Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 547, 2025 г.

А. Л. Смирнов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ КНИГИ ДИКСОНА

§1. Введение

Отвечая на вопрос о возможных подходах к описанию рациональных точек на поверхностях типа K3, И. Р. Шафаревич посоветовал автору начать с примеров из книги Диксона по истории теории чисел. Просмотр этой книги привел к задаче о прямоугольных тетраэдрах с целыми длинами ребер. Иными словами, задача состоит в том, чтобы найти тройки целых чисел (a, b, c), для которых

$$a^2 + b^2 = \square, \quad b^2 + c^2 = \square, \quad c^2 + a^2 = \square,$$

где $\square$ — квадрат некоторого целого числа. Такие тройки будем называть эйлеровыми. Все примитивные эйлеровы тройки, для которых $0 < c < b < a \leqslant 5 \cdot 10^8$, перечислены в списке Ресты [1]. Имеется 3556 таких троек. В соответствии с положением в этом списке будем обозначать их P_1, P_2 и так далее. Например, $P_1 = (240, 117, 44)$.

С точки зрения алгебраической геометрии эйлеровым тройкам соответствуют точки проективного многообразия V, заданного уравнениями

$$v_1^2 + v_2^2 = w_3^2, \quad v_2^2 + v_3^2 = w_1^2, \quad v_3^2 + v_1^2 = w_2^2.$$

В частности, символом P_n будем обозначать не только эйлерову тройку, но и соответствующую ей точку V с положительными w_1, w_2 и w_3.

Уравнения показывают, что V — пересечение трех квадрик в $\mathbf{P}^5$. Такое пересечение в общем случае является поверхностью типа K3. Это и привлекло внимание автора.

Ключевые слова: поверхность типа K3, диофантово уравнение, тройка Эйлера, рациональная точка, рациональная кривая, эллиптическое семейство.

Диофантовы задачи для поверхностей типа K3 особенно интересны по нескольким причинам. Прежде всего они необычайно привлекательны, так как поверхности типа K3 часто заданы простыми уравнениями. Кроме того, поверхности типа K3 представляют собой наибольший вызов при переходе от диофантовых задач для кривых к диофантовым задачам для поверхностей. Наконец, теорема Матиясевича может быть истолкована как существование неодолимых препятствий для решения диофантовых задач. По мнению Ф. А. Богомолова, как его понял автор, наиболее ярко эти препятствия могут проявиться для многообразий с нулевым каноническим классом. Именно здесь "все очень индивидуально". Поверхности типа K3 как раз относятся к этому типу многообразий.

Насколько известно автору в настоящее время нет ясного плана изучения диофантовых свойств поверхностей типа K3. Например, нет ясных гипотез и не ясно, на каком языке можно сформулировать такие гипотезы. В данный момент множество $V(\mathbb{Q})$ выглядит весьма хаотическим образованием. Бросаются в глаза несколько возможностей для наведения некоторого порядка в этом хаосе. Прежде всего речь идет об автоморфизмах и их действии. Кроме того, имеется много семейств точек, параметризованных рациональными кривыми. Более того, как кривые, так и точки, можно размножать с помощью эллиптических семейств. Всем этим возможностям уделено внимание.

Заметка носит обзорный характер с небольшими авторскими добавками. В частности, исправлены некоторые опечатки в известных формулах, отождествлены некоторые рациональные кривые, рассмотрена возможность проведения рациональных кривых через рациональные точки.

Автор благодарит Ю. Чинкеля за обсуждение диофантовых свойств поверхностей типа K3.

§2. Геометрия V

Интересующее нас многообразие V (см. §1) представляет собой пересечение трех квадрик в $\mathbf{P}^5$. Гладкое пересечение такого типа является поверхностью типа K3 (см. [2]). Однако наше V имеет особенности.

2.1. Особенности. Для описания особенностей удобно использовать очевидные симметрии (см. 2.3). Утверждается, что V имеет 12 особенностей. Все они получаются из точки $[1:0:0:0:1:1]$ с помощью очевидных симметрий. Все эти особенности нодальны, то есть формальная окрестность такой точки изоморфна формальной окрестности вершины невырожденного квадратичного конуса в $\mathbf{A}^3$. Это утверждение проверяется прямым вычислением.

Отсюда вытекает, что результат однократного раздутия 12 особых точек V является поверхностью типа K3. Чтобы увидеть это, достаточно воспользоваться сведениями об особенностях Дю Валя, приведенными в [2, с. 180].

2.2. Куммеровость. Непростая задача явного построения куммеровой структуры на V решена в [3]. Приведем формулы с некоторыми исправлениями. Утверждается, что V над $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ бирационально изоморфна куммеровой поверхности S для произведения эллиптических кривых

$$E_1 : y_1^2 = x_1(x_1^2 - 4x_1 + 2) \quad \text{и} \quad E_2 : y_2^2 = x_2(x_2^2 + 8x_2 + 8).$$

Более того, E_1 и E_2 изогенны над $\mathbb{Q}$, изоморфны над $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, и обладают над $\mathbb{C}$ умножением на $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Бирационально S задана уравнением

$$y^2 = x(x^2 - 4x + 2)z(z^2 + 8z + 8).$$

Отождествление S и V получено цепочкой бирациональных отождествлений

$$V \simeq NSF_1 \simeq NSF_2 \simeq NSF_3 \simeq S. \tag{1}$$

В loc. cit. NSF_2 и NSF_3 обозначены Σ и K_1. Поверхности из (1) заданы уравнениями

$$\begin{aligned} NSF_1 :\ & x_0^2 + 4u^2 = x_2^2, \quad x_0^2 + (1-u^2)^2 = x_3^2, \\ NSF_2 :\ & t^2 = s(s + 4u^2)(s + (1-u^2)^2), \\ NSF_3 :\ & r^2 = (2p^2 - 4p + 1)(u^4 - 4pu^2 + 2p^2). \end{aligned}$$

Отождествление V и NSF_1 задано соотношениями

$$\begin{aligned} u &= v_2/(v_1 + w_3), \qquad x_0 = (1+u^2)v_3/w_3, \\ x_2 &= (1+u^2)w_1/w_3, \quad x_3 = (1+u^2)w_2/w_3 \end{aligned}$$

и обратными к ним соотношениями

$$\begin{aligned} &v_1 = 1 - u^2, \quad v_2 = 2u, \quad v_3 = x_0, \\ &w_1 = x_2, \quad w_2 = x_3, \quad w_3 = 1 + u^2. \end{aligned}$$

Как NSF_1, так и NSF_2, можно рассматривать как эллиптические u-семейства. Более того, отождествление $NSF_1 \simeq NSF_2$ из (1) сохраняет эту структуру. Смысл этой замены состоит в переходе от пары квадрик к эллиптической кривой в кубической форме. В итоге отождествление NSF_1 и NSF_2 дано соотношениями

$$s = \frac{x_3 - x_2}{z}, \quad t = \frac{N - M}{z}, \quad \text{где} \quad M = 4u^2 \quad \text{и}$$

$$N = (1 - u^2)^2, \quad z = ((M - N)x_0 + Nx_2 - Mx_3)/(MN).$$

При этом,

$$x_0 = (s + M)(t^2 - M(s + N)^2)/x_1, \quad x_2 = (s + M)(t^2 + M(s + N)^2)/x_1,$$

$$x_3 = (s + N)(t^2 + N(s + M)^2)/x_1, \quad \text{где} \;\; x_1 = 2(s + M)(s + N)t.$$

Отождествление $NSF_2 \simeq NSF_3$ из (1) указано в [3, p. 84]. А именно,

$$p = \frac{u^2 s + 2(\sqrt{2} + 1)u^2(u^2 - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)s + 2\sqrt{2}u^2(u^2 - 1)}, \quad r = \frac{2u^2(u^2 - 1)(u^2 - 3 - 2\sqrt{2})t}{((\sqrt{2} + 1)s + 2u^4 - 2u^2)^2}.$$

В loc. cit. имеется опечатка в формуле для r (в источнике это w_1).

Поверхность NSF_3 можно рассматривать как эллиптическое p-семейство. Однако при отождествлении с NSF_2 структуры семейств на этих поверхностях не связаны друг с другом. Видимо, поиск независимого семейства и привел к отождествлению V и S. Некоторые указания на это имеются в [3, p. 83].

Отождествление $NSF_3 \simeq S$ из (1) указано в [3, p. 84]. А именно,

$$x = 2p, \quad z = 2(u^2 + r - 2p - 2u^2p + 2p^2)/(p(u - 1)^2),$$

$$y = 8(u^3 + ur - 2up - 2u^2p - 4u^3p - 2rp - 2urp + 2p^2 + 8up^2 + 8u^2p^2 + 2u^3p^2 + 2rp^2 - 8p^3 - 4up^3 - 4u^2p^3 + 4p^4)/(p(u - 1)^3),$$

Отметим, что в [3, p. 84] имеется неточность в формуле для x.

2.3. Некоторые автоморфизмы. Прежде всего отметим, что бирациональные автоморфизмы поверхности типа K3 регулярны [2, 7.3, следствие 1]. Поэтому задачи описания бирациональных автоморфизмов и регулярных автоморфизмов совпадают.

Структура куммеровой поверхности на V (см. 2.2) позволяет строить много автоморфизмов V над $\mathbb{C}$. А именно, автоморфизм $E \times E$, где $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, коммутирующий с умножением на (-1), индуцирует автоморфизм куммеровой поверхности. В частности, автоморфизмы V над $\mathbb{C}$ содержат группу $GL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$.

Рассмотрим теперь автоморфизмы V над $\mathbb{Q}$. Прежде всего, отметим несколько автоморфизмов, которые будем называть очевидными. Это перестановки множества пар (v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_3, w_3) с возможной заменой знака каждой из 6 координат. Ниже замену знака i-той координаты обозначаем ε_i.

Имеются и другие, менее очевидные, автоморфизмы. Предъявим некоторые из них.

2.3.1. Инволюция Эйлера ε задана формулой

$$[v_1 : v_2 : v_3 : w_1 : w_2 : w_3] \mapsto [v_2v_3 : v_3v_1 : v_1v_2 : v_1w_1 : v_2w_2 : v_3w_3].$$

В частности, при этой инволюции,

$$P_1 \mapsto P_8, \quad P_2 \mapsto P_6, \quad P_3 \mapsto P_5, \quad P_4 \mapsto P_7, \quad P_9 \mapsto P_{19}, \quad P_{10} \mapsto P_{21},$$
$$P_{11} \mapsto P_{66}, \quad P_{12} \mapsto P_{16}, \quad P_{13} \mapsto P_{22}, \quad P_{14} \mapsto P_{40}, \quad P_{15} \mapsto P_{18}, \quad P_{17} \mapsto P_{124}$$

с точностью до очевидных автоморфизмов.

2.3.2. Инволюцию Жиля g определим как автоморфизм рационального 2-накрытия $u : V \to \mathbf{A}^2$. Формулы для нее громоздки и нет смысла их выписывать. Следуя [4, p. 69], с небольшими изменениями, построим u как композицию рационального отображения $u : V \to U^2$ и отождествления $U^2 \simeq \mathbf{A}^2$. Здесь U задано уравнением $v^2 + w^2 = 1$ в $\mathbf{A}^2$, а отождествление получено применением бирационального изоморфизма U и $\mathbf{A}^1$:

$$(v, w) \mapsto t = w/v + 1,$$
$$t \mapsto (v, w) = \left((1 - t^2)/(1 + t^2),\, 2t/(1 + t^2)\right).$$

Для построения u удобно вести на $\mathbf{A}^2$ умножение, рациональное деление и норму:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2),$$
$$(x_1, y_1)/(x_2, y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2, -x_1y_2 + y_1x_2)/(x_2^2 + y_2^2),$$
$$\|(u, w)\| = u^2 + v^2.$$

Эти формулы имитируют операции в $\mathbb{C}$. Отметим, что в соответствующей формуле в [4, p. 69] знаки расставлены иначе. Относительно этих операций U – группа, а окружность – торсер над ней. По определению

$$u : (v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3) \mapsto (P_2/P_1, P_3/P_1), \quad \text{где} \quad P_i = (v_i, w_i).$$

Корректность этого определения сводится к равенству $\|P_i\| = \|P_j\|$, вытекающему из уравнений V. Для явного описания инволюции укажем вложение $V \to \mathbf{P}^1 \times U^2$, определенное над U^2, и явно выпишем уравнение образа V. Для этого потребуется многообразие W, заданное уравнениями $v_1^2+w_1^2 = v_2^2+w_2^2 = v_3^2+w_3^2$. При этом $V \subset W$ и выделено в W уравнением $w_1^2 = v_2^2+v_3^2$. Заметим, что отображение $u : V \to U^2$ определено и на W, причем его область определения содержит общую точку V. Имеется бирациональный изоморфизм $W \to \mathbf{P}^1 \times U^2$, $(P_1, P_2, P_3) \mapsto P_1 \times (P_2/P_1, P_3/P_1)$. Обратная стрелка задана формулой $P \times (Q_2, Q_3) \mapsto (P, Q_2 \cdot P, Q_3 \cdot P)$.

Теперь выпишем уравнение V в $\mathbf{P}^1$ над базой U^2. Для согласования с loc.cit. введем "призрачные координаты", а именно углы $\alpha_i \in U$, для которых $t_i = \tan(\alpha_i/2)$. Вся тригонометрия α_i представлена рациональными функциями t_i.

Рассмотрим точку $[v_1 : w_1] \times (\alpha_2, \alpha_3)$ в $\mathbf{P}^1 \times U^2$. Чтобы понять, когда она лежит в образе V, нужно вычислить ее прообраз в W и применить к нему уравнение V. Из определения u вытекает, что $v_i = v_1 \cos\alpha_i - w_1 \sin\alpha_i$, $w_i = v_1 \sin\alpha_i + w_1 \cos\alpha_i$. Уравнение, выделяющее V в W, превращается в уравнение

$$\begin{aligned} v_1^2 \left(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3\right) - v_1 w_1 \left(\sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_3\right) \\ + w_1^2 \left(\sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3 - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Инволюция Жиля сохраняет функции, пришедшие с $U^2 \simeq \mathbf{A}^2$ с помощью отображения u, и меняет местами корни этого квадратного уравнения.

Заметим, что инволюция g не коммутирует с некоторыми очевидными автоморфизмами. Например, $\varepsilon_1 g P_1 = [0, -3, -4, 5, 4, 3]$, а

$$g\varepsilon_1 P_1 = [-20148000,\ 3542877,\ -227616,\ 4211045,\ 20276164,\ 20457123].$$

Возможно, $g\varepsilon_1$ автоморфизм бесконечного порядка. По меньшей мере, координаты точки $(g\varepsilon_1)^2 P_1$ огромны. Например, $v_1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 1033 \cdot 7577 \cdot 13841 \cdot 10058303 \cdot 7031742469 \cdot 45324062261$.

2.3.3. Много автоморфизмов бесконечного порядка можно получить из структуры эллиптической поверхности с сечениями бесконечного порядка. Такие структуры указаны в 4.1. Автоморфизмы представлены сдвигами на такие сечение.

§3. Рациональные кривые

Изучение рациональных кривых на поверхностях типа К3 на редкость увлекательный и содержательный сюжет. Это относится и к нашей поверхности V.

Рациональные кривые удобно описывать с помощью параметризации $\mathbf{P}^1 \to V$. Допуская вольность речи, будем говорить о кривых там, где следовало бы говорить о параметризованных кривых. При этом кривые, отличающиеся автоморфизмом $\mathbf{P}^1$, следует считать эквивалентными. Однако для нашей конкретной поверхности V удобно расширить это понятие. А именно, будем считать, что очевидные автоморфизмы V (см. 2.3) сохраняют эквивалентность кривых.

На V имеется очевидные рациональные кривые, лежащие в подмногообразии $v_1v_2v_3 = 0$. Ниже мы увидим, однако, что с помощью автоморфизмов из таких кривых можно получить и весьма неочевидные кривые (см. 3.1.2).

3.1. Кривая Саундерсона S. Эта кривая предъявлена в 1740 году [5, p. 497]. Для ее построения рассмотрим конику C, заданную уравнением $a^2+b^2=c^2$ (будем иногда называть такую конику пифагоровой), и отображение $C \to \mathbf{P}^2$, определенное формулами

$$v_1 = 4abc, \quad v_2 = a(4b^2 - c^2), \quad v_3 = b(4a^2 - c^2).$$

Подъем этого отображения в V и дает S. Параметризуем S с помощью стандартной параметризации C, а именно $a = 2t$, $b = t^2 - 1$, $c = t^2 + 1$. Тогда

$$v_1 = 8(t^5 - t), \quad v_2 = 6t^5 - 20t^3 + 6t, \quad v_3 = -t^6 + 15t^4 - 15t^2 + 1.$$

Возможные подъемы в V отличаются друг от друга очевидными автоморфизмами. Для определенности выберем один из них, а именно

$$w_1 = (t^2+1)^3, \quad w_2 = (t^2-1)(t^4+18t^2+1), \quad w_3 = 10t^5 - 12t^3 + 10t.$$

Список троек на кривой Саундерсона и ее эквивалентах начинается с P_1, P_{11}, P_{17}, P_{25}, P_{46}, P_{51}, P_{53}. Например, эйлеровы тройки P_1 и P_{11} происходят из пифагоровых троек $(3,4,5)$ и $(5,12,13)$.

3.1.1. Отметим, что эта же кривая найдена в записной книжке Эйлера с номером 131 (см. [6, с. 91]). Записи в этой книжке относятся к периоду 1736–1740 годов [7, с. 69]. Таким образом, вероятно, Эйлер открыл кривую S не позднее Саундерсона.

3.1.2. С точностью до очевидного автоморфизма кривую Сандерсона можно получить инволюцией Жиля (см. 2.3.2) из очевидной кривой $v_1 = 2t$, $v_2 = t^2 - 1$, $v_3 = 0$, $w_1 = t^2 - 1$, $w_2 = 2t$, $w_3 = t^2 + 1$.

3.1.3. Применение инволюции Эйлера к кривой Саундерсона приводит к кривой

$$v_1 = 3t^8 - 52t^6 + 146t^4 - 52t^2 + 3, \quad w_1 = 4(t^2 + 1)^4,$$
$$v_2 = 4t^8 - 56t^6 + 56t^2 - 4, \quad w_2 = (t^2 - 3)(3t^2 - 1)(t^4 + 18t^2 + 1),$$
$$v_3 = 24t^7 - 56t^5 - 56t^3 + 24t, \; w_3 = (t^2 - 4t + 1)(t^2 + 4t + 1)(5t^4 - 6t^2 + 5).$$

На кривой εS и ее эквивалентах лежат точки P_8, P_{66}, P_{124}.

3.1.4. Применение композиции инволюции Жиля g и некоторых очевидных автоморфизмов позволяет получить из S несколько кривых относительно небольшой степени. Например, кривая $g\varepsilon_2 S$ задана формулами

$$v_1 = 24t^{13} + 352t^{11} - 1416t^9 + 1416t^5 - 352t^3 - 24t,$$
$$v_2 = 10t^{13} - 356t^{11} - 2026t^9 + 4872t^7 - 2026t^5 - 356t^3 + 10t,$$
$$v_3 = -t^{14} + 107t^{12} - 1465t^{10} + 2523t^8 - 2523t^6 + 1465t^4 - 107t^2 + 1.$$

На ней лежат точки P_{181}, P_{257}, P_{3062}.

3.2. Кривые Бремнера. В [8, p. 120] построено пять рациональных кривых на V. Обозначим их в порядке расположения B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5. Ниже увидим, что кривая B_3 эквивалентна B_2, а кривые B_4 и B_5 эквивалентны B_1.

3.2.1. Кривая B_1 определена формулами

$$v_1 = 4(2t - 1)(t^2 - 2t - 1)(t^3 + t^2 - t + 1),$$
$$v_2 = (t - 1)^2(t + 3)(t^2 - 2t - 1)(t^3 + t^2 + 3t - 1),$$
$$v_3 = 2t(t - 1)(t + 1)(t + 3)(2t - 1)(t^2 - t + 2).$$

Для определенности, положим

$$w_1 = (t - 1)(t + 3)(t^6 - 2t^5 + 9t^4 + t^2 - 2t + 1),$$
$$w_2 = 2(2t - 1)(t^6 + 2t^5 - 4t^3 + 5t^2 + 2t + 2),$$
$$w_3 = (t^2 - 2t - 1)(t^6 + 2t^5 - t^4 + 19t^2 - 18t + 5).$$

Рациональные точки B_1 приводят к тройкам P_1, P_2, P_3, P_4, P_9, P_{27}, P_{31}, P_{35}, P_{39}, P_{41}, P_{56}. Чтобы получить из B_1 кривые B_4 и B_5 достаточно вместо t подставить $1-t$ и $2/t$.

3.2.2. Кривая B_2 определена формулами

$$\begin{aligned}
v_1 &= 4(2t^2+2t-1)(3t^2-2t+1)(t^3+3t^2-t-1),\\
v_2 &= (t+1)(t^2+6t-3)(3t^2-2t+1)(t^3-t^2-5t+1),\\
v_3 &= 2t(t-1)(t^2+t+2)(t^2+6t-3)(2t^2+2t-1).
\end{aligned}$$

Рациональные точки B_2 приводят к тройкам P_1, P_7, P_{13}, P_{16}, P_{44}, P_{57}. Чтобы получить из B_2 кривую B_3 достаточно вместо t подставить $(-1-t)$.

3.2.3. Кривая gB_1, где g инволюция Жиля, определена формулами

$$\begin{aligned}
v_1 &= -16t^7+96t^6-340t^5+756t^4-720t^3+120t^2+132t-44,\\
v_2 &= t^8-8t^7-22t^6+112t^5+44t^4-432t^3+446t^2-24t-117,\\
v_3 &= -12t^7+62t^6-4t^5-380t^4+972t^3-1362t^2+964t-240.
\end{aligned}$$

Оказывается, что gB_1 эквивалентна кривой B_1. Чтобы получить из B_1 кривую gB_1 достаточно вместо t подставить $(t-4)/(2t-1)$.

3.2.4. Кривая εB_1 определена формулами

$$\begin{aligned}
v_1 &= t(t-1)^2(t+1)(t+3)(t^2-t+2)(t^3+t^2+3t-1),\\
v_2 &= 4t(t+1)(2t-1)(t^2-t+2)(t^3+t^2-t+1),\\
v_3 &= 2(t-1)(t^2-2t-1)(t^3+t^2-t+1)(t^3+t^2+3t-1).
\end{aligned}$$

Рациональные точки εB_1 приводят к тройкам P_5, P_6, P_7, P_8, P_{19}, P_{61}.

3.2.5. Оказывается, что кривая gB_2, где g инволюция Жиля, эквивалентна кривой B_2. Чтобы получить из B_2 кривую gB_2 (с точностью до очевидного автоморфизма) достаточно вместо t подставить $t/(2t-1)$.

3.2.6. Кривая εB_2 определена формулами

$$\begin{aligned}
v_1 &= t^{10}+6t^9-8t^8-36t^7-26t^6-4t^5+72t^4+28t^3-39t^2+6t,\\
v_2 &= 8t^9+32t^8+20t^7-12t^6-56t^5-48t^4+52t^3+12t^2-8t,\\
v_3 &= 6t^9+14t^8-52t^7-104t^6+48t^5+52t^4-44t^3+8t^2+10t-2.
\end{aligned}$$

Рациональные точки εB_2 приводят к тройкам P_4, P_8, P_{12}, P_{22}.

3.3. Кривые Нарумийи–Шиги. В [3, p. 85, Proposition 2.2] построено четыре рациональные кривые на V. Обозначим их в порядке расположения NS_1, NS_2, NS_3 и NS_4. Ниже увидим, что кривые NS_3 и NS_4 эквивалентны.

3.3.1. Кривая NS_1 определена формулами

$$\begin{aligned}
v_1 &= -2(t^2-4t+5)^2(t^2-5t+5)(t^2-5),\\
v_2 &= -4t(t-2)(2t-5)(t^2-4t+5)(t^2-5t+5),\\
v_3 &= t(t-1)(t-2)(t-3)(t-5)(2t-5)(3t-5).
\end{aligned}$$

Рациональные точки NS_1 приводят к тройкам P_2, P_6, P_{23}, P_{38}, P_{45}, P_{54}, P_{65}. Оказывается, что кривая εNS_1, где ε инволюция Эйлера, эквивалентна кривой NS_1. Чтобы получить из NS_1 кривую εNS_1 (с точностью до очевидного автоморфизма) достаточно вместо t подставить $(t-5)/(t-3)$.

Применяя композицию инволюции Жиля и очевидных автоморфизмов, можно получить несколько кривых. Все они имеют высокую степень, кроме $g\varepsilon_2 NS_1$ и $g\varepsilon_3 NS_1$. Можно показать, что эти две кривые эквивалентны. Приведем формулы, определяющие $g\varepsilon_2 NS_1$.

$$\begin{aligned}
v_1 = {}&-8t^{12}+216t^{11}-2608t^{10}+18544t^9-85970t^8+271274t^7-588420t^6\\
&+859370t^5-787000t^4+356750t^3+32500t^2-106250t+31250,\\
v_2 = {}&32t^{10}-736t^9+7480t^8-44112t^7+166460t^6-417060t^5+694000t^4\\
&-739500t^3+457500t^2-125000t,\\
v_3 = {}&-8t^{11}+212t^{10}-2496t^9+17256t^8-77918t^7+241329t^6-522070t^5\\
&+783150t^4-783250t^3+473125t^2-131250t.
\end{aligned}$$

Рациональные точки $g\varepsilon_2 NS_1$ приводят к тройкам P_1, P_4, P_{26}, P_{63}.

3.3.2. Кривая NS_2 определена формулами

$$\begin{aligned}
v_1 &= -8t(2t^2+1)(48t^8-16t^6+4t^2-3),\\
v_2 &= (4t^4-12t^2+1)(48t^8-16t^6+4t^2-3),\\
v_3 &= 4(64t^{12}-80t^{10}+80t^8-120t^6+20t^4-5t^2+1).
\end{aligned}$$

Рациональные точки NS_2 приводят к тройкам P_5, P_{299}, P_{500}. Кривая εNS_2 имеет степень 16 и приводит к тройкам P_3, P_{1077}, P_{1236}.

3.3.3. Кривая NS_3 параметризована коникой $b^2 = 2a^2 + 2$. Сначала параметризуем эту конику с помощью $\mathbf{P}^1$ и точки $(-1, -2)$:

$$\begin{aligned}
&a = \frac{1+2t-t^2}{1-2t-t^2}, \quad b = \frac{2(t^2+1)}{1-2t-t^2},\\
&v_1 = 2b(4a^4+3a^2+1)(4a^4+a^2-1),\\
&v_2 = 4ab(2a^2+1)(4a^4+a^2-1),\\
&v_3 = (2a^2+1)(16a^8+8a^6-15a^4-10a^2+1).
\end{aligned}$$

NS_3 имеет степень 20 и приводит к тройкам P_{1053}, P_{2873}. Чтобы получить NS_4 из NS_3 (с точностью до очевидного автоморфизма) надо вместо t подставить $2t + 1$.

§4. Эллиптические семейства

Структура эллиптического семейства на V доставляет еще несколько возможностей размножать рациональные точки и рациональные кривые. Например, можно изучать особые слои и сечения. Ниже рассмотрены некоторые семейства с ненулевым рангом группы рациональных сечений.

4.1. Семейства Бремнера. В [8] на поверхности V построены структуры эллиптического семейства $E_1, \dots, E_{11}$. Обозначим их $BF_1, \dots, BF_{11}$, соответственно. Рассмотрим первое и третье семейства. Для этого нам потребуется промежуточная поверхность W (см. [8, p. 106]), заданная уравнением

$$(x^2-y^2)(z^2-t^2) = 2yz(x^2-t^2),$$

и бирациональное отождествление V и W, заданное формулами

$$\begin{aligned}
x &= (v_3+w_1)(v_3+w_2), \qquad y = v_1(v_3+w_1),\\
z &= (v_1+w_3)(v_3+w_2), \qquad t = v_2(v_3+w_2).
\end{aligned}$$

Обратное преобразование задано формулами

$$\begin{aligned}
&v_1 = x(z^2-t^2), &&w_1 = z(x^2+t^2),\\
&v_2 = 2xzt, &&w_2 = (x^2-t^2)z + (z^2-t^2)y,\\
&v_3 = z(x^2-t^2), &&w_3 = x(z^2+t^2).
\end{aligned}$$

4.1.1. Семейство BF_1 (см. [8, p. 108]) задано уравнением

$$v^2 = u^3 + (q^4 - 4q^3 + 8q^2 - 4q + 1)u^2 - 8q^3(q-1)^2u.$$

Бирациональное отождествление W и BF_1 задано формулами

$$\begin{aligned} x &= v + u + 2q^3(q-1)(q-2), \\ y &= (q-1)((2q-1)u - v - 2q^3(q-2)), \\ z &= \frac{2(q-1)u(u+q^2(q-2)^2)^2}{q((q-2)v-(2q^2-3q+2)u)}, \\ t &= 2(q-1)(u+q^2(q-2)^2). \end{aligned}$$

Обратное преобразование задано формулами

$$\begin{aligned} q &= \frac{x-y}{x-t}, \qquad u = \frac{2q(q-1)((q-2)x-qt)z}{t^2}, \\ v &= \frac{(2(q-1)x-t)u + 2q^2(q-1)(q-2)((q-2)x-qt)}{t}. \end{aligned}$$

Группа $BF_1(K)$, где $K = \mathbb{Q}(q)$, содержит подгруппу

$$\mathbb{Z}/2 \cdot T \oplus \mathbb{Z} \cdot R_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot R_2,$$

где $T = [0,0]$, $R_1 = [2q^2, 2q^2(q^2-4q+1)]$, $R_2 = [-2q^2, 2q^2(q^2-1)]$. Возможно, это включение на самом деле является равенством. Есть и другие сечения, заданные простыми формулами. Например,

$$\begin{aligned} R_1 + T &= [-4q(q-1)^2, 4q(q-1)^2(q^2-4q+1)], \\ R_2 + T &= [4q(q-1)^2, 4q(q-1)^3(q+1)], \\ R_1 + R_2 &= [-q^2(q-2)^2, -q^2(q-2)(2q^2-3q+2)], \\ R_1 - R_2 &= [-(2q-1)^2, q(2q-1)(2q^2-3q+2)]. \end{aligned}$$

Перенос R_1 на V дает эквивалент кривой εB_2, R_2 приводит к эквиваленту εB_1, $R_1 - R_2$ приводит к эквиваленту εB_2, $R_1 + T$ приводит к эквиваленту B_2, $R_2 + T$ приводит к эквиваленту B_1, $-R_1$ и $-R_2$ приводят к очевидным пифагоровым коникам.

4.1.2. Семейство BF_3 (см. [8, p. 110]) задано уравнением

$$\begin{aligned} v^2 = {} & u^3 + q(q-1)(q^3 + 4q^2 - 12q + 4)u^2 \\ & - q^3(q-1)^2(q-4)(q^4-4q^3+8q-4)u - q^4(q-1)^3(q^4-4q^3+8q-4)^2. \end{aligned}$$

Бирациональное отождествление W и BF_3 задано формулами

$$\begin{aligned} x &= q(q-1)(q^6-5q^5+4q^4+8q^3-12q^2+4q+(q-2)u),\\ y &= q^2(q-1)(q^5-5q^4+4q^3+8q^2-12q+4-u),\\ z &= 2(q-1)^2u, \quad t=-v. \end{aligned}$$

Обратное преобразование задано формулами

$$q=\frac{x-y}{z}, \qquad u=\frac{q^2(q-1)(q^4-4q^3+8q-4)z}{2(q-1)x-q(q-2)z},$$
$$v=\frac{-2q^2(q-1)^3(q^4-4q^3+8q-4)\,t}{2(q-1)x-q(q-2)z}.$$

Группа $BF_3(K)$, где $K=\mathbb{Q}(q)$, равна (см. [8, p. 119])

$$\mathbb{Z}\cdot R_1\oplus\mathbb{Z}\cdot R_2$$

где $R_2=[-q^5+q^4+2q^3-2q^2,\,2q^7-6q^6+2q^5+10q^4-12q^3+4q^2]$,

$$\begin{aligned} R_1=[&q^5-5q^4+4q^3+8q^2-12q+4,\,-2q^7+14q^6-30q^5+10q^4\\ &+48q^3-72q^2+40q-8]. \end{aligned}$$

R_1 и R_2 приводят к пифагоровой конике.

4.2. MSZ-семейство. Следуя [9, 3, (3)], рассмотрим семейство $MSZF$, заданное уравнением

$$y^2=(q^4+1)x^4-4q^2x^2+(q^4+1).$$

Имеется рациональное 2-накрытие $MSZF\to V$, заданное формулами

$$\begin{aligned} &v_1=2qx, \quad v_2=x^2-q^2, \quad v_3=q^2x^2-1,\\ &w_1=y, \quad w_2=q^2x^2+1, \quad w_3=x^2+q^2. \end{aligned}$$

Таким образом, кривые и точки на $MSZF$ дают кривые и точки на V.

Используя сечение $x=q$ и $y=q^4-1$ и метод из [10, p. 35], $MSZF$ можно отождествить с эллиптической кривой E_q, заданной уравнением

$$s^2+a_1rs+a_3s=r^3+a_2r^2+a_4r+a_6,$$

где

$$\begin{aligned} &a_1=4q^3/(q^4-1), \quad a_2=-4q^2(q^4+1)/(q^4-1)^2,\\ &a_3=-8q(q^4+1)/(q^4-1)^3,\\ &a_4=4(q^4+1)(3q^4-1)/(q^4-1)^4, \quad a_6=0. \end{aligned}$$

Отождествление $MSZF$ и E_q задано формулами

$$r = \frac{2q^2(q^4+1)u^2 + 2(q^4-1)(2q^3u + y + q^4 - 1)}{(q^4-1)^2u^2}, \quad s = \frac{2r}{u},$$

где $u = x - q$. Наоборот

$$x = u + q, \quad y = (q^4-1)u^2(g(u) + 2h(u)/r),$$

где

$$g(u) = \frac{q^2(q^4+1)u^2 + 2q^3(q^4-1)u + (q^4-1)^2}{(q^4-1)^2u^2},$$

$$h(u) = \frac{(-3q^8 - 2q^4 + 1)u - 4q(q^8-1)}{(q^4-1)^4u}, \quad u = \frac{2r}{s}.$$

Группа $E_q(K)$, где $K = \mathbb{Q}(q)$, содержит подгруппу

$$\mathbb{Z}/2 \cdot T_1 \oplus \mathbb{Z}/2 \cdot T_2 \oplus \mathbb{Z} \cdot R,$$

где $R = [2(q^4+4q^2+1)/(q^4-1)^2, -4q(q^4+4q^2+1)/((q^2-1)(q^4-1)^2)]$ и

$$T_1 = [4q^2/(q^4-1)^2,\ -4q/(q^4-1)^2],$$

$$T_2 = [(q^4+1)^2/(q^2(q^4-1)^2),\ -(q^4+1)^2/(q^3(q^4-1)^2)].$$

Из точки R получается очевидная пифагорова коника на V, из $2R$ получаем 2-накрытие кривой Саундерсона. Из точки $3R$ получаем кривую 28 степени, не проходящую через малые точки.

§5. Точки и кривые

Как видно из предыдущего обсуждения, на V несложно построить бесконечно много рациональных кривых. Для этого достаточно взять рациональное сечение бесконечного порядка эллиптического семейства на V и рассмотреть все сечения кратные ему. Например можно взять сечение R_1 семества BF_1 (см. 4.1.1). Трудность состоит в том, чтобы найти сечения небольших степеней. Перечислим известные рациональные кривые степени $\leqslant 12$ с точностью до эквивалентности (см. §3). Это S, NS_1, εS, B_1, B_2, εB_1, εB_2, NS_2, $g\varepsilon_2 NS_1$. Их степени 6, 7, 8, 8, 8, 10, 10, 12 и 12, соответственно.

В [8] поставлен вопрос о существовании неочевидных рациональных кривых степени $\leqslant 5$ и единственности рациональной кривой 6-той степени. Видимо, этот вопрос еще не решен.

Один из ясных вопросов о диофантовых свойства поверхностей типа K3 был поставлен Богомоловым (см. [11]). А именно, верно ли, что любая точка поверхности типа К3, определенной над полем всех алгебраических чисел, лежит на некоторой рациональной кривой? Можно протестировать этот вопрос с помощью рациональных точек на V. Утверждается, что из точек $P_1, \dots, P_{27}$ все, кроме, возможно, P_{14}, P_{15}, P_{18}, P_{20} и P_{24}, лежат на рациональных кривых.

В самом деле, чтобы получить точки P_1, P_{11}, P_{17} и P_{25}, достаточно рассмотреть кривую S при $t = 3, 4, 5, 7$. Чтобы получить точки P_2, P_3, P_4, P_9, P_{27}, достаточно рассмотреть кривую B_1 при $t = -2/3, -2$, $2, -1/2$, $2/3$. Чтобы получить точки P_5, P_6, P_7, P_8, P_{19}, достаточно рассмотреть кривую εB_1 при $t = -2, -2/3$, 2, $4, -1/2$. Чтобы получить точки P_{12}, P_{22}, достаточно рассмотреть кривую εB_2 при $t = 2$, 3. Чтобы получить точки P_{13}, P_{16}, достаточно рассмотреть кривую B_2 при $t = 3$, 2. Чтобы получить точку P_{23}, достаточно рассмотреть кривую NS_1 при $t = 4/3$. Чтобы получить точку P_{26}, достаточно рассмотреть кривую $g\varepsilon_2 NS_1$ при $t = 7/2$.

Несколько особняком в этом ряду стоят точки P_{10} и P_{21}. Кривая, которую мы проведем через точку P_{10}, имеет степень 18 и нет смысла выписывать ее явно. Она совпадает с сечением $2R_1$ эллиптичесгого семейства BF_3 (см. 4.1.2). Это сечение проходит через P_{10} при $q = 27/242$. Что касается точки P_{21}, то она получается с помощью инволюции Эйлера из P_{10}. Поэтому P_{21} лежит на рациональной кривой $\varepsilon(2R_1)$. Это кривая степени 16.

Список литературы

1. G. Resta, *The* 3556 *primitive bricks with* $c < b < a < 5 \times 10^8$, available at `https://oeis.org/A031173`.
2. В. А. Исковских, И. Р. Шафаревич, *Алгебраические поверхности.* — Итоги науки и техники, **35** (1989) 131–263.
3. N. Narumiya, H. Shiga, *On Certain Rational Cuboid Problems.* — Nihonkai Math. J., **12** (2001) 75–88.
4. C. Gill, *Application of the Angular Analysis to the Solution of Indeterminate Problems of the Second Degree*, New York, 1848.
5. L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. 2, Diophantine Analysis, Carnegie Inst. Washington, 1920.
6. Г. П. Матвиевская, Ю. Х. Копелевич, Н. И. Невская, Е. П. Ожигова, *Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел*, Наука, СПб, 1997.
7. Г. К. Михайлов, *Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР*, Историко-математические исследования, 1957, вып. 10, 67–94.
8. A. Bremner, *The rational cuboid and a quartic surface.* — Rocky Mountain J. Math., **18**, No. 1 (1988).

9. D. Moody, M. Sadek, A. Zargar, *Families of elliptic curves of rank* $\geqslant 5$ *over* $\mathbb{Q}(t)$. — Rocky Mountain J. Math., **49**, No. 7 (2019).
10. J. W. S. Cassels, *Lectures on elliptic curves.* — London Mathematical Society Student Texts, **24**, Cambridge University Press, 1991.
11. F. Bogomolov, Y. Tschinkel, *Rational curves and points on* K3 *surfaces.* — Amer. J. Math.. **127**, No. 4 (2005), 825–835.

Smirnov A. L. On a problem from the Dickson book.

We study diophantine properties of a K3 surface representing the tetrahedrons with integer edges. A survey of known results is given and inaccuracies in known formulas are corrected. We compare certain known rational curves, and explore relations between rational curves and rational points.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 30 сентября 2025 г.