

В. Г. Журавлев

**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СИМПЛЕКС-ЯДЕРНЫЙ
АЛГОРИТМ И РАЗЛОЖЕНИЕ В МНОГОМЕРНЫЕ
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ**

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Симплекс-ядерный алгоритм и его модификация. Ранее в работе [1] был предложен универсальный симплекс-ядерный алгоритм (кратко – \mathcal{SK} -алгоритм), применимый к задачам совместных диофантовых приближений любых конечных совокупностей вещественных чисел. Основу \mathcal{SK} -алгоритма составляет тройка конструкций, позволяющих разлагать точки α в многомерные цепные дроби.

Конструкция 1 – центрированные унимодулярные базисы, геометрический аналог способа “вытягивания носов” [2], применяемого в теории обычных (одномерных) цепных дробей.

Конструкция 2 – аппроксимационные симплексы Фарея, многомерное обобщение рядов Фарея [3].

Конструкция 3 – метрические норменные параллелоэдры, ядра конечных разбиений многомерных торов [4].

Рассматриваемый в настоящей работе модифицированный симплекс-ядерный алгоритм (кратко – \mathcal{MSK} -алгоритм) основан на использовании центрированных единичных базисах, что позволило упростить \mathcal{SK} -алгоритм, исключая из него необходимость первоначальной настройки алгоритма на данный набор чисел α . Тройственная структура указанных алгоритмов символически представлена в виде, указанном в (4.18) и (4.19).

0.2. Основные результаты. В теореме 4.1 для произвольного набора вещественных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в терминах метрических параллелоэдров доказана оценка скорости совместного приближения указанных чисел подходящими цепными дробями.

В теореме 8.1 сформулированы достаточные условия представимости чисел α заданным разложением их в периодическую цепную дробь. В следующей теореме 8.2 приведена верхняя граница приближений α

Ключевые слова: многомерные цепные дроби, наилучшие приближения, суммы Фарея.

подходящими дробями. Граница выражается через собственные значения матрицы периода соответствующей цепной дроби.

Кроме того, найдены легко проверяемые критерии 8.1, 8.2, которым должна удовлетворять матрица периода для представимости цепной дробью чисел α .

0.3. Тестирование MSK -алгоритма. На примере кубических иррациональностей в п. 9 проведено тестирование MSK -алгоритма. Вычисления показали, что MSK -алгоритм является универсальным. Его средние значения локальных диофантовых экспонент близки к оптимальным для алгебраических иррациональностей

0.4. Связи с другими работами. Приведем список работ, связанных с темой исследования. Для двумерных приближений операция триангуляции Фарея или сети Фарея в разных вариантах использовалась в [5–14]. Существует несколько многомерных обобщений (см., например, [12]). Одно из них представляет собою алгоритм Монкемайера [8, 9], позволяющий по индукции разбивать некоторый начальный единичный симплекс на более мелкие составляющие симплексы. Периодические разложения в цепные дроби размерности два и более содержатся в [15–18]. Применение индуцированных торических разбиений к задачам нахождения наилучших многомерных приближений было найдено в [4, 17] и [19]. Состояние исследований до 2019 г. представлено в монографии [18].

§1. ЗВЕЗДЫ И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

1.1. Звезды. Обозначим через \mathfrak{S} совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{1, \dots, d, d+1\}$. Пусть v_1, \dots, v_d, v_{d+1} – произвольные векторы из \mathbb{R}^d и $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{d-1}\}$ – дополнительное к σ сочетание в $\{1, \dots, d, d+1\}$. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов v_1, \dots, v_d, v_{d+1} .

Определение 1.1. Пусть любые $d-1$ вектора из v_1, \dots, v_d, v_{d+1} линейно независимы. Обозначим через $H_{\sigma'}$ гиперплоскость, проходящую через начало координат и содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ' . Тогда такое множество векторов

$$v = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}\} \tag{1.1}$$

назовем звездой, если для всех σ' , когда $\sigma = \{k_1, k_2\}$ пробегает \mathfrak{S} , векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}\}$ не принадлежат гиперплоскости

$H_{\sigma'}$ и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H_{\sigma'}^+$ и $H_{\sigma'}^-$.

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из $\{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}\}$ будут линейно независимы.

Объяснением названия звезды может служить следующие два эквивалентных критерия.

Критерий 1.1. *Обозначим через $\Delta(v)$ натянутый на векторы звезды v замкнутый симплекс, и пусть $\Delta^{\text{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса. Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию $0 \in \Delta^{\text{int}}(v)$.*

Далее у нас будут появляться и другие симплексы. Чтобы их различать, назовем $\Delta(v)$ звездным симплексом.

Критерий 1.2. *Положительность барацентрических координат начала координат 0 относительно векторов v равносильна условию на векторы v быть звездой.*

1.2. Производные звезды. Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из \mathfrak{S} сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}\}$ не принадлежит гиперплоскости $H_{\sigma'} -$

$$v_\sigma \notin H_{\sigma'}. \quad (1.2)$$

При этом условии только одно из множеств

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \quad (1.3)$$

будет звездой (1.1). Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \quad (1.4)$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полупространствам $H_{\sigma'}^\pm$, и $v(\sigma')$ – дополнительное для $v(\sigma)$ множество векторов из звезды v .

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (1.4) гарантирована ограничением (1.2) на сумму векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$.

Определение 1.2. *Обозначим через $v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma')$, то множество векторов из (1.3), которое является звездой. В этом случае звезду v назовем σ -дифференцируемой. Если звезда v σ -дифференцируема для всех сочетаний $\sigma \in \mathfrak{S}$, то будем говорить, что данная звезда totally дифференцируема. Если же при этом звезда v*

тотально дифференцируема бесконечное число раз, то скажем, что она бесконечно тотально дифференцируема или, кратко, – бесконечно дифференцируема.

Таким образом, согласно определению 1.2 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из \mathfrak{S} на множестве невырожденных звезд $v = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma, v_{d+1}^\sigma\}, \quad (1.5)$$

где

$$v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}, \quad v_{k_2}^\sigma = v_\sigma \quad (1.6)$$

или

$$v_{k_1}^\sigma = v_\sigma, \quad v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}, \quad (1.7)$$

в зависимости от условий из (1.4), и $v_{k'}^\sigma = v_{k'}$ для всех $k' \in \sigma'$.

Звезду v^σ из (1.5) назовем σ -производной нерывожденной звезды v . Если нужно выделить индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ -производной (1.5) использовать еще и обозначение

$$v^\sigma = v^{k_1, k_2}$$

или – более развернутые обозначения –

$$v^\sigma = v_{k_1}^{k_1, k_2} \quad \text{или} \quad v^\sigma = v_{k_2}^{k_1, k_2} \quad (1.8)$$

соответственно случаю (1.6) или (1.7).

§2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЗВЕЗД И ЦЕНТРИРОВАННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ БАЗИСОВ

2.1. Пространства. Введем следующие понятия:

$$\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}, \quad \mathbf{K} = \mathbb{R}^d \quad (2.1)$$

– *суперпространство* и *ядерное пространство* (*karyon space*), вложенное в \mathbf{S} ,

$$\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{S}, \quad (2.2)$$

как *ядерная гиперплоскость*

$$\mathbf{K}_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbf{K}\} \quad (2.3)$$

2.2. Единичный базис. Пусть

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \\ e_{d+1} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad (2.4)$$

$$e_1 = (1, \dots, 0, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 1, 0), e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1), \quad (2.5)$$

– единичный базис суперпространства \mathbf{S} . Он является *унимодулярным базисом*. Обозначим через

$$\angle \mathbf{S} = \{x = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbf{S} : x_1 \geq 0, \dots, x_d \geq 0, x_{d+1} \geq 0\} \quad (2.6)$$

положительный многогранный конус с ребрами, которые направлены вдоль векторов (2.5), и пусть

$$\mathbf{K}_{\geq 0} = \mathbf{K}_0 \cap \angle \mathbf{S}$$

– его *нижняя грань*. При рассмотрении векторов в суперпространстве \mathbf{S} будем выделять их $(d+1)$ -ую координату, которой в дальнейшем принадлежит особая роль.

2.3. Центрированные унимодулярные базисы. Кроме единично-го (2.5), будем рассматривать также и другие *унимодулярные базисы*

$$u = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}\} \quad (2.7)$$

пространства \mathbf{S} , состоящие из векторов u_1, \dots, u_d, u_{d+1} , т. е. базисы из целочисленных векторов

$$u_1, \dots, u_d, u_{d+1} \in \mathbb{Z}^{d+1} \quad (2.8)$$

с определителем

$$\det U = \pm 1 \quad (2.9)$$

матрицы

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \\ u_{d+1} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

строки которой – это координаты векторов u_1, \dots, u_d, u_{d+1} . Условия (2.8), (2.9) эквивалентны *унимодулярности*

$$U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$$

матрицы (2.10). Относительно базиса (2.7) сделаем предположение, что все его векторы принадлежат конусу (2.6) –

$$u_1, \dots, u_d, u_{d+1} \in \angle \mathbf{S}. \quad (2.11)$$

В этом же конусе фиксируем некоторый вектор

$$\hat{\alpha} = (\alpha, 1) \in \angle \mathbf{S}, \quad (2.12)$$

где точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ иррациональна, т. е. для ее координат выполняется условие:

$$\text{числа } 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \text{ линейно независимы над } \mathbb{Z}, \quad (2.13)$$

где \mathbb{Z} – кольцо целых рациональных чисел. В определении (2.13) кольцо \mathbb{Z} можно заменить полем рациональных чисел \mathbb{Q} . Из (2.12) и (2.13), в частности, следуют неравенства

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_d > 0. \quad (2.14)$$

Скажем, что базис (2.7) центрирован

$$u_{\hat{\alpha}} = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}\}_{\hat{\alpha}} \quad (2.15)$$

лучом $\hat{\alpha}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \hat{\alpha}$, если указанный луч принадлежит внутренности

$$\hat{\alpha}_{\geq 0} \subset \angle^{\text{int}} u \quad (2.16)$$

конуса

$$\angle u = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d + \lambda_{d+1} u_{d+1}; \lambda_k \geq 0\},$$

порожденного векторами базиса (2.7). Базис $u_{\hat{\alpha}}$ назовем *центрированным унимодулярным базисом* или кратко – *CU-базисом*, а луч $\hat{\alpha}_{\geq 0}$ – *центрирующим лучом*.

2.4. Проекции. Определим следующие проекции:

$$\mathbf{S} \xrightarrow{\text{pr}_{\hat{\alpha}, 0}} \mathbf{K}_0 \xrightarrow{\iota_0} \mathbf{K},$$

$$\text{pr}_{\hat{\alpha}, 0} : (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \mapsto (x_1 - \alpha_1 x_{d+1}, \dots, x_d - \alpha_d x_{d+1}, 0) \quad (2.17)$$

– параллельная проекция вдоль вектора $\hat{\alpha}$ из (2.12),

$$\iota_0 : (x_1, \dots, x_d, 0) \mapsto (x_1, \dots, x_d) \quad (2.18)$$

– изоморфизм. Обозначим через

$$\text{pr}_{\hat{\alpha}} = \iota_0 \circ \text{pr}_{\hat{\alpha}, 0} \quad (2.19)$$

композицию отображений (2.17) и (2.18).

Пусть $u = u_{\hat{\alpha}}$ – центрированный унимодулярный базис (CU -базис), определенный в (2.15). Его проекция (2.19)

$$\text{pr}_{\hat{\alpha}} : u \rightarrow v$$

представляет собою множество $v = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}\}$, состоящее из векторов в пространстве \mathbb{R}^d .

В [1] было доказано следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Если $u = u_{\hat{\alpha}}$ – центрированный унимодулярный базис (2.15), при этом α является иррациональной точкой (2.13), то множество векторов*

$$v = v_{\hat{\alpha}} = \text{pr}_{\hat{\alpha}} u, \quad (2.20)$$

где $\text{pr}_{\hat{\alpha}}$ – проекция (2.19), образует бесконечно дифференцируемую звезду (см. определение 1.2).

2.5. Дифференцирование центрированных базисов. Используя проекцию $\text{pr}_{\hat{\alpha}}$, с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} u_{\hat{\alpha}} & \xrightarrow{\text{pr}_{\hat{\alpha}}} & v \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ u_{\hat{\alpha}}^{\sigma} & \xrightarrow{\text{pr}_{\hat{\alpha}}} & v^{\sigma} \end{array} \quad (2.21)$$

можно перенести операции $\sigma \in \mathfrak{S}$ дифференцирования звезд $v \xrightarrow{\sigma} v^{\sigma}$ (1.5) на дифференцирования CU -базисов $u_{\hat{\alpha}}$.

Выясним геометрический смысл дифференцирований CU -базисов $u_{\hat{\alpha}}$. Пусть σ' – дополнительное сочетание к $\sigma \in \mathfrak{S}$. Обозначим через $\hat{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в \mathbb{R}^{d+1} , содержащую векторы $u_{k'_j} \in u_{\hat{\alpha}}$ с индексами k'_j из σ' и луч $\hat{\alpha}_{\geq 0}$. Если, допустим, для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вектор \hat{v}_{k_1} и сумма векторов $\hat{v}_{k_1} + \hat{v}_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\hat{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования

$$u_{\hat{\alpha}} \xrightarrow{\sigma} u_{\hat{\alpha}}^{\sigma} \quad (2.22)$$

сводится к замене вектора u_{k_2} на сумму $u_{k_1} + u_{k_2}$.

В [1] доказаны следующие утверждения.

Предложение 2.2. *Если центрирующий луч $\hat{\alpha}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+ \cdot \hat{\alpha}$ иррациональный (2.13), то любой центрированный унимодулярный базис $u_{\hat{\alpha}}$ (2.15), центрированный лучом $\hat{\alpha}_{\geq 0}$, обладает свойствами:*

- 1) базис $u_{\hat{\alpha}}$ является бесконечно дифференцируемым (2.22);

2) для любого $\sigma \in \mathfrak{S}$ производное множество векторов $u_{\widehat{\alpha}}^\sigma$ снова образует CU -базис, т.е. унимодулярный базис, центрированный лучом $\widehat{\alpha}_{\geq 0}$.

2.6. Пространство и гиперплоскость Фарея. Выделим в суперпространстве \mathbf{S} единичную гиперплоскость

$$\mathbf{F}_1 = \{(x_1, \dots, x_d, 1) : (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{K}\} \subset \mathbf{S},$$

где \mathbf{K} – ядерное пространство из (2.1), и отождествим ее

$$\mathbf{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{F} : (x_1, \dots, x_d, 1) \mapsto (x_1, \dots, x_d) \quad (2.23)$$

с пространством

$$\mathbf{F} = \mathbb{R}^d.$$

Назовем \mathbf{F}_1 гиперплоскостью Фарея, а \mathbf{F} – пространством Фарея.

Зададим проекции

$$\mathbf{S}_+ \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbf{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{F}.$$

Здесь

$$\mathbf{S}_+ = \{(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbf{S} : x_{d+1} > 0\} \quad (2.24)$$

обозначает верхнее суперпространство,

$$\text{pr}_1 : (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{x_{d+1}}, 1 \right) \quad (2.25)$$

– центральную проекцию на гиперплоскость Фарея \mathbf{F}_1 с центром в $0 \in \mathbf{S}$ и φ_1 – изоморфизм (2.23). Далее, обозначим через

$$\varphi = \varphi_1 \circ \text{pr}_1 \quad (2.26)$$

композицию отображений (2.25) и (2.23).

2.7. Сумма Фарея точек. Данные нами названия для множеств \mathbf{F} и \mathbf{F}_1 объясняет следующее утверждение, доказанное в [1].

Предложение 2.3. *При отображении $\varphi : \mathbf{S}_+ \rightarrow \mathbf{F}$ имеет место согласование операций $\varphi(x+y) = \varphi(x) \widehat{+} \varphi(y)$. Здесь $\widehat{+}$ – сумма Фарея,*

$$\left(\frac{x_1}{x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{x_{d+1}} \right) \widehat{+} \left(\frac{y_1}{y_{d+1}}, \dots, \frac{y_d}{y_{d+1}} \right) = \left(\frac{x_1+y_1}{x_{d+1}+y_{d+1}}, \dots, \frac{x_d+y_d}{x_{d+1}+y_{d+1}} \right).$$

§3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЦЕНТРИРОВАННЫХ СИМПЛЕКСОВ

3.1. Центрированные унимодулярные симплексы. Пусть

$$u = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}\} \subset \mathbf{S}_+ \quad (3.1)$$

– произвольный унимодулярный базис, принадлежащий верхнему суперпространству (2.24) и центрированный (2.15) лучом $\widehat{\alpha}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \widehat{\alpha}$. Подействуем на него

$$\mathbf{S} \supset u \xrightarrow{\varphi} \mathbf{s} \subset \mathbf{F} \quad (3.2)$$

проекцией φ из (2.26). Образом будет симплекс

$$\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_d, s_{d+1}\}, \quad (3.3)$$

имеющий рациональные вершины

$$s_i = \varphi(u_i) = \frac{P_i}{Q_i} = \left(\frac{P_{i1}}{Q_i}, \dots, \frac{P_{id}}{Q_i} \right) \quad (3.4)$$

с индексами $i = 1, \dots, d, d+1$. Здесь знаменатели

$$Q_i = P_{i,d+1} = u_{i,d+1}$$

– это последние координаты векторов $u_i = \{u_{i1}, \dots, u_{id}, u_{i,d+1}\}$ из (3.1).

Определенный в (3.3) симплекс \mathbf{s} назовем *аппроксимационным симплексом* (см. формулу (4.12)), поскольку его вершины служат рациональными приближениями точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

Замечание 3.1. 1. Чтобы не усложнять обозначения, отождествляем симплекс \mathbf{s} с множеством его вершин $\{s_1, \dots, s_d, s_{d+1}\}$.

2. В определении (3.4) вершины s_i получаются, как образы концов базисных векторов u_i .

По определению *CU*-базиса \widehat{V} луч $\widehat{\alpha}_{\geq 0}$ принадлежит внутренней области $\angle^{\text{int}} u$ конуса $\angle u$, определенного в (2.16). Отсюда, (2.12) и (2.26) следует, что точка

$$\alpha = \varphi(\widehat{\alpha}_{\geq 0}) = \varphi(\widehat{\alpha})$$

будет внутренней точкой симплекса $\mathbf{s} \subset \mathbf{F}$. Назовем \mathbf{s} *центрированным* точкой α симплексом.

3.2. Дифференцирования симплексов. Используя коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} u_{\hat{\alpha}} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{s} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ u_{\hat{\alpha}}^{\sigma} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{s}^{\sigma} \end{array} \quad (3.5)$$

перенесем операции дифференцирования $\sigma \in \mathfrak{S}$ центрированных универсальных базисов $u_{\hat{\alpha}}$ на дифференцирования центрированных симплексов (3.3).

Геометрический смысл дифференцирований симплексов \mathbf{s} состоит в следующем. Пусть $\sigma = \{k_1, k_2\}$ и σ' – дополнительное сочетание. Обозначим через $\mathcal{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в \mathbb{R}^d , проходящую через вершины $s_{k'_j}$ симплекса \mathbf{s} с индексами k'_j из σ' и точку α . Если для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вершина s_{k_1} и сумма вершин $s_{k_1} \hat{+} s_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\mathcal{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования

$$\mathbf{s} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{s}^{\sigma} \quad (3.6)$$

симплекса \mathbf{s} сводится к замене вершины s_{k_2} на сумму вершин $s_{k_1} \hat{+} s_{k_2}$. В противном случае вершина s_{k_1} заменяется на сумму $s_{k_1} \hat{+} s_{k_2}$.

Из (3.5) и (3.6) следует, что новая вершина $s_{k_1} \hat{+} s_{k_2}$ лежит на ребре, соединяющем вершины s_{k_1} и s_{k_2} .

3.3. Минимальные рациональные симплексы. Пусть открытый d -мерный симплекс \mathbf{s} имеет рациональные вершины

$$\frac{P_i}{Q_i} = \left(\frac{P_{i1}}{Q_i}, \dots, \frac{P_{id}}{Q_i} \right) \quad (3.7)$$

для $i = 1, \dots, d, d+1$, удовлетворяющие условию

$$Q_i > 0, \quad \text{НОД}(P_{i1}, \dots, P_{id}, Q_i) = 1. \quad (3.8)$$

Назовем \mathbf{s} *минимальным симплексом*, если он не содержит

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s} \quad (3.9)$$

никакой точки

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q}, \dots, \frac{P_d}{Q} \right), \quad (3.10)$$

координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leq Q < Q_{\max}$, где использовали обозначение

$$Q_{\max} = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_d. \quad (3.11)$$

В [20] приведены некоторые свойства, равносильные свойству быть минимальным симплексом.

Предложение 3.1. *Следующие утверждения равносильны:*

- 1) симплекс \mathbf{s} минимальный (3.7)–(3.11);
- 2) квадратная матрица

$$S = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{d1} & P_{d+1,1} \\ & \dots & & \\ P_{1d} & \dots & P_{dd} & P_{d+1,d} \\ Q_1 & \dots & Q_d & Q_{d+1} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

размера $d + 1$ унимодулярна;

- 3) симплекс \mathbf{s} имеет объем

$$\text{vol } \mathbf{s} = \frac{1}{d!} \left(\prod_{1 \leq i \leq d+1} Q_i \right)^{-1}.$$

Из предложения 3.1 вытекает

Теорема 3.1. *Пусть α – иррациональная точка (2.13), \mathbf{s} – любой центрированный точкой α симплекс из диаграммы (3.5) с рациональными вершинами (3.4); и пусть $\mathbf{s} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{s}^\sigma$ – определенное в (3.6) дифференцирование для произвольного $\sigma \in \mathfrak{S}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) симплекс \mathbf{s} является минимальным;
- 2) \mathbf{s} переходит снова в минимальный симплекс \mathbf{s}^σ , центрированный точкой α ;
- 3) симплекс \mathbf{s} бесконечно дифференцируемый (3.6).

Доказательство. См. в [1]. □

§4. АППРОКСИМАЦИЯ

4.1. Бесконечные итерации дифференцирований. Рассмотрим

$$\Xi = \mathfrak{S}^{\mathbb{N}} \quad (4.1)$$

– множество всех бесконечных последовательностей $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$, состоящих из произвольных сочетаний σ_i из \mathfrak{S} ; и пусть

$$[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$$

обозначает *отрезок* из первых n членов последовательности σ , при этом полагаем, что $[\sigma]_0 = \emptyset$. Используя определение производной симплекса (3.6), индукцией по $n = 0, 1, 2, \dots$ определим $[\sigma]_n$ -*производные*

$$\mathbf{s}^{[\sigma]_n} = (\mathbf{s}^{[\sigma]_{n-1}})^{\sigma_n}, \quad \mathbf{s}^{[\sigma]_0} = \mathbf{s} \quad (4.2)$$

центрированного точкой α симплекса \mathbf{s} .

Если α – иррациональная точка (2.13), то по теореме 3.1 симплекс \mathbf{s} будет $[\sigma]_n$ -*дифференцируемым* для всех значений $n = 0, 1, 2, \dots$ при любом выборе последовательности σ из множества (4.1).

Обозначим через

$$S^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{11}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{d1}^{[\sigma]_n} & P_{d+1,1}^{[\sigma]_n} \\ & \ddots & & \\ P_{1d}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{dd}^{[\sigma]_n} & P_{d+1,d}^{[\sigma]_n} \\ Q_1^{[\sigma]_n} & \dots & Q_d^{[\sigma]_n} & Q_{d+1}^{[\sigma]_n} \end{pmatrix}$$

матрицы $[\sigma]_n$ -производных симплексов $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$, определяемых по правилу (3.7) и (3.12).

Далее будем предполагать, что последовательности дифференцирований $\sigma \in \Xi$ удовлетворяют условию: *существует номер n_0 , для которого знаменатели*

$$Q_i^{[\sigma]_n} > 0 \quad \text{при } n \geq n_0 \quad (4.3)$$

для всех $i = 1, \dots, d, d+1$.

Начиная с этого места, в качестве начального унимодулярного базиса (3.1) будем выбирать

$$u = e \quad (4.4)$$

– единичный базис (2.4). Согласно (2.15), единичный базис

$$e_{\hat{\alpha}} = \{e_1, \dots, e_d, e_{d+1}\}_{\hat{\alpha}}$$

является *CU*-базисом с любым центрирующим лучом $\hat{\alpha}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \hat{\alpha}$, где $\hat{\alpha}$ – вектор, определенный в (2.12) – (2.14).

4.2. Радиус производных звезд и симплексов. Пусть $[\sigma]_n$ -производные $v^{[\sigma]_n}$ звезды v из (1.5) состоят из лучей

$$v^{[\sigma]_n} = \{v_1^{[\sigma]_n}, \dots, v_d^{[\sigma]_n}, v_{d+1}^{[\sigma]_n}\}, \quad (4.5)$$

и пусть $\Delta(v^{[\sigma]_n})$ – симплекс звезды $v^{[\sigma]_n}$, имеющий вершины в концах лучей из (4.5). Размер звезд $v^{[\sigma]_n}$ и отвечающих им симплексов $\Delta(v^{[\sigma]_n})$

будем контролировать с помощью *радиуса звезды и симплекса*

$$\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(v^{[\sigma]_n}) = \varrho_{\max}(\Delta(v^{[\sigma]_n})) = \max_{1 \leq i \leq d+1} |v_i^{[\sigma]_n}|_1, \quad (4.6)$$

равного максимальной длине лучей звезды $v^{[\sigma]_n}$ или радиусу минимальной сферы с центром в точке 0, содержащей звезду $v^{[\sigma]_n}$ и симплекс $\Delta(v^{[\sigma]_n})$. В дальнейшем нам также потребуются

$$\varrho_{\mathbf{s}}^{[\sigma]_n} = \varrho(\mathbf{s}^{[\sigma]_n}) = \max_{1 \leq i, i' \leq d+1} \left| \frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} - \frac{P_{i'}^{[\sigma]_n}}{Q_{i'}^{[\sigma]_n}} \right|_1 \quad (4.7)$$

— *радиусы аппроксимационных симплексов* (4.2). Выше использована 1-метрика $|\cdot|_1$ — сумма модулей координат.

4.3. Основная теорема об аппроксимации. Пусть $[\sigma]_n$ -производный симплекс $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ из (4.2) имеет рациональные вершины

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_n}}{Q_{i1}^{[\sigma]_n}}, \dots, \frac{P_{id}^{[\sigma]_n}}{Q_{id}^{[\sigma]_n}} \right) \quad (4.8)$$

для $i = 1, \dots, d, d+1$. Определим для симплекса $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ его *точку Фарея*

$$\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} = \frac{P_1^{[\sigma]_n}}{Q_1^{[\sigma]_n}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{P_d^{[\sigma]_n}}{Q_d^{[\sigma]_n}} \hat{+} \frac{P_{d+1}^{[\sigma]_n}}{Q_{d+1}^{[\sigma]_n}}. \quad (4.9)$$

Теорема 4.1. При выполнении условий (4.3) и (4.4), пусть α — иррациональная точка (2.13), $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ — произвольная бесконечная последовательность сочетаний σ_i из множества \mathfrak{S} и $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ — соответствующие производные симплексы (4.2). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Симплексы $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ обладает свойством минимальности:

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s}^{\text{int}[\sigma]_n}, \quad (4.10)$$

если $1 \leq Q < Q_{\max}^{[\sigma]_n}$; единственная точка

$$\frac{P}{Q} \in \mathbf{s}^{\text{int}[\sigma]_n} \quad (4.11)$$

со знаменателем $Q = Q_{\max}^{[\sigma]_n}$ есть точка Фарея $\frac{P}{Q} = \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$ из (4.9).

2. Имеют место неравенства

$$\left| \alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{\varrho_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \quad (4.12)$$

и

$$\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{\varrho_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \quad (4.13)$$

для всех $i = 1, \dots, d < d + 1$ и $n \geq n_0$, где граница n_0 определена в (4.3). Здесь $\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(\Delta(v^{[\sigma]_n}))$ обозначает радиус $[\sigma]_n$ -производной $v^{[\sigma]_n}$ звезды v , определенный в (4.6).

Доказательство. Теорема является частным случаем теоремы 7.1 из [1]: теперь в качестве унимодулярного базиса u выбирается единичный базис e и налагается условие (4.3). По сравнению с теоремой 7.1 из [1] добавлены неравенства (4.13) для вершин $P_i^{[\sigma]_n}/Q_i^{[\sigma]_n}$ (4.8) производных симплексов $s^{[\sigma]_n}$. Вершины не являются внутренними точками симплексов $s^{[\sigma]_n}$, поэтому для них включение (4.11) естественно не выполняется, однако оценка (4.12) остается справедливой и для граничных точек симплексов. \square

В [1] доказано, что при любом выборе бесконечной последовательности производных $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ отвечающие им симплексы $s^{[\sigma]_n}$ будут обладать свойством $\text{vol } s^{[\sigma]_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Неравенства (4.12) будут нетривиальны только если $\varrho_{\max}(\Delta(v^{[\sigma]_n})) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Описанию того, как можно обеспечить выполнение последнего свойства, посвящены следующие разделы.

4.4. Модифицированный симплекс-ядерный алгоритм. Алгоритм, содержащийся в теореме 4.1, назовем *модифицированным симплекс-ядерным алгоритмом* (кратко – \mathcal{MSK} -алгоритмом).

В [1] был предложен универсальный *симплекс-ядерный алгоритм* (кратко – \mathcal{SK} -алгоритм), применимый к точкам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ с любыми вещественными координатами. Последний – \mathcal{SK} -алгоритм – требовал вначале существования унимодулярного базиса

$$u = u_{\hat{\alpha}} = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}\}_{\hat{\alpha}}, \quad (4.14)$$

центрированного лучом $\hat{\alpha}_{\geq 0}$ (см. определение (2.15)) и удовлетворяющего условию

$$u_{i,d+1} > 0 \quad (4.15)$$

для всех $i = 1, \dots, d, d + 1$.

Рассматриваемый в настоящей работе \mathcal{MSK} -алгоритм в качестве базиса (4.14) выбирает единичный унимодулярный базис

$$e = e_{\hat{\alpha}} = \{e_1, \dots, e_d, e_{d+1}\}_{\hat{\alpha}}, \quad (4.16)$$

автоматически являющийся центрированным лучом $\hat{\alpha}_{\geq 0}$. Однако, единичный базис не удовлетворяет условию (4.15). Поэтому вместо данного условия в случае единичного базиса (4.16) вводится новое требование (4.3) на последовательности дифференцирований $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ из Ξ . Для выполнения условия (4.3) достаточно потребовать существования дифференцирований $\sigma_i \in \sigma$ следующего вида:

$$e^{\sigma_i} = e_{d+1}^{k, d+1} \quad (4.17)$$

для всех $k = 1, \dots, d$, см. определение (1.8). Выполнить же условие (4.17) значительно проще, чем (4.15).

Тройственную структуру указанных алгоритмов можно символически представить соответственно в виде

$$\mathcal{SK} = \mathcal{SK}(u, v, \mathbf{s}), \quad (4.18)$$

$$\mathcal{MSK} = \mathcal{MSK}(e, v, \mathbf{s}) \quad (4.19)$$

Несмотря на различия *начальных условий* (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) в этих алгоритмах, формально они имеют одну и ту же структуру.

§5. ЛОКАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ

5.1. Целевая функция. Из неравенств (4.12) видно, что приближение иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ подходящими дробями $P_{\max}^{[\sigma]_n}/Q_{\max}^{[\sigma]_n}$ – точками Фарея из (4.9) зависит от величины радиуса $\varrho_{\max}^{[\sigma]_n}$ производной звезды $r^{[\sigma]_n}$.

В свою очередь, сами производные звезды $v^{[\sigma]_n}$ определяются бесконечной последовательностью производных $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ из множества $\Xi = \mathfrak{S}^{\mathbb{N}}$. Чтобы как-то упорядочить выбор производных σ_n из \mathfrak{S} , входящих в последовательность σ , можно, например, ввести *целевую функцию* $\varphi(v) \geq 0$, удовлетворяющую условиям:

$$\varphi(v) \geq \varphi(v'), \quad \text{если} \quad \Delta(v) \supset \Delta(v'), \quad (5.1)$$

где v, v' – две произвольные звезды и $\Delta(v), \Delta(v')$ – отвечающие им симплексы;

$$\varrho_{\max}(v) \leq c \varphi(v) \quad (5.2)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от звезды v .

Если целевая функция $\varphi(v) \geq 0$ уже задана, то ее можно будет использовать для формирования стратегии выбора производных $\sigma_n \in \mathfrak{S}$ в последовательности $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$, применяя индукцию по $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\varphi(r^{[\sigma]_n}) = \min_{\sigma'_n \in \mathfrak{S}} \varphi(r^{[\sigma']_n}), \quad (5.3)$$

где через $[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ и $[\sigma']_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma'_n\}$ обозначены отрезки длины n . Определенную в (5.3) стратегию будем называть φ -стратегией, явно указывая на ее зависимость от целевой функции $\varphi(v)$ из (5.1), (5.2).

5.2. Диофантовы экспоненты. Из неравенств (4.12) и (5.2) следует, что выбранная φ -стратегия применительно к данной точке α срабатывает, если

$$\varphi(v^{[\sigma]_n}) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$. Если же попытаться как-то количественно оценить φ -стратегию, то можно использовать, например, *диофантову экспоненту*, точнее – φ -экспоненту

$$\eta = \eta(\alpha, \varphi) = \sup_{n' \geq 0} \inf_{n \geq n'} \frac{-\ln \varphi(v^{[\sigma]_n})}{\ln Q_{\max}^{[\sigma]_n}}. \quad (5.4)$$

Роль экспоненты (5.4) видна из следующего утверждения.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1, целевая функция $\varphi(v)$ удовлетворяет (5.1), (5.2) и по φ -стратегии (5.3) построена бесконечная последовательность производных $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ из множества $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$. Кроме того, пусть η' – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\eta' < \eta$, где $\eta = \eta(\alpha, \varphi)$ – диофантова экспонента (5.4). Тогда справедлива оценка*

$$\left| \alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{c}{(Q_{\max}^{[\sigma]_n})^{1+\eta'}} \quad (5.5)$$

и

$$\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \right|_1 \leq \frac{c}{(Q_i^{[\sigma]_n})^{1+\eta'}} \quad (5.6)$$

для всех $n \geq n_{\eta'}$. Здесь c – константа из неравенства (5.2) и нижняя граница $n_{\eta'}$ для n определяется выбором показателя η' и зависит от иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и целевой функции $\varphi(v)$.

Доказательство. Это вытекает из теоремы 4.1 и определения (5.4) диофантовой экспоненты η . \square

5.3. Многошаговые стратегии. Определенную в (5.3) \wp -стратегию, естественно назвать *одношаговой*. Если возникнет задача увеличения значения диофантовой экспоненты (5.4) и, значит, увеличения скорости приближения в неравенстве (5.5), то для этого можно попытаться искать другую целевую функцию $\wp'(r)$ или, не меняя исходную функцию $\wp(v)$, применить многошаговую стратегию:

$$\min_{\sigma_{n+1} \in \Sigma} \wp(v^{[\sigma]_{n+\omega-1}}) = \min_{\sigma'_n \in \Sigma} \wp(v^{[\sigma']_{n+\omega-1}}), \quad (5.7)$$

$$\dots$$

$$\min_{\sigma_{n+\omega-1} \in \Sigma} \dots$$

$$\min_{\sigma_{n+\omega-1} \in \Sigma}$$

где

$$[\sigma]_{n+\omega-1} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+\omega-1}\},$$

$$[\sigma']_{n+\omega-1} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma'_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+\omega-1}\}$$

– отрезки длины $n+\omega-1$ в последовательности $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$. Если отрезок $[\sigma]_{n-1}$ уже построен, то следующий отрезок $[\sigma]_n$ находится по правилу (5.7). Определенную таким образом стратегию будем называть *ω -шаговой стратегией* с оценочной функцией $\wp(v)$ или кратко – \wp^ω -стратегией. Стратегия из (5.3) – это одношаговая \wp^1 -стратегия.

Все определяемые таким образом стратегии относятся к классу *локальных*, когда каждый шаг определяется по возможным результатам конечного отрезка следующих за ним шагов.

§6. ПОЛУГРУППЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ И СПЕЦИАЛИЗАЦИЙ И ИХ МАТРИЧНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

6.1. Специализации. Заметим, что дифференцирование

$$\sigma : u \rightarrow u^\sigma \quad (6.1)$$

не определено на множестве обычных базисов u , а только на множестве центрированных базисов $u_{\hat{\alpha}}$ из (2.21). Чтобы определить дифференцирования базисов (6.1), нужно рассмотреть *специализации*

$$\sigma_* = \sigma_{k_1}^{k_1, k_2} \quad \text{и} \quad \sigma_* = \sigma_{k_2}^{k_1, k_2} \quad (6.2)$$

дифференцирований σ , действующие

$$\sigma_* : u \rightarrow u^{\sigma_*} \quad (6.3)$$

по формуле $\sigma_* : u \rightarrow u^{\sigma_*} = \{u_1^{\sigma_*}, \dots, u_d^{\sigma_*}, u_{d+1}^{\sigma_*}\}$, где

$$u_{k_1}^{\sigma_*} = u_{k_1}, \quad u_{k_2}^{\sigma_*} = u_{k_1} + u_{k_2}$$

для первого случая (6.2),

$$u_{k_1}^{\sigma_*} = u_{k_1} + u_{k_2}, \quad u_{k_2}^{\sigma_*} = u_{k_2}$$

для второго случая (6.2) и

$$u_{k'}^{\sigma_*} = u_{k'} \quad \text{для всех } k' \neq k_1, k_2.$$

Уточним связь дифференцирования с его специализациями.

Замечание 6.1. 1. Пара $\{\sigma, u_{\hat{\alpha}}\}$ задает

$$\{\sigma, u_{\hat{\alpha}}\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_{u_{\hat{\alpha}}} \quad (6.4)$$

специализацию (6.3) дифференцирования σ таким образом, чтобы

$$u^{\sigma_*} = u_{\hat{\alpha}}^{\sigma}. \quad (6.5)$$

2. Аналогично пара $\{\sigma, v\}$ задает специализацию

$$\{\sigma, v\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_v, \quad (6.6)$$

при этом производная звезда $v^{\sigma_{**}}$ не определена для $\sigma_{**} \neq \sigma_*$. Здесь σ_* и σ_{**} – *двойственные* специализации (6.2) одного и того же дифференцирования σ .

6.2. Матрицы специализаций. Запишем базисы u в виде столбцов

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \\ u_{d+1} \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Тогда действия (6.3) специализации $\sigma_{k_1}^{k_1, k_2}$ с номерами $k_1 < k_2$ можно записать в матричном виде

$$u^{\sigma_{k'}^{k_1, k_2}} = M(\sigma_{k'}^{k_1, k_2}) \cdot u, \quad (6.8)$$

где

$$M(\sigma_{k_1}^{k_1, k_2}) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_1, k_1} & 0 & 1_{k_1, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0_{k_2, k_1} & 0 & 1_{k_2, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

и

$$M(\sigma_{k_2}^{k_1, k_2}) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_1, k_1} & 0 & 0_{k_1, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_2, k_1} & 0 & 1_{k_2, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

— квадратные матрицы размера $d + 1$ с единичными блоками E соответствующих размеров.

6.3. Представления группы перестановок. Пусть $S = S_{d+1}$ — группа перестановок индексов $\{1, \dots, d, d + 1\}$. На множестве базисов $u = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}\}$ (2.7) зададим действие

$$s : u \rightarrow u^s \quad (6.11)$$

группы S , полагая

$$u^s = (u_1^s, \dots, u_d^s, u_{d+1}^s) = (u_{s(1)}, \dots, u_{s(d)}, u_{s(d+1)}) \quad \text{для } s \in S. \quad (6.12)$$

Согласно (6.11) и (6.12) действие перестановок $s \in S$ на столбцы (6.7) в матричной форме запишется

$$u^s = M(s) \cdot u,$$

где

$$M(s) = \begin{pmatrix} & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 1_{i, s(i)} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

— перестановочная матрица для перестановки s .

6.4. Полугруппы дифференцирований и специализаций. Определим полугруппу

$$S\mathfrak{G} = \langle S, \mathfrak{G} \rangle, \quad (6.14)$$

порожденную всеми перестановками $s \in S$ и дифференцированиями

$$\sigma : u_{\hat{\alpha}} \rightarrow u_{\hat{\alpha}}^{\sigma}$$

(см. (2.22)) для всех сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из \mathfrak{G} . Аналогично определим полугруппу

$$S\mathfrak{G}_* = \langle S, \mathfrak{G}_* \rangle, \quad (6.15)$$

заменяя дифференцирования в (6.14) специализациями σ_* из (6.2). Назовем $S\mathfrak{G}$ полугруппой дифференцирований, а $S\mathfrak{G}_*$ — полугруппой специализаций.

Пусть $\sigma_* = \sigma_{*k} \cdot \dots \cdot \sigma_{*1}$ принадлежит полугруппе $S\mathfrak{S}_*$, где σ_{*i} – некоторая перестановка или специализация. Тогда, используя представления (6.3) и (6.11), по определению полагаем

$$u^{\sigma_*} = ((u^{\sigma_{*1}}) \dots)^{\sigma_{*k}}.$$

В [21] было доказано следующее утверждение.

Предложение 6.1. Для $\sigma_* = \sigma_{*k} \cdot \dots \cdot \sigma_{*1}$ из полугруппы $S\mathfrak{S}_*$ определим матрицу

$$M(\sigma_*) = M(\sigma_{*k}) \cdot \dots \cdot M(\sigma_{*1}), \quad (6.16)$$

где $M(\sigma_{*i})$ – матрица (6.13), если σ_{*i} – перестановка, и $M(\sigma_{*i})$ – матрица (6.9) или (6.10), если σ_{*i} – специализация. Тогда справедливы утверждения.

1. Действия (6.11) в матричной форме принимают вид

$$u^{\sigma_*} = M(\sigma_*)u = M(\sigma_{*k}) \cdot (\dots \cdot (M(\sigma_{*1})u)), \quad (6.17)$$

где u – произвольный унимодулярный базис (2.7).

2. Определенная в (6.15) полугруппа специализаций $S\mathfrak{S}_*$ в матричном представлении (6.16) состоит из неотрицательных унимодулярных матриц, т. е. матриц с целыми неотрицательными коэффициентами и определителем ± 1 .

§7. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЗВЕЗД

7.1. Собственный центрирующий вектор. Разложим

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_u \cdot u$$

– центрирующий вектор $\hat{\alpha}$ из (2.12) по базису u . Здесь $\hat{\alpha}_u$ – координатная строка вектора $\hat{\alpha}$. Найдем для этого вектора координаты $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_u^{\sigma_*} \cdot u^{\sigma_*}$ в базисе u^{σ_*} . Подставляя выражение $u^{\sigma_*} = M(\sigma_*)u$ из формулы (6.17), записываем $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_u^{\sigma_*} \cdot u^{\sigma_*} = \hat{\alpha}_u^{\sigma_*} \cdot M(\sigma_*)u$. Отсюда приходим к нужной формуле

$$\hat{\alpha}_u^{\sigma_*} = \hat{\alpha}_u M(\sigma_*)^{-1}.$$

Потребуем, чтобы центрирующий вектор $\hat{\alpha}$ был (левым) собственным вектором:

$$\hat{\alpha} M(\sigma_*) = \lambda_\alpha \hat{\alpha}. \quad (7.1)$$

Напомним, что здесь вектор $\hat{\alpha}$ записан в виде координатной строки.

7.2. Собственные звезды.

В [21] доказано следующее утверждение.

Предложение 7.1. *Пусть*

$$v = v_{\hat{\alpha}} = \text{pr}_{\hat{\alpha}} u \quad (7.2)$$

– звезда (2.20) для унимодулярного базиса u ; σ – дифференцирование из полугруппы $S\mathfrak{S}$ (6.14); $\sigma_* = \sigma|_v$ – специализация (6.6) дифференцирования σ звездой v ; и пусть, кроме того, центрирующий вектор $\hat{\alpha}$ является собственным

$$\hat{\alpha}^{\sigma_*} = \lambda \hat{\alpha}$$

относительно специализации σ_* . При этих условиях имеем

$$v_{\hat{\alpha}}^{\sigma} = Av_{\hat{\alpha}} \quad \text{или,} \quad \text{кратко,} \quad v^{\sigma} = Av,$$

где

$$A = A(\sigma_*, \lambda, \hat{\alpha}) \quad (7.3)$$

– некоторое невырожденное аффинное отображение \mathbb{R}^d .

7.3. Вычисление матрицы отображения $A(\sigma_*, \lambda, \hat{\alpha})$. Используя (7.2) и (6.17), записываем

$$v_{\hat{\alpha}}^{\sigma} = \text{pr}_{\hat{\alpha}} u^{\sigma}, \quad u^{\sigma_*} = M(\sigma_*)u. \quad (7.4)$$

Из (7.4) следует $v_{\hat{\alpha}}^{\sigma} = \text{pr}_{\hat{\alpha}} M(\sigma_*)u = M(\sigma_*) \text{pr}_{\hat{\alpha}} u$. Отсюда и (7.2) вытекает $v_{\hat{\alpha}}^{\sigma} = M(\sigma_*) v_{\hat{\alpha}}$, где звезды $v_{\hat{\alpha}}^{\sigma}$ и $v_{\hat{\alpha}}$ записаны в виде столбцов

$$v_{\hat{\alpha}}^{\sigma} = \begin{pmatrix} v_1^{\sigma} \\ \vdots \\ v_d^{\sigma} \\ v_{d+1}^{\sigma} \end{pmatrix}, \quad v_{\hat{\alpha}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \\ v_{d+1} \end{pmatrix}$$

и

$$M(\sigma_*) = \begin{pmatrix} m_{11}^{\sigma_*} & \dots & m_{1d}^{\sigma_*} & m_{1,d+1}^{\sigma_*} \\ \vdots & & \vdots & \\ m_{d1}^{\sigma_*} & \dots & m_{dd}^{\sigma_*} & m_{d,d+1}^{\sigma_*} \\ m_{d+1,1}^{\sigma_*} & \dots & m_{d+1,d}^{\sigma_*} & m_{d+1,d+1}^{\sigma_*} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

– унимодулярная матрица размера $(d+1) \times (d+1)$.

Матрицу размера $d \times d$ аффинного отображения (7.3) будем искать в базисе $\{v_1, \dots, v_d\}$.

В [21] доказано следующее утверждение.

Предложение 7.2. *Пусть звезда v имеет иррациональный тип, т.е. определенный в (2.12) направляющий вектор $\hat{\alpha} = (\alpha, 1)$ будет иррациональным (2.13), и пусть выполнены условия предложения 7.1.*

Тогда аффинное отображение $A(\sigma_*, \lambda, \hat{\alpha})$ из (7.3) имеет следующее матричное представление в базисе $\{v_1, \dots, v_d\}$:

$$A(\sigma_*, \lambda, \hat{\alpha}) = M(\sigma_*)_{\square} - D(\sigma_*) \cdot \mathbf{1}_{d \times d} \cdot D(\hat{\alpha}),$$

где

$$M(\sigma_*)_{\square} = \begin{pmatrix} m_{11}^{\sigma_*} & \dots & m_{1d}^{\sigma_*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{d1}^{\sigma_*} & \dots & m_{dd}^{\sigma_*} \end{pmatrix}$$

— верхний по диагонали $(d \times d)$ -блок матрицы (7.5);

$$D(\sigma_*) = \begin{pmatrix} m_{1,d+1}^{\sigma_*} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{2,d+1}^{\sigma_*} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{d,d+1}^{\sigma_*} \end{pmatrix}$$

и

$$D(\hat{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_{d+1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2}{\alpha_{d+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha_d}{\alpha_{d+1}} \end{pmatrix}$$

— диагональные матрицы;

$$\mathbf{1}_{d \times d} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

— $(d \times d)$ -матрица, состоящая из одних единиц.

Предложение 7.3. Множество характеристических корней матрицы $A(\sigma_*, \lambda, \hat{\alpha})$ совпадает с множеством корней унимодулярной матрицы $M(\sigma_*)$ (7.5), исключая вещественный корень λ_α из (7.1).

Доказательство. Это непосредственно вытекает из того факта, что аффинные преобразования с матрицами $A(\sigma_*, \lambda, \hat{\alpha})$ и $M(\sigma_*)$ связаны проекцией (7.4). \square

§8. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

8.1. Предельный аппроксимационный симплекс. Определим

$$S\Xi_* = (S\mathfrak{S}_*)^{\mathbb{N}} \tag{8.1}$$

как множество всех бесконечных последовательностей

$$\sigma_* = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots\},$$

состоящих из элементов σ_{*i} полугруппы специализаций $S\mathfrak{S}_*$, определенной в (6.15). Элементы σ_{*i} представляют собою перестановки базисных векторов или специализации дифференцирований.

Пусть $u \subset \angle \mathbf{S}$ – унимодулярный базис с условием (2.11); и пусть для него определен $\mathbf{s} = \varphi(u)$ – аппроксимационный симплекс из (3.2), т. е. все $(d+1)$ -ые координаты векторов базиса $u_1, \dots, u_d, u_{d+1} \in u$ ненулевые.

Используя представления (6.3) и (6.11), полагаем

$$u^{[\sigma_*]_n} = ((u^{\sigma_{*1}}) \dots)^{\sigma_{*n}}. \quad (8.2)$$

С помощью коммутативной диаграммы (3.5) представление (8.2) перенесем на аппроксимационный симплекс

$$\mathbf{s}^{[\sigma_*]_n} = ((\mathbf{s}^{\sigma_{*1}}) \dots)^{\sigma_{*n}}.$$

Получим монотонную последовательность

$$\mathbf{s}^{[\sigma_*]_0} \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_1} \supseteq \dots \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_n} \supseteq \dots, \quad (8.3)$$

состоящую из производных аппроксимационных симплексов. Из свойства монотонности производных симплексов (8.3) вытекает существование *пределного аппроксимационного симплекса*

$$\mathbf{s}^{\sigma_*} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathbf{s}^{[\sigma_*]_n}. \quad (8.4)$$

Его размерности в общем случае могут быть любыми в промежутке

$$0 \leq \dim \mathbf{s}^{\sigma_*} \leq d-1.$$

В предельном случае $\dim \mathbf{s}^{\sigma_*} = 0$ будем иметь

$$\mathbf{s}^{\sigma_*} = \{\hat{\alpha}\}, \quad (8.5)$$

где вектор $\hat{\alpha} = (\alpha, 1)$ принадлежит конусу $\angle \mathbf{S}$ из (2.6); и, значит, точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ имеет координаты

$$\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_d \geq 0.$$

8.2. Представление точек через специализации. Если выполняется условие (8.5), то скажем, что бесконечная последовательность

спациализаций σ_* из (8.1) представляет точку α . Для этого факта введем обозначение

$$\sigma_*|_{u \rightarrow \alpha}. \quad (8.6)$$

Заметим, что в определении (8.6) участвует пара: последовательность спациализаций σ_* и унимодулярный базис $u \subset \angle \mathbf{S}$; сама же по себе последовательность σ_* не может представлять никакую точку α . Таким образом, если $\sigma_*|_{u \rightarrow \alpha}$, то последовательность включений (8.3) допускает следующее расширение

$$\mathbf{s}^{[\sigma_*]_0} \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_1} \supseteq \dots \supseteq \mathbf{s}^{[\sigma_*]_n} \supseteq \dots \supseteq \{\alpha\}. \quad (8.7)$$

Начиная с этого места возвращаем к ситуации (4.4), когда качестве унимодулярного базиса $u = e$ выбирался единичный базис (2.4). При этом будем предполагать выполнеными условия (4.3).

8.3. Периодические последовательности специализаций. Далее ограничимся чисто периодическими последовательностями специализаций

$$\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\}, \quad (8.8)$$

состоящих из бесконечного повторения некоторого отрезка

$$\sigma_{*,\text{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}. \quad (8.9)$$

Назовем p *периодом* последовательности σ_* , если это наименьшее число, обладающее свойством (8.8). Обозначим подмножество чисто периодических последовательностей (8.8) из $(S\mathfrak{S}_*)^{\mathbb{N}}$ как $(S\mathfrak{S}_*)_{\text{per}}^{\mathbb{N}}$.

Замечание 8.1. По аналогии с обычными цепными дробями [22] (случай размерности $d = 1$) естественно возникает задача, кроме (8.8), рассмотреть и *периодические* последовательности

$$\sigma_* = [{}^0\sigma_*; \sigma_{*,\text{per}}] = \{{}^0\sigma_*; \sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\}$$

с произвольным *предпериодом*

$${}^0\sigma_* = \{{}^0\sigma_{*1}, {}^0\sigma_{*2}, \dots, {}^0\sigma_{*p_0}\}.$$

Решить указанную задачу можно методом, изложенным в [1, 18], и теми новыми методами, которые будут изложены в дальнейшем.

8.4. Снятие и подъем специализаций. Пусть $\sigma^{k_1, k_2} = \{k_1, k_2\}$ – элементарное сочетание из \mathfrak{S} ; и $\sigma_*^{k_1, k_2} = v_{k_1}^{k_1, k_2}$ или $v_{k_2}^{k_1, k_2}$ – две его возможные специализации (1.8). На этом множестве элементарных сочетаний введем две операции:

1) *снятие специализации*

$$\sigma_*^{k_1, k_2} \downarrow \sigma^{k_1, k_2}; \quad (8.10)$$

2) *подъем специализации*

$$\sigma^{k_1, k_2} \uparrow_* \sigma_*^{k_1, k_2}. \quad (8.11)$$

В последнем случае – с обязательным указанием специализации $* = k_1$ или k_2 .

Перенесем поэлементно операции (8.10), (8.11) на полугруппы дифференцирований $S\mathfrak{S}$ (6.14) и специализаций $S\mathfrak{S}_*$ (6.15), состоящих соответственно из конечных последовательностей $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ и $\sigma_* = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*n}\}$. Если $\sigma_i = s \in S$ является перестановкой, то условимся, что указанные операции действуют на них как тождественные преобразования.

Далее нас будут интересовать бесконечные последовательности из $S\Xi_*$. Пусть $\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}]$ – периодическая последовательность специализаций из (8.8). Тогда с помощью операции (8.10) с нее можно снять специализации

$$\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}] \downarrow \sigma = [\sigma_{\text{per}}] \quad (8.12)$$

и получить простую периодическую последовательность дифференцирований σ из $S\mathfrak{S}$. Чтобы совершить обратную операцию, воспользуемся замечанием 6.1. Например, это можно сделать, если задан центрированный базис $u_{\hat{\alpha}}$ (см. (6.4)):

$$\{\sigma, u_{\hat{\alpha}}\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_{u_{\hat{\alpha}}}. \quad (8.13)$$

В обозначениях (8.11) связь (8.13) запишется как

$$\sigma = [\sigma_{\text{per}}] \uparrow_{u_{\hat{\alpha}}} \sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}].$$

Пусть в качестве унимодулярного базиса $u = e$ выбран единичный базис (2.4), $\sigma_{*,\text{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}$ – некоторый период специализаций (8.9), удовлетворяющий условиям (4.3); и пусть

$$M(\sigma_{*,\text{per}}) = M(\sigma_{*p}) \cdot \dots \cdot M(\sigma_{*1}) \quad (8.14)$$

– определенная в (6.16) матрица относительно e . Назовем $M(\sigma_{*,\text{per}})$ *матрицей периода* для последовательности специализаций $\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}]$ из (8.8).

Лемма 8.1. *Пусть $M(\sigma_{*,\text{per}})$ имеет собственный левый вектор*

$$\hat{\alpha} M(\sigma_{*,\text{per}}) = \lambda_{d+1} \hat{\alpha}, \quad (8.15)$$

содержащийся

$$\widehat{\alpha} = (\alpha, 1) \in \angle \mathbf{S} \quad (8.16)$$

в конусе (2.6), где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – иррациональная точка (2.13). Тогда справедливы утверждения.

1) Собственное значение λ_{d+1} является вещественным, удовлетворяющим неравенству

$$\lambda_{d+1} > 1. \quad (8.17)$$

2) Центрированный единичный базис $e|_{\widehat{\alpha}}$ допускает последовательность специализаций $\sigma_{*,\text{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}$:

$$\sigma_{\text{per}} \uparrow_{e_{\widehat{\alpha}}} \sigma_{*,\text{per}}, \quad (8.18)$$

а также – соответствующую бесконечную периодическую последовательность $\sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}] = \{\sigma_{*,\text{per}}, \dots, \sigma_{*,\text{per}}, \dots\}$ из (8.9):

$$\sigma = [\sigma_{\text{per}}] \uparrow_{e_{\widehat{\alpha}}} \sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}]. \quad (8.19)$$

Слева в (8.18) и (8.19) указаны снятые специализации (см. (8.12))

$$\sigma_{*,\text{per}} \downarrow \sigma_{\text{per}}, \quad \sigma_* = [\sigma_{*,\text{per}}] \downarrow \sigma = [\sigma_{\text{per}}]. \quad (8.20)$$

Доказательство. 1) В [21] было доказано неравенство $\lambda_{d+1} \geq 1$. Поскольку по условию $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – иррациональная точка, то отсюда будет вытекать неравенство (8.17).

2) Из иррациональности α и условия (8.16) вытекают неравенства $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_d > 0$ (см. (2.14)), из которых выводим включение

$$\widehat{\alpha}_{\geq 0} \subset \angle^{\text{int}} e \quad (8.21)$$

луча $\widehat{\alpha}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \widehat{\alpha}$ во внутренность конуса (2.16). Действуя на последнее включение матрицей (8.14) и принимая во внимание, что указанный луч собственный (8.15), получаем еще одно включение

$$\widehat{\alpha}_{\geq 0} M(\sigma_{*,\text{per}}) \subset \angle^{\text{int}} M(\sigma_{*,\text{per}}) e, \quad (8.22)$$

где $\widehat{\alpha}_{\geq 0}$ – строка (8.16), а e – столбец (2.4). При переходе от (8.21) к (8.22) была использована связь между специализациями и их матрицами (6.8).

Далее воспользуемся монотонностью операции дифференцирования. Получаем цепочку включений:

$$\begin{aligned} \angle^{\text{int}} e &\supset \angle^{\text{int}} M(\sigma_{*1}) e \supset \angle^{\text{int}} M(\sigma_{*2}) \cdot M(\sigma_{*1}) e \supset \dots \supset \\ &\supset \angle^{\text{int}} M(\sigma_{*p}) \cdot \dots \cdot M(\sigma_{*1}) e = \angle^{\text{int}} M(\sigma_{*,\text{per}}) e. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Утверждение (8.18) вытекает из включений (8.21)–(8.23). Снова применяя монотонность операции дифференцирования, получаем цепочку включений для самих периодов:

$$\angle^{\text{int}} e \supset \angle^{\text{int}} M(\sigma_{*,\text{per}})e \supset \dots \supset \angle^{\text{int}} M(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot \dots \cdot M(\sigma_{*,\text{per}})e \supset \dots \quad (8.24)$$

Теперь второе утверждение (8.19) вытекает из определения (8.20) и включений (8.23)–(8.24). \square

8.5. Достаточные условия представимости точки.

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия леммы 8.1. И пусть матрица периода $M(\sigma_{*,\text{per}})$ из (8.14) имеет простой спектр $\lambda_1, \dots, \lambda_d, \lambda_{d+1}$, где λ_{d+1} – вещественное собственное значение (8.15), удовлетворяющее неравенству (8.17), а остальные собственные значения, отличные от λ_{d+1} , удовлетворяют неравенствам*

$$|\lambda_i| < 1 \quad \text{для } i = 1, \dots, d. \quad (8.25)$$

Тогда последовательность специализаций σ_* представляет точку α :

$$\sigma_*|_e \rightarrow \alpha.$$

Доказательство. Пусть $\sigma_*^{[\sigma]_{np}} = \underbrace{\sigma_{*,\text{per}} \cdot \dots \cdot \sigma_{*,\text{per}}}_{n\text{-раз}}$ – последовательность периода специализаций (8.9) и

$$M^n(\sigma_{*,\text{per}}) = M(\sigma_*^{[\sigma]_{np}}) = \underbrace{M(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot \dots \cdot M(\sigma_{*,\text{per}})}_{n\text{-раз}}$$

– отвечающая ей матрица (8.14). Из определения радиусов аппроксимационных симплексов (4.7) вытекает

$$\begin{aligned} \varrho_s^{[\sigma]_{np}} &= \max_{1 \leq i, i' \leq d+1} \left| \frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} - \frac{P_{i'}^{[\sigma]_{np}}}{Q_{i'}^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 \\ &\leq \max_{1 \leq i, i' \leq d+1} \left(\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 + \left| \alpha - \frac{P_{i'}^{[\sigma]_{np}}}{Q_{i'}^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 \right). \end{aligned}$$

Пусть $np \geq n_0$, где граница n_0 определена в (4.3). Тогда используя доказанную выше оценку и теорему 4.1, получаем для радиуса $\varrho_s^{[\sigma]_{np}}$

неравенство

$$\varrho_{\mathbf{s}}^{[\sigma]_{np}} \leq \max_{1 \leq i, i' \leq d+1} \left(\frac{\varrho_{\max}^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} + \frac{\varrho_{\max}^{[\sigma]_{np}}}{Q_{i'}^{[\sigma]_{np}}} \right) \leq \frac{2\varrho_{\max}^{[\sigma]_{np}}}{Q_{\min}^{[\sigma]_{np}}}, \quad (8.26)$$

где обозначили

$$Q_{\min}^{[\sigma]_{np}} = \min_{1 \leq i \leq d+1} Q_i^{[\sigma]_{np}}.$$

Теперь нужно оценить радиус $\varrho_{\max}^{[\sigma]_{np}}$ производной звезды $v^{[\sigma]_{np}}$, определенный в (4.6). Согласно условию (8.25) имеем

$$\lambda_{\max} = \max_{1 \leq i \leq d} |\lambda_i| < 1. \quad (8.27)$$

Объединяя предложения 7.1 и 7.3, приходим к неравенству

$$\varrho_{\max}^{[\sigma]_{np}} \leq c_{M(\sigma_{*,\text{per}})} \lambda_{\max}^n \quad (8.28)$$

с константой $c_{M(\sigma_{*,\text{per}})} > 0$, не зависящей от степени n .

Подставляя (8.28) в неравенство (8.26), получаем нужную оценку

$$\varrho_{\mathbf{s}}^{[\sigma]_{np}} \leq c \frac{\lambda_{\max}^n}{Q_{\min}^{[\sigma]_{np}}},$$

где константа $c = 2c_{M(\sigma_{*,\text{per}})} > 0$ также не зависит от степени n . Согласно (8.27) имеем $\lambda_{\max} < 1$, а знаменатели $Q_{\min}^{[\sigma]_{np}}$ – натуральные числа, поэтому радиусы аппроксимационных симплексов

$$\varrho_{\mathbf{s}}^{[\sigma]_{np}} \rightarrow 0 \quad (8.29)$$

при $n \rightarrow +\infty$. Сочетая свойство монотонности аппроксимационных симплексов (8.7) со свойством (8.29), приходим к равенству

$$\mathbf{s}^{\sigma_*} = \{\hat{\alpha}\}, \quad (8.30)$$

где \mathbf{s}^{σ_*} – предельный аппроксимационный симплекс (8.4). Из (8.30) и определения (8.6) вытекает утверждение теоремы. \square

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы 8.1, и пусть*

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}, \dots, \frac{P_{id}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \right),$$

где $i = 1, \dots, d$, $d + 1$ – рациональные вершины $[\sigma]_n$ -производного симплекса $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ из (4.2). Тогда $P_i^{[\sigma]_n}/Q_i^{[\sigma]_n}$ являются подходящими дробями для вещественной иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ (2.13):

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \rightarrow \alpha$$

при $n \rightarrow +\infty$; при этом имеют место неравенства

$$\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_n p}}{Q_i^{[\sigma]_n p}} \right|_1 \leq c \frac{\lambda_{\max}^n}{Q_i^{[\sigma]_n p}}$$

для всех $pr \geq n_0$, где граница n_0 определена в (4.3). Здесь $c = c_{M(\sigma_{*,\text{per}})}$ – положительная константа (8.28), не зависящая от степени n , $0 < \lambda_{\max} < 1$ – собственное значение (8.27).

Доказательство. Это следует из (8.28) и теорем 4.1, 8.1. \square

8.6. Критерии представимости точки. Рассмотрим последовательность унимодулярных базисов

$$e^n = M^n(\sigma_{*,\text{per}}) \cdot e = \begin{pmatrix} e_1^n \\ \vdots \\ e_d^n \\ e_{d+1}^n \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$, где e – столбец (2.4) и $M(\sigma_{*,\text{per}})$ – матрица периода (8.14). Для этих базисов рассмотрим проекции

$$\text{pr}_{e_i^n} e^n = \begin{pmatrix} \text{pr}_{e_i^n} e_1^n \\ \vdots \\ \text{pr}_{e_i^n} e_d^n \\ \text{pr}_{e_i^n} e_{d+1}^n \end{pmatrix}, \quad (8.32)$$

где $\text{pr}_{e_i^n}$ обозначает проекцию на ядерную гиперплоскость \mathbf{K}_0 (2.3) вдоль вектора e_i^n ($i = 1, \dots, d, d + 1$), указанного в столбце (8.31). Выделим особо проекции начального единичного базиса

$$\text{pr}_{e_i^n} e = \begin{pmatrix} \text{pr}_{e_i^n} e_1 \\ \vdots \\ \text{pr}_{e_i^n} e_d \\ \text{pr}_{e_i^n} e_{d+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \\ \text{pr}_{e_i^n} e_{d+1} \end{pmatrix}. \quad (8.33)$$

Последнее равенство в (8.33) вытекает из определения (2.5).

Определим размеры вееров проекций $\text{pr}_{e_i^n} e^n$ и $\text{pr}_{e_i^n} e$ через

$$\varrho(\text{pr}_{e_*^n} e^n) = \max_{\substack{1 \leq i \leq d+1 \\ 1 \leq i' \leq d+1}} |\text{pr}_{e_i^n} e_{i'}^n|_1 \quad \text{и} \quad \varrho(\text{pr}_{e_*^n} e) = \max_{\substack{1 \leq i \leq d+1 \\ 1 \leq i' \leq d+1}} |\text{pr}_{e_i^n} e_{i'}|_1.$$

Заметим, что вееры проекций (8.32) и (8.33) не образуют звезды (см. определение 1.1).

Приведем два критерия выполнимости матрицей периода $M(\sigma_{*,\text{per}})$ из (8.14) условий теоремы 8.1.

Критерий 8.1. *Выполняется неравенство*

$$\varrho(\text{pr}_{e_*^n} e^n) < \varrho(\text{pr}_{e_*^n} e) \quad (8.34)$$

для некоторой степени $n \geq 1$.

Критерий 8.2. *Имеет место последовательность неравенств*

$$\varrho(\text{pr}_{e_*^{n_1}} e^{n_1}) > \varrho(\text{pr}_{e_*^{n_2}} e^{n_2}) > \dots > \varrho(\text{pr}_{e_*^{n_k}} e^{n_k})$$

для последовательности степеней $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ некоторой конечной длины $k > 1$.

Замечание 8.2. 1. Вычисления упрощаются, если прежде, чем находить собственные значения матрицы периода $M(\sigma_{*,\text{per}})$, провести проверку данной матрицы на выполнение ею одного из критериев 8.1 или 8.2.

2. Собственно для этого нет необходимости даже вычислять саму матрицу $M(\sigma_{*,\text{per}})$, т. к. вееры проекций (8.32) и (8.33) можно находить напрямую, сразу используя период специализаций

$$\sigma_{*,\text{per}} = \{\sigma_{*1}, \sigma_{*2}, \dots, \sigma_{*p}\}$$

из (8.9).

§9. ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ

9.1. Вещественный случай. Для размерности $d = 2$ выберем последовательность

$$\sigma_* = \sigma_{*6} \cdot \dots \cdot \sigma_{*1}, \quad (9.1)$$

состоящую из следующих специализаций дифференцирований (6.2)

$$\sigma_{*1} = \sigma_3^{1,3}, \quad \sigma_{*2} = \sigma_3^{2,3}, \quad \sigma_{*3} = \sigma_1^{1,3}, \quad \sigma_{*4} = \sigma_2^{2,3}, \quad \sigma_{*5} = \sigma_1^{1,3}, \quad \sigma_{*6} = \sigma_2^{1,2}$$

из полугруппы специализаций \mathfrak{S}_* . Для последовательности (9.1) определим матрицу

$$M(\sigma_*) = M(\sigma_{*6}) \cdot \dots \cdot M(\sigma_{*1}),$$

где элементарные матрицы $M(\sigma_{*i})$ определены в (6.9), (6.10). По правилу (6.16) вычисляем унимодулярную матрицу

$$M(\sigma_*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Замечание 9.1. Прежде, чем продолжить вычисления и находить собственные значения выбранной матрицы периода $M(\sigma_*)$, проводим проверку данной матрицы на выполнение ею критерия 8.1. С помощью приема, указанного в замечании 8.2 (2), получаем значение наименьшей степени $n = 3$, удовлетворяющей неравенству (8.34). Таким образом, критерий 8.1 выполняется.

Прежде всего, для матрицы (9.2) находим характеристический многочлен

$$\text{ch}(x) = x^3 - 7x^2 + 6x - 1,$$

неприводимый над полем \mathbb{Q} . Его характеристические корни –

$$\lambda_1 \approx 0.222, \quad \lambda_2 \approx 0.744, \quad \lambda_3 \approx 6.039. \quad (9.3)$$

Для указанной матрицы $M(\sigma_*)$ и ее наибольшего характеристического корня λ_3 левым собственным вектором будет

$$\hat{\alpha} = (\alpha, 1), \quad \text{где } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \quad (9.4)$$

(см. определение (8.15)) с координатами

$$\alpha_1 = 2\lambda_3^2 + 13\lambda_3 - 4 \approx 1.635, \quad \alpha_2 = \lambda_3^2 + 6\lambda_3 + 1 \approx 1.198. \quad (9.5)$$

Собственный вектор (9.4) содержится в конусе $\angle \mathbf{S}$ из (2.6). При этом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ является иррациональной точкой (2.13).

Далее, используя формулу (8.31), записываем

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cdot M^n(\sigma_*) = M^n(\sigma_*) = \begin{pmatrix} P_{11}^{[\sigma]_{np}} & P_{12}^{[\sigma]_{np}} & Q_1^{[\sigma]_{np}} \\ P_{21}^{[\sigma]_{np}} & P_{22}^{[\sigma]_{np}} & Q_2^{[\sigma]_{np}} \\ P_{31}^{[\sigma]_{np}} & P_{32}^{[\sigma]_{np}} & Q_3^{[\sigma]_{np}} \end{pmatrix},$$

где слева записана (3×3) -матрица со строками из единичных векторов (2.5), а матрица справа по теореме 8.2 состоит из числителей и

знаменателей подходящих дробей

$$\frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}}, \frac{P_{i2}^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (9.6)$$

Здесь $p = 6$ – период матрицы (9.2).

Тогда дроби (9.6) по теореме 8.2 являются подходящими дробями для вещественной иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ из (9.5); при этом имеют место неравенства

$$\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 \leq c \frac{\lambda_2^n}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9.7)$$

для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ Здесь $c = c_{M(\sigma_*)}$ – положительная константа (8.28), не зависящая от степени n , $\lambda_2 < 0.7$ – второе собственное значение из (9.3).

Если использовать наибольшее собственное значение λ_3 из (9.3), то методом рекуррентных соотношений из [18] неравенство (9.7) можно записать в более удобном виде

$$\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 \leq \frac{c}{(Q_{\max}^{[\sigma]_n})^{1+\theta}}, \quad (9.8)$$

где

$$\theta = -\frac{\ln \lambda_2}{\ln \lambda_3} \approx 0.1642. \quad (9.9)$$

Степень (9.9) служит нижней границей $\theta \leq \eta$ для диофантовой экспоненты из теоремы 5.1.

9.2. Комплексный случай. Пусть снова размерность $d = 2$. Теперь выберем другую последовательность

$$\sigma_* = \sigma_{*4} \cdot \sigma_{*3} \cdot \sigma_{*2} \cdot \sigma_{*1} \quad (9.10)$$

из расширенной полугруппы специализаций $S\mathfrak{S}_*$, определенной равенством (6.15). Здесь

$$\sigma_{*1} = \sigma_2^{2,3}, \quad \sigma_{*2} = \sigma_1^{1,2}, \quad \sigma_{*3} = \sigma_3^{3,1}, \quad \sigma_{*4} = s = (123), \quad (9.11)$$

где $\sigma_{*4} = s = (123)$ – циклическая перестановка из $S = S_3$ (роль ее будет ясна из дальнейшего). Для последовательности (9.10) определим матрицу

$$M(\sigma_*) = M(\sigma_{*4}) \cdot \dots \cdot M(\sigma_{*1}), \quad (9.12)$$

где элементарные матрицы $M(\sigma_{*i})$ определены соответственно в (6.9), (6.10) и (6.13). По правилу (6.16) вычисляем унимодулярную матрицу

$$M(\sigma_*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (9.13)$$

Замечание 9.2. Снова пользуемся приемом, указанным в замечании 9.1. Ситуация повторяется, как в случае (9.1): значение наименьшей степени, удовлетворяющей неравенству (8.34), будет $n = 3$. Следовательно, критерий 8.1 выполняется.

Для матрицы $M(\sigma_*)$ характеристическим многочленом будет

$$\text{ch}(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1 \quad (9.14)$$

— многочлен, неприводимый над полем \mathbb{Q} и имеющий два комплексно сопряженных характеристических корня λ_1 и $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$:

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| \approx 0.479, \quad \lambda_3 \approx 4.365. \quad (9.15)$$

Таким образом, критерий 8.1 снова сработал (см. замечание 9.2). Из вида характеристического многочлена (9.14) следуют равенства

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \lambda_3^{1/2}. \quad (9.16)$$

Сделаем важное наблюдение.

Замечание 9.3. Из сравнения корней в вещественном (9.3) и комплексном случаях (9.15) легко увидеть роль циклической перестановки $\sigma_{*4} = s = (123)$ в последовательности специализаций (9.10), (9.11): указанная перестановка выполняет функцию вращения унимодулярного базиса $u = u_{\hat{\alpha}}$ из (4.14), что приводит к появлению комплексных корней у соответствующего характеристического многочлена (9.14). Как следствие, аффинное отображение $A = A(\sigma_*, \lambda, \hat{\alpha})$ (7.3) пространства \mathbb{R}^3 из гиперболического отображения с матрицей (9.2) переходит в эллиптическое отображение с матрицей (9.13).

Для матрицы (9.13) и ее наибольшего характеристического корня λ_3 левым собственным вектором будет

$$\hat{\alpha} = (\alpha, 1), \quad \text{где } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \quad (9.17)$$

с координатами

$$\alpha_1 = \lambda_3^2 + 4\lambda_3 - 1 \approx 0.594, \quad \alpha_2 = \lambda_3^2 + 5\lambda_3 - 2 \approx 0.771. \quad (9.18)$$

Собственный вектор (9.17) содержится в конусе $\angle \mathbf{S}$ из (2.6). При этом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ является иррациональной точкой.

По формуле (8.31) матрица

$$M^n(\sigma_*) = \begin{pmatrix} P_{11}^{[\sigma]_{np}} & P_{12}^{[\sigma]_{np}} & Q_1^{[\sigma]_{np}} \\ P_{21}^{[\sigma]_{np}} & P_{22}^{[\sigma]_{np}} & Q_2^{[\sigma]_{np}} \\ P_{31}^{[\sigma]_{np}} & P_{32}^{[\sigma]_{np}} & Q_3^{[\sigma]_{np}} \end{pmatrix}$$

состоит из числителей и знаменателей подходящих дробей

$$\frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_{np}}}{Q_{i1}^{[\sigma]_{np}}}, \frac{P_{i2}^{[\sigma]_{np}}}{Q_{i2}^{[\sigma]_{np}}} \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9.19)$$

для вещественной точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ из (9.17). Здесь $p = 4$ – период матрицы (9.12).

Согласно теореме 8.2 дроби (9.19) являются подходящими дробями для вещественной иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ из (9.18); при этом имеют место неравенства

$$\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 \leq c \frac{|\lambda_2|^n}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9.20)$$

для всех $n = 1, 2, 3, \dots$. Здесь $|\lambda_2| < 0.4$. Поступая аналогично выводу неравенства (9.7), переписываем неравенство (9.20) в виде

$$\left| \alpha - \frac{P_i^{[\sigma]_{np}}}{Q_i^{[\sigma]_{np}}} \right|_1 \leq \frac{c}{(Q_{\max}^{[\sigma]_n})^{1+\theta}}, \quad (9.21)$$

где, согласно равенствам (9.16), степень

$$\theta = -\frac{\ln |\lambda_2|}{\ln \lambda_3} = 0.5 \quad (9.22)$$

служит нижней границей для диофантовой экспоненты η в (5.5).

Замечание 9.4. Сравним два полученных аппроксимационных неравенства (9.8), (9.21) и участвующие в них степени (9.9), (9.22):

$$\theta \approx 0.1642 \quad \text{и} \quad \theta = 0.5. \quad (9.23)$$

Первая степень из (9.23) отвечает гиперболическому отображению, а вторая, большая, – эллиптическому отображению $A = A(\sigma_*, \lambda, \widehat{\alpha})$ в (7.3). В первом случае (см. (9.3)) происходит разброс собственных значений $\lambda_1 \approx 0.222$, $\lambda_2 \approx 0.744$, а во втором (см. (9.16)) – их концентрация

$|\lambda_1| = |\lambda_2|$ около среднего значения $\lambda_3^{1/2}$. Скорость же приближения в неравенствах (9.8), (9.21) определяется средними собственными значениями, в нашем случае – это λ_2 .

9.3. Приближения \mathcal{MSK} -алгоритмом. Возвращаемся к \mathcal{MSK} -алгоритму, приведенному в теореме 4.1, и сравним его эффективность с методом периодических цепных дробей из двух предыдущих пунктов.

Оставаясь в размерности $d = 2$, в качестве целевой функции $\varphi(v)$ выберем

$$\varphi(v) = |v_1|_1 + |v_2|_1 + |v_3|_1 \quad (9.24)$$

– сумму длин лучей звезды $v = \{v_1, v_2, v_3\}$. Функция (9.24) удовлетворяет требованиям (5.1) и (5.2). Для такой функции константа $c = 1$ в неравенстве (5.2).

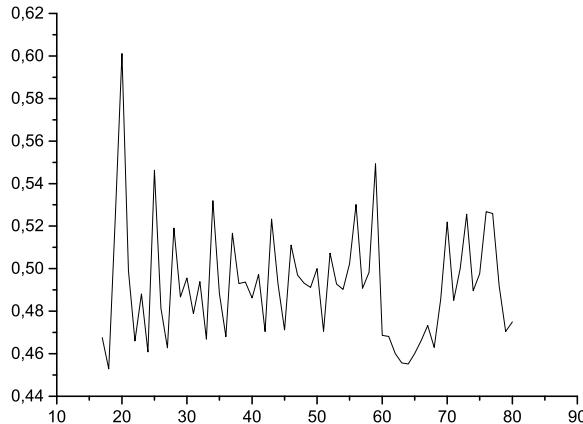


Рис. 1. График локальных φ -экспонент η_n для гиперболической кубической точки α .

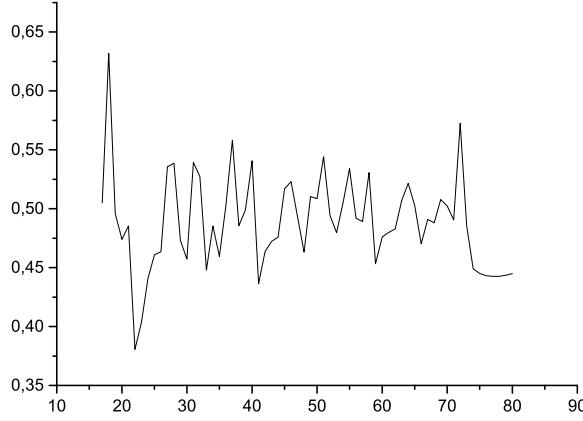


Рис. 2. График локальных φ -экспонент η_n для эллиптической кубической точки α .

Определенная в (5.4) диофанта экспонента $\eta = \eta(\alpha, \varphi)$ имеет в большей степени чисто теоретическое значение. При работе с числовыми данными удобнее опираться на *локальные φ -экспоненты*

$$\eta_n = \eta_n(\alpha, \varphi) = \frac{-\ln \varphi(r^{[\sigma]_n})}{\ln Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \quad (9.25)$$

с индексами $n = 1, 2, 3, \dots$. На рис. 1.1 и рис. 2.2 по горизонтальной оси отложены значения последовательных итераций $1 \leq n \leq 10^2$, а по вертикальной – соответствующие значения локальных экспонент $\eta_n = \eta_n(\alpha, \varphi)$ из (9.25) с ограничением на знаменатели

$$Q_i^{[\sigma]_n} \geq 10^3 \quad (9.26)$$

подходящих двумерных дробей

$$\frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}, \frac{P_{i2}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} \right) \quad (i = 1, 2, 3)$$

в неравенствах (4.12) и (5.5). Условие (9.26) введено для гарантирования выполнения условия (4.3).

Ниже приведены наименьшие, средние и наибольшие значения локальных φ -экспонент η_n (9.25), изображенных на рис. 1 и рис. 2:

Таблица. Значения локальных φ -экспонент η_n

$\eta_{\min} \approx 0.453$	$\eta_{\text{mid}} \approx 0.491$	$\eta_{\max} \approx 0.601$
$\eta_{\min} \approx 0.381$	$\eta_{\text{mid}} \approx 0.487$	$\eta_{\max} \approx 0.632$

В первой строке указаны значения для кубической точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ из (9.5), а во второй – соответственно из (9.18). Сравнивая экспоненты θ из (9.9), (9.22) со средними значениями экспонент η_{mid} из таблицы:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{mid}} &> 0.49, \quad \theta > 0.16, \\ \eta_{\text{mid}} &> 0.48, \quad \theta = 0.5, \end{aligned}$$

приходим к следующим выводам.

Выводы

1. Модифицированный симплекс-ядерный алгоритм (\mathcal{MSK} -алгоритм из п. 4) является универсальным.
2. Его средние значения η_{mid} локальных φ -экспонент η_n близки к оптимальным для алгебраических иррациональностей (для кубических – это $\theta = 0.5$, см., например, [23]).
3. \mathcal{MSK} -алгоритм не различает разложения в периодические цепные дроби для алгебраических иррациональностей гиперболического и эллиптического типов (см. замечание 9.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби*. — Современные проблемы математики, МИАН **299** (2017), 1-20.
2. В. И. Арнольд, *Цепные дроби*. Москва, МЦНМО, 2002.
3. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*. Москва, Наука, 1972.
4. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
5. V. Brun, *En generalisation av Kjedebroken*. — Skrifter utgit av Videnskapsselskapet Kristiania. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse **6** (1919–1920).
6. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres*. — In Treizieme congres des mathematiciens scandinaves, tenu a Helsinki 18-23 aout (1957), 45–64. Mercators Tryckeri, Helsinki, 1958.

7. S. Labbe, *3-dimensional Continued Fraction Algorithms Cheat Sheets*. — arXiv:1511.08399v1, November 2015.
8. R. Mönkemeyer, *Über Fareynetze in n Dimensionen*. — Math. Nachr. **11** (1963), 321–344.
9. D. Grabiner, *Farey nets and multidimensional continued fractions*. — Monatsh. Math. **114** (1992), no. 1, 35–61.
10. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions*. — Nordisk Nat. Tidskr. **9** (1961), 37–43.
11. A. Nogueira, The three-dimensional Poincare continued fraction algorithm. — Israel J. Math. **90** (1995), no. 1-3, 373–401.
12. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction*. Oxford Univ. Press, New York, 2000.
13. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms*. — arXiv:1508.07814, August 2015.
14. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexité linéaire*. — October 2015. DynA3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th, 2015.
15. M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, *A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface*. — Experemental Mathematics **23** (2014), no. 4, 390–410.
16. О. Н. Карпенков, *О нахождении периодов геометрических цепных дробей двумерных алгебраических гиперболических операторов*. — Мат. заметки **88** (2010), no. 1, 30–42.
17. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения кубических ирациональностей в цепные дроби*. — Современные проблемы математики. МИАН (2016), вып. 23, 41–66.
18. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби*. — Владимирский государственный университет (2019), <https://vk.com/id589973164>.
19. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
20. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
21. В. Г. Журавлев, *Самоподобия и подстановки ядерных разбиений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **523** (2023), 83–120.
22. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*. 4-ое издание, Москва, Наука, 1978.
23. Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений*. Москва, изд-во иностранной литературы, 1961.

Zhuravlev V. G. Modified simplex-karion algorithm and decomposition into multidimensional periodic continued fractions.

A modified version of the simplex-karion algorithm for the decomposition of real numbers into multidimensional continued fractions and the

application of this algorithm to the decomposition of algebraic irrationalities into periodic continued fractions are considered. The necessary and sufficient conditions on the sequence of differential specializations for their representation of a certain set of real numbers are given.

Владимирский государственный университет
пр. Строителей, 11,

600024, Владимир, Россия

E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 21 апреля 2025 г.