2 также является ограниченной величиной, и, таким образом, K является компактным оператором Гильберта–Шмидта [7]. В заключительной части мы покажем, что области определения ковариационных форм операторов $\mathrm{L}_\kappa^{1/2}$ и $\mathrm{L}^{1/2}$ совпадают. Данное свойство позволяет исследовать нормировки гауссианов этих форм методом функционального интегрирования и вычислять отношения норм через следы логарифмов соответствующих операторов.

В работе используются следующие объекты и обозначения. В качестве Гильбертова пространства рассматривается пространство функций $L_2(\mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением

$$(g,f) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{g(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x})\, d^3x = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\widehat{g}(\boldsymbol{p})}\widehat{f}(\boldsymbol{p})\, d^3p, \quad ||f||^2 = (f,f),$$

соответственно, в координатном и в Фурье-представлении. Области определения неотрицательного самосопряженного оператора L и его квадратичной формы Q_{L} мы обозначаем как $\mathcal{D}(\mathrm{L})$ и $\mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}}]$, соответственно. Мы будем считать, что функции квадратного корня и логарифма имеют разрез вдоль отрицательной полуоси на комплексной плоскости и выберем для этих функций ветви, которые, соответственно, положительны и вещественны при положительном аргументе.

§2. Сингулярные возмущения Лапласиана

Теория сингулярных возмущений дифференциальных операторов разработана для большого количества моделей с различными сингулярными потенциалами [8, 9], мы будем использовать ее адаптацию для трехмерного Лапласиана и потенциалов Рисса степени 1/2. Основой построения является резольвента Крейна для сингулярного возмущения ранга 1:

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{L}_\kappa - \mu} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{L} - \mu} + \frac{(\mathrm{L}-\mu)^{-1} v\,((\mathrm{L}-\bar{\mu})v,\,\cdot\,)}{\kappa - \mathcal{N}(\mu)}. \tag{2}$$

Здесь L – это самосопряженный оператор Лапласа

$$\mathrm{L}:\; f(\boldsymbol{x}) \to -\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(\boldsymbol{x}), \quad \widehat{f}(\boldsymbol{p}) \to p^2 \widehat{f}(\boldsymbol{p}),$$

v – сингулярный потенциал, то есть функция, отвечающая в операторе L_κ за “взаимодействие”, а знаменатель во втором слагаемом определяется как решение уравнения

$$\mathcal{N}(\mu) - \mathcal{N}(\lambda) = (\mu-\lambda)(\mathrm{R}_{\bar{\mu}} v, \mathrm{R}_\lambda v) = (v, (\mathrm{R}_\mu - \mathrm{R}_\lambda)v), \quad \mathrm{R}_\mu = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{L}-\mu}, \tag{3}$$

с вещественной константой разделения κ. Функция, удовлетворяющая такому уравнению, также как и функция $(\kappa - \mathcal{N}(\mu))^{-1}$, являются функциями Неванлинны [10], то есть отображают верхнюю и нижнюю комплексные полуплоскости в себя. Это важное свойство позволяет сделать вывод о том, что полюса резольвенты (2) могут лежать только на вещественной оси, в то время как из положительности L следует, что эти полюса могут быть только отрицательными.

Для того, чтобы квадратичная форма оператора L_κ являлась расширением квадратичной формы оператора L

$$Q_{\mathrm{L}_\kappa}[f] = Q_{\mathrm{L}}[f] = \int\limits_{\mathbb{R}^3} p^2 |\widehat{f}(\boldsymbol{p})|^2\, d^3p, \quad f \in \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}}], \tag{4}$$

$$\mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_\kappa}] = \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}}] \dotplus \{\xi \mathrm{R}_\rho v\}, \quad \rho < 0, \quad \xi \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы потенциал v удовлетворял следующим условиям

$$(\mathrm{R}_\mu v, \mathrm{R}_\lambda v) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad v \in \mathcal{H}_{-2}(\mathrm{L}) \tag{6}$$

$$(v, \mathrm{R}_\mu v) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad v \notin \mathcal{H}_{-1}(\mathrm{L}). \tag{7}$$

В качестве v мы будем рассматриваеть разность потенциалов Рисса [11] степени 1/2, имеющих сингулярности, соответственно, в точках $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ трехмерного координатного пространства. Фурье-образ такого потенициала определяется следующим выражением

$$\widehat{v}(\boldsymbol{p}) = \frac{e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}_1} - e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}_2}}{\sqrt{2}p^{1/2}}, \quad p = |\boldsymbol{p}|. \tag{8}$$

Несложно увидеть, что потенциалы (8) удовлетворяют условию (6) и являются пограничными для условия (7), в том смысле, что потенциалы степени больше чем 1/2 уже попадают в класс $\mathcal{H}_{-1}(\mathrm{L})$ линейки Гильбертовых пространств положительного оператора L

$$f \in \mathcal{H}_k(\mathrm{L}) \quad \Leftrightarrow \quad ||(\mathrm{L}+\mathrm{I})^{k/2} f||_{\mathcal{H}_0} < \infty, \quad \mathcal{H}_0 = L_2(\mathbb{R}^3).$$

Функция Неванлинны, удовлетворяющая уравнению (3) для потенциала (8), зависит только от расстояния $x = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$ и имеет следующий вид

$$\mathcal{N}(\mu) - \kappa = 2\pi \ln\Big(-\frac{\tilde{\kappa}}{\mu}\Big) - \frac{4\pi}{\sqrt{\mu}x}\big[\cos\sqrt{\mu}x \ \mathrm{Si}(\sqrt{\mu}x) - \sin\sqrt{\mu}x \ \tilde{\mathrm{Ci}}(\sqrt{\mu}x)\big], \tag{9}$$

где $\tilde{\kappa}$ – это размерная замена параметра κ, а интегральный синус и четная часть интегрального косинуса определены как

$$\mathrm{Si}(\sqrt{\mu}x) = \int\limits_0^{\sqrt{\mu}x} \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$\tilde{\mathrm{Ci}}(\sqrt{\mu}x) = \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2}\ln(-\mu x^2) - \int\limits_0^{\sqrt{\mu}x} \frac{1-\cos t}{t} dt.$$

Заметим, что ввиду того что $\sqrt{\mu}$ входит в правую часть (9) в виде комбинации четных функций, выбор ветви квадратного корня в этом выражении не имеет значения.

Если для резольвенты

$$\mathrm{R}^\kappa_\mu = \mathrm{R}_\mu + \frac{\mathrm{R}_\mu v(\mathrm{R}_{\bar{\mu}} v, \cdot\,)}{\kappa - \mathcal{N}(\mu)}, \tag{10}$$

построенной с помощью функций (8), (9), выполнено условие

$$|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1| \leqslant x_{\mathrm{b}} = \frac{e^{1-\boldsymbol{\gamma}}}{\sqrt{\tilde{\kappa}}}, \tag{11}$$

то этой резольвенте соответствует положительный самосопряженный оператор L_κ, такой, что ковариационная форма его квадратного корня $\mathrm{L}_\kappa^{1/2}$ может быть восстановлена по ее действию на области определения $\mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}}]$ квадратичной формы оператора Лапласа L. То есть замыкание по индуцированной норме сужения квадратичной формы $Q_{\mathrm{L}_\kappa^{1/2}}$ на область $\mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}}]$ совпадает с исходной формой $Q_{\mathrm{L}_\kappa^{1/2}}$. В этом случае гауссиан данной формы

$$\Omega_\kappa(f) = \exp\left\{-\frac{1}{2}Q_{\mathrm{L}_\kappa^{1/2}}[f]\right\}$$

удовлетворяет вариационному уравнению на собственные состояния гамильтониана свободного квантового скалярного поля

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3p\left(-\frac{\delta}{\delta\widehat{f}(-\boldsymbol{p})}\frac{\delta}{\delta\widehat{f}(\boldsymbol{p})} + p^2|\widehat{f}(\boldsymbol{p})|^2\right)\Omega_\kappa(f) = (\mathrm{Tr}\,\mathrm{L}_\kappa^{1/2})\,\Omega_\kappa(f)$$

с собственным значением $\mathrm{Tr}\,\mathrm{L}_\kappa^{1/2}$.

Теперь, пользуясь определением резольvenты R_μ^κ, квадратный корень соответствующего ей оператора может быть построен как спектральный интеграл Рисса [12], который совпадает с интегралом функционального исчисления Данфорда [13, ч. VII.9],

$$\mathrm{L}_\kappa^{1/2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty (\mathrm{R}_{\lambda+i0}^\kappa - \mathrm{R}_{\lambda-i0}^\kappa)\lambda^{1/2}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{R}_\mu^\kappa\sqrt{\mu}\,d\mu,$$

где контур интегрирования $\mathcal{C}$ показан на рис. 1.

Подставляя в формулу Данфорда–Рисса резольвенту (10), мы получаем следующее выражение для оператора $\mathrm{L}_\kappa^{1/2}$

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_\kappa^{1/2} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\left(\mathrm{R}_\mu + \frac{\mathrm{R}_\mu v(\mathrm{R}_{\bar{\mu}}v,\,\cdot\,)}{\kappa - \mathcal{N}(\mu)}\right)\sqrt{\mu}\,d\mu \\ &= \mathrm{L}^{1/2} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{\mathrm{R}_\mu v(\mathrm{R}_{\bar{\mu}}v,\,\cdot\,)}{\kappa - \mathcal{N}(\mu)}\sqrt{\mu}\,d\mu,\end{aligned} \tag{12}$$

где квадратный корень $\mathrm{L}^{1/2}$ в импульсном представлении действует как оператор умножения на модуль Фурье-переменной $\boldsymbol{p}$.

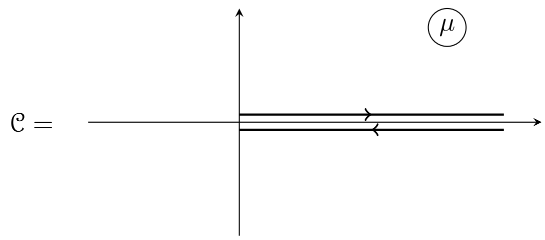

Рис. 1. Контур $\mathcal{C}$

§3. Ограниченность оператора K

Представление (12) позволяет, в соответствии с формулой (1), извлечь из второго слагаемого оператор K и записать его действие как сумму (интеграл) операторов ранга 1:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{p^{-1/2}\mathrm{R}_\mu v(p^{-1/2}\mathrm{R}_{\bar\mu}v,\,\cdot\,)}{\kappa - \mathcal{N}(\mu)}\sqrt{\mu}\,d\mu. \tag{13}$$

Несложно заметить, что оператор K симметричен, поэтому, для того, чтобы убедиться в его самосопряженности и ограниченности, достаточно показать ограниченность этой формы на множестве, всюду плотном в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$. В качестве такого множества рассмотрим множество функций (столбиков) $h_\epsilon(\boldsymbol{p})$, сосредоточенных в ϵ-окрестностях точек $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$:

$$h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p}) = \chi\big(s(q,\epsilon) - |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|\big)\eta_{\boldsymbol{q}},$$

где χ – это функция Хевисайда. Ширина $s(q,\epsilon)$ далее будет выбрана так, чтобы $h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})$ не накрывала начало координат при малых $q = |\boldsymbol{q}|$ и, в то же время, $s(q,\epsilon)$ стремилась бы к нулю при $\epsilon \to 0$. Высота $\eta_{\boldsymbol{q}}$ определяется условием нормировки

$$||h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})||^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} = \frac{4}{3}\pi s^3(q,\epsilon)\eta^2_{\boldsymbol{p}_0} = 1$$

и равняется

$$\eta_{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{4}{3}\pi s^3(q,\epsilon)\right)^{-1/2}.$$

В этом случае главный вклад по ϵ действия скалярного произведения в числителе интеграла (13) на функцию $h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})$ может быть вычислен

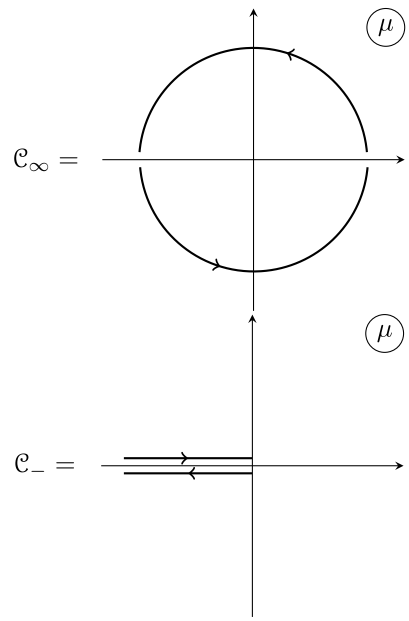

Рис. 2. Контуры $\mathcal{C}_\infty$ и $\mathcal{C}_-$

как

$$\big(p^{-1/2}\mathrm{R}_{\bar\mu}v, h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}\big) = \left(\frac{4}{3}\pi s^3(q,\epsilon)\right)^{1/2} \frac{e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_1} - e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_2}}{q(q^2-\mu)},$$

а действие квадратичной формы оператора K на $h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})$ равняется

$$(h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}, \mathrm{K}h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}) = \frac{2}{3i} s^3(q,\epsilon) \oint_{\mathcal{C}} \frac{\tilde{v}^2(\boldsymbol{q})\sqrt{\mu}\,d\mu}{q^2(q^2-\mu)^2\big(\kappa - \mathcal{N}(\mu)\big)}, \tag{14}$$

где

$$\tilde{v}^2(\boldsymbol{q}) = 1 - \cos\big(\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\big).$$

Пользуясь голоморфностью подинтегральной функции в (14) в верхней и нижней полуплоскостях, мы можем преобразовать контур интегрирования следующим образом

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_\infty + \mathcal{C}_-, \tag{15}$$

где контуры $\mathcal{C}_\infty$ и $\mathcal{C}_-$ показаны на рис. 2. Из убывания подинтегральной функции в (14) на бесконечности быстрее, чем $|\mu|^{-1}$, следует, что интеграл по расширяющемуся контуру $\mathcal{C}_\infty$ стремится к нулю. В результате, пользуясь голоморфностью функции $(\kappa - \mathcal{N}(\mu))^{-1}$ и соотношением $\sqrt{\mu \pm i0} = \pm i\sqrt{|\mu|}$ при отрицательных μ, получаем для оставшегося интеграла по $\mathcal{C}_-$ следующее значение

$$\begin{aligned}(h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}, \mathrm{K} h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}) &= \frac{2}{3i} s^3(q,\epsilon)\tilde{v}^2(\boldsymbol{q}) \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sqrt{\mu + i0} - \sqrt{\mu - i0}}{q^2(q^2-\mu)^2\bigl(\kappa - \mathcal{N}(\mu)\bigr)}\, d\mu \\ &= -\frac{4}{3} s^3(q,\epsilon)\tilde{v}(\boldsymbol{q}) \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{q^2(q^2+\lambda)^2\bigl(\kappa - \mathcal{N}(-\lambda)\bigr)}.\end{aligned} \tag{16}$$

Далее мы будем считать, что в соотношении (11) выполнено строгое неравенство. Тогда существует β_0, такое, что

$$0 < \beta_0 \leqslant \kappa - \mathcal{N}(\mu), \quad \mu < 0,$$

в интеграле (16) можно произвести замену переменной $\lambda = q^2 t$ и получить оценку

$$|(h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}, \mathrm{K} h_{\epsilon,\boldsymbol{q}})| \leqslant \frac{4}{3} \frac{s^3(q,\epsilon)}{q^3 \beta_0} \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dt}{(1+t)^2}.$$

Теперь мы можем положить

$$s(q,\epsilon) = \begin{cases} \epsilon q, & q \leqslant P, \\ \epsilon P, & q > P, \end{cases}$$

так, чтобы радиус P отсекал рост размера $s(q,\epsilon)$ при больших q, и увидеть, что квадратичная форма $(h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}, \mathrm{K} h_{\epsilon,\boldsymbol{q}})$ ограничена на множестве функций $h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}$ при всех $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ и достаточно малых $\epsilon > 0$, не зависящих от $\boldsymbol{q}$. Кроме того, из положительности знаменателя в интеграле (16) следует, что эта квадратичная форма может принимать только отрицательные значения. Таким образом, мы показали, что оператор K, задаваемый ядром (13), является ограниченным самосопряженным оператором с неположительным спектром.

Воспользовавшись разложением Данфорда–Рисса для оператора $\mathrm{L}_\kappa^{-1/2}$ можно получить выражение для действия оператора

$-\mathrm{K}(\mathrm{I}+\mathrm{K})^{-1}$:

$$\frac{-\mathrm{K}}{\mathrm{I}+\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}+\mathrm{K}} - \mathrm{I} = \mathrm{L}^{1/4}(\mathrm{L}_\kappa^{-1/2} - \mathrm{L}^{-1/2})\mathrm{L}^{1/4}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{p^{1/2}\mathrm{R}_\mu v(p^{1/2}\mathrm{R}_{\bar\mu} v,\,\cdot\,)}{\kappa - \mathcal{N}(\bar\mu)}\,\frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}.$$

Этот оператор также является ограниченным самосопряженным оператором, но уже с неотрицательным спектром. Действие его квадратичной формы на функцию $h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}$ также преобразуется к интегралу по контуру $\mathcal{C}_-$:

$$\left(h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}, \frac{-\mathrm{K}}{\mathrm{I}+\mathrm{K}} h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}\right) = \frac{2}{3i} s^3(q,\epsilon)\tilde v^2(\boldsymbol{q})$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu + i0}} - \frac{1}{\sqrt{\mu - i0}}\right) \frac{d\mu}{q^2(q^2-\mu)^2\big(\kappa - \mathcal{N}(\mu)\big)}$$
$$= \frac{4}{3} s^3(q,\epsilon)\tilde v^2(\boldsymbol{q}) \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{q^2\sqrt{\lambda}(q^2+\lambda)^2\big(\kappa - \mathcal{N}(-\lambda)\big)}.$$

Интеграл в правой части этого выражения неотрицательный и может быть оценен как

$$(h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}, \mathrm{K} h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}) \leqslant \frac{4}{3}\frac{s^3(q,\epsilon)}{q^5\beta_0} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)^2},$$

то есть в этом случае необходимо взять

$$s(q,\epsilon) = \begin{cases} \epsilon q^{5/3}, & q \leqslant P, \\ \epsilon P^{5/3}, & q > P, \end{cases}$$

что также не противоречит условию, что $h_{\epsilon,\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})$ не пересекается с началом координат. Таким образом оператор $\mathrm{K}(\mathrm{I}{+}\mathrm{K})^{-1}$ является ограниченным самосопряженным оператором с неположительным спектром.

§4. Компактность оператора K

Непосредственное доказательство принадлежности оператора к классу Гильберта–Шмидта требует вычисления двойного интеграла по параметру резольвенты в следе K^2 и довольно длинных оценок. Поэтому, чтобы не загромождать работу, мы покажем ограниченность бо́льшей величины, которой является разность следов операторов K и $\mathrm{K}(\mathrm{I}+\mathrm{K})^{-1}$. Запишем выражения для следов этих операторов

$$\operatorname{Tr}\mathrm{K} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{(\mathrm{R}_{\bar{\mu}}v, p^{-1}\mathrm{R}_{\mu}v)}{\kappa - \mathcal{N}(\mu)}\sqrt{\mu}\,d\mu, \tag{17}$$

$$\operatorname{Tr}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{I}+\mathrm{K}} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{(\mathrm{R}_{\bar{\mu}}v, p\mathrm{R}_{\mu}v)}{\kappa - \mathcal{N}(\mu)}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}. \tag{18}$$

Для оценки данных интегралов воспользуемся формулой для производной резольвенты и вычислим скалярные произведения в подынтегральных выражениях, для первого интеграла

$$\begin{aligned}
(\mathrm{R}_{\bar{\mu}}v, p^{-1}\mathrm{R}_{\mu}v) &= \frac{\partial}{\partial\mu}(v, p^{-1}\mathrm{R}_{\mu}v) \\
&= \frac{\partial}{\partial\mu}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1-\cos\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}{p^2(p^2-\mu)}\,d^3p \\
&= 4\pi\frac{\partial}{\partial\mu}\int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{\sin px}{px}\right)\frac{dp}{p^2-\mu} \\
&= 2\pi^2\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{-\mu}} + \frac{1}{\mu x} - \frac{e^{-\sqrt{-\mu}x}}{\mu x}\right) \\
&= 2\pi^2\left(\frac{1}{2(\sqrt{-\mu})^3} - \frac{1}{\mu^2 x} + \frac{e^{-\sqrt{-\mu}x}}{\mu^2 x} + \frac{e^{-\sqrt{-\mu}x}}{2(\sqrt{-\mu})^3}\right),
\end{aligned}$$

и для второго,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{R}_{\bar{\mu}}v, p\mathrm{R}_{\mu}v) &= \frac{\partial}{\partial\mu}\big((v, p\mathrm{R}_{\mu}v) - (v, p\mathrm{R}_0 v)\big) \\
&= \frac{\partial}{\partial\mu}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{p^2-\mu} - \frac{1}{p^2}\right)(1-\cos\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\,d^3p \\
&= 4\pi\frac{\partial}{\partial\mu}\int\limits_0^\infty\left(1-\frac{\sin px}{px}\right)\frac{\mu\,dp}{p^2-\mu} \\
&= 2\pi^2\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\sqrt{-\mu} + \frac{1}{x} - \frac{e^{-\sqrt{-\mu}x}}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$= 2\pi^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{-\mu}} - \frac{e^{-\sqrt{-\mu}x}}{2\sqrt{-\mu}} \right).$$

Подставляя полученные выражения в разность следов (17), (18) и преобразуя контур интегрирования в соответствии с соотношением (15), получаем исчезающий вклад от контуров $\mathcal{C}_\infty$, а вклад от контура $\mathcal{C}_-$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\mathrm{K} - \operatorname{Tr}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{I}+\mathrm{K}} &= \operatorname{Tr}\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{I}+\mathrm{K}} \\
&= \frac{2\pi^2}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{e^{-\sqrt{-\mu}x}-1}{\mu^2 x} + \frac{e^{-\sqrt{-\mu}x}}{(\sqrt{-\mu})^3} \right) \frac{\sqrt{\mu}\,d\mu}{\kappa - \mathcal{N}(\mu)} \\
&= \frac{\pi}{i}\int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{e^{-\sqrt{-\mu}x}-1}{\mu^2 x} + \frac{e^{-\sqrt{-\mu}x}}{(\sqrt{-\mu})^3} \right) \\
&\qquad \times \left(\sqrt{\mu+i0} - \sqrt{\mu-i0} \right) \frac{d\mu}{\kappa - \mathcal{N}(\mu)} \\
&= 2\pi \int\limits_0^\infty \left(\frac{1-e^{-\sqrt{\lambda}x}}{\lambda^{3/2}x} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}x}}{\lambda} \right) \frac{d\lambda}{\kappa - \mathcal{N}(-\lambda)}.
\end{aligned}$$

Этот интеграл сходится на бесконечности, а также в нуле, при условии выполнении строго неравенства в соотношении (11).

Теперь покажем, что знаменатель $\mathrm{I}+\mathrm{K}$ в левой части вышестоящего выражения является положительным оператором. Это утверждение следует из положительности оператора $\mathrm{L}_\kappa^{1/2}$, действительно для ненулевых $f \in \mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/2})$:

$$0 < (f, \mathrm{L}_\kappa^{1/2} f) = \big(\mathrm{L}^{1/4} f, (\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{L}^{1/4} f \big), \quad f \in \mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/2}), \tag{19}$$

так как при этом, с одной стороны $f \in \mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/4})$, а с другой $\mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/2}) = \mathcal{D}[Q_\mathrm{L}] \subset \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_\kappa}] = \mathcal{D}(\mathrm{L}_\kappa^{1/2})$. Далее, так как $\mathrm{L}^{1/2} = \mathrm{L}^{1/4} \cdot \mathrm{L}^{1/4}$, то

$$\mathrm{L}^{1/4} : \mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/2}) \to \mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/4}),$$

мы можем положить $f = L^{-1/4}h$ и продолжить неравенство (19) до

$$0 < (f, \mathrm{L}_\kappa^{1/2} f) = \big(\mathrm{L}^{1/4} f, (\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{L}^{1/4} f \big) = \big(h, (\mathrm{I}+\mathrm{K})h \big), \ \ h \in \mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/4}). \tag{20}$$

Множество $\mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/4})$ всюду плотно в Гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$, оператор $\mathrm{I}+\mathrm{K}$ ограничен, а значит неравенство (20) продолжается на все пространство $L_2(\mathbb{R}^3)$. Таким образом, мы получаем, что спектр оператора $\mathrm{I}+\mathrm{K}$ положительный, лежит между точками 0 и 1 (0 не собственное значение) и имеет место неравенство

$$\operatorname{Tr}\mathrm{K}^2 \leqslant \operatorname{Tr}\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{I}+\mathrm{K}} = 2\pi\int\limits_0^\infty \left(\frac{1-e^{-\sqrt{\lambda}x}}{\lambda^{3/2}x} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}x}}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\kappa-\mathcal{N}(-\lambda)} < \infty.$$

Отсюда можно сделать вывод, что след оператора K^2 является конечной величиной, а сам оператор K является оператором Гильберта–Шмидта, то есть имеет счетное число собственных значений, суммируемых с квадратом с учетом кратностей, и соответствующее число собственных подпространств. Отметим, что при этом след оператора K не является конечным, так как интеграл от вклада первого слагаемого из (19) в след K расходится как дилогарифм верхнего предела, то есть оператор K не является ядерным (оператором со следом).

§5. Равенство областей определения ковариационных форм

Для того, чтобы доказать вложение $\mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}^{1/2}}] \subset \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_\kappa^{1/2}}]$, воспользуемя формулой (19) для последовательности $f_n \in \mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/2})$, то есть перебросим действие оператора $\mathrm{L}^{1/4}$ в левую часть скалярного произведения

$$(f_n, \mathrm{L}_\kappa^{1/2} f_n) = \big(f_n, \mathrm{L}^{1/4}(\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{L}^{1/4} f_n\big) = \big(\mathrm{L}^{1/4} f_n, (\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{L}^{1/4} f_n\big).$$

Пусть теперь f_n сходится по норме графика оператора $\mathrm{L}^{1/4}$ (норме, индуцированной квадратичной формой оператора $\mathrm{L}^{1/2}$) к произвольному элементу $f \in \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}^{1/2}}]$, так что

$$||f_n - f|| \overset{n\to\infty}{\to} 0, \quad \|\mathrm{L}^{1/4}(f_n - f)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Тогда, вследствие ограниченности оператора $\mathrm{I}+\mathrm{K}$, имеет место предел

$$\begin{aligned}&\big(f_n - f_m, \mathrm{L}_\kappa^{1/2}(f_n - f_m)\big)\\ &\qquad = \big(\mathrm{L}^{1/4}(f_n - f_m), (\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{L}^{1/4}(f_n - f_m)\big) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,\end{aligned}$$

а это значит, что последовательность f_n сходится в себе по норме, индуцированной замкнутой квадратичной формой оператора $\mathrm{L}_\kappa^{1/2}$, и, таким образом, ее предел попадает в область определения этой формы $f \in \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_\kappa^{1/2}}]$.

Из доказанного вложения и неположительности оператора K также следует полезное неравенство

$$(\mathrm{L}_\kappa^{1/4} f, \mathrm{L}_\kappa^{1/4} f) = \big(\mathrm{L}^{1/4} f, (\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{L}^{1/4} f\big) \leqslant (\mathrm{L}^{1/4} f, \mathrm{L}^{1/4} f), \quad f \in \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}^{1/2}}],$$

которое означает выполнение условия частичного упорядочивания $\mathrm{L}_\kappa^{1/2} \leqslant \mathrm{L}^{1/2}$. Неотрицательные самосопряженные операторы L_1 и L_2 считаются упорядоченными $\mathrm{L}_1 \leqslant \mathrm{L}_2$, если выполнены условия

$$\mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_2}] \subset \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_1}],$$
$$(\mathrm{L}_1^{1/2} f, \mathrm{L}_1^{1/2} f) \leqslant (\mathrm{L}_2^{1/2} f, \mathrm{L}_2^{1/2} f), \quad f \in \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_2}],$$

см., например, [14, VI.2]. Несложно заметить, что условия (4), (5) в этих терминах означают, что $\mathrm{L}_\kappa \leqslant \mathrm{L} = \mathrm{L}_\infty$. Таким образом, рассмотренный выше пример является иллюстрацией монотонности функции квадратного корня. В общем виде утверждение о монотонности квадратного корня неотрицательного самосопряженного оператора приведено в [15, ч. I.6].

Для доказательства обратного вложения $\mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_\kappa^{1/2}}] \subset \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}^{1/2}}]$ воспользуемся упомянутым в разделе 2 утверждением о том, что область определения квадратичной формы оператора Лапласа плотна в $\mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_\kappa^{1/2}}]$ по индуцированной норме [5].

Пусть

$$f_n \in \mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\mathrm{L}^{1/4}) \ \text{ и } \ f_n \to f \in \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_\kappa^{1/2}}]$$

по норме оператора $\mathrm{L}_\kappa^{1/4}$ (норме квадратичной формы оператора $\mathrm{L}_\kappa^{1/2}$). Нам достаточно показать, что f_n сходится в себе по норме оператора $\mathrm{L}^{1/4}$. Действительно, так как

$$f_n \in \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}}] \subset \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_\kappa}] = \mathcal{D}(\mathrm{L}_\kappa^{1/2}) \subset \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_\kappa^{1/2}}],$$

и если взять $h_n = \mathrm{L}_\kappa^{1/4} f_n \in L_2(\mathbb{R}^3)$, то

$$||\mathrm{L}^{1/4}(f_n - f_m)||^2 = \big(\mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/4}(h_n - h_m), \mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/4}(h_n - h_m)\big), \quad (21)$$

и при этом мы знаем, что

$$||h_n - h_m|| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Таким образом, нам достаточно доказать, что квадратичная форма, задаваемая выражением

$$Q(h) = (\mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/4} h, \mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/4} h), \quad (22)$$

ограничена. Мы знаем, что оператор $\mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/4}(\mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/4})^*$ ограничен

$$\mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/4}(\mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/4})^* = \mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/2}\mathrm{L}^{1/4} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}+\mathrm{K}},$$

так как K – это компактный оператор и весь его (дискретный) спектр лежит правее точки -1. А значит ограничены и оба сопряженных друг другу множителя $\mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/4}$ и $(\mathrm{L}^{1/4}\mathrm{L}_\kappa^{-1/4})^*$, из которых состоит $(\mathrm{I}+\mathrm{K})^{-1}$. Отсюда следует ограниченность квадратичной формы (22) и сходимость к нулю выражения (21) при $n, m \to \infty$. То есть последовательность f_n сходится в себе по норме индуцированной замкнутой положительного квадратичной формой оператора $\mathrm{L}^{1/2}$, а так как она сходится к элементу f, то значит этот элемент также лежит в области определения указанной формы. Таким образом вложение $\mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}_\kappa^{1/2}}] \subset \mathcal{D}[Q_{\mathrm{L}^{1/2}}]$ доказано.

Заключение

Мы показали, что ковариационные формы, которые могут быть использованы для построения решений уравнения на собственные состояния свободного квантового поля, являются мультипликативными возмущениями с отрицательными компактными операторами ковариационной формы квадратного корня из Лапласиана. Кроме того, было доказано, что области определения всех перечисленных выше форм совпадают, и, таким образом, для построенных по ним гауссианов может быть введено скалярное произведение в виде континуального интеграла по общей области определения. Также стоит отметить, что приведенная схема доказательств может быть применена для ковариационных форм векторных полей в калибровке Кулона и для взаимодействия с тремя источниками. Главный член асимптотики функции Неванлинны на бесконечности для соответствующих потенциалов расширений квадратичной формы Лапласиана [16], как и в (9), является логарифмом, что позволяет использовать полученные результаты в указанных выше случаях.

Благодарности. Автор признателен К. Л. Малышеву и А. Г. Пронько за полезные замечания, позволившие значительно улучшить текст статьи.

Список литературы

1. K. Symanzik, *Schrödinger representation and Casimir effect in renormalizable quantum field theory* — Nucl. Phys. B **190** (1981), 1–44.
2. M. Lüscher, *Schrödinger representations in quantum field theory* — Nucl. Phys. B **254** (1985), 52–57.
3. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом* — ДАН **137** (1961), 1011–1014.
4. R. Jackiw, *Delta function potentials in two-dimensional and three-dimensional quantum mechanics.* — In: M.A.B. Bég Memorial Volume, A. Ali, P. Hoodbhoy (eds.), World Scientific, 1991, pp. 25–42.
5. T. A. Bolokhov, *Some solutions to the eigenstate equation of free scalar quantum field theory in the Schrödinger representation* — `arXiv:2403.03049`.
6. R. Jackiw, *Functional Representation for Quantized Field.* — In: Proceedings of the 1st Asia Pacific Conference on High-Energy Physics: Superstrings, Anomalies and Field Theory (Singapore, 1987), pp. 69–108.
7. I. Gohberg, S. Goldberg, N. Krupnik, *Trace Class and Hilbert-Schmidt Operators in Hilbert Space.* — In: Traces and Determinants of Linear Operators. Operator Theory Advances and Applications, Vol. 116, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 47–90.
8. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbation of Differential Operators*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 271, Cambridge University Press, 2000.
9. V. Koshmanenko, *Singular Quadratic Forms in Perturbation Theory*, Mathematics and its Applications, Vol. 474, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
10. F. Gesztesy, E. Tsekanovskii, *On Matrix-Valued Herglotz Functions* — Math. Nachr. **218** (2000), 61–138.
11. M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy* — Acta Math. **81** (1939), 1–223.
12. F. Riesz, E. R. Lorch, *The integral representation of unbounded self-adjoint transformations in Hilbert space* — Trans. Amer. Math. Soc. **39** (1936), 331–340.
13. N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators, Vol. 1*, Interscience Publishers, New York, 1958.
14. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1980.
15. W. G. Faris, *Self-Adjoint Operators*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 433, Springer, Berlin, 1975.
16. Т. А. Болохов, *Корреляционные функции двух поперечных потенциалов со степенными сингулярностями* — Зап. научн. семин. ПОМИ **532**, (2024), 109–118.

Bolokhov T. A. Perturbations of the covariance form of the scalar field ground state.

We discuss mathematical aspects of perturbations of the covariance of a square root of Laplacian corresponding to Gaussians which satisfy eigenstate equation for the free scalar quantum field. We show that corresponding operators can be represented as multiplicative perturbations of this square root with negative self-adjoint Hilbert–Schmidt addition to the unity operator. We show that domains of the perturbed covariance form and of its counterpart for the free quantum field coincide.

Covariance forms, Schrödinger representation, ground-state Gaussian of a quantum field, singular perturbations of closed quadratic forms.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 31 октября 2025 г.