

В. Г. Журавлев

МНОГОМЕРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦЕПНЫЕ
ДРОБИ, РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ И
ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Симплекс-ядерный алгоритм и его модификация. В настоящей работе мы продолжаем исследование симплекс-ядерного алгоритма (\mathcal{SK} -алгоритма) и его модификации (\mathcal{MSK} -алгоритма) [1, 2]. Указанные алгоритмы являются универсальными и применяются для совместных диофантовых приближений любых конечных совокупностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ вещественных чисел. В \mathcal{MSK} -алгоритме используются центрированные единичные базисы, что позволяет упростить начальный \mathcal{SK} -алгоритм, исключая из него необходимость первоначальной настройки алгоритма на данный набор чисел α . Основу \mathcal{SK} -и \mathcal{MSK} -алгоритмов составляет *тройка конструкций*, позволяющих разлагать точки α в многомерные цепные дроби: 1) центрированные унимодулярные базисы, геометрический аналог способа “вытягивания носов” [3], применяемого в теории обычных (одномерных) цепных дробей; 2) аппроксимационные симплексы Фарея, многомерное обобщение рядов Фарея [4] и 3) метрические норменные параллелоэдры, ядра конечных разбиений многомерных торов [5].

0.2. Основные результаты. В настоящей работе предпринята попытка начальной *классификации* возможных видов разложений вещественных наборов чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные периодические цепные дроби.

За основу классификации выбраны два вида унимодулярных матриц – это *блочные матрицы* (теорема 7.1, предложения 8.1 и 8.1)

$$M_{\square} = s_{\circlearrowleft} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_{d-1} \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

Ключевые слова: многомерные цепные дроби, наилучшие приближения, суммы Фарея.

произвольной размерности $d+1$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – любая матрица из $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, E_{d-1} обозначает единичную матрицу размерности $d-1$ и $s_{\circlearrowleft} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d+1 \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – циклическая подстановка из S_{d+1} . Другой вид – *треугольные матрицы* (теорема 9.1 и предложение 9.1)

$$M_{\Delta} = s_{\circlearrowleft} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & \dots & a_{1d} \\ 0 & 0 & \dots & a_{dd} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (0.2)$$

из полугруппы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$. Разложение в многомерные цепные дроби описывается на языке элементарных преобразований – *специализаций* $\varsigma = (k_1 k_2)$ (6.7) и *подстановок* s из S_{d+1} . Так, в случае размерности $d=1$ разложениям в конечные произведения

$$\begin{aligned} A &= s \cdot \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdot \dots \cdot \varsigma_{*t}, \\ M_{\Delta} &= s_{\circlearrowleft} \cdot (12)^{a_{11}} \end{aligned} \quad (0.3)$$

соответствуют разложения чисел в обычные цепные дроби. Причина выбора матриц (0.1) и (0.2) обусловлена тем, что для любой размерности d на них естественным образом обобщаются одномерные разложения (0.3).

Основная задача данной статьи: 1) по заданному разложению в произведение элементарных преобразований, аналогичному (0.3), выяснить вопрос о представимости им некоторого набора чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и 2) в случае положительного ответа – определить скорость приближения этих чисел α соответствующими многомерными подходящими дробями.

0.3. Связи с другими работами. Для двумерных приближений операция триангуляции Фарея (сети Фарея) в разных вариантах использовалась в [6–12]. Существует несколько многомерных обобщений (см., например, [13]). Одно из них представляет собою алгоритм Монкемайера [14, 15], позволяющий по индукции разбивать некоторый начальный единичный симплекс на более мелкие составляющие симплексы. Периодические разложения в цепные дроби размерности два и более содержатся в [16–19]. Применение индуцированных торических разбиений к задачам нахождения наилучших многомерных приближений было найдено в [5, 18] и [20]. Состояние исследований до 2019 г. представлено в монографии [19].

§1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЗВЕЗД И ЦЕНТРИРОВАННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ БАЗИСОВ

1.1. Звезды. Обозначим через \mathfrak{S} совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{1, \dots, d, d+1\}$. Пусть v_1, \dots, v_d, v_{d+1} – произвольные векторы из \mathbb{R}^d и $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{d-1}\}$ – дополнительное к σ сочетание в $\{1, \dots, d, d+1\}$. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов v_1, \dots, v_d, v_{d+1} .

Определение 1.1. Пусть любые $d - 1$ вектора из v_1, \dots, v_d, v_{d+1} линейно независимы. Обозначим через $H_{\sigma'}$ гиперплоскость, проходящую через начало координат и содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ' . Тогда множество векторов

$$v = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}\} \quad (1.1)$$

назовем звездой, если для всех σ' , когда $\sigma = \{k_1, k_2\}$ пробегает \mathfrak{S} , векторы v_{k_1}, v_{k_2} из v не принадлежат гиперплоскости $H_{\sigma'}$ и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H_{\sigma'}^+$ и $H_{\sigma'}^-$.

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из множества v линейно независимы.

Объяснением термина звезда могут служить следующие два эквивалентных критерия.

Критерий 1.1. Обозначим через $\Delta(v)$ натянутый на векторы звезды v замкнутый симплекс, и пусть $\Delta^{\text{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса. Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию $0 \in \Delta^{\text{int}}(v)$.

Далее у нас будут появляться и другие симплексы. Чтобы их различать, назовем $\Delta(v)$ звездным симплексом.

Критерий 1.2. Положительность барацентрических координат начала координат 0 относительно векторов v равносильна условию на векторы v быть звездой.

1.2. Производные звезды. Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из \mathfrak{S} сумма векторов $v_{\sigma} = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}\}$ не принадлежит

$$v_{\sigma} \notin H_{\sigma'} \quad (1.2)$$

гиперплоскости $H_{\sigma'}$. Тогда при этом условии только одно из множеств

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \quad (1.3)$$

будет звездой (1.1). Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \quad (1.4)$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ при-
надлежат разным полупространствам $H_{\sigma'}^\pm$, и $v(\sigma')$ – дополнительное
для $v(\sigma)$ множество векторов из звезды v . Заметим, что однозначность
выбора множества $v(\sigma)$ в (1.4) гарантирована ограничением (1.2) на
сумму векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$.

Определение 1.2. Обозначим через $v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma')$, то множество
векторов из (1.3), которое является звездой. В этом случае звезду v
назовем σ -дифференцируемой. Если звезда v σ -дифференцируема для
всех сочетаний $\sigma \in \mathfrak{S}$, то будем говорить, что данная звезда тоталь-
но дифференцируема. Если же при этом v тотально дифференциру-
ема бесконечное число раз, то скажем, что она бесконечно тотально
дифференцируема или, кратко, – бесконечно дифференцируема.

Таким образом, согласно определению 1.2 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из \mathfrak{S} на множестве невырожденных звезд $v = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}\}$ определено отображение

$$\text{где } v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma, v_{d+1}^\sigma\}, \quad (1.5)$$

$$\text{или } v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}, \quad v_{k_2}^\sigma = v_\sigma \quad (1.6)$$

$$\text{или } v_{k_1}^\sigma = v_\sigma, \quad v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}, \quad (1.7)$$

в зависимости от (1.4), и $v_{k'}^\sigma = v_{k'}$ для всех $k' \in \sigma'$.

Звезду v^σ из (1.5) назовем σ -производной нерывожденной звезды v .
Если нужно выделить индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем
для σ -производной (1.5) использовать еще и обозначение $v^\sigma = v^{k_1, k_2}$
или – более развернутые обозначения –

$$v^\sigma = v_{k_1}^{k_1, k_2} \quad \text{или} \quad v^\sigma = v_{k_2}^{k_1, k_2} \quad (1.8)$$

соответственно случаю (1.7) или (1.6).

1.3. Пространства. Введем следующие понятия:

$$\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}, \quad \mathbf{K} = \mathbb{R}^d \quad (1.9)$$

– суперпространство и ядерное пространство (*karyon space*), вложен-
ное в \mathbf{S} ,

$$\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{S}$$

как ядерная гиперплоскость $\mathbf{K}_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbf{K}\}$.

1.4. Единичный базис. Пусть

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \\ e_{d+1} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad (1.10)$$

$e_1 = (1, \dots, 0, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 1, 0), e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1)$
– единичный базис суперпространства \mathbf{S} . Он является *унимодулярным базисом*. Обозначим через

$$\angle \mathbf{S} = \{x = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbf{S} : x_1 \geq 0, \dots, x_d \geq 0, x_{d+1} \geq 0\} \quad (1.11)$$

положительный многогранный конус с ребрами, которые направлены вдоль векторов (1.10), и пусть $\mathbf{K}_{\geq 0} = \mathbf{K}_0 \cap \angle \mathbf{S}$ – его *нижняя грань*. При рассмотрении векторов суперпространства \mathbf{S} будем выделять их $(d+1)$ -ую координату, которой в дальнейшем принадлежит особая роль.

1.5. Центрированные унимодулярные базисы. Кроме единично-го базиса (1.10) будем рассматривать также и другие *унимодулярные базисы*

$$u = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}\} \quad (1.12)$$

пространства \mathbf{S} , состоящие из векторов u_1, \dots, u_d, u_{d+1} , т. е. базисы из целочисленных векторов

$$u_1, \dots, u_d, u_{d+1} \in \mathbb{Z}^{d+1} \quad (1.13)$$

с определителем

$$\det U = \pm 1 \quad (1.14)$$

матрицы

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \\ u_{d+1} \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

строки которой – это координаты векторов u_1, \dots, u_d, u_{d+1} . Условия (1.13), (1.14) эквивалентны *унимодулярности*

$$U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$$

матрицы (1.15). Относительно базиса (1.12) сделаем предположение, что все его векторы принадлежат

$$u_1, \dots, u_d, u_{d+1} \in \angle \mathbf{S} \quad (1.16)$$

конусу (1.11). В этом же конусе фиксируем некоторый вектор

$$\hat{\alpha} = (\alpha, 1) \in \angle \mathbf{S}, \quad (1.17)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – иррациональная точка, т. е. для ее координат выполняется условие:

$$\text{числа } 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}, \quad (1.18)$$

где \mathbb{Z} – кольцо целых рациональных чисел. В определении (1.18) кольцо \mathbb{Z} можно заменить полем рациональных чисел \mathbb{Q} . Из (1.17) и (1.18), в частности, следуют неравенства $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_d > 0$.

Скажем, что базис (1.12) центрирован

$$u_{\hat{\alpha}} = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}\}_{\hat{\alpha}} \quad (1.19)$$

лучом $\hat{\alpha}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \hat{\alpha}$, если этот луч содержится во внутренности $\angle^{\text{int}} u$ конуса

$$\angle u = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d + \lambda_{d+1} u_{d+1}; \lambda_k \geq 0\},$$

порожденного векторами базиса (1.12). Базис $u_{\hat{\alpha}}$ назовем *центрированным унимодулярным базисом* или кратко *CU-базисом*, а луч $\hat{\alpha}_{\geq 0}$ – *центририрующим лучом*.

1.6. Проекции. Определим следующие проекции:

$$\mathbf{S} \xrightarrow{\text{pr}_{\hat{\alpha}, 0}} \mathbf{K}_0 \xrightarrow{\iota_0} \mathbf{K},$$

$$\text{pr}_{\hat{\alpha}, 0}: (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \mapsto (x_1 - \alpha_1 x_{d+1}, \dots, x_d - \alpha_d x_{d+1}, 0) \quad (1.20)$$

– параллельная проекция вдоль вектора $\hat{\alpha}$ из (1.17),

$$\iota_0: (x_1, \dots, x_d, 0) \mapsto (x_1, \dots, x_d) \quad (1.21)$$

– изоморфизм. Обозначим через

$$\text{pr}_{\hat{\alpha}} = \iota_0 \circ \text{pr}_{\hat{\alpha}, 0} \quad (1.22)$$

композицию отображений (1.20) и (1.21).

Пусть $u = u_{\hat{\alpha}}$ – центрированный унимодулярный базис (CU-базис), определенный в (1.19). Его проекция (1.22) $\text{pr}_{\hat{\alpha}}: u \rightarrow v$ представляет собою множество $v = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}\}$, состоящее из векторов в пространстве \mathbb{R}^d .

В [1] было доказано следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Если $u = u_{\hat{\alpha}}$ – центрированный унимодулярный базис (1.19), при этом α является иррациональной точкой (1.18), то множество векторов $v = v_{\hat{\alpha}} = \text{pr}_{\hat{\alpha}} u$, где $\text{pr}_{\hat{\alpha}}$ – проекция (1.22), образует бесконечно дифференцируемую звезду.*

1.7. Дифференцирование центрированных базисов. Используя проекцию $\text{pr}_{\hat{\alpha}}$, с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} u_{\hat{\alpha}} & \xrightarrow{\text{pr}_{\hat{\alpha}}} & v \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ u_{\hat{\alpha}}^\sigma & \xrightarrow{\text{pr}_{\hat{\alpha}}} & v^\sigma \end{array} \quad (1.23)$$

можно перенести операции $\sigma \in \mathfrak{S}$ дифференцирования звезд $v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma$ (1.5) на дифференцирования CU -базисов $u_{\hat{\alpha}}$.

Выясним геометрический смысл дифференцирований CU -базисов $u_{\hat{\alpha}}$. Пусть σ' – дополнительное сочетание к $\sigma \in \mathfrak{S}$. Обозначим через $\hat{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в \mathbb{R}^{d+1} , содержащую векторы $u_{k'_j} \in u_{\hat{\alpha}}$ с индексами k'_j из σ' и луч $\hat{\alpha}_{\geq 0}$. Если, допустим, для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вектор \hat{v}_{k_1} и сумма векторов $\hat{v}_{k_1} + \hat{v}_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\hat{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования $u_{\hat{\alpha}} \xrightarrow{\sigma} u_{\hat{\alpha}}^\sigma$ сводится к замене вектора u_{k_2} на сумму $u_{k_1} + u_{k_2}$.

В [1] доказаны следующие утверждения.

Предложение 1.2. *Если центрирующий луч $\hat{\alpha}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+ \cdot \hat{\alpha}$ иррациональный (1.18), то любой центрированный унимодулярный базис $u_{\hat{\alpha}}$ (1.19), центрированный лучом $\hat{\alpha}_{\geq 0}$, обладает свойствами:*

- 1) базис $u_{\hat{\alpha}}$ является бесконечно дифференцируемым;
- 2) для любого $\sigma \in \mathfrak{S}$ производное множество векторов $u_{\hat{\alpha}}^\sigma$ снова образует CU -базис, т. е. унимодулярный базис, центрированный лучом $\hat{\alpha}_{\geq 0}$.

1.8. Пространство и гиперплоскость Фарея. Выделим в суперпространстве \mathbf{S} единичную гиперплоскость

$$\mathbf{F}_1 = \{(x_1, \dots, x_d, 1) : (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{K}\} \subset \mathbf{S},$$

где \mathbf{K} – ядерное пространство из (1.9), и отождествим ее

$$\mathbf{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{F} : (x_1, \dots, x_d, 1) \mapsto (x_1, \dots, x_d) \quad (1.24)$$

с пространством $\mathbf{F} = \mathbb{R}^d$. Назовем \mathbf{F}_1 *гиперплоскостью Фарея*, а \mathbf{F} – *пространством Фарея*. Зададим проекции $\mathbf{S}_+ \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbf{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{F}$. Здесь

$$\mathbf{S}_+ = \{(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbf{S}; x_{d+1} > 0\} \quad (1.25)$$

обозначает *верхнее суперпространство*,

$$\text{pr}_1 : (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{x_{d+1}}, 1 \right) \quad (1.26)$$

— *центральную проекцию* на гиперплоскость Фарея \mathbf{F}_1 с центром в $0 \in \mathbf{S}$ и φ_1 — изоморфизм (1.24). Далее, обозначим через

$$\varphi = \varphi_1 \circ \text{pr}_1 \quad (1.27)$$

композицию отображений (1.26) и (1.24).

1.9. Сумма Фарея точек. Данные нами названия для множеств \mathbf{F} и \mathbf{F}_1 объясняет следующее утверждение, доказанное в [1].

Предложение 1.3. *При отображении $\varphi : \mathbf{S}_+ \rightarrow \mathbf{F}$ имеет место согласование операций $\varphi(x+y) = \varphi(x) \hat{+} \varphi(y)$. Здесь $\hat{+}$ — сумма Фарея,*

$$\left(\frac{x_1}{x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{x_{d+1}} \right) \hat{+} \left(\frac{y_1}{y_{d+1}}, \dots, \frac{y_d}{y_{d+1}} \right) = \left(\frac{x_1+y_1}{x_{d+1}+y_{d+1}}, \dots, \frac{x_d+y_d}{x_{d+1}+y_{d+1}} \right).$$

1.10. Центрированные унимодулярные симплексы. Пусть

$$u = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}\} \subset \mathbf{S}_+ \quad (1.28)$$

— произвольный унимодулярный базис, принадлежащий верхнему суперпространству (1.25) и центрированный (1.19) лучом $\widehat{\alpha}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \widehat{\alpha}$. Подействуем на него

$$\mathbf{S} \supset u \xrightarrow{\varphi} \mathbf{s} \subset \mathbf{F} \quad (1.29)$$

проекцией φ из (1.27). Образом будет симплекс

$$\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_d, s_{d+1}\}, \quad (1.30)$$

имеющий рациональные вершины

$$s_i = \varphi(u_i) = \frac{P_i}{Q_i} = \left(\frac{P_{i1}}{Q_i}, \dots, \frac{P_{id}}{Q_i} \right) \quad (1.31)$$

с индексами $i = 1, \dots, d, d+1$. Здесь знаменатели $Q_i = P_{i,d+1} = u_{i,d+1}$ — это последние координаты базисных векторов $u_i = \{u_{i1}, \dots, u_{id}, u_{i,d+1}\}$ из (1.28).

Определенный в (1.30) симплекс назовем *аппроксимационным симплексом* (см. формулу (2.9)), поскольку его вершины служат рациональными приближениями точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

Замечание 1.1. 1. Чтобы не усложнять обозначения, отождествляем симплекс \mathbf{s} с множеством его вершин $\{s_1, \dots, s_d, s_{d+1}\}$.

2. В определении (1.31) вершины s_i получаются, как образы концов базисных векторов u_i .

По определению CU -базиса \widehat{V} луч $\widehat{\alpha}_{\geq 0}$ принадлежит внутренней области $\angle^{\text{int}} u$ конуса $\angle u$. Отсюда, (1.17) и (1.27) следуют, что точка

$$\alpha = \varphi(\widehat{\alpha}_{\geq 0}) = \varphi(\widehat{\alpha})$$

будет внутренней точкой симплекса $\mathbf{s} \subset \mathbf{F}$. Назовем \mathbf{s} *центрированным* точкой α симплексом.

1.11. Дифференцирования симплексов. Используя коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} u_{\widehat{\alpha}} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{s} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ u_{\widehat{\alpha}}^\sigma & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{s}^\sigma \end{array} \quad (1.32)$$

перенем операции дифференцирования $\sigma \in \mathfrak{S}$ центрированных универсальных базисов $u_{\widehat{\alpha}}$ на дифференцирования центрированных симплексов (1.30).

Геометрический смысл дифференцирований симплексов \mathbf{s} состоит в следующем. Пусть $\sigma = \{k_1, k_2\}$ и σ' – дополнительное сочетание. Обозначим через $\mathcal{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в \mathbb{R}^d , проходящую через вершины $s_{k'_j}$ симплекса \mathbf{s} с индексами k'_j из σ' и точку α . Если для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вершина s_{k_1} и сумма вершин $s_{k_1} \widehat{+} s_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\mathcal{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования $\mathbf{s} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{s}^\sigma$ симплекса \mathbf{s} сводится к замене вершины s_{k_2} на сумму вершин $s_{k_1} \widehat{+} s_{k_2}$. В противном случае вершина s_{k_1} заменяется на сумму $s_{k_1} \widehat{+} s_{k_2}$. Из (1.32) следует, что новая вершина $s_{k_1} \widehat{+} s_{k_2}$ лежит на ребре, соединяющим вершины s_{k_1} и s_{k_2} .

1.12. Минимальные рациональные симплексы. Пусть открытый d -мерный симплекс \mathbf{s} имеет рациональные вершины

$$\frac{P_i}{Q_i} = \left(\frac{P_{i1}}{Q_i}, \dots, \frac{P_{id}}{Q_i} \right) \quad (1.33)$$

для $i = 1, \dots, d, d + 1$, удовлетворяющие условию

$$Q_i > 0, \quad \text{НОД}(P_{i1}, \dots, P_{id}, Q_i) = 1. \quad (1.34)$$

Назовем \mathbf{s} *минимальным симплексом*, если он не содержит

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s}^{\text{int}} \quad (1.35)$$

никакой точки

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q}, \dots, \frac{P_d}{Q} \right), \quad (1.36)$$

координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leq Q < Q_{\max}$, где использовали обозначение

$$Q_{\max} = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_d. \quad (1.37)$$

В [21] приведены некоторые свойства, равносильные свойству быть минимальным симплексом.

Предложение 1.4. *Следующие утверждения равносильны:*

- 1) симплекс \mathbf{s} минимальный (1.33)–(1.37);
- 2) квадратная матрица

$$S^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{d1} & P_{d+1,1} \\ & \dots & & \\ P_{1d} & \dots & P_{dd} & P_{d+1,d} \\ Q_1 & \dots & Q_d & Q_{d+1} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

размера $d + 1$ *унимодулярна*.

Из предложения 1.4 вытекает следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть α – иррациональная точка (1.18), \mathbf{s} – любой центрированный точкой α симплекс из диаграммы (1.32) с рациональными вершинами (1.31); и пусть $\mathbf{s} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{s}^\sigma$ – дифференцирование для произвольного $\sigma \in \mathfrak{S}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) симплекс \mathbf{s} является минимальным;
- 2) \mathbf{s} переходит снова в минимальный симплекс \mathbf{s}^σ , центрированный точкой α ;
- 3) симплекс \mathbf{s} бесконечно дифференцируемый.

Доказательство. См. в [1]. □

§2. АППРОКСИМАЦИЯ

2.1. Бесконечные итерации дифференцирований. Рассмотрим

$$\Xi = \mathfrak{S}^{\mathbb{N}} \quad (2.1)$$

— множество всех бесконечных последовательностей $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$, состоящих из произвольных сочетаний σ_i из \mathfrak{S} . Пусть

$$[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$$

обозначает *отрезок* из первых n членов последовательности σ и $[\sigma]_0 = \emptyset$. Используя определение производной симплекса (1.32), индукцией по $n = 0, 1, 2, \dots$ определим $[\sigma]_n$ -*производные*

$$\mathbf{s}^{[\sigma]_n} = (\mathbf{s}^{[\sigma]_{n-1}})^{\sigma_n}, \quad \mathbf{s}^{[\sigma]_0} = \mathbf{s} \quad (2.2)$$

центрированного точкой α симплекса \mathbf{s} .

Если α — иррациональная точка (1.18), то по теореме 1.1 симплекс \mathbf{s} будет $[\sigma]_n$ -*дифференцируемым* для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ при любом выборе последовательности σ из множества (2.1).

Обозначим через

$$S^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{11}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{d1}^{[\sigma]_n} & P_{d+1,1}^{[\sigma]_n} \\ P_{1d}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{dd}^{[\sigma]_n} & P_{d+1,d}^{[\sigma]_n} \\ Q_1^{[\sigma]_n} & \dots & Q_d^{[\sigma]_n} & Q_{d+1}^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

матрицы $[\sigma]_n$ -*производных* симплексов $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$, определяемых по правилу (1.33) и (1.38).

Далее будем предполагать, что последовательности дифференцирований $\sigma \in \Xi$ удовлетворяют условию: *существует номер n_0 , для которого знаменатели*

$$Q_i^{[\sigma]_n} > 0 \quad \text{при } n \geq n_0 \quad (2.4)$$

для всех $i = 1, \dots, d, d + 1$.

Начиная с этого места, в качестве начального унимодулярного базиса (1.28) будем выбирать

$$u = e \quad (2.5)$$

— единичный базис (1.10). Согласно определению (1.19), единичный базис $e_{\hat{\alpha}} = \{e_1, \dots, e_d, e_{d+1}\}_{\hat{\alpha}}$ является *CU*-базисом с любым центрирующим лучом $\hat{\alpha}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \hat{\alpha}$, где $\hat{\alpha}$ — вектор, определенный в (1.17).

2.2. Радиус производных звезд и симплексов. Пусть $[\sigma]_n$ -*производные* $v^{[\sigma]_n}$ звезды v из (1.5) состоят из лучей

$$v^{[\sigma]_n} = \{v_1^{[\sigma]_n}, \dots, v_d^{[\sigma]_n}, v_{d+1}^{[\sigma]_n}\}, \quad (2.6)$$

и пусть $\Delta(v^{[\sigma]_n})$ – симплекс звезды $v^{[\sigma]_n}$, имеющий вершины в концах лучей из (2.6). Размер звезды $v^{[\sigma]_n}$ и отвечающих им симплексов $\Delta(v^{[\sigma]_n})$ будем контролировать с помощью радиуса звезды и симплекса

$$\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(v^{[\sigma]_n}) = \varrho_{\max}(\Delta(v^{[\sigma]_n})) = \max_{1 \leq i \leq d+1} |v_i^{[\sigma]_n}|_1, \quad (2.7)$$

равного максимальной длине лучей звезды $v^{[\sigma]_n}$ или радиусу минимальной сферы с центром в точке 0, содержащей звезду $v^{[\sigma]_n}$ и симплекс $\Delta(v^{[\sigma]_n})$. В дальнейшем нам также потребуются

$$\varrho_s^{[\sigma]_n} = \varrho(s^{[\sigma]_n}) = \max_{1 \leq i, i' \leq d+1} \left| \frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} - \frac{P_{i'}^{[\sigma]_n}}{Q_{i'}^{[\sigma]_n}} \right|_1$$

– радиусы аппроксимационных симплексов (2.2). Выше использована 1-метрика $|*|_1$ – сумма модулей координат.

2.3. Основная теорема об аппроксимации. Пусть $[\sigma]_n$ -производный симплекс $s^{[\sigma]_n}$ из (2.2) имеет рациональные вершины

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_n}}{Q_{i1}^{[\sigma]_n}}, \dots, \frac{P_{id}^{[\sigma]_n}}{Q_{id}^{[\sigma]_n}} \right)$$

с $i = 1, \dots, d, d+1$. Определим для симплекса $s^{[\sigma]_n}$ его точку Фарея

$$\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} = \frac{P_1^{[\sigma]_n}}{Q_1^{[\sigma]_n}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{P_d^{[\sigma]_n}}{Q_d^{[\sigma]_n}} \hat{+} \frac{P_{d+1}^{[\sigma]_n}}{Q_{d+1}^{[\sigma]_n}}. \quad (2.8)$$

Теорема 2.1. При выполнении условий (2.4) и (2.5), пусть α – рациональная точка (1.18), $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ – произвольная бесконечная последовательность сочетаний σ_i из множества \mathfrak{S} и $s^{[\sigma]_n}$ – соответствующие производные симплексы (2.2). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Симплексы $s^{[\sigma]_n}$ обладают свойством минимальности

$$\frac{P}{Q} \notin s^{\text{int}[\sigma]_n}, \quad \text{если} \quad 1 \leq Q < Q_{\max}^{[\sigma]_n}.$$

Единственная точка $\frac{P}{Q} \in s^{\text{int}[\sigma]_n}$ со знаменателем $Q = Q_{\max}^{[\sigma]_n}$ есть точка Фарея (2.8).

2. Имеют место неравенства

$$\left| \alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{\varrho_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}, \quad \left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{\varrho_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \quad (2.9)$$

для всех $i = 1, \dots, d < d + 1$ и $n \geq n_0$, где граница n_0 определена в (2.4). Здесь $\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(\Delta(v^{[\sigma]_n}))$ обозначает радиус $[\sigma]_n$ -производной звезды v , определенный в (2.7).

Доказательство. См. в [1]. \square

2.4. Целевая функция. Из (2.9) видно, что приближение иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ подходящими дробями, – точками Фарея (2.8), зависит от радиуса $\varrho_{\max}^{[\sigma]_n}$ производной звезды $r^{[\sigma]_n}$.

В свою очередь, сами производные звезды $v^{[\sigma]_n}$ определяются бесконечной последовательностью производных $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ из множества $\Xi = \mathfrak{S}^{\mathbb{N}}$. Чтобы как-то упорядочить выбор производных σ_n из \mathfrak{S} , входящих в последовательность σ , можно, например, ввести целевую функцию $\wp(v) \geq 0$, удовлетворяющую следующим свойствам:

$$\wp(v) \geq \wp(v'), \quad \text{если } \Delta(v) \supset \Delta(v'), \quad (2.10)$$

где v, v' – две произвольные звезды и $\Delta(v), \Delta(v')$ – отвечающие им симплексы;

$$\varrho_{\max}(v) \leq c \wp(v) \quad (2.11)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от звезды v .

2.5. Диофантовы экспоненты. Из неравенств (2.9) и (2.11) следует, что выбранная \wp -стратегия применительно к данной точке α срабатывает, если

$$\wp(v^{[\sigma]_n}) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$. Если же попытаться как-то количественно оценить \wp -стратегию, то с этой целью можно использовать, например, диофантову экспоненту, точнее – \wp -экспоненту

$$\eta = \eta(\alpha, \wp) = \sup_{n' \geq 0} \inf_{n \geq n'} \frac{-\ln \wp(v^{[\sigma]_n})}{\ln Q_{\max}^{[\sigma]_n}}. \quad (2.12)$$

Ее роль видна из следующего утверждения.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1, целевая функция $\wp(v)$ удовлетворяет свойствам (2.10), (2.11) и по целевой функции \wp построена бесконечная последовательность производных $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ из множества $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$. Кроме того, пусть η' – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\eta' < \eta$, где $\eta =$

$\eta(\alpha, \varphi)$ – диофантиова экспонента (2.12). Тогда справедливы оценки

$$\left| \alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{c}{(Q_{\max}^{[\sigma]_n})^{1+\eta'}} \quad u \quad \left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{c}{(Q_{\max}^{[\sigma]_n})^{1+\eta'}} \quad (2.13)$$

для всех $n \geq n_{\eta'}$. Здесь c – константа из неравенства (2.11) и нижняя граница $n_{\eta'}$ для n определяется выбором показателя η' и зависит от иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и целевой функции $\varphi(v)$.

Доказательство. См. в [1]. \square

§3. ПОЛУГРУППЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ И СПЕЦИАЛИЗАЦИЙ И ИХ МАТРИЧНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

3.1. Специализации. Заметим, что дифференцирование

$$\sigma : u \rightarrow u^\sigma \quad (3.1)$$

не определено на множестве обычных базисов u , а только на множестве центрированных базисов $u_{\hat{\alpha}}$ из (1.23). Чтобы определить дифференцирования базисов (3.1), нужно рассмотреть *специализации*

$$\sigma_* = \sigma_{k_1}^{k_1, k_2} \quad \text{и} \quad \sigma_* = \sigma_{k_2}^{k_1, k_2} \quad (3.2)$$

дифференцирований σ , действующие по формуле

$$\sigma_* : u \rightarrow u^{\sigma_*} = \{u_1^{\sigma_*}, \dots, u_d^{\sigma_*}, u_{d+1}^{\sigma_*}\}, \quad (3.3)$$

где $u_{k_1}^{\sigma_*} = u_{k_1}$, $u_{k_2}^{\sigma_*} = u_{k_1} + u_{k_2}$ для первого случая (3.2); $u_{k_1}^{\sigma_*} = u_{k_1} + u_{k_2}$, $u_{k_2}^{\sigma_*} = u_{k_2}$ для второго случая (3.2); $u_{k'}^{\sigma_*} = u_{k'}$ для $k' \neq k_1, k_2$. Уточним связь дифференцирования с его специализациями.

Замечание 3.1. 1. Пара $\{\sigma, u_{\hat{\alpha}}\}$ задает

$$\{\sigma, u_{\hat{\alpha}}\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_{u_{\hat{\alpha}}} \quad (3.4)$$

специализацию (3.3) дифференцирования σ так, что $u^{\sigma^*} = u_{\hat{\alpha}}^\sigma$.

2. Аналогично, пара $\{\sigma, v\}$ задает специализацию

$$\{\sigma, v\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_v,$$

при этом производная звезда $v^{\sigma**}$ не определена для $\sigma_{**} \neq \sigma_*$. Здесь σ_* и σ_{**} – *двойственные* специализации (3.2) одного и того же дифференцирования σ .

3.2. Матрицы специализаций. Запишем базисы u в виде столбцов

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \\ u_{d+1} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Тогда действия (3.3) специализации $\sigma_{k_1}^{k_1, k_2}$ с номерами $k_1 < k_2$ можно записать в матричном виде

$$u^{\sigma_{k'}^{k_1, k_2}} = M(\sigma_{k'}^{k_1, k_2}) \cdot u, \quad (3.6)$$

где

$$M(\sigma_{k_1}^{k_1, k_2}) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_1, k_1} & 0 & 1_{k_1, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0_{k_2, k_1} & 0 & 1_{k_2, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

и

$$M(\sigma_{k_2}^{k_1, k_2}) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_1, k_1} & 0 & 0_{k_1, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_2, k_1} & 0 & 1_{k_2, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

— квадратные матрицы размера $d + 1$ с единичными блоками E соответствующих размеров.

3.3. Представления группы перестановок. Пусть $S = S_{d+1}$ — группа перестановок индексов $\{1, \dots, d, d + 1\}$. На множестве базисов $u = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}\}$ (1.12) зададим действие

$$s : u \rightarrow u^s \quad (3.9)$$

группы S , полагая

$$u^s = (u_1^s, \dots, u_d^s, u_{d+1}^s) = (u_{s(1)}, \dots, u_{s(d)}, u_{s(d+1)}) \quad (3.10)$$

для $s \in S$.

Согласно (3.9) и (3.10) действие перестановок $s \in S$ на столбцы (3.5) в матричной форме запишется

$$u^s = M(s) \cdot u,$$

где

$$M(s) = \begin{pmatrix} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1_{i,s(i)} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

— *перестановочная матрица для* s .

3.4. Полугруппы дифференцирований и специализаций. Определим полугруппу

$$S\mathfrak{G} = \langle S, \mathfrak{G} \rangle, \quad (3.12)$$

порожденную всеми перестановками $s \in S$ и дифференцированиями

$$\sigma : u_{\hat{\alpha}} \rightarrow u_{\hat{\alpha}}^{\sigma}$$

для всех $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из \mathfrak{G} . Аналогично определим полугруппу

$$S\mathfrak{G}_* = \langle S, \mathfrak{G}_* \rangle, \quad (3.13)$$

заменяя дифференцирования в (3.12) специализациями σ_* из (3.2). Назовем $S\mathfrak{G}$ *полугруппой дифференцирований*, а $S\mathfrak{G}_*$ — *полугруппой специализаций*.

Пусть $\sigma_* = \sigma_{*k} \cdot \dots \cdot \sigma_{*1}$ принадлежит полугруппе $S\mathfrak{G}_*$, где σ_{*i} — некоторая перестановка или специализация. Тогда, используя представления (3.3) и (3.9), по определению полагаем $u^{\sigma_*} = ((u^{\sigma_{*1}}) \dots)^{\sigma_{*k}}$.

В [22] было доказано следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Для $\sigma_* = \sigma_{*k} \cdot \dots \cdot \sigma_{*1}$ из полугруппы $S\mathfrak{G}_*$ определим матрицу*

$$M(\sigma_*) = M(\sigma_{*k}) \cdot \dots \cdot M(\sigma_{*1}), \quad (3.14)$$

где $M(\sigma_{*i})$ — матрица (3.11), если σ_{*i} — перестановка, и $M(\sigma_{*i})$ — матрица (3.7) или (3.8), если σ_{*i} — специализация. Тогда справедливы утверждения.

1. *Действия (3.9) в матричной форме принимают вид*

$$u^{\sigma_*} = M(\sigma_*)u = M(\sigma_{*k}) \cdot (\dots \cdot (M(\sigma_{*1})u)), \quad (3.15)$$

где u — произвольный унимодулярный базис (1.12).

2. *Определенная в (3.13) полугруппа специализаций $S\mathfrak{G}_*$ в матричном представлении (3.14) состоит из неотрицательных унимодулярных матриц, т.е. матриц с целыми неотрицательными коэффициентами и определителем ± 1 .*

§4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

4.1. Предельный аппроксимационный симплекс. Определим

$$S\Xi_* = (S\mathfrak{S}_*)^{\mathbb{N}} \quad (4.1)$$

как множество всех бесконечных последовательностей $\sigma_* = \{\sigma_{*1}, \dots\}$, состоящих из элементов σ_{*i} полугруппы специализаций $S\mathfrak{S}_*$, определенной в (3.13). Элементы σ_{*i} представляют собою перестановки базисных векторов или специализации дифференцирований.

Пусть $u \subset \angle \mathbf{S}$ – унимодулярный базис с условием (1.16); и пусть для него определен $\mathbf{s} = \varphi(u)$ – аппроксимационный симплекс из (1.29), т. е. все $(d+1)$ -ые координаты векторов базиса $u_1, \dots, u_d, u_{d+1} \in u$ ненулевые. Используя представления (3.3) и (3.9), полагаем

$$u^{[\sigma_*]_n} = ((u^{\sigma_{*1}}) \dots)^{\sigma_{*n}}. \quad (4.2)$$

С помощью коммутативной диаграммы (1.32) представление (4.2) перенесем на аппроксимационный симплекс:

$$\mathbf{s}^{[\sigma_*]_n} = ((\mathbf{s}^{\sigma_{*1}}) \dots)^{\sigma_{*n}}.$$

Получим монотонную последовательность

$$\mathbf{s}^{[\sigma_*]_0} \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_1} \supseteq \dots \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_n} \supseteq \dots, \quad (4.3)$$

состоящую из производных аппроксимационных симплексов. Из свойства монотонности производных симплексов (4.3) вытекает существование *пределного аппроксимационного симплекса*

$$\mathbf{s}^{\sigma_*} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathbf{s}^{[\sigma_*]_n}.$$

Его размерности в общем случае могут быть любыми в промежутке $0 \leq \dim \mathbf{s}^{\sigma_*} \leq d-1$. В предельном случае $\dim \mathbf{s}^{\sigma_*} = 0$ будем иметь

$$\mathbf{s}^{\sigma_*} = \{\hat{\alpha}\}, \quad (4.4)$$

где вектор $\hat{\alpha} = (\alpha, 1)$ принадлежит конусу $\angle \mathbf{S}$ из (1.11) и, значит, точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ имеет координаты $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_d \geq 0$.

4.2. Представление точек через специализации. Если выполняется условие (4.4), то скажем, что бесконечная последовательность специализаций σ_* из (4.1) *представляет* точку α . Для этого факта введем обозначение

$$\sigma_*|_u \rightarrowtail \alpha. \quad (4.5)$$

Заметим, что в определении (4.5) участвует пара: последовательность специализаций σ_* и унимодулярный базис $u \subset \angle \mathbf{S}$; сама же по себе последовательность σ_* не может представлять никакую точку α . Таким образом, если $\sigma_*|_u \rightarrow \alpha$, то последовательность включений (4.3) допускает следующее расширение

$$\mathbf{s}^{[\sigma_*]_0} \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_1} \supseteq \dots \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_n} \supseteq \dots \supseteq \{\alpha\}. \quad (4.6)$$

Начиная с этого места возвращаемся к ситуации (2.5), когда в качестве унимодулярного базиса u выбирался единичный базис (1.10). При этом будем предполагать выполненными условия (2.4).

4.3. Периодические последовательности специализаций. Далее ограничимся чисто периодическими последовательностями специализаций

$$\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\}, \quad (4.7)$$

состоящих из бесконечного повторения некоторого отрезка

$$\sigma_{*,\text{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}. \quad (4.8)$$

Назовем p *периодом* последовательности σ_* , если это наименьшее число со свойством (4.7). Обозначим подмножество чисто периодических последовательностей (4.7) из $(S\mathfrak{S}_*)^{\mathbb{N}}$ как $(S\mathfrak{S}_*)_{\text{per}}^{\mathbb{N}}$.

4.4. Снятие и подъем специализаций. Пусть $\sigma^{k_1, k_2} = \{k_1, k_2\}$ – элементарное сочетание из \mathfrak{S} ; и $\sigma_*^{k_1, k_2} = v_{k_1}^{k_1, k_2}$ или $v_{k_2}^{k_1, k_2}$ – две его возможные специализации (1.8). На этом множестве элементарных сочетаний введем две операции:

$$1) \text{ снятие специализации } \sigma_*^{k_1, k_2} \downarrow \sigma^{k_1, k_2}; \quad (4.9)$$

$$2) \text{ подъем специализации } \sigma^{k_1, k_2} \uparrow_* \sigma_*^{k_1, k_2}. \quad (4.10)$$

В последнем случае – с указанием специализации $* = k_1$ или k_2 .

Перенесем поэлементно операции (4.9) и (4.10) на полугруппы дифференцирований $S\mathfrak{S}$ (3.12) и специализаций $S\mathfrak{S}_*$ (3.13), состоящих соответственно из конечных последовательностей $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ и $\sigma_* = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*n}\}$. Если $\sigma_i = s \in S$ является перестановкой, то условимся, что указанные операции действуют на них как тождественные преобразования.

Далее нас будут интересовать бесконечные последовательности из $S\Xi_*$. Пусть $\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}]$ – периодическая последовательность специализаций из (4.7). Тогда с помощью операции (4.9) с нее можно снять

специализации

$$\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}] \downarrow \sigma = [\sigma_{\text{per}}] \quad (4.11)$$

и получить простую периодическую последовательность дифференцирований σ из $S\mathfrak{S}$. Чтобы совершить обратную операцию, воспользуемся замечанием 3.1. Например, это можно сделать, если задан центрированный базис $u_{\hat{\alpha}}$ (см. (3.4)):

$$\{\sigma, u_{\hat{\alpha}}\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_{u_{\hat{\alpha}}}. \quad (4.12)$$

В обозначениях (4.10) связь (4.12) запишется как

$$\sigma = [\sigma_{\text{per}}] \uparrow_{u_{\hat{\alpha}}} \sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}].$$

Пусть в качестве унимодулярного базиса u выбран единичный базис (1.10), $\sigma_{*,\text{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}$ – некоторый период специализаций (4.8), удовлетворяющий условиям (2.4); и пусть

$$M(\sigma_{*,\text{per}}) = M(\sigma_{*p}) \cdot \dots \cdot M(\sigma_{*1}) \quad (4.13)$$

– матрица (3.14) относительно базиса e . Назовем $M(\sigma_{*,\text{per}})$ *матрицей периода* для последовательности специализаций $\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}]$ из (4.7).

Лемма 4.1. *Пусть $M(\sigma_{*,\text{per}})$ имеет собственный левый вектор*

$$\hat{\alpha} M(\sigma_{*,\text{per}}) = \lambda_{d+1} \hat{\alpha}, \quad \hat{\alpha} = (\alpha, 1), \quad (4.14)$$

содержащийся в конусе $\angle S$ из (1.11), где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – упрациональная точка (1.18). Тогда справедливы утверждения.

1) *Собственное значение λ_{d+1} является вещественным и*

$$\lambda_{d+1} > 1. \quad (4.15)$$

2) *Центрированный единичный базис $e|_{\hat{\alpha}}$ допускает последовательность специализаций $\sigma_{*,\text{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}$:*

$$\sigma_{\text{per}} \uparrow_{e_{\hat{\alpha}}} \sigma_{*,\text{per}}, \quad (4.16)$$

а также – соответствующую бесконечную периодическую последовательность $\sigma_ = [\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\}$ из (4.8):*

$$\sigma = [\sigma_{\text{per}}] \uparrow_{e_{\hat{\alpha}}} \sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}]. \quad (4.17)$$

Слева в (4.16) и (4.17) указаны снятые специализации (см. (4.11))

$$\sigma_{*,\text{per}} \downarrow \sigma_{\text{per}}, \quad \sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}] \downarrow \sigma = [\sigma_{\text{per}}].$$

Доказательство. См. [2]. □

4.5. Достаточные условия представимости точки.

Теорема 4.1. В условиях леммы 4.1, пусть $M(\sigma_{*,\text{per}})$ из (4.13) имеет простой спектр $\lambda_1, \dots, \lambda_d, \lambda_{d+1}$, где λ_{d+1} вещественное собственное значение (4.14), удовлетворяющее (4.15), а остальные собственные значения, отличные от λ_{d+1} , удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_i| < 1 \quad \text{для } i = 1, \dots, d. \quad (4.18)$$

Тогда $\sigma_*|_e \rightarrow \alpha$, т.е. последовательность специализаций σ_* представляет (4.5) точку α .

Доказательство. См. [2]. □

Непосредственным следствием из теоремы 4.1 является следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.1, и пусть

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}, \dots, \frac{P_{id}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \right), \quad (4.19)$$

($i = 1, \dots, d, d+1$) – рациональные вершины $[\sigma]_n$ -производного симплекса $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ из (2.2). Тогда (4.19) – подходящие дроби для вещественной иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ (1.18):

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \rightarrow \alpha \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

При этом имеют место неравенства

$$\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 \leq c \frac{\lambda_{\max}^n}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \quad \text{для всех } np \geq n_0, \quad (4.20)$$

с границей n_0 из (2.4). Здесь $c = c_{M(\sigma_{*,\text{per}})}$ – положительная константа, не зависящая от степени n , $\lambda_{\max} > 0$ – собственное значение,

$$\lambda_{\max} = \max_{1 \leq i \leq d} |\lambda_i| < 1. \quad (4.21)$$

§5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

5.1. Матрицы специализаций. Если базисы u записаны как в (3.5), то согласно (3.6), действие (3.3) специализации σ_* записывается в матричном виде

$$u^{\sigma_*} = M(\sigma_*) \cdot u, \quad (5.1)$$

где $M(\sigma_*)$ – элементарные матрицы специализаций (3.7) и (3.8). Заметим, что по определению (3.6) матрицы специализаций $M(\sigma_*)$ не зависят от выбора унимодулярного базиса u . В частности, в случае единичного базиса (1.10) действия специализаций σ_* будут записываться по той же формуле

$$e^{\sigma_*} = M(\sigma_*) \cdot e. \quad (5.2)$$

5.2. Единичный начальный базис. Следующие построения удобно проводить сначала для единичного базиса $u = e$.

Пусть $\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}] \in (S\mathfrak{S}_*)_{\text{per}}^{\mathbb{N}}$ – чисто периодическая последовательность специализаций (4.7) с наименьшим периодом $\sigma_{*,\text{per}}$ из (4.8). Пусть $M(\sigma_{*,\text{per}})$ – матрица периода (4.13). Согласно (3.14), (3.15) и (5.2) имеем

$$e^{\sigma_{*,\text{per}}} = M(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot e. \quad (5.3)$$

Применяя формулу (5.3) несколько раз, получаем

$$e^{\sigma_{*,\text{per}}^n} = M^n(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot e. \quad (5.4)$$

Воспользуемся сокращением

$$e^{np} = e^{\sigma_{*,\text{per}}^n} \quad \text{для } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

5.3. Рекуррентные последовательности. Для матрицы периода $M(\sigma_{*,\text{per}})$ запишем ее характеристический многочлен в виде

$$ch_M(x) = \det(xE - M) = x^{d+1} - b_d x^d - \dots - b_1 x - b_0. \quad (5.6)$$

По теореме Гамильтона-Кэли $M(\sigma_{*,\text{per}})$ удовлетворяет уравнению

$$M(\sigma_{*,\text{per}})^{d+1} - b_d M(\sigma_{*,\text{per}})^d - \dots - b_1 M(\sigma_{*,\text{per}}) - b_0 E = 0. \quad (5.7)$$

Переписав (5.7) в виде равенства

$$M(\sigma_{*,\text{per}})^{d+1} = b_d M(\sigma_{*,\text{per}})^d + \dots + b_1 M(\sigma_{*,\text{per}}) + b_0 E$$

и умножив это равенство на e , получаем равенство столбцов

$$M(\sigma_{*,\text{per}})^{d+1} \cdot e = b_d M(\sigma_{*,\text{per}})^d \cdot e + \dots + b_1 M(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot e + b_0 e. \quad (5.8)$$

Предложение 5.1. *Если столбцы e^n для $n = 0, 1, 2, \dots$ определены равенствами (5.4) и (5.5), то они удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$e^{(n+d+1)p} = b_d e^{(n+d)p} + \dots + b_1 e^{(n+1)p} + b_0 e^{np}, \quad (5.9)$$

где b_d, \dots, b_1, b_0 – коэффициенты характеристического многочлена (5.6) и $n = 0, 1, 2, \dots$. При этом начальные условия

$$e^{dp} = M^d(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot e, \quad \dots, \quad e^p = M(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot e, \quad e^0 = e \quad (5.10)$$

задаются матрицей периода $M(\sigma_{*,\text{per}})$ (4.13) и единичным столбцом e из (1.10).

Доказательство. Применим к (5.8) формулу (5.4) и воспользуемся сокращением (5.5). Приходим к рекуррентной формуле (5.9). Начальные условия (5.10) вытекают из равенства (5.8). \square

Запишем столбцы e^n из (5.5) в виде $(d+1) \times (d+1)$ -матрицы

$$e^{np} = \begin{pmatrix} e_1^{np} \\ \vdots \\ e_d^{np} \\ e_{d+1}^{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11}^{np} & \dots & e_{1d}^{np} & e_{1,d+1}^{np} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{d1}^{np} & \dots & e_{dd}^{np} & e_{d,d+1}^{np} \\ e_{d+1,1}^{np} & \dots & e_{d+1,d}^{np} & e_{d+1,d+1}^{np} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

у которой строки являются координатами соответствующих векторов e_i^{np} . Для периодической последовательности специализаций $\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}]$ равенства (5.11) можно переписать

$$e^{np} = \begin{pmatrix} P_1^{[\sigma]_{np}} & Q_1^{[\sigma]_{np}} \\ \vdots & \vdots \\ P_d^{[\sigma]_{np}} & Q_d^{[\sigma]_{np}} \\ P_{d+1}^{[\sigma]_{np}} & Q_{d+1}^{[\sigma]_{np}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^{[\sigma]_{np}} & \dots & P_{1d}^{[\sigma]_{np}} & Q_1^{[\sigma]_{np}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{d1}^{[\sigma]_{np}} & \dots & P_{dd}^{[\sigma]_{np}} & Q_d^{[\sigma]_{np}} \\ P_{d+1,1}^{[\sigma]_{np}} & \dots & P_{d+1,d}^{[\sigma]_{np}} & Q_{d+1}^{[\sigma]_{np}} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

в терминах (2.3). Здесь

$$\frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}}, \dots, \frac{P_{id}^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \right) \quad \text{для } i = 1, \dots, d, d+1, \quad (5.13)$$

обозначают рациональные вершины $[\sigma]_{np}$ -производного симплекса $\mathbf{s}^{[\sigma]_{np}}$ из (2.2). По теореме 4.1 в случае выполнения условий (4.18) указанные вершины являются подходящими дробями для некоторой точки α .

Теорема 5.1. Числители и знаменатели $P_{i1}^{[\sigma]_{np}}, Q_i^{[\sigma]_{np}}$ вершин (5.13) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} P_{ij}^{[\sigma]_{(n+d+1)p}} &= b_d P_{ij}^{[\sigma]_{(n+d)p}} + \dots + b_1 P_{ij}^{[\sigma]_{(n+1)p}} + b_0 P_{ij}^{[\sigma]_{np}}, \\ Q_i^{[\sigma]_{(n+d+1)p}} &= b_d Q_i^{[\sigma]_{(n+d)p}} + \dots + b_1 Q_i^{[\sigma]_{(n+1)p}} + b_0 Q_i^{[\sigma]_{np}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

порядка $d + 1$, где b_d, \dots, b_1, b_0 – коэффициенты характеристического многочлена (5.6). Начальные условия задаются равенствами:
для числителей –

$$P_{ij}^{[\sigma]_{dp}} = M^d(\sigma_{*,\text{per}})|_{ij}, \dots, P_{ij}^{[\sigma]_p} = M(\sigma_{*,\text{per}})|_{ij}, P_{ij}^{[\sigma]_0} = \delta_{ij}, \quad (5.15)$$

где $i = 1, \dots, d, d + 1, j = 1, \dots, d$;

для знаменателей –

$$\begin{aligned} Q_i^{[\sigma]_{dp}} &= M^d(\sigma_{*,\text{per}})|_{i,d+1}, \dots, Q_i^{[\sigma]_p} \\ &= M(\sigma_{*,\text{per}})|_{i,d+1}, Q_i^{[\sigma]_0} = \delta_{i,d+1}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где $i = 1, \dots, d, d + 1$. Здесь δ_{ij} – символ Кронекера,

$$M^k(\sigma_{*,\text{per}})|_{ij} = (i, j) - элемент матрицы M^k(\sigma_{*,\text{per}})$$

и $M^k(\sigma_{*,\text{per}})$ – квадратные матрицы размера $d + 1$, определенные в (5.10), $k = 0, 1, \dots, d$.

Доказательство. Рекуррентные соотношения (5.14) есть не что иное, как соответствующие соотношения (5.9) из предложения 5.1, переписанные в координатной форме (5.12).

По той же схеме находятся начальные условия (5.15), (5.16). Согласно предложению 5.1 можем записать

$$\begin{aligned} Q_i^{[\sigma]_{dp}} &= (M^d(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot e)|_{i,d+1}, \dots, Q_i^{[\sigma]_p} = (M(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot e)|_{i,d+1}, \\ P_{ij}^{[\sigma]_{dp}} &= (M^d(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot e)|_{ij}, \dots, P_{ij}^{[\sigma]_p} = (M(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot e)|_{ij}, \quad (5.17) \\ P_{ij}^{[\sigma]_0} &= e|_{ij}, \quad Q_i^{[\sigma]_0} = e|_{i,d+1}. \end{aligned}$$

Если единичный столбец e представить в координатной форме, то по определению (1.10) это будет не что иное, как единичная матрица

$$e = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

размера $d + 1$. Поэтому, матрицу e можно опустить в равенствах (5.17). Таким образом, приходим к требуемым формулам (5.15) и (5.16). \square

Теорема 5.2. Пусть $\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}] \in (S\mathfrak{S}_*)_{\text{per}}^{\mathbb{N}}$ – чисто периодическая последовательность специализаций, см. (4.7), с наименьшим периодом $\sigma_{*,\text{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}$ из (4.8). Далее, пусть выполнены

условия теоремы 4.1 и матрица $M(\sigma_{*,\text{per}})$ имеет собственный вещественный левый вектор $\hat{\alpha} = (\alpha, 1)$, $\hat{\alpha}M(\sigma_{*,\text{per}}) = \lambda_{d+1}\hat{\alpha}$, содержащийся в конусе $\angle \mathbf{S}$ из (1.11), где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – иррациональная точка (1.18). В этих условиях, рациональные точки (5.13), вычисляемые по рекуррентным соотношениям (5.14) из теоремы 5.1. являются подходящими дробями для точки α :

$$\frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \rightarrow \alpha \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (5.19)$$

При этом имеют место неравенства

$$\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 \leq c \frac{\lambda_{\max}^n}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \quad \text{для всех } np \geq n_0, \quad (5.20)$$

с границей n_0 из (2.4). Здесь $c = c_{M(\sigma_{*,\text{per}})}$ – положительная константа, не зависящая от степени n ; λ_{\max} – собственное значение (4.21) и $0 < \lambda_{\max} < 1$.

Доказательство. Свойство (5.19) быть подходящими дробями вытекает из теоремы 4.1. Из (5.5), (5.12) и теоремы 5.1 следует, что рациональные точки (5.19) являются вершинами $[\sigma]_{np}$ -производных $\mathbf{s}^{[\sigma]_{np}}$ (2.2) начального симплекса \mathbf{s} . По теореме 4.2, для вершин производных симплексов выполняются неравенства (4.20). В силу сказанного, координаты точек (5.19) также будут удовлетворять аналогичным неравенствам (5.20). \square

5.4. Чисто предпериодические представления. Рассмотренный в предыдущих пунктах единичный базис e заменим произвольным униформулярным базисом

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \\ u_{d+1} \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Обозначим через

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1d} & u_{1,d+1} \\ & \ddots & & \\ u_{d1} & \dots & e_{dd} & u_{d,d+1} \\ u_{d+1,1} & \dots & u_{d+1,d} & u_{d+1,d+1} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

матрицу базиса (5.21), у которой строки являются координатами соответствующих векторов u_i . По определению (1.13), (1.14) матрица (5.22) является унимодулярной $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. В силу определения (3.6) матрицы специализаций $M(\sigma_*)$ не зависят от выбора унимодулярного базиса u . Поэтому можем записать ту же формулу

$$u^{np} = u^{\sigma_{*,\mathrm{per}}^n} = M^n(\sigma_{*,\mathrm{per}}) \cdot u, \quad (5.23)$$

что и в (5.4), (5.5).

Повторяя доказательство предложения 5.1 получаем аналогичное утверждение для новых столбцов u^{np} .

Предложение 5.2. *Столбцы (5.23) удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$u^{(n+d+1)p} = b_d u^{(n+d)p} + \dots + b_1 u^{(n+1)p} + b_0 u^{np}, \quad (5.24)$$

где b_d, \dots, b_0 – коэффициенты характеристического многочлена (5.6) и $n = 0, 1, 2, \dots$; при этом начальные условия

$$u^{dp} = M^d(\sigma_{*,\mathrm{per}}) \cdot u, \dots, u^p = M(\sigma_{*,\mathrm{per}}) \cdot u, \quad u^0 = u \quad (5.25)$$

задаются матрицей периода $M(\sigma_{*,\mathrm{per}})$ (4.13) и базисным столбцом u из (5.21).

Далее, записываем столбцы (5.23) в матричном виде

$$u^{np} = \begin{pmatrix} u_1^{np} \\ \vdots \\ u_d^{np} \\ u_{d+1}^{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^{np} & \dots & u_{1d}^{np} & u_{1,d+1}^{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{d1}^{np} & \dots & e_{dd}^{np} & u_{d,d+1}^{np} \\ u_{d+1,1}^{np} & \dots & u_{d+1,d}^{np} & u_{d+1,d+1}^{np} \end{pmatrix},$$

где строки – это координаты соответствующих векторов u_i^{np} .

Чтобы различать подходящие дроби, отвечающие базисам e и u , воспользуемся обозначениями

$$u^{np} = \begin{pmatrix} P_1'^{[\sigma]_{np}} & Q_1'^{[\sigma]_{np}} \\ \vdots & \vdots \\ P_d'^{[\sigma]_{np}} & Q_d'^{[\sigma]_{np}} \\ P_{d+1}'^{[\sigma]_{np}} & Q_{d+1}'^{[\sigma]_{np}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}'^{[\sigma]_{np}} & \dots & P_{1d}'^{[\sigma]_{np}} & Q_1'^{[\sigma]_{np}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{d1}'^{[\sigma]_{np}} & \dots & P_{dd}'^{[\sigma]_{np}} & Q_d'^{[\sigma]_{np}} \\ P_{d+1,1}'^{[\sigma]_{np}} & \dots & P_{d+1,d}'^{[\sigma]_{np}} & Q_{d+1}'^{[\sigma]_{np}} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\frac{P_i'^{[\sigma]_{np}}}{Q_i'^{[\sigma]_{np}}} = \left(\frac{P_{i1}'^{[\sigma]_{np}}}{Q_i'^{[\sigma]_{np}}}, \dots, \frac{P_{id}'^{[\sigma]_{np}}}{Q_i'^{[\sigma]_{np}}} \right) \quad (5.26)$$

– рациональные вершины $[\sigma]_{np}$ -произведного симплекса $\mathbf{s}'^{[\sigma]_{np}} = \mathbf{s}_u^{[\sigma]_{np}}$, построенного по унимодулярному базису u . Вершины (5.26) также являются подходящими дробями, но уже для некоторой другой точки α' . Найти ее – следующая задача.

Теорема 5.3. Числители и знаменатели $P_{ij}^{'[\sigma]_{np}}, Q_i^{'[\sigma]_{np}}$ вершин (5.26) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} P_{ij}^{'[\sigma]_{(n+d+1)p}} &= b_d P_{ij}^{'[\sigma]_{(n+d)p}} + \dots + b_1 P_{ij}^{'[\sigma]_{(n+1)p}} + b_0 P_{ij}^{'[\sigma]_{np}}, \\ Q_i^{'[\sigma]_{(n+d+1)p}} &= b_d Q_i^{'[\sigma]_{(n+d)p}} + \dots + b_1 Q_i^{'[\sigma]_{(n+1)p}} + b_0 Q_i^{'[\sigma]_{np}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

порядка $d+1$, где b_d, \dots, b_1, b_0 – коэффициенты характеристического многочлена (5.6). Начальные условия задаются равенствами:

для числителей – $P_{ij}^{'[\sigma]_0} = u|_{ij}$ и

$$P_{ij}^{'[\sigma]_{dp}} = (M^d(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot u)|_{ij}, \dots, P_{ij}^{'[\sigma]_p} = (M(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot u)|_{ij}, \quad (5.28)$$

где $i = 1, \dots, d, d+1, j = 1, \dots, d$;

для знаменателей – $Q_{i,d+1}^{'[\sigma]_0} = u|_{i,d+1}$ и

$$Q_{ij}^{'[\sigma]_{dp}} = (M^d(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot u)|_{i,d+1}, \dots, Q_{i,d+1}^{'[\sigma]_p} = (M(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot u)|_{i,d+1}, \quad (5.29)$$

Здесь $i = 1, \dots, d, d+1$ и $(M^k(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot u)|_{ij}$ обозначают (i, j) -элементы матрицы

$$M^k(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot u = M^k(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot U \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, d,$$

где U – матрица (5.22) унимодулярного базиса u и $M^k(\sigma_{*,\text{per}})$ – квадратные матрицы размера $d+1$, определенные в (5.10).

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 5.1, если воспользоваться соотношением (5.24) и начальными условиями (5.25), приведенными в предложении 5.2.

По той же схеме находятся начальные условия (5.28) и (5.29). Для этого нужно в равенства (5.17), (5.18) вместо единичного базиса e подставить базис u и учесть связь (5.22) между u и его матрицей U . \square

Определим новую точку

$$\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d) \quad (5.30)$$

через равенство

$$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}_u = \text{pr}_1(\hat{\alpha} \cdot U), \quad (5.31)$$

где вектор $\hat{\alpha} = (\alpha, 1)$ с $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ принадлежит верхнему суперпространству \mathbf{S}_+ из (1.25), pr_1 – центральная проекция (1.26) на гиперплоскость Фарея \mathbf{F}_1 и U – матрица (5.22) базиса u .

В силу (1.26) и (5.31) координаты α' можно вычислить по формуле

$$\text{где } \alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d) = \langle \alpha \rangle U,$$

$$\alpha'_k = \frac{u_{1k}\alpha_1 + \dots + u_{dk}\alpha_d + u_{d+1,k}}{u_{1,d+1}\alpha_1 + \dots + u_{d,d+1}\alpha_d + u_{d+1,d+1}}$$

для $k = 1, \dots, d$. Таким образом, точка α' из (5.30), (5.31) получается из α с помощью *дробно-линейного преобразования*

$$U : \alpha \rightarrow \alpha' = \langle \alpha \rangle U. \quad (5.32)$$

Теорема 5.4. Пусть унимодулярный базис $u = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}\}$ принадлежит конусу (1.11), –

$$u \subset \angle \mathbf{S}, \quad (5.33)$$

и пусть $\frac{P_i'^{[\sigma]_{np}}}{Q_i'^{[\sigma]_{np}}}$ с $i = 1, \dots, d, d+1$ – рациональные точки (5.26), вычисляемые по рекуррентным соотношениям (5.27), (5.28). Кроме того, предположим, что выполняются условия теоремы 5.2. Тогда эти точки являются подходящими дробями

$$\frac{P_i'^{[\sigma]_{np}}}{Q_i'^{[\sigma]_{np}}} \rightarrow \alpha' \quad \text{при } n \rightarrow +\infty$$

для точки $\alpha' = \langle \alpha \rangle U$, определенной в (5.32). При этом

$$\left| \alpha' - \frac{P_i'^{[\sigma]_{np}}}{Q_i'^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 \leq c' \frac{\lambda_{\max}^n}{Q_i'^{[\sigma]_{np}}} \quad \text{для всех } np \geq n_0, \quad (5.34)$$

с границей n_0 из (2.4). Здесь $c' = c'_{u, M(\sigma_{*, \text{per}})}$ – положительная константа, не зависящая от степени n ; λ_{\max} – собственное значение (4.21), $0 < \lambda_{\max} < 1$.

Доказательство. Поскольку матрицы $M(\sigma_*)$, см. (3.6), не зависят от выбора унимодулярного базиса, в силу формул (5.4) и (5.23) имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{\bar{\sigma}_{*, \text{per}}} & M(\sigma_{*, \text{per}}) \cdot e \\ U \downarrow & & \downarrow & U \\ u & \xrightarrow{\sigma_{*, \text{per}}} & M(\sigma_{*, \text{per}}) \cdot u. \end{array} \quad (5.35)$$

Здесь $\bar{\sigma}_{*,\text{per}}$ и $\underline{\sigma}_{*,\text{per}}$ обозначают специализацию $\sigma_{*,\text{per}}$, которую можно рассматривать, как невырожденное аффинное отображение с одной и той же матрицей $M(\sigma_{*,\text{per}})$ относительно соответствующего базиса e или u . В диаграмме вертикальные стрелки обозначают аффинное отображение с матрицей U базиса u из (5.22).

Из коммутативности диаграммы (5.35) вытекает, что собственный вектор $\hat{\alpha}$ относительно верхней специализации $\bar{\sigma}_{*,\text{per}}$ в базисе e (см. (4.14)) отображается

$$\hat{\alpha} \rightarrow \hat{\alpha} \cdot U \quad (5.36)$$

в собственный вектор $\hat{\alpha} \cdot U$ относительно нижней специализации $\underline{\sigma}_{*,\text{per}}$ в базисе u . Согласно условию (4.14) имеем

$$(\hat{\alpha} \cdot U) \cdot U^{-1} M(\sigma_{*,\text{per}}) U = (\hat{\alpha} \cdot M(\sigma_{*,\text{per}})) \cdot U = \lambda_{d+1} (\hat{\alpha} \cdot U), \quad (5.37)$$

где $U^{-1} M(\sigma_{*,\text{per}}) U$ – матрица специализации $\underline{\sigma}_{*,\text{per}}$ в базисе e , имеющая те же собственные значения, что и матрица периода $M(\sigma_{*,\text{per}})$. Если воспользоваться обозначением (5.31), то из (5.37) будет следовать

$$\hat{\alpha}' \cdot U^{-1} M(\sigma_{*,\text{per}}) U = \lambda_{d+1} \hat{\alpha}'. \quad (5.38)$$

Теперь свойства (5.35) (5.36) (5.38) позволяют перенести полученную ранее теорему 5.2 для единичного базиса e на базис u из (5.33), что доказывает теорему 5.4. \square

Замечание 5.1. В теореме 5.4 на базис u накладывалось ограничение (5.33) только для того, чтобы аппроксимируемая точка $\alpha' = \langle \alpha \rangle U$ и ее подходящие дроби получались бы положительными, как это обычно принято в случае одномерных цепных дробей [23], [24]. Если отказаться от требования положительности, то коммутативная диаграмма (5.35) позволяет в качестве базиса u выбирать базисы с произвольной унимодулярной матрицей $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

5.5. Смешанные периодические представления. По аналогии с обычными цепными дробями [23] (случай размерности $d = 1$) естественно возникает задача в дополнение к случаю (4.7), рассмотреть и более общие *смешанные периодические* последовательности

$$\sigma_* = [{}^0\sigma_*; \sigma_{*,\text{per}}] = \{{}^0\sigma_*; \sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\} \quad (5.39)$$

с произвольным *предпериодом*

$${}^0\sigma_* = \{{}^0\sigma_{*1}, {}^0\sigma_{*2}, \dots, {}^0\sigma_{*p_0}\}. \quad (5.40)$$

длины p_0 . Здесь

$$[\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\}$$

– бесконечная чисто периодическая последовательность и

$$\sigma_{*,\text{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}. \quad (5.41)$$

– ее *период* длины p . В (5.40), (5.41), σ_{**} и ${}^0\sigma_{**}$ обозначают некоторые специализации дифференцирований или перестановки из полугруппы $S\mathfrak{S}_*$. Итак, в определенной в (4.1) полугруппе выделяем следующие подмножества

$$(S\mathfrak{S}_*)_{\text{per}}^{\mathbb{N}} \subset (S\mathfrak{S}_*)_{\text{ppper}}^{\mathbb{N}} \subset (S\mathfrak{S}_*)^{\mathbb{N}},$$

состоящие из чисто периодических и просто периодических последовательностей специализаций/перестановок из полугруппы $S\mathfrak{S}_*$

Решить задачу о приближениях вещественных α подходящими дробями в случае (5.39) можно методом, изложенным в теореме 5.4.

5.6. Матрица предperiода. В качестве базиса (5.21) выберем базис

$$u = U \cdot e \quad (5.42)$$

с матрицей

$$U = M({}^0\sigma_*), \quad (5.43)$$

где

$$M({}^0\sigma_*) = M({}^0\sigma_{*p_0}) \cdot \dots \cdot M({}^0\sigma_{*1}) \quad (5.44)$$

– матрица предperiода ${}^0\sigma_*$ из (5.40). Из определений в (5.1), (3.14) следует, что u является унимодулярным базисом, а U – унимодулярной матрицей этого базиса, имеющая неотрицательные элементы. Более того, базис (5.42) принадлежит конусу $\angle S$, (1.11). Поэтому можем применить теоремы 5.3 и 5.4. Как следствие, получаем следующий результат.

Теорема 5.5. Пусть $\sigma_* = [{}^0\sigma_*; \sigma_{*,\text{per}}]$ – смешанная периодическая последовательность дифференцирований (5.39) с произвольным предperiодом (5.40); $u = U \cdot e$ – унимодулярный базис, определенный в (5.42)–(5.44); вещественная точка $\alpha' = \langle \alpha \rangle U$ определена формулой (5.32). Кроме того, предположим, что выполняются условия теоремы 5.2. Тогда последовательность специализаций σ_* представляет точку α' ,

$$\sigma_*|_u \rightarrowtail \alpha',$$

см. (4.5). При этом подходящие дроби $\frac{P_i'^{[\sigma]_{np}}}{Q_i'^{[\sigma]_{np}}}$ с $i = 1, \dots, d, d+1$, вычисляемые по рекуррентным соотношениям (5.27), (5.28), приближают указанную точку α' со скоростью (5.34).

5.7. Дробно-линейная инвариантность. Рассмотрим унимодулярный базис

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \\ u_{d+1} \end{pmatrix} \subset \angle S, \quad (5.45)$$

принадлежащий положительному конусу (1.11). Пусть $\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}]$ – чисто периодическая последовательность специализаций (4.7) с наименьшим периодом $\sigma_{*,\text{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}$ из (4.8); и матрица периода $M(\sigma_{*,\text{per}})$ имеет вещественный собственный левый вектор $\hat{\alpha} = (\alpha, 1)$, $\hat{\alpha}M(\sigma_{*,\text{per}}) = \lambda_{d+1}\hat{\alpha}$, содержащийся в конусе $\angle S$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – иррациональная точка (1.18). Кроме того, пусть $\sigma'_* = [{}^0\sigma_*; \sigma_{*,\text{per}}]$ – смешанная периодическая последовательность (5.39) с тем же периодом $\sigma_{*,\text{per}}$, что и σ_* , и с произвольным предпериодом ${}^0\sigma_*$.

При этих предположениях справедливо следствие.

Следствие 5.1. Пусть матрица периода $M(\sigma_{*,\text{per}})$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Тогда имеет место равносильность

$$\sigma_*|_u \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \sigma'_*|_{u'} \rightarrow \alpha', \quad (5.46)$$

где u' – унимодулярный базис, определяемый равенством $u' = {}^0U \cdot u$, ${}^0U = M({}^0\sigma_*)$ – матрица предпериода (5.43) и α' – некоторая предельная точка. При этом предельные точки α и α' в (5.46) связаны между собою $\alpha' = \langle \alpha \rangle U$ дробно-линейным преобразованием (5.32).

Доказательство. Это вытекает из теоремы 5.5, если в качестве начального базиса выбрать сразу базис u . \square

Вернемся к определенному в (4.5) понятию представимости точки α произвольной бесконечной последовательностью специализаций σ_* из множества $S\Xi_* = (S\mathfrak{S}_*)^{\mathbb{N}}$ (см. определение (4.1)).

Из теоремы 5.5 и доказанной в следствии 5.1 равносильности (5.46) следует, что если последовательность специализаций σ_* в некотором

базисе u с условием (5.45) представляет какую-либо вещественную точку, то данная последовательность σ_* будет в любом другом базисе $u' \subset \angle \mathbf{S}$ также представлять отвечающую ей предельную точку, т. е. свойство последовательности специализаций σ_* не зависит от выбора базиса u .

Таким образом, свойство инвариантности позволяет ввести более общее понятие *сходящейся последовательности*

$$\sigma_* | \rightarrow \quad (5.47)$$

из множества $S\Xi_*$. При этом в определении (5.47) явно не указывать – относительно какого унимодулярного базиса из конуса $\angle \mathbf{S}$.

§6. ПРОСТЕЙШИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ

6.1. Разложение в многомерные цепные дроби. Пусть периодическая последовательность специализаций

$$[\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\}$$

из (4.7) представляет $[\sigma_{*,\text{per}}] |_u \rightarrow \alpha$ точку α , см. определение (4.5). В этом случае будем говорить, что точка α *разлагается*

$$\alpha = |_u [\sigma_{*,\text{per}}] = |_u \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\} \quad (6.1)$$

в периодическую дробь $[\sigma_{*,\text{per}}]$ в базисе u . Если базис выбран единичным $u = e$, то будем использовать более краткую запись

$$\alpha = [\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\}. \quad (6.2)$$

Скажем, что разложение в цепную дробь (6.1) *нетривиально*, если выполняется условие

$$\lambda_{\max} < 1, \quad (6.3)$$

где λ_{\max} – собственное значение (4.21). В этом случае, согласно теореме 4.2, приближения (4.20) точки α подходящими дробями будут нетривиальными. На другом языке можно сказать, что диофантова экспонента (2.12), участвующая в оценках (2.13), удовлетворяет неравенству $\eta > 0$.

6.2. Разложение матриц в произведение специализаций. Речь идет о разложениях квадратных матриц

$$M = (m_{ij}) \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (6.4)$$

размера $d + 1$ с целыми элементами $m_{ij} \geq 0$ и определителем $\det M = \pm 1$. Множество матриц (6.4) образует полугруппу с единицей E в универсальной группе $GL_{d+1}(\mathbb{Z})$.

Скажем, что i' -строка *мажорирует* i'' -строку:

$$(m_{i'1} \dots m_{i',d+1}) \succeq (m_{i''1} \dots m_{i'',d+1}), \quad (6.5)$$

если $m_{i'j} \geq m_{i''j}$ для всех $j = 1, \dots, d + 1$.

Алгоритм 6.1. Шаг 1. Выбираем в матрице M две произвольные строки с условием (6.5), из большей вычитаем меньшую строку и разность записываем на месте первой. Получается матрица M' снова из полугруппы $GL_{d+1}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$.

Шаг 2. Процесс повторяется конечное число раз пока в результате преобразований не появится матрица E' , получающаяся из единичной матрицы E перестановкой ее строк.

Шаг 3. Подходящей перестановкой строк матрицы E' переводим последнюю в единичную матрицу E .

Работа данного алгоритма показана ниже на числовом примере и в доказательстве леммы 7.3 для общего случая размерности 2.

Пример 6.1. По алгоритму 6.1 последовательно получаем:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(32)^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(23)^{-2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(32)^{-1}} \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_{\circlearrowleft}^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь использовали сокращения:

$$\sigma_{k_1}^{k_1, k_2} = (k_1 k_2), \quad \sigma_{k_2}^{k_1, k_2} = (k_2 k_1), \quad s_{\circlearrowleft} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

для специализаций (3.2) и циклической подстановки из S_3 ;

$$(k_1 k_2)^{-1} = (\sigma_{k_1}^{k_1, k_2})^{-1}$$

— вычитание из строки с номером k_1 строки с номером k_2 . Из (6.6) вытекает равенство

$$M = (32) \cdot (23)^2 \cdot (32) \cdot s_{\circlearrowleft}, \quad (6.8)$$

где справа записаны отвечающие (6.7) матрицы (3.6) и (3.11).

Разложение матрицы M в произведение (6.8) неоднозначно в силу существования коммутационных соотношений для специализаций

$$(k_1 k_2) \cdot (k'_1 k'_2) = (k'_1 k'_2) \cdot (k_1 k_2) \quad (6.9)$$

в случае, если множества индексов $\{k_1, k_2\}$ и $\{k'_1, k'_2\}$ не пересекаются. Кроме того, имеют место формулы сплетения

$$s \cdot (k'_1 k'_2) = (k_1 k_2) \cdot s \quad (6.10)$$

для перестановок и специализаций, где $k'_1 = s(k_1)$, $k'_2 = s(k_2)$.

Применяя формулы (6.9) и (6.10) к разложению (6.8) получаем из него для матрицы M еще одно *двойственное* разложение

$$M = s_{\circlearrowleft} \cdot (21) \cdot (12)^2 \cdot (21). \quad (6.11)$$

§7. БЛОЧНЫЕ МАТРИЦЫ И РАЗЛОЖЕНИЕ В ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

7.1. Блоchные матрицы периодов. Сначала в качестве матрицы M (6.4) из полугруппы $GL_3(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ выберем блочную матрицу

$$M_{\square} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

с 2×2 -блоком

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Случай $\det A = -1$. Характеристический многочлен

$$ch_{M_{\square}}(x) = \det(xE - M_{\square}) = x^3 - bx^2 - cx + 1 \quad (7.3)$$

матрицы (7.1) имеет дискриминант $\Delta_{M_{\square}} = 4b^3 + b^2c^2 + 4c^3 + 18bc - 27$.

Рассмотрим случай, когда дискриминант $\Delta_{M_{\square}} > 0$. При этом условии характеристический многочлен (7.3) имеет три различных вещественных корня $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Из условия $\det A = -1$ следует, что случаи $b = 0$ или $c = 0$ отпадают. Если $b = 1$ и $c = 1$, то $ch_{M_{\square}}(x) = (x-1)(x^2-1)$ имеет рациональные корни ± 1 . Таким образом, не уменьшая общности можем считать выполнеными условия: $b \geq 1$, $c \geq 1$ и $b + c > 2$. При этих условиях будут выполняться неравенства

$$ch_{M_{\square}}(1) = 2 - b - c < 0, \quad ch_M(b) = -bc + 1 < 0. \quad (7.4)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что наибольший характеристический корень λ_1 удовлетворяет неравенствам

$$\lambda_1 > b \geq 1. \quad (7.5)$$

Из (7.3) следует соотношение между корнями $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$. Поскольку

$$ch_{M_\square}(-1) = -b + c < 0, \quad \text{если } b > c, \quad (7.6)$$

из (7.4) – (7.6) выводим следующее интервальное *распределение* характеристических корней:

$$-1 < \lambda_3 < 0, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad 1 \leq b < \lambda_1 \quad (7.7)$$

при выполнении *условий*

$$b \geq 1, \quad c \geq 1, \quad b + c > 2, \quad b > c. \quad (7.8)$$

Из этих условий, в частности, будет следовать неравенство $b \geq 2$.

Из условий $b \geq 1, c \geq 1$ вытекает $\Delta_{M_\square} > 0$. Тем самым, доказано следующее утверждение.

Лемма 7.1. *Если $M_\square \in GL_3(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ – матрица (7.1) с блоком A определяется $\det A = -1$, то при выполнении условий (7.8) характеристический многочлен $ch_{M_\square}(x)$ из (7.3) имеет три вещественных корня с распределением по интервалам из (7.7).*

Случай $\det A = +1$. Теперь матрица (7.1) имеет характеристический многочлен

$$ch_{M_\square}(x) = \det(xE - M) = x^3 - bx^2 - cx - 1 \quad (7.9)$$

с дискриминантом

$$\Delta_{M_\square} = -4b^3 + b^2c^2 + 4c^3 - 18bc - 27, \quad (7.10)$$

который может принимать уже разные знаки. Выпишем значения характеристического многочлена (7.9) в критических точках

$$ch_{M_\square}(-1) = -b + c - 2, \quad ch_{M_\square}(0) = -1,$$

$$ch_{M_\square}(1) = -b - c, \quad ch_{M_\square}(b) = -bc - 1.$$

Если $b = 0$ и $c = 0$, то у характеристического многочлена $ch_{M_\square}(x) = x^3 - 1$ все корни имеют модуль 1. Поэтому, исключая случай $b = 0, c = 0$, получаем неравенства

$$ch_{M_\square}(-1) < 0, \quad ch_{M_\square}(0) < 0, \quad ch_{M_\square}(1) < 0, \quad ch_{M_\square}(b) < 0 \quad (7.11)$$

при выполнении условия

$$c < b + 2. \quad (7.12)$$

Пусть дискриминант $\Delta_{M\square} > 0$. Тогда из (7.11) и (7.12) следует, что характеристический многочлен (7.9) имеет три различных вещественных корня с интервальным распределением:

$$-1 < \lambda_3 < \lambda_2 < 0, \quad 1 \leq b < \lambda_1. \quad (7.13)$$

Пусть теперь дискриминант $\Delta_{M\square} < 0$. Тогда из (7.9) следует соотношение между корнями $\lambda_1 |\lambda_2| |\lambda_3| = 1$. Поэтому характеристический многочлен $ch_{M\square}(x)$ будет иметь один вещественный корень и два комплексно сопряженных корня с распределением:

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} < 1, \quad 1 \leq b < \lambda_1. \quad (7.14)$$

При этом выполнение условия (7.12) уже не предполагается.

Лемма 7.2. *Пусть $M\square \in GL_3(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ – матрица (7.1), имеющая блок A с определителем $\det A = +1$.*

1. *Если дискриминант $\Delta_{M\square} > 0$, то при выполнении условия (7.12) характеристический многочлен $ch_{M\square}(x)$ из (7.9) имеет три различных вещественных корня с распределением (7.13).*

2. *В случае дискриминанта $\Delta_{M\square} < 0$, исключая случай $b = 0$ и $c = 0$, многочлен $ch_{M\square}(x)$ будет иметь один вещественный корень и два комплексно сопряженных корня с распределением (7.14).*

Доказательство. Это следует из (7.13) и (7.14). \square

7.2. Собственные векторы блочных матриц. Пусть выполнены условия лемм 7.1 и 7.2. Тогда блочная матрица $M\square$ из (7.1) имеет собственный вещественный левый вектор –

$$\hat{\alpha}\square M\square = \lambda \hat{\alpha}\square,$$

где $\hat{\alpha}\square = (\alpha\square, 1)$ с $\alpha\square = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\lambda = \lambda_1 > 1$ – собственное число из (7.7) или (7.13), (7.14). Ввиду (7.1), (7.2), имеем

$$\hat{\alpha}\square(\lambda E - M\square) = \hat{\alpha}\square \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -a & \lambda - b & 0 \\ -c & -d & \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда следует

$$\hat{\alpha}\square = (\alpha_1, \alpha_2, 1) = \left(\lambda, \frac{d}{\lambda - b}, 1 \right),$$

где согласно (7.7), (7.13) и (7.14) выполняется неравенство $\lambda > b$. Поэтому собственный вектор $\hat{\alpha}_\square$ содержится в конусе $\angle \mathbf{S}$ из (1.11), где

$$\alpha_\square = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\lambda, \frac{d}{\lambda - b} \right) \quad (7.15)$$

является положительной кубической иррациональной точкой (1.18).

7.3. Разложение на множители матриц второго порядка. Рассмотрим важный для применений случай матриц второго порядка.

Лемма 7.3. *Любая матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (7.16)$$

с помощью алгоритма 6.1 раскладывается в конечное произведение

$$A = \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdot \dots \cdot \varsigma_{*t} \quad (7.17)$$

специализаций $\varsigma_{*i} = (k_{i1} k_{i2})$, см. (6.7), *в случае* $\det A = +1$; *и раскладывается в аналогичное произведение*

$$A = \varsigma_{12} \cdot \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdot \dots \cdot \varsigma_{*t} \quad c \quad \varsigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_2 \quad (7.18)$$

в случае $\det A = -1$.

Доказательство. Пусть в матрице (7.16) ни одна ее строка не мажирует (6.5) другую, т. е.

$$(ab) \not\leq (cd) \quad \text{и} \quad (cd) \not\leq (ab). \quad (7.19)$$

Если $a > c$ и $d > b$, то имеем $a = c + c'$, $d = b + b'$, где $c' > 0$ и $b' > 0$; и поэтому

$$\det A = (c + c')(b + b') - bc = bc' + cb' + b'c' = +1. \quad (7.20)$$

Отсюда следует, что только одно слагаемое равно 1, а остальные равны 0. Если в (7.20) будет $bc' = 1$ или $cb' = 1$, то получаем противоречие с предположением (7.19). В оставшемся случае будем иметь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad b'c' = 1. \quad (7.21)$$

При обратных неравенствах $a < c$ и $d < b$, еще раз повторяя рассуждение (7.20), (7.21), получаем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \det A = -1. \quad (7.22)$$

Пусть матрица A имеет определитель $\det A = +1$. Тогда согласно (7.19) – (7.21) к матрице A можно будет применять алгоритм 6.1 до тех пор, пока в результате преобразований не появится единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, что доказывает первое разложение (7.17), если еще дополнительно применить переход от разложения (6.8) к двойственному разложению (6.11), используя формулу сплетения (6.10).

Если же определитель $\det A = -1$, то матрица $A' = s_{12}^{-1} \cdot A$ из $GL_2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ будет иметь определитель $\det A' = +1$. Поэтому в силу (7.17) она имеет разложение $A' = \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdots \cdot \varsigma_{*t}$, из которого и (7.22) выводим второе разложение (7.18). \square

7.4. Разложение на множители блочных матриц. Применим лемму 7.3 к получению разложения на элементарные множители блочной матрицы M_{\square} .

Предложение 7.1. Пусть M_{\square} – блочная матрица (7.1); и пусть

$$s_{\circlearrowleft} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

– соответственно циклическая подстановка и транспозиция из S_3 . Тогда в обозначениях леммы 7.3 имеют место следующие разложения на элементарные множители:

$$M_{\square} = s_{\circlearrowleft} \cdot \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdots \cdot \varsigma_{*t} \quad (7.24)$$

в случае определителя $\det A = +1$; и

$$M_{\square} = s_{23} \cdot \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdots \cdot \varsigma_{*t} \quad (7.25)$$

в случае определителя $\det A = -1$. Здесь $\varsigma_{*i} = (k_{i1} k_{i2})$ рассматриваются как специализации, аналогичные (7.17), но уже принадлежащие определенной в (3.13) полугруппе $S\mathfrak{S}_*$ размерности 3.

Доказательство. Из определения (7.1) следует равенство

$$s_{\circlearrowleft}^{-1} \cdot M_{\square} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $\det A = +1$, то по лемме 7.3 получим разложение

$$s_{\circlearrowleft}^{-1} \cdot M_{\square} = \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdots \cdot \varsigma_{*t},$$

из которого выводим разложение (7.24).

В случае $\det A = -1$ по той же лемме 7.3 имеем разложение

$$s_{\circlearrowleft}^{-1} \cdot M_{\square} = s_{12} \cdot \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdot \dots \cdot \varsigma_{*t},$$

где $s_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ – перестановочная транспозиция из S_3 ; и поэтому можем записать

$$M_{\square} = s_{\circlearrowleft} \cdot s_{12} \cdot \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdot \dots \cdot \varsigma_{*t}. \quad (7.26)$$

Так как выполняется соотношение $s_{\circlearrowleft} \cdot s_{12} = s_{23}$, то разложение (7.26) перепишется в виде (7.25). \square

Замечание 7.1. Метод, использованный при доказательстве разложений (7.24) и (7.25), переносится на блочные матрицы

$$M_{\square} = s_{\circlearrowleft} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_{d-1} \end{pmatrix}$$

произвольной размерности $d + 1$. Здесь E_{d-1} обозначает единичную матрицу размерности $d - 1$ и $s_{\circlearrowleft} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d+1 \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – циклическую подстановку из группы S_{d+1} . При доказательстве лемм 7.1 и 7.2 было выявлено интересное свойство блочных матриц: характеристические многочлены $ch_{M_{\square}}(x)$ (7.9) таких матриц, за небольшим исключением, являются многочленами Пизо, что важно для приложений к теории многомерных цепных дробей.

7.5. Разложение в цепные дроби. Пусть

$$M_{\square} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

– блочная матрица (7.1) и

$$[\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\} \quad (7.28)$$

– периодическая последовательность специализаций с периодом

$$\sigma_{*,\text{per}} = s_{\circlearrowleft} \cdot \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdot \dots \cdot \varsigma_{*t} \quad (7.29)$$

или

$$\sigma_{*,\text{per}} = s_{23} \cdot \varsigma_{*1} \cdot \varsigma_{*2} \cdot \dots \cdot \varsigma_{*t} \quad (7.30)$$

в случае $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = +1$ или -1 соответственно.

Чтобы сформулировать следующий результат, удобно для подходящих дробей (5.13) использовать сокращения

$$P_i^{[\sigma]_{np}} = P_i^n = (P_{i1}^n, P_{i2}^n), \quad Q_i^{[\sigma]_{np}} = Q_i^n, \quad (7.31)$$

где $i = 1, 2, 3$. Здесь предполагается базис единичным и размерность два. В этих обозначениях записываем первые три степени матрицы (7.27):

$$\begin{aligned} M_{\square}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^0 & P_{12}^0 & Q_1^0 \\ P_{21}^0 & P_{22}^0 & Q_2^0 \\ P_{31}^0 & P_{32}^0 & Q_3^0 \end{pmatrix}, \\ M_{\square}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^1 & P_{12}^1 & Q_1^1 \\ P_{21}^1 & P_{22}^1 & Q_2^1 \\ P_{31}^1 & P_{32}^1 & Q_3^1 \end{pmatrix}, \\ M_{\square}^2 &= \begin{pmatrix} c & d & 0 \\ ab & b^2 & a \\ ad & bd & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^2 & P_{12}^2 & Q_1^2 \\ P_{21}^2 & P_{22}^2 & Q_2^2 \\ P_{31}^2 & P_{32}^2 & Q_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Теорема 7.1. Пусть выполнены условий (7.8), (7.12). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Положительная кубическая иррациональная точка

$$\alpha_{\square} = \left(\lambda, \frac{d}{\lambda - b} \right)$$

из (7.15) нетривиально разлагается (см. определение (6.1))

$$\alpha_{\square} = [\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\} \quad (7.33)$$

в периодическую дробь (7.28).

2. Числители P_{ij}^n и знаменатели Q_i^n подходящих дробей с $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} P_{ij}^{n+3} &= bP_{ij}^{n+2} + cP_{ij}^{n+1} + \delta(A)P_{ij}^n \\ Q_i^{n+3} &= bQ_i^{n+2} + cQ_i^{n+1} + \delta(A)Q_i^n \end{aligned} \quad (7.34)$$

порядка 3, где $j = 1, 2$, $n(t+1) \geq n_0$ с границей n_0 , из (2.4), и

$$\delta(A) = \begin{cases} +1, & \text{если } \det A = -1, \\ -1, & \text{если } \det A = +1. \end{cases}$$

При этом начальные условия определены в матрицах (7.32).

3. Подходящие дроби приближают

$$\left| \lambda - \frac{P_{i1}^n}{Q_i^n} \right| + \left| \frac{d}{\lambda - b} - \frac{P_{i2}^n}{Q_i^n} \right| \leq \frac{c}{(Q_i^n)^{1+\theta}} \quad (7.35)$$

точку с диофантовой экспонентой

$$\theta = -\frac{\ln|\lambda_3|}{\ln|\lambda|} > 0, \quad (7.36)$$

где $\lambda = \lambda_1, \lambda_3$ – характеристические корни (7.7), (7.13), (7.14). В частности,

$$\theta = \frac{1}{2} \quad (7.37)$$

в случае отрицательного дискриминанта $\Delta_{M\square}$ из (7.10).

Доказательство. 1). Нетривиальность разложения в цепную дробь (7.33) вытекает из (6.1) и условий (7.8), (7.12), так как при выполнении этих условий имеет место распределение характеристических корней (7.13), (7.14) и, следовательно, выполняется неравенство (6.3).

2)–3). В формулировке теоремы для числителей и знаменателей подходящих дробей были использованы сокращения (7.31), где период $p = t + 1$ в силу (7.29), (7.30). Если в случае размерности 2 результаты теорем 5.1 и 4.2 переписать в новых обозначениях (7.31), то как раз и получим рекуррентное соотношение (7.34) и аппроксимационную формулу (7.35) с диофантовыми экспонентами (7.36), (7.37). \square

7.6. Простейшее степенное разложение. Подробнее рассмотрим один частный случай

$$\det A = +1, \quad a = d = 1, \quad c = 0.$$

При указанных исходных условиях 2×2 – блок A и сама блочная матрица M_{\square} из (7.1) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\square} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.38)$$

Для таких матриц характеристическим многочленом будет

$$ch_{M_{\square}}(x) = \det(xE - M) = x^3 - bx^2 - 1 \quad (7.39)$$

с дискриминантом $\Delta_{M_{\square}} = -4b^3 - 27 < 0$.

Из леммы 7.2 (2) следует, что многочлен $ch_{M_\square}(x)$ (7.39) имеет один вещественный корень $\lambda_1 > b \geq 1$ и два комплексно сопряженных корня $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$, т. е. $ch_{M_\square}(x)$ является многочленом Пизо.

В обозначениях (6.7) имеем разложение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (12)^b$$

блока A в b -степень одной специализации $(k_1 k_2) = (12)$. Тогда по предложению 7.1 в обозначениях леммы 7.3 блочная матрица (7.38) примет разложение

$$M_\square = s_\circlearrowleft \cdot (12)^b.$$

Предложение 7.2. *Пусть A – матрица из (7.38), $b = 1, 2, 3, \dots$. Пусть $\lambda = \lambda_1$ – вещественный корень характеристического многочлена (7.39). Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Положительная кубическая иррациональная точка α_\square нетривиально разлагается в периодическую дробь

$$\alpha_\square = \left(\lambda, \frac{1}{\lambda - b} \right) = [s_\circlearrowleft \cdot (12)^b], \quad (7.40)$$

где s_\circlearrowleft – циклическая подстановка (7.23).

2. Числители P_j^n и знаменатели Q^n подходящих дробей (см. обозначения (7.31)) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$P_j^{n+3} = bP_j^{n+2} + P_j^n, \quad Q^{n+3} = bQ^{n+2} + Q^n,$$

где $j = 1, 2$ и $n(b+1) \geq n_0$ с границей n_0 , определенной в (2.4). При этом начальные условия задаются следующими равенствами:

$$P_1^2 = 0, \quad P_1^1 = 0, \quad P_1^0 = 1, \quad P_2^2 = 1, \quad P_2^1 = 0, \quad P_2^0 = 0; \quad (7.41)$$

$$Q^2 = 0, \quad Q^1 = 1, \quad Q^0 = 0. \quad (7.42)$$

3. Определенные в (7.41), (7.42) подходящие дроби дают наилучшие совместные приближения

$$\left| \lambda - \frac{P_1^n}{Q^n} \right| + \left| \frac{1}{\lambda - b} - \frac{P_2^n}{Q^n} \right| \leq \frac{c}{(Q^n)^{1+1/2}}$$

с константой $c > 0$, зависящей только от коэффициента b .

Доказательство. Это вытекает из теоремы 7.1, если заметить, что в данном случае по формуле (7.37) диофантина экспонента $\theta = 1/2$. \square

§8. НАИМЕНЬШЕЕ ЧИСЛО ПИЗО И АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

8.1. Наименьшее число Пизо. Рассмотрим частный случай

$$\det A = +1, \quad a = d = 1, \quad b = 0. \quad (8.1)$$

Блок A и блочная матрица M_{\square} из (7.1) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\square} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Для M_{\square} , см. (7.9) и (7.10), характеристическим будет многочлен

$$ch_{M_{\square}}(x) = \det(xE - M) = x^3 - cx - 1 \quad (8.3)$$

с дискриминантом

$$\Delta_{M_{\square}} = 4c^3 - 27. \quad (8.4)$$

Нас будет интересовать случай $\Delta_{M_{\square}} < 0$. Такое возможно только для $c = 1$; и тогда характеристическим многочленом (8.3) будет

$$ch_{M_{\square}}(x) = x^3 - x - 1. \quad (8.5)$$

Данный многочлен Пизо интересен тем, что он является многочленом, вещественный корень которого будет *наименьшим числом Пизо*: $\lambda = \lambda_{\min} > 1$ (см., например, [25]). Его приближенное значение

$$\lambda_{\min} \approx 1,32472. \quad (8.6)$$

В обозначениях (6.7) имеем разложение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (21)$$

блока A в одну специализации $(k_1 k_2) = (21)$. Тогда по предложению 7.1 в обозначениях леммы 7.3 блочная матрица (8.2) для $c = 1$ примет разложение

$$M_{\square} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = s_{\circlearrowleft} \cdot (21). \quad (8.7)$$

В обозначениях (7.31), (7.32) записываем первые три степени матрицы:

$$M_{\square}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^0 & P_{12}^0 & Q_1^0 \\ P_{21}^0 & P_{22}^0 & Q_2^0 \\ P_{31}^0 & P_{32}^0 & Q_3^0 \end{pmatrix},$$

$$M_{\square}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^1 & P_{12}^1 & Q_1^1 \\ P_{21}^1 & P_{22}^1 & Q_2^1 \\ P_{31}^1 & P_{32}^1 & Q_3^1 \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

$$M_{\square}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^2 & P_{12}^2 & Q_1^2 \\ P_{21}^2 & P_{22}^2 & Q_2^2 \\ P_{31}^2 & P_{32}^2 & Q_3^2 \end{pmatrix}.$$

Определим рекуррентную последовательность порядка 3, отвечающую характеристическому многочлену $ch_{M_{\square}}(x)$ из (8.5):

$$\mathcal{F}_{n+3} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \quad (8.9)$$

с начальными условиями $\mathcal{F}_0 = 0$, $\mathcal{F}_1 = 1$, $\mathcal{F}_2 = 1$. Определим также квадратичную разностную функцию последовательности, полагая

$$\Delta_n = \mathcal{F}_n \mathcal{F}_{n-2} - \mathcal{F}_{n-1}^2. \quad (8.10)$$

Таблица 8.1. Рекуррентная последовательность \mathcal{F}_n и ее разностная функция Δ_n .

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|-----------------|---|---|---|---|----|---|----|----|---|----|----|----|----|----|----|
| \mathcal{F}_n | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 12 | 16 | 21 | 28 |
| Δ_n | 1 | 0 | 0 | 1 | -2 | 2 | -1 | -1 | 3 | -4 | 3 | 0 | -4 | 7 | -7 |

Согласно (8.5) числители и знаменатели подходящих дробей удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению (8.9):

$$P_{ij}^{n+3} = P_{ij}^{n+1} + P_{ij}^n, \quad Q_i^{n+3} = Q_i^{n+1} + Q_i^n,$$

где $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$. Поэтому сопоставляя начальные условия из (8.8) с данными из таблицы 8.1, получаем выражения числителей и знаменателей подходящих дробей через последовательность (8.9):

$$\begin{aligned} P_{11}^n &= \mathcal{F}_{n-1}, & P_{12}^n &= \mathcal{F}_{n-3}, & Q_1^n &= \mathcal{F}_{n-2}, \\ P_{21}^n &= \mathcal{F}_{n-2}, & P_{22}^n &= \mathcal{F}_{n-4}, & Q_2^n &= \mathcal{F}_{n-3}, \\ P_{31}^n &= \mathcal{F}_n, & P_{32}^n &= \mathcal{F}_{n-2}, & Q_3^n &= \mathcal{F}_{n-1}. \end{aligned}$$

8.2. Аппроксимирующие треугольники. Исходя из общего определения (1.33)–(1.37) рациональных d -мерных симплексов \mathbf{s} , зададим двумерные симплексы (в данном случае – *треугольники*)

$$\mathbf{s}^n = \{f_1^n, f_2^n, f_3^n\} \quad (8.11)$$

уровней n (см. рис. 8.1). Указанные треугольники имеют вершины

$$\begin{aligned} f_1^n &= \left(\frac{P_{21}^n}{Q_2^n}, \frac{P_{22}^n}{Q_2^n} \right) = \left(\frac{\mathcal{F}_{n-2}}{\mathcal{F}_{n-3}}, \frac{\mathcal{F}_{n-4}}{\mathcal{F}_{n-3}} \right), \\ f_2^n &= \left(\frac{P_{11}^n}{Q_1^n}, \frac{P_{12}^n}{Q_1^n} \right) = \left(\frac{\mathcal{F}_{n-1}}{\mathcal{F}_{n-2}}, \frac{\mathcal{F}_{n-3}}{\mathcal{F}_{n-2}} \right), \\ f_3^n &= \left(\frac{P_{31}^n}{Q_3^n}, \frac{P_{32}^n}{Q_3^n} \right) = \left(\frac{\mathcal{F}_n}{\mathcal{F}_{n-1}}, \frac{\mathcal{F}_{n-2}}{\mathcal{F}_{n-1}} \right). \end{aligned} \quad (8.12)$$

В обозначении треугольков (8.11) использовали сокращения

$$\mathbf{s}^n = \mathbf{s}^{[\sigma_{*,\text{per}}]_n}, \quad \text{где } \sigma_{*,\text{per}} = s_{\odot} \cdot (21)$$

— специализация из разложения в правой части (8.7) и $\mathbf{s}^{[\sigma_{*,\text{per}}]_n}$ — производные симплексы (2.2). На уровнях симплексов (8.7) наложим ограничение $n \geq 4$. Согласно таблице 8.1 для указанных уровней n знаменатели в (8.12) будут ненулевыми. Это соответствует границе $n_0 = 4$, определенной в (2.4).

Переход симплексов (8.11) с одного уровня на другой

$$\mathbf{s}^n = \{f_1^n, f_2^n, f_3^n\} \rightarrow \mathbf{s}^{n+1} = \{f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, f_3^{n+1}\}$$

осуществляется по правилу $f_1^{n+1} = f_2^n$, $f_2^{n+1} = f_3^n$, $f_3^{n+1} = f_1^n \hat{+} f_2^n$. Здесь знак $\hat{+}$ обозначает сумму Фарея точек.

В рассматриваемом случае (8.1) для $c = 1$ имеем

$$\alpha_{\square} = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\lambda, \frac{1}{\lambda} \right) = (\lambda, \lambda^2 - 1),$$

где последнее равенство вытекает из (8.5). Из включений (4.6) следует

$$\alpha_{\square} = (\lambda, \lambda^2 - 1) \in \mathbf{s}^n \quad (8.13)$$

для всех треугольников (8.11) уровней $n \geq 4$, и по теореме 2.1 треугольники \mathbf{s}^n обладают свойством *минимальности* (1.35). Последнее означает, что \mathbf{s}^n являются минимальными аппроксимационными рациональными треугольниками:

$$\frac{P}{Q} \notin (\mathbf{s}^n)^{\text{int}}$$

для каждой рациональной точки $\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q}, \frac{P_2}{Q} \right)$, координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leq Q < Q_{\max}$, где

$$Q_{\max} = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} + \mathcal{F}_{n-3} = \mathcal{F}_{n+2}.$$

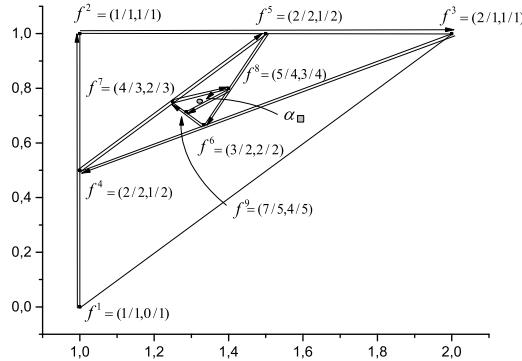


Рис. 8.1 Последовательность вложенных треугольников \mathbf{s}^n и аппроксимируемая точка $\alpha_{\square} = (\lambda, \lambda^2 - 1)$.

На рис. 8.1 изображена последовательность вложенных аппроксимационных треугольников \mathbf{s}^n , содержащих в себе точку $\alpha_{\square} = (\lambda, \lambda^2 - 1)$. Стрелками выделена сходящаяся спираль вокруг этой точки. Эта же спираль указывает в каком порядке появляются новые вершины треугольников \mathbf{s}^n с ростом $n = 1, 2, 3, \dots$

Предложение 8.1. Пусть $\lambda = \lambda_{\min} > 1$ – вещественный корень (8.6) многочлена Пизо $x^3 - x - 1$ и \mathcal{F}_n – последовательность (8.9). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Положительная кубическая иррациональная точка $(\lambda, \lambda^2 - 1)$ нетривиально разлагается (см. определение (6.2), (6.3)) в периодическую дробь

$$(\lambda, \lambda^2 - 1) = [s_{\odot} \cdot (21)],$$

где s_{\odot} – циклическая подстановка (7.23) и (21) – специализация (6.7).

2. Выполняется формула совместного приближения

$$\left| \lambda - \frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n} \right| + \left| (\lambda^2 - 1) - \frac{\mathcal{F}_{n-1}}{\mathcal{F}_n} \right| \leq \frac{\Delta_{\max}^n}{\mathcal{F}_n \mathcal{F}_{n-2}} \quad (8.14)$$

для всех $n \geq 3$, где числитель равен

$$\Delta_{\max}^n = \max\{ |\Delta_{n+1}| + |\Delta_n|, |\Delta_{n-1}| + |\Delta_{n-2}| \}. \quad (8.15)$$

3. Кроме (8.14) выполняется еще одна другая формула

$$\left| \lambda - \frac{\mathcal{F}_n}{\mathcal{F}_{n-1}} \right| + \left| (\lambda^2 - 1) - \frac{\mathcal{F}_{n-2}}{\mathcal{F}_{n-1}} \right| \leq \frac{c}{\mathcal{F}_{n-1}^{1+1/2}} \quad (8.16)$$

с положительной константой c , не зависящей от степени n .

Доказательство. 1. Разложение (7.40) вытекает из разложения блочной матрицы M_{\square} в (8.7).

2. Используя разностную функцию Δ_n из (8.10) и явный вид вершин треугольников (8.12), записываем

$$\begin{aligned} f_3^n - f_1^n &= \left(\frac{-\Delta_{n-2}}{\mathcal{F}_{n-1} \mathcal{F}_{n-3}}, \frac{\Delta_{n-3}}{\mathcal{F}_{n-1} \mathcal{F}_{n-3}} \right), \\ f_3^n - f_2^n &= \left(\frac{\Delta_n}{\mathcal{F}_{n-1} \mathcal{F}_{n-2}}, \frac{-\Delta_{n-1}}{\mathcal{F}_{n-1} \mathcal{F}_{n-2}} \right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Определенная в (8.9) последовательность \mathcal{F}_n является монотонно возрастающей. Поэтому из (8.17) и включений (8.13) будет вытекать неравенство (8.14) для всех $n \geq 3$ с числителем (8.15).

3. Поскольку дискриминант (8.4) отрицательный $\Delta_{M_{\square}} = -27 < 0$, аналогично предложению 8.1 можно также получить неравенство с диофантовой экспонентой в виде (8.16). \square

По той же причине, что и аппроксимационная формула (8.16), будут выполняться асимптотические оценки

$$\Delta_n = \mathcal{O}(\mathcal{F}_n^{1/2}), \quad \Delta_{\max}^n = \mathcal{O}(\mathcal{F}_n^{1/2}).$$

§9. ТРЕУГОЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И РАЗЛОЖЕНИЕ В ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

9.1. Треугольные матрицы периодов. В дополнение к блочным матрицам (7.1), рассмотрим еще матрицы вида

$$M_{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} = s_{\circlearrowleft} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

также из полугруппы $GL_3(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, получающиеся из верхних треугольных матриц циклическим сдвигом s_{\circlearrowleft} из (7.23). Матрица (9.1) имеет характеристический многочлен

$$ch_{M_{\Delta}}(x) = \det(xE - M_{\Delta}) = x^3 - (a+c)x^2 - (b-ac)x - 1 \quad (9.2)$$

с дискриминантом

$$\Delta_{M_{\Delta}} = -4(a+c)^3 + (a+c)^2(b-ac)^2 + 4(b-ac)^3 - 18(a+c)(b-ac) - 27. \quad (9.3)$$

Если выполнены *условия*

$$a + c \geq 0, \quad b - ac > 0 \quad \text{или} \quad a + c > 0, \quad b - ac \geq 0, \quad (9.4)$$

$$\text{то} \quad ch_{M_{\Delta}}(x) < 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (9.5)$$

и справедливы неравенства

$$ch_{M_{\Delta}}(1) = -(a+c) - (b-ac) < 0, \quad ch_{M_{\Delta}}(a) = -ab - 1 < 0. \quad (9.6)$$

Поэтому в силу (9.6) положительный характеристический корень λ_1 характеристического многочлена $ch_{M_{\Delta}}(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$\lambda_1 > a \geq 1. \quad (9.7)$$

Случай $\Delta_{M_{\Delta}} > 0$. Из (9.2) следует равенство $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Отсюда и неравенства (9.7) находим

$$0 < \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1} < 1 \quad (9.8)$$

и, значит, корни λ_2, λ_3 будут одного знака и $|\lambda_2| < 1$ – меньший из них по модулю. Тогда из свойства (9.5) и неравенств (9.8) следует, что оба корня λ_2, λ_3 отрицательные и $-1 < \lambda_2 < 0$. Поскольку $ch_{M_{\Delta}}(-1) = -(a+c) + (b-ac) - 2$, имеем

$$ch_{M_{\Delta}}(-1) < 0, \quad \text{если} \quad b < ac + a + c + 2. \quad (9.9)$$

Из (9.7) и (7.6) и $\Delta_{M_\Delta} > 0$ выводим интервальное *распределение* характеристических корней –

$$-1 < \lambda_3 < \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 > a \geq 1 \quad (9.10)$$

в случае выполнения условий (9.4) и (9.9).

Случай $\Delta_{M_\Delta} < 0$. Теперь корни λ_2, λ_3 будут комплексными и

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} < 1, \quad 1 \leq a < \lambda_1 \quad (9.11)$$

при выполнении условий (9.4).

9.2. Собственные векторы треугольных матриц. Пусть выполнены условия (9.4) и (9.9). Тогда треугольная матрица M_Δ имеет собственный вещественный левый вектор $\alpha_\Delta = (\alpha_1, \alpha_2)$,

$$\hat{\alpha}_\Delta M_\Delta = \lambda_1 \hat{\alpha}_\Delta,$$

$\hat{\alpha}_\Delta = (\alpha_\Delta, 1)$ и $\lambda = \lambda_1 > 1$ – собственное число из (9.10) или (9.11).

Вспоминая явный вид (9.1) данной матрицы, записываем

$$\hat{\alpha}_\Delta (\lambda E - M_\Delta) = \hat{\alpha}_\Delta \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -b \\ 0 & -1 & \lambda - c \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда находим

$$\hat{\alpha}_\Delta = (\alpha_1, \alpha_2, 1) = \left(\frac{1}{\lambda(\lambda - a)}, \frac{1}{\lambda - a}, 1 \right).$$

Поскольку выполняется неравенство $\lambda > a$, то собственный вектор $\hat{\alpha}_\Delta$ содержится в конусе $\angle \mathbf{S}$ из (1.11), где

$$\alpha_\Delta = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{1}{\lambda(\lambda - a)}, \frac{1}{\lambda - a} \right) \quad (9.12)$$

является положительной кубической иррациональной точкой (1.18).

9.3. Разложение на множители треугольных матриц. Применим лемму 7.3 к получению разложения на элементарные множители блочной матрицы M_\square .

Предложение 9.1. *Определенная в (9.1) матрица M_Δ имеет следующее разложение на элементарные множители:*

$$M_\Delta = s_\circlearrowleft \cdot 13^b \cdot 23^c \cdot 12^a. \quad (9.13)$$

Здесь s_\circlearrowleft – циклическая подстановка из (7.23) и $(k_1 k_2)$ обозначают специализации, записанные в сокращенном виде (6.7).

Доказательство. Это непосредственно вытекает из определения (6.7) и следующего разложения треугольной матрицы

$$s_{\circlearrowleft}^{-1} \cdot M_{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 13^b \cdot 23^c \cdot 12^a,$$

проверяемого прямым перемножением специализаций, стоящих в правой части равенства. \square

Замечание 9.1. Разложение в произведение специализаций (9.1) легко переносится на треугольные матрицы M_{Δ} из полугруппы неотрицательных унимодулярных матриц $GL_{d+1}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ произвольной размерности $d+1$. Для этого достаточно воспользоваться следующим разложением в специализации

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{11} & \dots & a_{1d} \\ 0 & 0 & \dots & a_{dd} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (1, d+1)^{a_{1d}} \cdot \dots \cdot (d, d+1)^{a_{dd}} \cdot \dots \cdot (12)^{a_{11}}.$$

9.4. Треугольные матрицы и цепные дроби. Пусть M_{Δ} – треугольная матрица (9.1) и $[\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\}$ – периодическая последовательность специализаций с периодом $\sigma_{*,\text{per}} = s_{\circlearrowleft} \cdot 13^b \cdot 23^c \cdot 12^a$ из (9.13). В обозначениях (7.31) записываем первые три степени указанной матрицы:

$$\begin{aligned} M_{\Delta}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^0 & P_{12}^0 & Q_1^0 \\ P_{21}^0 & P_{22}^0 & Q_2^0 \\ P_{31}^0 & P_{32}^0 & Q_3^0 \end{pmatrix}, \\ M_{\Delta}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^1 & P_{12}^1 & Q_1^1 \\ P_{21}^1 & P_{22}^1 & Q_2^1 \\ P_{31}^1 & P_{32}^1 & Q_3^1 \end{pmatrix}, \\ M_{\Delta}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ a & a^2 + b & 1 + ab + bc \\ ad & bd & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^2 & P_{12}^2 & Q_1^2 \\ P_{21}^2 & P_{22}^2 & Q_2^2 \\ P_{31}^2 & P_{32}^2 & Q_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Теорема 9.1. Пусть $\Delta_{M_{\Delta}}$ – дискриминант (9.3), и пусть выполнены условия (9.4) и (9.9), если $\Delta_{M_{\Delta}} > 0$, и соответственно – условия (9.4), если $\Delta_{M_{\Delta}} < 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Положительная кубическая иррациональная точка α_Δ из (9.12) нетривиально разлагается $\alpha_\Delta = [\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\}$ в периодическую дробь с периодом (9.13).

2. Числители и знаменатели подходящих дробей удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} P_{ij}^{n+3} &= (a+c)P_{ij}^{n+2} + (b-ac)P_{ij}^{n+1} + P_{ij}^n, \\ Q_i^{n+3} &= (a+c)Q_i^{n+2} + (b-ac)Q_i^{n+1} + Q_i^n \end{aligned}$$

порядка 3, где $n(a+b+c+1) \geq n_0$ с n_0 из (2.4), $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$.

Начальные условия определены через матрицы (9.14).

3. Подходящие дроби дают приближение

$$\left| \frac{1}{\lambda(\lambda-a)} - \frac{P_{i1}^n}{Q_i^n} \right| + \left| \frac{1}{\lambda-a} - \frac{P_{i2}^n}{Q_i^n} \right| \leq \frac{c}{(Q_i^n)^{1+\theta}}$$

с диофантовой экспонентой $\theta = -\ln|\lambda_3|/\ln|\lambda| > 0$ где $\lambda = \lambda_1, \lambda_3$ – характеристические корни из (9.10), (9.11). В частности, $\theta = 1/2$ в случае отрицательного дискриминанта Δ_{M_\square} из (9.3).

Доказательство. 1). Нетривиальность разложения в цепную дробь (7.33) вытекает из определения (6.1) и условий (9.4), (9.9), так как при выполнении этих условий имеет место распределение характеристических корней (9.10), (9.11) и, следовательно, выполняется (6.3).

2)–3). Доказательство проводится по схеме теоремы 7.1, если заметить, что период равен $a+b+c+1$ в силу (9.13). \square

Замечание 9.2. 1. Здесь мы рассматривали исключительно многочлены третьей степени, т. е. – кубические иррациональности. В [2] приведены два критерия, позволяющие выделять многочлены Пизо.

2. Вычисления значительно упрощаются, если прежде, чем находить собственные значения матрицы периода $M(\sigma_{*,\text{per}})$, провести проверку данной матрицы на выполнение ею одного из отмеченных критериев. Для нахождения наибольшего собственного значения удобно использовать хорошо известный итерационный метод [26].

3. Оценка остальных собственных значений осуществляется через комбинацию свойства самоподобия аппроксимационных ядер [22] и итерационного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби*. — Современные проблемы математики, Труды МИАН **299** (2017), 1–20.
2. В. Г. Журавлев, *Модифицированный симплекс-ядерный алгоритм и разложение в многомерные периодические цепные дроби*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **547**, (2025), 61–99.
3. В. И. Арнольд, *Цепные дроби*. Москва, МЦНМО, 2002.
4. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*. Москва, Наука, 1972.
5. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
6. V. Brun, *En generalisation av Kjedebroken*. — Skrifter utgit av Videnskapsseksjonen i Kristiania. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse **6** (1919–1920).
7. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres*. — In Treizieme congres des mathematiciens scandinaves, tenu a Helsinki 18–23 aout (1957), 45–64. Mercators Tryckeri, Helsinki, 1958.
8. S. Labbe, *3-dimensional Continued Fraction Algorithms Cheat Sheets*. — arXiv:1511.08399v1, November 2015.
9. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions*. — Nordisk Nat. Tidskr. **9** (1961), 37–43.
10. A. Nogueira, The three-dimensional Poincare continued fraction algorithm. — Israel J. Math. **90** (1995), No. 1–3, 373–401.
11. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms*. — arXiv:1508.07814, August 2015.
12. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexité linéaire*. — October 2015. DynA3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th, 2015.
13. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction*. Oxford University Press, New York, 2000.
14. R. Mönkemeyer, *Über Fareynetze in n Dimensionen*. — Math. Nachr. **11** (1963), 321–344.
15. D. Grabiner, *Farey nets and multidimensional continued fractions*. — Monatsh. Math. **114** (1992), No. 1, 35–61.
16. M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, *A new multi-dimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface*. — Experimental Mathematics **23** (2014), No. 4, 390–410.
17. О. Н. Карпенков, *О нахождении периодов геометрических цепных дробей двумерных алгебраических гиперболических операторов*. — Мат. заметки **88** (2010), № 1, 30–42.
18. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби*. — Современные проблемы математики. МИАН (2016), Вып. 23, 41–66.
19. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби*. Владимир, ВлГУ, 2019, <https://vk.com/id589973164>.

20. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
21. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 130–167.
22. В. Г. Журавлев, *Самоподобия и подстановки ядерных разбиений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **523** (2023), 83–120.
23. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*. 4-ое изд., Москва, Наука, 1978.
24. Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений*. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1961.
25. C. L. Siegel, *Algebraic integers whose conjugates lie in the unit circle*. — Duke Math. J., **11**, No. 3 (1944), 597–602.
26. И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*. Москва, Изд-во физ.-мат. литературы, т. 2, 1961.

Zhuravlev V. G. Multidimensional periodic continued fractions, recurrent formulas and fractional linear invariance.

In this paper, an attempt is made to initially classify possible types of decompositions of real sets of numbers into multidimensional periodic continued fractions. Two types of unimodular matrices are chosen as the basis of the classification — block and triangular matrices.

Владimirский государственный университет
пр. Строителей, 11,
600024, Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 21 апреля 2025 г.