Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 547, 2025 г.

В. Г. Журавлев

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Введение

0.1. Симплициальные алгоритмы. В [1] и [2] изложена теория диофантовых приближений, построенная на основе торических ядерных разбиений. Выделены два направления: совместные приближения нескольких чисел и приближения линейных форм. Для первого типа приближений построен симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби [3], а для второго – симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел [4].

Исторически особый интерес вызывают периодические разложения в обычные [5, 6], двумерные [7, 8] и более общие многомерные цепные дроби [9, 10]. Именно такие разложения рассматриваются в настоящей работе.

0.2. Принцип переноса Хинчина. Указанный принцип, иногда называемый теоремами переноса, позволяет связывать совместные приближения нескольких чисел $l(x) = \{l_k(x); k = 1, \ldots, d\}$ с приближениями соответствующих (двойственных) линейных форм $L(X)$ [11] (см. также более развернутое изложение в [12], гл. V).

Разложения в многомерные периодические цепные дроби

$$M_{\rm per} \,|_u \twoheadrightarrow \alpha \tag{0.1}$$

с $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ задаются унимодулярным базисом u, центрированным аппроксимируемой точкой α и матрицей периода $M_{\rm per}$ – унимодулярной матрицей с неотрицательными элементами. Через ее собственные значения описываются как свойства совместных приближений $l(x)$ (теорема 4.2), так и приближений двойственной линейной формой $L(X)$ (теорема 6.1).

Обнаруженная связь двух различных видов приближений $l(x)$ и $L(X)$ посредством одной связывающей их матрицы $M_{\rm per}$ вскрывает истинный механизм принципа переноса, открытого Хинчиным.

Ключевые слова: многомерные цепные дроби, наилучшие приближения, принцип переноса Хинчина.

0.3. Блочные и треугольные матрицы периодов. Подробно рассмотрены блочные матрицы $M_\square$ и треугольные матрицы $M_\triangle$ – простейшие матрицы периодов. Для них удается явным образом (теоремы 7.1 и 8.1) описать условия представимости точки α через ее разложение (0.1) в многомерную периодическую цепную дробь с заданной матрицей периода M_{per}. Более того, соответствующие подходящие приближения вычисляются через рекурреные соотношения (предложения 7.1 и 8.1) аналогично тому, как это делается в случае обычных цепных дробей [5].

§1. Дифференцирование центрированных унимодулярных базисов

1.1. Центрированные унимодулярные базисы. Пусть

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \\ e_{d+1} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $e_1 = (1, \ldots, 0, 0), \quad \ldots\ldots, \quad e_d = (0, \ldots, 1, 0), \quad e_{d+1} = (0, \ldots, 0, 1)$, – *единичный базис* суперпространства $\mathbf{S}$. Он является *унимодулярным базисом*. Обозначим через

$$\angle\,\mathbf{S} = \{x = (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbf{S} : \ x_1 \geqslant 0, \ldots, \ x_d \geqslant 0, \ x_{d+1} \geqslant 0\} \tag{1.2}$$

положительный многогранный конус, все ребра которого направлены вдоль векторов (1.1). При рассмотрении векторов в $\mathbf{S}$ будем выделять их $(d+1)$-ую кординату, которой в дальнейшем принадлежит особая роль.

Кроме единичного базиса (1.1) будем рассматривать также и произвольные *унимодулярные базисы*

$$u = \{u_1, \ldots, u_d, u_{d+1}\} \tag{1.3}$$

пространства $\mathbf{S}$, т. е. базисы из целочисленных векторов

$$u_1, \ldots, u_d, u_{d+1} \ \in \ \mathbb{Z}^{d+1} \tag{1.4}$$

с определителем

$$\det U = \pm 1 \tag{1.5}$$

матрицы

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \\ u_{d+1} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

строки которой – это координаты векторов $u_1, \ldots, u_d, u_{d+1}$. Условия (1.4), (1.5) эквивалентны *унимодулярности*

$$U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$$

матрицы (1.6). Относительно базиса (1.3) предположим, что все его векторы принадлежат конусу (1.2), т. е.

$$u_1, \ldots, u_d, u_{d+1} \in \angle\,\mathbf{S}. \tag{1.7}$$

В этом же конусе фиксируем некоторый вектор

$$\widehat{\alpha} = (\alpha, 1) \in \angle\,\mathbf{S}, \tag{1.8}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ – иррациональная точка, т. е.

$$\textit{числа} \quad 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \quad \textit{линейно независимы над} \quad \mathbb{Z}. \tag{1.9}$$

В определении (1.9) кольцо целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$ можно заменить полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Из (1.8) и (1.9), в частности, следуют неравенства $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_d > 0$.

Скажем, что базис (1.3) центрирован лучом $\widehat{\alpha}_{\geqslant 0} = \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cdot \widehat{\alpha}$, если этот луч принадлежит внутренности $\angle^{\mathrm{int}} u$ *конуса*

$$\angle\, u = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_d u_d + \lambda_{d+1} u_{d+1};\ \text{все}\ \lambda_k \geqslant 0\},$$

порождаемого векторами базиса (1.3). Базис

$$u_{\widehat{\alpha}} = \{u_1, \ldots, u_d, u_{d+1}\} \tag{1.10}$$

назовем *центрированным унимодулярным базисом* или, кратко, *CU-базисом*, а луч $\widehat{\alpha}_{\geqslant 0}$ – *центририрующим лучом.*

1.2. Дифференцирование центрированных базисов. Обозначим через $\mathfrak{S}$ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{1, \ldots, d, d+1\}$.

Определим операцию *дифференцирования*

$$\sigma :\ u_{\widehat{\alpha}} \ \to\ u_{\widehat{\alpha}}^{\sigma} \tag{1.11}$$

центрированных базисов (1.10). *Геометрический смысл* дифференцирований CU-базисов $u_{\widehat{\alpha}}$ состоит в следующем. Пусть σ' – дополнительное сочетание к $\sigma \in \mathfrak{S}$. Обозначим через $\widehat{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в $\mathbb{R}^{d+1}$, содержащую луч $\widehat{\alpha}_{\geqslant 0}$ и векторы $u_{k'_j}$ из $u_{\widehat{\alpha}}$ с индексами k'_j из σ'.

Если, допустим, для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вектор $\widehat{v}_{k_1}$ и сумма векторов $\widehat{v}_{k_1} + \widehat{v}_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\widehat{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования $u_{\widehat{\alpha}} \xrightarrow{\sigma} u^{\sigma}_{\widehat{\alpha}}$ сводится к замене вектора u_{k_2} на сумму $u_{k_1} + u_{k_2}$.

В [3] доказаны следующие утверждения.

Предложение 1.1. *Если центрирующий луч* $\widehat{\alpha}_{\geqslant 0} = \mathbb{R}_+ \cdot \widehat{\alpha}$ *иррациональный* (1.9)*, то любой центрированный унимодулярный базис* $u_{\widehat{\alpha}}$ (1.10)*, центрированный лучом* $\widehat{\alpha}_{\geqslant 0}$*, обладает свойствами:*

1) *базис* $u_{\widehat{\alpha}}$ *является бесконечно дифференцируемым;*

2) *для любого* $\sigma \in \mathfrak{S}$ *производное множество векторов* $u^{\sigma}_{\widehat{\alpha}}$ *снова образует унимодулярный базис, центрированный лучом* $\widehat{\alpha}_{\geqslant 0}$. □

§2. Полугруппы дифференцирований и специализаций и их матричные реализации

2.1. Специализации. Заметим, что дифференцирование

$$\sigma : u \to u^{\sigma} \tag{2.1}$$

определено не на множестве обычных базисов u, а только на множестве центрированных базисов $u_{\widehat{\alpha}}$ из (1.10). Чтобы определить дифференцирования базисов (2.1), нужно рассмотреть *специализации*

$$\sigma_* = \sigma^{k_1,k_2}_{k_1} \quad \text{и} \quad \sigma_* = \sigma^{k_1,k_2}_{k_2} \tag{2.2}$$

дифференцирований σ, действующие

$$\sigma_* : u \to u^{\sigma_*} \tag{2.3}$$

по формуле $\sigma_* : u \to u^{\sigma_*} = \{u^{\sigma_*}_1, \dots, u^{\sigma_*}_d, u^{\sigma_*}_{d+1}\}$, где

$$u^{\sigma_*}_{k_1} = u_{k_1}, \quad u^{\sigma_*}_{k_2} = u_{k_1} + u_{k_2}$$

для первого случая (2.2),

$$u^{\sigma_*}_{k_1} = u_{k_1} + u_{k_2}, \quad u^{\sigma_*}_{k_2} = u_{k_2}$$

для второго случая (2.2) и

$$u^{\sigma_*}_{k'} = u_{k'} \ \text{для остальных} \ k' \neq k_1, k_2.$$

2.2. Матрицы специализаций. Запишем базисы u в виде столбцов

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \\ u_{d+1} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Тогда действия (2.3) специализации $\sigma_{k_1}^{k_1,k_2}$ с номерами $k_1 < k_2$ можно записать в матричном виде

$$u^{\sigma_{k'}^{k_1,k_2}} = M(\sigma_{k'}^{k_1,k_2}) \cdot u, \quad \text{где}$$

$$M(\sigma_{k_1}^{k_1,k_2}) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_1,k_1} & 0 & 1_{k_1,k_2} & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0_{k_2,k_1} & 0 & 1_{k_2,k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$M(\sigma_{k_2}^{k_1,k_2}) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_1,k_1} & 0 & 0_{k_1,k_2} & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_2,k_1} & 0 & 1_{k_2,k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

– квадратные матрицы размера $d+1$ с единичными блоками E соответствующих размеров.

2.3. Представления группы перестановок. Пусть $S = S_{d+1}$ – *группа перестановок* индексов $\{1, \ldots, d, d+1\}$. На множестве базисов $u = \{u_1, \ldots, u_d, u_{d+1}\}$ (1.3) зададим действие

$$s : u \to u^s \tag{2.7}$$

группы S, полагая

$$u^s = (u_1^s, \ldots, u_d^s, u_{d+1}^s) = (u_{s(1)}, \ldots, u_{s(d), u_{s(d+1)}}) \tag{2.8}$$

для $s \in S$.

Согласно (2.7) и (2.8) действие перестановок $s \in S$ на столбцы (2.4) в матричной форме запишется

$$u^s = M(s) \cdot u, \tag{2.9}$$

где

$$M(s) = \begin{pmatrix} & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & \ldots & 1_{i,s(i)} & \ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

– *перестановочная матрица* для перестановки s.

2.4. Полугруппы дифференцирований и специализаций. Определим полугруппу

$$S\mathfrak{S} = \langle S, \mathfrak{S} \rangle, \tag{2.11}$$

порожденную всеми перестановками $s \in S$ и дифференцированиями

$$\sigma : u_{\widehat{\alpha}} \to u_{\widehat{\alpha}}^{\sigma}$$

для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из $\mathfrak{S}$. Аналогично определим полугруппу

$$S\mathfrak{S}_* = \langle S, \mathfrak{S}_* \rangle, \tag{2.12}$$

заменяя дифференцирования в (2.11) специализациями σ_* из (2.2). Назовем $S\mathfrak{S}$ *полугруппой дифференцирований*, а $S\mathfrak{S}_*$ – *полугруппой специализаций*.

Пусть $\sigma_* = \sigma_{*k} \cdot \ldots \cdot \sigma_{*1}$ принадлежит полугруппе $S\mathfrak{S}_*$, где σ_{*i} – некоторая перестановка или специализация. Тогда, используя представления (2.3) и (2.7), по определению полагаем $u^{\sigma_*} = ((u^{\sigma_{*1}}) \ldots)^{\sigma_{*k}}$.

В [13] было доказано следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Для $\sigma_* = \sigma_{*k} \cdot \ldots \cdot \sigma_{*1}$ из полугруппы $S\mathfrak{S}_*$ определим матрицу*

$$M(\sigma_*) = M(\sigma_{*k}) \cdot \ldots \cdot M(\sigma_{*1}), \tag{2.13}$$

где $M(\sigma_{*i})$ – матрица (2.10)*, если σ_{*i} – перестановка, и $M(\sigma_{*i})$ – матрица* (2.5) *или* (2.6)*, если σ_{*i} – специализация. Тогда справедливы утверждения.*

1. *Действия* (2.7) *в матричной форме принимают вид*

$$u^{\sigma_*} = M(\sigma_*)u = M(\sigma_{*k}) \cdot (\ldots \cdot (M(\sigma_{*1})u)),$$

где u – произвольный унимодулярный базис (1.3)*.*

2. *Определенная в* (2.12) *полугруппа специализаций $S\mathfrak{S}_*$ в матричном представлении* (2.13) *состоит из неотрицательных унимодулярных матриц, т.е. матриц с целыми неотрицательными коэффициентами и определителем ± 1.*

□

§3. Ядерное пространство и центрированные симплексы

3.1. Бесконечные итерации дифференцирований. Рассмотрим

$$\Xi = \mathfrak{S}^{\mathbb{N}} \tag{3.1}$$

– множество всех бесконечных последовательностей $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$, состоящих из произвольных сочетаний σ_i из $\mathfrak{S}$, и пусть

$$[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \tag{3.2}$$

обозначает *отрезок* из первых n членов последовательности σ, при этом полагаем, что $[\sigma]_0 = \varnothing$.

Используя определение (1.11), индукцией по $n = 0, 1, 2, \ldots$ определим $[\sigma]_n$-*производные*

$$u_{\widehat{\alpha}}^{[\sigma]_n} = (u_{\widehat{\alpha}}^{[\sigma]_{n-1}})^{\sigma_n},$$

где условимся $u_{\widehat{\alpha}}^{[\sigma]_0} = u_{\widehat{\alpha}}$ для $n = 0$. Если α – иррациональная точка (1.9), то по предложению 1.1 базис $u_{\widehat{\alpha}}$ будет $[\sigma]_n$-*дифференцируемым* для всех значений $n = 0, 1, 2, \ldots$ при любом выборе последовательности σ из множества (3.1).

3.2. Пространство и гиперплоскость Фарея. Введем следующие понятия:

$$\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}, \qquad \mathbf{K} = \mathbb{R}^d$$

– *суперпространство* и *ядерное пространство*, вложенное

$$\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{S}$$

в $\mathbf{S}$ как *ядерная гиперплоскость* $\mathbf{K}_0 = \{(x, 0) : \ x \in \mathbf{K}\}$.

Выделим в суперпространстве $\mathbf{S}$ единичную гиперплоскость

$$\mathbf{F}_1 = \{(x_1, \ldots, x_d, 1) : \ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{K}\} \subset \mathbf{S}$$

и отождествим ее

$$\mathbf{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{F} : \ (x_1, \ldots, x_d, 1) \mapsto (x_1, \ldots, x_d) \tag{3.3}$$

с пространством $\mathbf{F} = \mathbb{R}^d$. Назовем $\mathbf{F}_1$ *гиперплоскостью Фарея*, а $\mathbf{F}$ – *пространством Фарея*. Зададим проекции

$$\mathbf{S}_+ \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathbf{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{F}.$$

Здесь

$$\mathbf{S}_+ = \{(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbf{S}; \ x_{d+1} > 0\} \tag{3.4}$$

обозначает *верхнее суперпространство*,

$$\mathrm{pr}_1 : \ (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{d+1}}, \ldots, \frac{x_d}{x_{d+1}}, 1\right) \tag{3.5}$$

– *центральную проекцию* на гиперплоскость Фарея $\mathbf{F}_1$ с центром в $0 \in \mathbf{S}$ и φ_1 – изоморфизм (3.3). Далее, обозначим через

$$\varphi = \varphi_1 \circ \mathrm{pr}_1 \tag{3.6}$$

композицию отображений (3.5) и (3.3).

3.2. Центрированные унимодулярные симплексы. Пусть

$$u = \{u_1, \ldots, u_d, u_{d+1}\} \subset \mathbf{S}_+ \tag{3.7}$$

– произвольный унимодулярный базис, принадлежащий верхнему суперпространству (3.4) и центрированный (1.10) лучом $\widehat{\alpha}_{\geqslant 0} = \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cdot \widehat{\alpha}$. Подействуем на него проекцией φ из (3.6) –

$$u \xrightarrow{\varphi} \mathbf{s} \subset \mathbf{F}. \tag{3.8}$$

Образом будет симплекс

$$\mathbf{s} = \{s_1, \ldots, s_d, s_{d+1}\}, \tag{3.9}$$

имеющий рациональные вершины

$$s_i = \varphi(u_i) = \frac{P_i}{Q_i} = \left(\frac{P_{i1}}{Q_i}, \ldots, \frac{P_{id}}{Q_i}\right)$$

с индексами $i = 1, \ldots, d, d+1$. Здесь знаменатели $Q_i = P_{i,d+1} = u_{i,d+1}$ – последние координаты векторов $u_i = \{u_{i1}, \ldots, u_{id}, u_{i,d+1}\}$ из (3.7).

Определенный в (3.9) симплекс назовем *аппроксимационным симплексом*, поскольку его вершины служат рациональными приближениями точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$.

§4. Периодические цепные дроби

4.1. Предельный аппроксимационный симплекс. Определим

$$S\Xi_* = (S\mathfrak{S}_*)^{\mathbb{N}} \tag{4.1}$$

как множество всех бесконечных последовательностей $\sigma_* = \{\sigma_{*1}, \ldots\}$, состоящих из элементов σ_{*i} полугруппы специализаций $S\mathfrak{S}_*$, определенной в (2.12). Элементы σ_{*i} представляют собою перестановки базисных векторов или специализации дифференцирований.

Пусть $u \subset \angle\mathbf{S}$ – унимодулярный базис под условием (1.7); и пусть для него определен $\mathbf{s} = \varphi(u)$ – аппроксимационный симплекс из (3.8), т. е. все $(d+1)$-ые координаты векторов базиса u ненулевые.

Используя представления (2.3) и (2.7), по определению полагаем

$$u^{[\sigma_*]_n} = ((u^{\sigma_{*1}}) \ldots)^{\sigma_{*n}}. \tag{4.2}$$

С помощью коммутативной диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
u_{\widehat{\alpha}} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{s} \\
\downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\
u_{\widehat{\alpha}}^{\sigma} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{s}^{\sigma}
\end{array}
$$

представление (4.2) перенесем на аппроксимационный симплекс:

$$\mathbf{s}^{[\sigma_*]_n} = ((\mathbf{s}^{\sigma_{*1}})\dots)^{\sigma_{*n}}. \tag{4.3}$$

Получим монотонную последовательность

$$\mathbf{s}^{[\sigma_*]_0} \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_1} \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_n} \supseteq \ldots, \tag{4.4}$$

состоящую из производных аппроксимационных симплексов. Из свойства монотонности производных симплексов (4.4) вытекает существование *предельного аппроксимационного симплекса*

$$\mathbf{s}^{\sigma_*} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathbf{s}^{[\sigma_*]_n}.$$

Его размерности в общем случае могут быть любыми в промежутке

$$0 \leqslant \dim \mathbf{s}^{\sigma_*} \leqslant d-1.$$

В предельном случае $\dim \mathbf{s}^{\sigma_*} = 0$ будем иметь

$$\mathbf{s}^{\sigma_*} = \{\widehat{\alpha}\}, \tag{4.5}$$

где вектор $\widehat{\alpha} = (\alpha, 1)$ принадлежит конусу $\angle\mathbf{S}$ из (1.2); и, значит, точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ имеет координаты

$$\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_d \geqslant 0.$$

Далее будем предполагать, что последовательности дифференцирований $\sigma \in \Xi$ удовлетворяют условию: *существует номер n_0, для которого знаменатели*

$$Q_i^{[\sigma]_n} > 0 \quad \textit{при} \quad n \geqslant n_0 \tag{4.6}$$

для всех $i = 1, \ldots, d, d+1$.

4.2. Представление точек через специализации. Если выполняется условие (4.5), то скажем, что бесконечная последовательность специализаций σ_* из (4.1) *представляет* точку α. Для этого факта введем обозначение

$$\sigma_* \,|_u \twoheadrightarrow \alpha. \tag{4.7}$$

Заметим, что в определении (4.7) участвует пара: последовательность спациализаций σ_* и унимодулярный базис $u \subset \angle \mathbf{S}$; сама же по себе последовательность σ_* не может представлять никакую точку α. Таким образом, если $\sigma_* \,|_u \twoheadrightarrow \alpha$, то последовательность включений (4.4) допускает следующее расширение

$$\mathbf{s}^{[\sigma_*]_0} \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_1} \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_n} \supseteq \ldots \supseteq \{\alpha\}.$$

4.3. Периодические последовательности специализаций. Далее ограничимся *чисто периодическими* последовательностями специализаций

$$\sigma_* = [\sigma_{*,\mathrm{per}}] = \{\sigma_{*,\mathrm{per}}, \ldots, \sigma_{*,\mathrm{per}}, \ldots\}, \tag{4.8}$$

состоящих из бесконечного повторения некоторого отрезка

$$\sigma_{*,\mathrm{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \ldots, \sigma_{*p}\}. \tag{4.9}$$

Назовем p *периодом* последовательности σ_*, если это наименьшее возможное число со свойством (4.8). Обозначим подмножество чисто периодических последовательностей (4.8) из $(S\mathfrak{S}_*)^{\mathbb{N}}$ как $(S\mathfrak{S}_*)^{\mathbb{N}}_{\mathrm{per}}$.

4.4. Снятие и подъем специализаций. Пусть $\sigma^{k_1,k_2} = \{k_1, k_2\}$ – элементарное сочетание из $\mathfrak{S}$; и $\sigma_*^{k_1,k_2} = v_{k_1}^{k_1,k_2}$ или $v_{k_2}^{k_1,k_2}$ – две его возможные специализации. На этом множестве элементарных сочетаний введем две операции:

1) *снятие специализации*

$$\sigma_*^{k_1,k_2} \downarrow \sigma^{k_1,k_2}; \tag{4.10}$$

2) *подъем специализации*

$$\sigma^{k_1,k_2} \uparrow_* \sigma_*^{k_1,k_2}. \tag{4.11}$$

В последнем случае – с обязательным указанием специализации $* = k_1$ или k_2.

Перенесем поэлементно операции (4.10), (4.11) на полугруппы дифференцирований $S\mathfrak{S}$ (2.11) и специализаций $S\mathfrak{S}_*$ (2.12), состоящих соответственно из конечных последовательностей $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ и $\sigma_* = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \ldots, \sigma_{*n}\}$. Если $\sigma_i = s \in S$ является перестановкой, то условимся, что указанные операции действуют на них как тождественные преобразования.

Далее нас будут интересовать бесконечные последовательности из $S\Xi_*$. Пусть $\sigma_* = [\sigma_{*,\mathrm{per}}]$ – периодическая последовательность специализаций из (4.8). Тогда с помощью операции (4.10) с нее можно снять специализации

$$\sigma_* = [\sigma_{*,\mathrm{per}}] \downarrow \sigma = [\sigma_{\mathrm{per}}] \tag{4.12}$$

и получить простую периодическую последовательность дифференцирований σ из $S\mathfrak{S}$. Чтобы совершить обратную операцию, нужно задать центрированный базис $u_{\widehat{\alpha}}$:

$$\{\sigma, u_{\widehat{\alpha}}\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_{u_{\widehat{\alpha}}}. \tag{4.13}$$

В обозначениях (4.11) связь (4.13) запишется как

$$\sigma = [\sigma_{\mathrm{per}}] \uparrow_{u_{\widehat{\alpha}}} \sigma_* = [\sigma_{*,\mathrm{per}}].$$

Пусть в качестве унимодулярного базиса $u = e$ выбран единичный базис (1.1), $\sigma_{*,\mathrm{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}$ – некоторый период специализаций (4.9), удовлетворяющий условиям (4.6); и пусть

$$M(\sigma_{*,\mathrm{per}}) = M(\sigma_{*p}) \cdot \ldots \cdot M(\sigma_{*1}) \tag{4.14}$$

– матрица (2.13) относительно базиса e. Назовем $M(\sigma_{*,\mathrm{per}})$ *матрицей периода* для последовательностей специализаций $\sigma_* = [\sigma_{*,\mathrm{per}}]$ из (4.8).

Лемма 4.1. *Пусть $M(\sigma_{*,\mathrm{per}})$ имеет собственный левый вектор*

$$\widehat{\alpha} M(\sigma_{*,\mathrm{per}}) = \lambda_{d+1}\widehat{\alpha} \quad c \quad \widehat{\alpha} = (\alpha, 1) \in \angle \mathbf{S}, \tag{4.15}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – иррациональная точка (1.9), *$\angle \mathbf{S}$ – конус* (1.2). *Тогда справедливы утверждения.*

1) *Собственное значение λ_{d+1} является вещественным, удовлетворяющим неравенству*

$$\lambda_{d+1} > 1. \tag{4.16}$$

2) *Центрированный единичный базис $e|_{\widehat{\alpha}}$ допускает последовательность специализаций $\sigma_{*,\mathrm{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}$:*

$$\sigma_{\mathrm{per}} \uparrow_{e_{\widehat{\alpha}}} \sigma_{*,\mathrm{per}}, \tag{4.17}$$

а также – соответствующую бесконечную периодическую последовательность $\sigma_* = [\sigma_{*,\mathrm{per}}] = \{\sigma_{*,\mathrm{per}}, \dots, \sigma_{*,\mathrm{per}}, \dots\}$ из (4.9):

$$\sigma = [\sigma_{\mathrm{per}}] \uparrow_{e_{\widehat{\alpha}}} \sigma_* = [\sigma_{*,\mathrm{per}}]. \tag{4.18}$$

Слева в (4.17) *и* (4.18) *указаны снятые специализации* (*см.* (4.12))

$$\sigma_{*,\mathrm{per}} \downarrow \sigma_{\mathrm{per}}, \qquad \sigma_* = [\sigma_{*,\mathrm{per}}] \downarrow \sigma = [\sigma_{\mathrm{per}}].$$

Доказательство. См. [14]. □

4.5. Достаточные условия представимости точки.

Теорема 4.1. *С условиями леммы* 4.1, *пусть еще матрица периода* $M(\sigma_{*,\mathrm{per}})$ *из* (4.14) *имеет простой спектр* $\lambda_1, \ldots, \lambda_d, \lambda_{d+1}$, *где* λ_{d+1} *– вещественное собственное значение* (4.15), *удовлетворяющее неравенству* (4.16), *а остальные собственные значения, отличные от* λ_{d+1}, *удовлетворяют неравенствам*

$$|\lambda_i| < 1 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, d. \tag{4.19}$$

Тогда последовательность специлизаций представляет точку α *–*

$$\sigma_* \mid_e \twoheadrightarrow \alpha.$$

Доказательство. См. [14]. □

Теорема 4.2. *В условиях теоремы* 4.1, *пусть точки*

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}, \ldots, \frac{P_{id}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \right), \quad i = 1, \ldots, d, d+1,$$

– рациональные вершины $[\sigma]_n$*-производного симплекса* $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ *из* (4.3). *Тогда эти точки являются подходящими дробями для вещественной иррациональной точки* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$:

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \to \alpha$$

при $n \to +\infty$; *при этом имеют место неравенства*

$$\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 \leqslant c \, \frac{\lambda_{\max}^n}{Q_i^{[\sigma]_{np}}}$$

для всех $np \geqslant n_0$, *с границей* n_0 *из* (4.6). *Здесь* $c = c_{M(\sigma_{*,\mathrm{per}})}$ *– положительная константа, не зависящая от степени* n, $\lambda_{\max}$ *– собственное значение,* $\lambda_{\max} > 0$ *и*

$$\lambda_{\max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |\lambda_i| < 1.$$

Доказательство. Непосредственное следствие теоремы 4.1. □

Замечание 4.1. Как обеспечить матрицей периода из (4.14) выполнение условий теоремы 4.1? В [10] строились некоторые матрицы периодов в виде произведений специальных элементарных преобразований – специализаций дифференцирований центрированных унимодулярных базисов. Условия (4.16) и (4.19) на собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_d, \lambda_{d+1}$ означают, что матрица периода $M(\sigma_{*,\mathrm{per}})$ является матрицей Пизо. Вычисления показали, что предложенная в [10] конструкция, как правило, приводит именно к таким матрицам.

§5. Собственные векторы и рекуррентные последовательности

5.1. Собственный вектор.

Лемма 5.1. *Пусть определенная в* (4.14) *матрица периода*

$$M = M(\sigma_{*,\mathrm{per}}) \tag{5.1}$$

имеет собственный левый вектор

$$\widehat{\alpha} M = \lambda \widehat{\alpha}, \tag{5.2}$$

где

$$\lambda = \lambda_{d+1}, \tag{5.3}$$

$\widehat{\alpha} = (\alpha, 1) \in \angle \mathbf{S}$, *см.* (1.2), $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ *– иррациональная точка* (1.9). *Тогда собственное значение* λ *является вещественным и*

$$\lambda > 1. \tag{5.4}$$

Доказательство. См. [14]. □

Из (5.2) следует

$$\widehat{\alpha} M^{-1} = \lambda^{-1} \widehat{\alpha}, \tag{5.5}$$

где $0 < \lambda^{-1} < 1$. Повторяя операцию (5.5) несколько раз, получаем

$$\widehat{\alpha} M^{-n} = \lambda^{-n} \widehat{\alpha} \tag{5.6}$$

для любого $n = 0, 1, 2, \dots$. Пусть

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \\ u_{d+1} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

будет столбцом, состоящим из вещественных чисел или векторов. Тогда из (5.6) имеем

$$\widehat{\alpha} M^{-n} \cdot u = \lambda^{-n} \widehat{\alpha} \cdot u. \tag{5.8}$$

Если обозначить

$$u^{(n)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ \vdots \\ u_d^{(n)} \\ u_{d+1}^{(n)} \end{pmatrix} = M^{-n} \cdot u, \tag{5.9}$$

то равенство (5.8) примет вид

$$\widehat{\alpha} \cdot u^{(n)} = \lambda^{-n} (\widehat{\alpha} \cdot u). \tag{5.10}$$

5.2. Рекуррентные последовательности. Для матрицы периода $M = M(\sigma_{*,\mathrm{per}})$ из (4.14) запишем ее характеристический многочлен $ch_M(x)$ в виде

$$ch_M(x) = \det(xE - M) = x^{d+1} - b_d x^d - \ldots - b_1 x - b_0 \tag{5.11}$$

с $b_0 = (-1)^d \det M = \pm 1$. Так как

$$ch_{M^{(-1)}}(x) = \det(xE - M^{-1}) = (-1)^{d+1} \det M x^{d+1} \det \left(\frac{1}{x} E - M \right),$$

отсюда выводим связь между характеристическими многочленами

$$ch_{M^{(-1)}}(x) = (-1)^{d+1} \det M x^{d+1} ch_M \left(\frac{1}{x} \right) \tag{5.12}$$

для матрицы M и ее обратной M^{-1}. Подставляя (5.11) в (5.12), получаем явное выражение

$$ch_{M^{(-1)}}(x) = x^{d+1} - b'_d x^d - \ldots - b'_1 x - b'_0, \tag{5.13}$$

где

$$b'_d = s_M b_1,\ \ldots,\ b'_k = s_M b_{d+1-k},\ \ldots,\ b'_1 = s_M b_d,\ b'_0 = b_0 = (-1)^d \det M$$

и $s_M = (-1)^{d+1} \det M$.

Предложение 5.1. *Столбцы* (5.9) *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$u^{(n+d+1)} = b'_d u^{(n+d)} + \ldots + b'_1 u^{(n+1)} + b'_0 u^n \tag{5.14}$$

для всех $n = 0, 1, \ldots,$ *где* $b'_d, \ldots, b'_1, b'_0$ *– коэффициенты характеристического многочлена* (5.13); *при этом начальные условия*

$$u^{(d)} = M^{-d} \cdot u, \quad \ldots, \quad u^{(1)} = M^{-1} \cdot u, \quad u^{(0)} = u \tag{5.15}$$

задаются матрицей периода M (5.1) *и столбцом* u *из* (5.7).

Доказательство. В предложении 5.1 [10] приведено доказательство аналогичного утверждения для матрицы M. Поэтому, чтобы доказать (5.14), (5.15), достаточно матрицу M заменить на матрицу M^{-1} и вместо многочлена (5.13) выбрать многочлен (5.11). □

§6. Линейные приближения и принцип Дирихле

6.1. Линейные формы. Обозначим через

$$L(u^{(n)}) = \widehat{\alpha} \cdot u^{(n)} = \alpha_1 u_1^{(n)} + \ldots + \alpha_d u_d^{(n)} + u_{d+1}^{(n)} \tag{6.1}$$

линейную форму от переменной $u^{(n)}$ из (5.9), где $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d, 1)$ – собственный вектор (5.2) матрицы периода $M = M(\sigma_{*,\mathrm{per}})$ из (5.1).

Предложение 6.1. *Пусть* u *из* (5.7) *будет столбцом, состоящим из вещественных чисел. Тогда имеет место следующая формула приближения*

$$|L(u^{(n)})| \leqslant \frac{c}{\lambda^n} \tag{6.2}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots,$ *где* $\lambda > 1$ *– собственное значение* (5.4) *и константа* $c = c_u = |\widehat{\alpha} \cdot u|$ *не зависит от* n.

Доказательство. Это вытекает из формулы (5.10), записанной через линейную форму (6.1). □

Пусть матрица периода $M = M(\sigma_{*,\mathrm{per}})$ имеет простой спектр $\lambda_1, \ldots, \lambda_d, \lambda_{d+1}$, где $\lambda = \lambda_{d+1}$ – вещественное собственное значение (5.3), удовлетворяющее неравенству (5.4), а остальные собственные значения, отличные от λ_{d+1}, удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_i| < 1 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, d. \tag{6.3}$$

Из унимодулярности матрицы M следует, что

$$\lambda_i \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, d, d+1. \tag{6.4}$$

Введем обозначение

$$\lambda_{\min} = \min_{1 \leqslant i \leqslant d} |\lambda_i|. \tag{6.5}$$

Тогда из (6.3) и (6.4) вытекают неравенства

$$0 < \lambda_{\min} < 1. \tag{6.6}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $u^{(n)}$ *– вещественный столбец* (5.9), $n = 0, 1, \dots,$

$$|u^{(n)}|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant d+1} |u_k^{(n)}| = N \tag{6.7}$$

– его длина в ∞*-метрике; и пусть*

$$\eta = \frac{\ln(\lambda)}{\ln(1/\lambda_{\min})}. \tag{6.8}$$

Тогда справедлива аппроксимационная формула

$$|L(u^{(n)})| \leqslant \frac{c}{N^\eta}, \tag{6.9}$$

где показатель η *может принимать значения в интервале*

$$1 < \eta \leqslant d; \tag{6.10}$$

и, значит, в любом случае формула (6.9) *нетривиальна.*

Доказательство. По предположению матрица периода $M = M(\sigma_{*,\mathrm{per}})$ имеет простой спектр $\lambda_1, \dots, \lambda_d$, λ_{d+1}, а в силу свойства (6.4) обратима. Поэтому обратная матрица M^{-1} подобна диагональной матрице,

$$M^{-1} \sim \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_i^{-1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

и, согласно (6.5), ее собственные значения удовлетворяют неравенству

$$|\lambda_i^{-1}| \leqslant \lambda_{\min}^{-1} \quad \text{для всех} \quad i = 1, \dots, d,\ d+1, \tag{6.12}$$

с правой частью

$$\lambda_{\min}^{-1} > 1 \tag{6.13}$$

в силу неравенств (6.6). Вспоминая определение (5.9), из (6.11)–(6.13) получаем асимптотическую оценку

$$|u^{(n)}|_1 = O(\lambda_{\min}^{-n}) \tag{6.14}$$

1-длины столбца $u^{(n)}$.

Теперь нужная формула (6.9) вытекает из определений (6.7), (6.8), неравенства (6.2) в предложении 6.1 и из оценки (6.14). □

Замечание 6.1. 1. Формула (6.9) становится наиболее интересной, если в качестве начальных столбцов u из (5.7) выбрать целочисленные столбцы. Тогда в силу унимодулярности матрицы M целочисленными будут и значения переменной $u^{(n)}$ из (5.9) при $n = 1, 2, 3, \ldots$; и поэтому приближение (6.9) будет диофантовым.

2. Для алгебраических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ аппроксимационная формула (6.9) дает наилучшее возможное приближение в случае, когда модули собственных значений $|\lambda_i|$ для всех $i = 1, \ldots, d$ локализуются около величины $\lambda_{\min}$ (6.5).

3. Другие методы приближения линейных форм были рассмотрены в [16,17] для кубических иррациональностей и в [2] для общего случая.

6.2. Принцип Дирихле. Рассмотрим линейную форму

$$L(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_d x_d \mod 1 \tag{6.15}$$

со значениями на единичной окружности $\mathbb{T}^1$. Пусть переменные x_i пробегают целые значения $0, 1, \ldots, N-1$. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ – иррациональная точка (1.9), то форма (6.15) порождает N^d различных точек на окружности $\mathbb{T}^1$. Поскольку все точки различные, то найдутся по крайней мере две соседние точки $L(x')$ и $L(x'')$ на расстоянии

$$|L(x') - L(x'')|_{\mathbb{T}^1} < \frac{1}{N^d}. \tag{6.16}$$

Здесь $| * |_{\mathbb{T}^1}$ обозначает расстояние на окружности $\mathbb{T}^1$. В силу (6.16) существуют целая точка $x = x' - x''$ и целое число x_{d+1} такие, что выполняются свойства:

$$|L(x)| < \frac{1}{N^d}, \tag{6.17}$$

координаты $|x_i| < N$ для всех $i = 1, \ldots, d$ и $|x_{d+1}| < |\alpha|_1 N$.

Сравним две аппроксимационные формулы (6.9) и (6.17). Первая формула становится второй в случае показателя $\eta = d$ в (6.10). Результат (6.17) хорошо известен (см., например, [12,15]). Итак, если нужно только существование хорошего приближения, то используем формулу (6.17), если же требуется явное построение такого приближения – применяем метод, описанный в теореме 6.1.

Ниже рассмотрены две конструкции матриц периодов $M(\sigma_{*,\mathrm{per}})$ из (4.14), обеспечивающие выполнение условий теоремы 4.1.

§7. Блочные матрицы и линейные приближения

7.1. Блочные матрицы периодов. Сначала в качестве матрицы периода M (5.1) выберем блочную матрицу

$$M_{\square} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

из полугруппы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ с $2 \times 2-$блоком

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Случай $\mathrm{det}A = -1$**.** При этом условии матрица (7.1) имеет *характеристический многочлен*

$$ch_{M_{\square}}(x) = \det(xE - M_{\square}) = x^3 - bx^2 - cx + 1 \tag{7.3}$$

с *дискриминантом*

$$\Delta_{M_{\square}} = 4b^3 + b^2c^2 + 4c^3 + 18bc - 27. \tag{7.4}$$

Из принадлежности матрицы (7.1) полугруппе неотрицательных матриц $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ и вида дискриминанта (7.4) следует $\Delta_{M_{\square}} > 0$. Поэтому характеристический многочлен (7.3) имеет три различных вещественных корня $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, удовлетворяющих соотношению $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$.

В [10] доказаны следующие леммы.

Лемма 7.1. *Если $M_{\square} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ – матрица (7.1) с блоком A определителя $\mathrm{det}A = -1$, то при выполнении условий $b \geqslant 2$, $c \geqslant 1$, $b > c$ характеристический многочлен $ch_{M_{\square}}(x)$ из (7.3) имеет три вещественных корня с распределением по интервалам*

$$-1 < \lambda_1 < 0, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad 1 \leqslant b < \lambda_3. \tag{7.5}$$

Случай $\mathrm{det}A = +1$**.** Теперь матрица (7.1) имеет *характеристический многочлен*

$$ch_{M_{\square}}(x) = \det(xE - M) = x^3 - bx^2 - cx - 1 \tag{7.6}$$

с *дискриминантом*

$$\Delta_{M_{\square}} = -4b^3 + b^2c^2 + 4c^3 - 18bc - 27, \tag{7.7}$$

который может принимать уже разные знаки.

Лемма 7.2. *Пусть* $M_\square \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ – *матрица* (7.1), *имеющая блок* A *с определителем* $\det A = +1$.

1. *Если дискриминант* $\Delta_{M_\square} > 0$, *то при выполнении условия*

$$c < b + 2 \tag{7.8}$$

характеристический многочлен $ch_{M_\square}(x)$ *из* (7.6) *имеет три различных вещественных корня с интервальным распределением:*

$$-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0, \quad 1 \leqslant b < \lambda_3. \tag{7.9}$$

2. *В случае дискриминанта* $\Delta_{M_\square} < 0$, *исключая случай* $b = 0$ *и* $c = 0$, *многочлен* $ch_{M_\square}(x)$ *будет иметь один вещественный корень и два комплексно сопряженных корня с распределением*

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} < 1, \quad 1 \leqslant b < \lambda_3. \tag{7.10}$$

При этом выполнение условия (7.8) *уже не предполагается.*

7.2. Собственные векторы блочных матриц. Пусть выполнены условия лемм 7.1 и 7.2. Тогда блочная матрица $M_\square$ из (7.1) имеет

$$\widehat{\alpha}_\square M_\square = \lambda \widehat{\alpha}_\square$$

собственный вещественный левый вектор $\widehat{\alpha}_\square = (\alpha_\square, 1)$, $\alpha_\square = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\lambda = \lambda_3 > 1$ – собственное число из (7.5) или (7.9), (7.10). Вспоминая явный вид (7.1), (7.2) данной матрицы, записываем

$$\widehat{\alpha}_\square(\lambda E - M_\square) = \widehat{\alpha}_\square \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -a & \lambda - b & 0 \\ -c & -d & \lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{7.11}$$

Из (7.11) находим

$$\widehat{\alpha}_\square = (\alpha_1, \alpha_2, 1) = \left(\lambda, \frac{d}{\lambda - b}, 1\right), \tag{7.12}$$

где согласно (7.5), (7.9) и (7.10) выполняется неравенство $\lambda > b$. Поэтому собственный вектор $\widehat{\alpha}_\square$ содержится в конусе $\angle \mathbf{S}$ из (1.2), где

$$\alpha_\square = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\lambda, \frac{d}{\lambda - b}\right) \tag{7.13}$$

является положительной кубической иррациональной точкой (1.9).

7.3. Линейные приближения для блочных матриц. Так как для матрицы (7.1) обратной матрицей будет

$$M_{\square}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \quad 0 & 1 \\ \multirow{2}{*}{A} & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \multirow{2}{*}{A^{-1}} \\ 0 & \\ 1 & 0 \quad 0 \end{pmatrix},$$

имеем

$$M_{\square}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -d & b \\ 0 & c & -a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{в случае} \quad \det A = -1; \tag{7.14}$$

$$M_{\square}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & d & -b \\ 0 & -c & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{в случае} \quad \det A = 1. \tag{7.15}$$

Характеристические многочлены матриц (7.14) и (7.15) будут иметь соответственно вид

$$ch_{M_{\square}^{-1}}(x) = x^3 - cx^2 - bx + 1, \tag{7.16}$$

$$ch_{M_{\square}^{-1}}(x) = x^3 + cx^2 + bx - 1. \tag{7.17}$$

Предложение 7.1. *Пусть $M_{\square}$ будет блочной матрицей* (7.1), *u – целочисленный столбец из* (5.7), *а $u^{(n)}$ – столбцы, определенные в* (5.9). *Тогда столбцы*

$$u^{(n)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{pmatrix} = M_{\square}^{-n} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \tag{7.18}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$u^{(n+3)} = cu^{(n+2)} + bu^{(n+1)} - u^n \tag{7.19}$$

в случае $\det A = -1$; *и*

$$u^{(n+3)} = -cu^{(n+2)} - bu^{(n+1)} + u^n \tag{7.20}$$

в случае $\det A = 1$. *При этом, начальными условиями будут*

$$u^{(2)} = M_{\square}^{-2} \cdot u, \quad u^{(1)} = M_{\square}^{-1} \cdot u, \quad u^{(0)} = u. \tag{7.21}$$

Доказательство. Это вытекает из вида характеристических многочленов (7.16) и (7.17) для матрицы $M_{\square}^{-1}$ и предложения 5.1. $\square$

Можно конкретизировать начальные условия (7.21), если за исходный столбец u выбрать, скажем, первый базисный столбец, т. е. столбец транспонированный к строке $(1, 0, 0)$. Для этого вычислим квадраты матриц (7.14) и (7.15). Имеем

$$M_{\square}^{-2} = \begin{pmatrix} b & -cd & ad \\ -a & c^2 & -ac \\ 0 & -d & b \end{pmatrix} \quad \text{в случае} \quad \det A = -1; \tag{7.22}$$

$$M_{\square}^{-2} = \begin{pmatrix} -b & -cd & ad \\ a & c^2 & -ac \\ 0 & d & -b \end{pmatrix} \quad \text{в случае} \quad \det A = 1. \tag{7.23}$$

Далее принимая во внимание вид матриц (7.14), (7.15) и (7.22), (7.23) начальные условия (7.21) можно записать явным образом

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad \det A = -1;$$

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad \det A = 1.$$

Столбцы же $u^{(n)}$ со степенями $n = 3, 4, 5, \dots$ снова вычисляются по общим рекуррентным соотношениям (7.19) и (7.20) соответственно.

Для блоковой матрицы $M_{\square}$ из (7.1), учитывая явный вид ее собственного вектора (7.12), (7.13), рассмотрим отвечающую ей *линейную форму*

$$L_{\square}(u^{(n)}) = \lambda u_1^{(n)} + \frac{d}{\lambda - b} u_2^{(n)} + u_3^{(n)}, \tag{7.24}$$

где $\lambda = \lambda_3$ – вещественный положительный корень соответственно из (7.5) или (7.9).

Теорема 7.1. *Пусть* $u^{(n)}$ *– целочисленные столбцы, вычисляемые по рекуррентным формулам* (7.18)–(7.21), $|u^{(n)}|_\infty = N_{u,n} = N$ *– их длины в* ∞*-метрике* (6.7). *Тогда для линейной формы* (7.24) *справедлива аппроксимационная формула*

$$|L_{\square}(u^{(n)})| \leqslant \frac{c}{N^\eta} \tag{7.25}$$

с показателем

$$\eta = \frac{\ln(\lambda)}{\ln(1/\lambda_{\min})} > 1, \quad \lambda_{\min} = \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}. \tag{7.26}$$

В случае же отрицательного дискриминанта $\Delta_{M_\square} < 0$*, определенного в* (7.4) *или* (7.7)*, имеем* (7.25) *с показателем*

$$\eta = 2. \tag{7.27}$$

Доказательство. Утверждение теоремы является прямым следствием из предложения 7.1 и теоремы 6.1. Равенство же (7.27) получается из формулы (7.26) и леммы 7.2, (7.10). □

§8. Треугольные матрицы и линейные приближения

8.1. Треугольные матрицы периодов. В дополнение к блочным матрицам (7.1), рассмотрим еще матрицы вида

$$M_\triangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} = s_\circlearrowleft \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

также из полугруппы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, получающиеся из *верхне треугольных матриц* трансформацией циклической перестановкой строк

$$s_\circlearrowleft = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Матрица (8.1) имеет *характеристический многочлен*

$$ch_{M_\triangle}(x) = \det(xE - M_\triangle) = x^3 - (a+c)x^2 - (b-ac)x - 1 \tag{8.3}$$

с *дискриминантом*

$$\Delta_{M_\triangle} = -4(a+c)^3 + (a+c)^2(b-ac)^2 + 4(b-ac)^3 - 18(a+c)(b-ac) - 27. \tag{8.4}$$

Из (8.3) следует, что корни λ_1, λ_2, λ_3 характеристического многочлена удовлетворяют соотношению $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 = -1$.

Лемма 8.1. 1. *В случае* $\Delta_{M_\triangle} > 0$*, если выполнены условие*

$$a + c \geqslant 0, \quad b - ac > 0 \quad \text{или} \quad a + c > 0, \quad b - ac \geqslant 0 \tag{8.5}$$

и условие

$$b < ac + a + c + 2, \tag{8.6}$$

то многочлен (8.3) *имеет следующее интервальное распределение характеристических корней:*

$$-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > a \geqslant 1. \tag{8.7}$$

2. *В случае же* $\Delta_{M_\triangle} < 0$ *у характеристического многочлена* (8.3) *два корня* λ_1, λ_2 *будут комплексными и один вещественный* λ_3*; при этом, если выполнены условия* (8.5)*, то характеристические корни удовлетворяют неравенствам:*

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \frac{1}{\lambda_3^{1/2}} < 1, \quad 1 \leqslant a < \lambda_3. \tag{8.8}$$

Доказательство. См. [10]. □

8.2. Собственные векторы треугольных матриц. Пусть выполнены условия (8.5) и (8.6). Тогда треугольная матрица $M_\triangle$ имеет

$$\widehat{\alpha}_\triangle M_\triangle = \lambda_3 \widehat{\alpha}_\triangle$$

собственный вещественный левый вектор $\widehat{\alpha}_\triangle = (\alpha_\triangle, 1)$, $\alpha_\triangle = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\lambda = \lambda_3 > 1$ – собственное число из (8.7) или (8.8). Вспоминая явный вид (8.1) данной матрицы, записываем

$$\widehat{\alpha}_\triangle(\lambda E - M_\triangle) = \widehat{\alpha}_\triangle \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -b \\ 0 & -1 & \lambda - c \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда находим

$$\widehat{\alpha}_\triangle = (\alpha_1, \alpha_2, 1) = \left(\frac{1}{\lambda(\lambda - a)}, \frac{1}{\lambda - a}, 1 \right). \tag{8.9}$$

Поскольку выполняется неравенство $\lambda > a$, то собственный вектор $\widehat{\alpha}_\triangle$ содержится в конусе $\angle \mathbf{S}$ из (1.2), где

$$\alpha_\triangle = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{1}{\lambda(\lambda - a)}, \frac{1}{\lambda - a} \right) \tag{8.10}$$

является положительной кубической иррациональной точкой (1.9).

8.3. Линейные приближения для треугольных матриц. Так как для матрицы (8.1) обратной матрицей будет

$$M_\triangle^{-1} = \begin{pmatrix} ac - b & 1 & -a \\ -c & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.11}$$

то характеристическим многочленом для этой матрицы будет

$$ch_{M_\triangle^{-1}}(x) = x^3 + (b - ac)x^2 + (a + c)x - 1. \tag{8.12}$$

Предложение 8.1. *Пусть $M_\square$ будет треугольной матрицей* (8.1), *u – целочисленный столбец из* (5.7), *а $u^{(n)}$ – столбцы, определенные в* (5.9). *Тогда столбцы*

$$u^{(n)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{pmatrix} = M_\triangle^{-n} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$u^{(n+3)} = (ac - b)u^{(n+2)} - (a + c)u^{(n+1)} + u^n \tag{8.13}$$

с начальными условиями

$$u^{(2)} = M_\triangle^{-2} \cdot u, \quad u^{(1)} = M_\triangle^{-1} \cdot u, \quad u^{(0)} = u. \tag{8.14}$$

Доказательство. Это вытекает из вида характеристического многочлена (8.12) для обратной матрицы $M_\triangle^{-1}$ и предложения 5.1. $\square$

Можно, как и ранее это было сделано для блочных матриц, конкретизировать начальные условия (8.14), если за исходный столбец u выбрать, скажем, второй базисный столбец $u = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для этого вычислим для обратной матрицы (8.11) ее квадрат

$$M_\triangle^{-2} = \begin{pmatrix} (ac-b)^2 - a - c & ac - b & -a(ac-b) + 1 \\ -c(ac-b) + 1 & -c & ac + 1 \\ ac - b & 1 & -a \end{pmatrix}. \tag{8.15}$$

Теперь принимая во внимание вид матриц (8.11) и (8.15), начальные условия (8.14) можно записать явным образом

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} ac - b \\ -c \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а следующие столбцы $u^{(n)}$ для $n = 3, 4, 5, \ldots$ снова вычисляются по общему рекуррентному соотношению (8.13).

Для треугольной матрицы $M_\triangle$ из (8.1), учитывая явный вид ее собственного вектора (8.9), (8.10), рассмотрим отвечающую ей *линейную форму*

$$L_\triangle(u^{(n)}) = \frac{1}{\lambda(\lambda - a)} u_1^{(n)} + \frac{1}{\lambda - a} u_2^{(n)} + u_3^{(n)}, \tag{8.16}$$

где $\lambda = \lambda_3$ – вещественный положительный корень (8.7) или (8.8).

Теорема 8.1. *Пусть* $u^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *– целочисленные столбцы, вычисляемые по формулам* (8.13), (8.14). *Пусть* $|u^{(n)}|_\infty = N_{u,n} = N$ *– их длины в* ∞*-метрике* (6.7). *Тогда для линейной формы* (8.16) *справедлива аппроксимационная формула*

$$|L_\triangle(u^{(n)})| \leqslant \frac{c}{N^\eta} \tag{8.17}$$

с показателем

$$\eta = \frac{\ln(\lambda)}{\ln(1/\lambda_{\min})} > 1, \tag{8.18}$$

равным $\lambda_{\min} = \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. *В случае же отрицательного дискриминанта* $\Delta_{M_\triangle} < 0$, *определенного в* (8.4), *указанный показатель равен*

$$\eta = 2. \tag{8.19}$$

Доказательство. Утверждения (8.17), (8.18) непосредственно вытекают из предложения 7.1 и теоремы 6.1. Равенство же (8.19) получается из формулы (8.18) и леммы 8.1, см. равенство в (8.8). $\square$

Выводы

1. Матрицы периодов в теоремах 7.1 и 8.1: блочные $M_\square$ и треугольные $M_\triangle$ – являются матрицами Пизо (см. замечание 4.1). Данное свойство матриц обеспечивает неривиальность приближений (7.25), (8.17) соответствующих линейных форм $L_\square$ (7.24) и $L_\triangle$ (8.16).

2. Изложенный метод допускает обобщение на блочные матрицы

$$M_\square = s_\circlearrowleft \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_{d-1} \end{pmatrix}$$

и на треугольные матрицы

$$M_\triangle = s_\circlearrowleft \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & \ldots & a_{1d} \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{dd} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

из полугруппы неотрицательных унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ произвольной размерности $d+1$. Здесь E_{d-1} обозначает единичную матрицу размерности $d-1$ и $s_{\circlearrowleft} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d+1 \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – циклическую подстановку из группы S_{d+1}, сравните с (8.2).

Причина возможности переноса теорем 7.1 и 8.1 состоит в том, что такие блочные и треугольные матрицы имеют естественные разложения в произведения специализаций дифференцирований центрированных унимодулярных базисов [10].

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
2. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби.* Владимир, ВлГУ, 2019. `https://vk.com/id589973164`.
3. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* — Современные Проблемы Математики, МИАН **299** (2017), 1–20.
4. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
5. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* — Москва, Наука, 1978.
6. G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford, 1938.
7. О. Н. Карпенков, *О нахождении периодов геометрических цепных дробей двумерных алгебраических гиперболических операторов.* — Мат. Заметки **88** (2010), No. 1, 30–42.
8. M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, *A new multi-dimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface.* — Experemental Mathematics. **23**, No. 4 (2014), 390–410.
9. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби.* — Современные Проблемы Математики. МИАН, Вып. 23 (2016), 41–66.
10. В. Г. Журавлев, *Многомерные периодические цепные дроби, рекуррентные формулы и дробно-линейная инвариантность.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **547** (2025), 100–151.
11. А. Я. Хинчин, *Избранные труды по теории чисел.* Москва, МЦНМО, 2006.
12. Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений.* Москва, Из-во иностранной литературы, 1961.
13. В. Г. Журавлев, *Самоподобия и подстановки ядерных разбиений.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **523** (2023), 83–120.
14. В. Г. Журавлев, *Модифицированный симплекс-ядерный алгоритм и разложение в многомерные периодические цепные дроби.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **547** (2025), 61–99.

15. А. Я. Хинчин, *Принцип Дирихле в теории диофантовых приближений.* — УМН **3**, No. 3 (1948), 3–28.
16. T. W. Cusick, *Diophantine approximation of ternary linear forms.* — Mathematics of Computation **25** (1971), No. 113, 163–180.
17. T. W. Cusick, *Diophantine Approximation of Ternary Linear Forms.* II. — Mathematics of Computation **26** (1972), No. 120, 977–993.

Zhuravlev V. G. Periodic linear Diophantine approximations.

The relationship between approximations of several numbers with approximations of the corresponding dual linear forms by means of the matrix of the period of decomposition into a multidimensional periodic continued fraction is discussed. This allowed us to reveal the true meaning of Khintchine's principle of transfer.

Владимирский государственный
университет, 600024, Владимир,
пр. Строитедей, 11, Россия
E-mail: `vzhuravlev@mail.ru`

Поступило 21 апреля 2025 г.